Altri esempi di soluzioni grafiche di sistemi lineari – classe 2H
(con l'utilizzo del software Mathematica)

Un esercizio proposto in classe

$$\begin{cases} 3\cdot x+5\cdot y=1 \\ 4\cdot x+y=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cdot y=1-3\cdot x \\ y=7-4\cdot x \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{1}{5} \\ y=-4\cdot x+7 \end{cases}$$

avendo isolato la y, possiamo ricavare quindi questa coordinata in funzione della x (coordinata libera) e quindi passiamo al metodo grafico, dopo aver calcolato alcune coordinate delle rette. Utilizzando un sistema CAS come Mathematica scopriamo che la tabulazione della funzione $y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{1}{5}$ risulta:

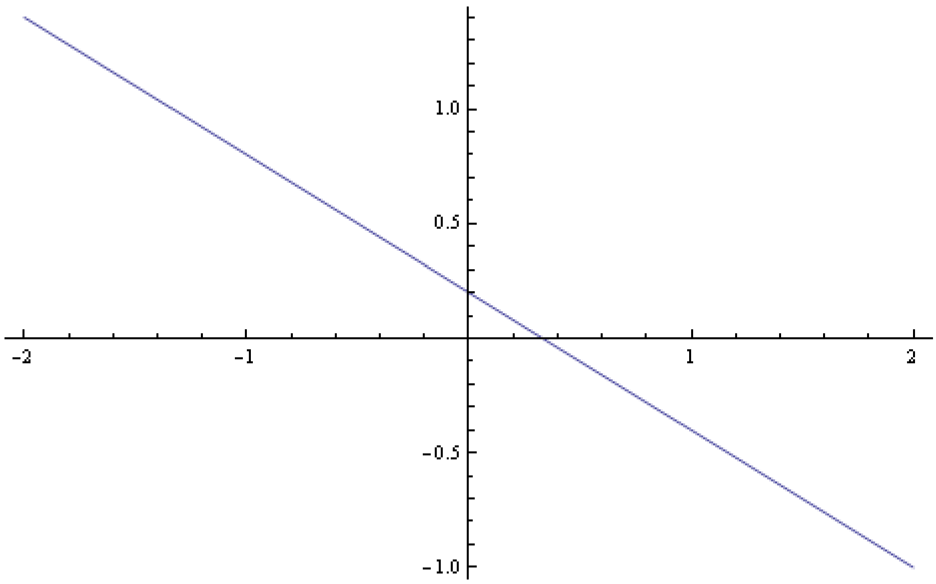
In[5]:= `Table[{x, -(3 / 5) * x + (1 / 5)}, {x, 10}]`

$$\left\{\left\{1,-\frac{2}{5}\right\},\{2,-1\},\left\{3,-\frac{8}{5}\right\},\left\{4,-\frac{11}{5}\right\},\left\{5,-\frac{14}{5}\right\},\left\{6,-\frac{17}{5}\right\},\{7,-4\},\left\{8,-\frac{23}{5}\right\},\left\{9,-\frac{26}{5}\right\},\left\{10,-\frac{29}{5}\right\}\right\}$$

da cui si nota che i due punti {2,1} e {7,-4} sono di coordinate intere (a differenza degli altri) e quindi più facilmente tracciabili.
Il disegno della retta *y = -(3/5)*x + (1/5)* risulta sempre tracciato con Mathematica:

In[15]:= `Plot[-(3 / 5) * x + (1 / 5), {x, -2, 2}]`

Out[15]=



Operando analogamente per l'altra equazione (altra retta), si ottiene la seguente tabulazione (tutta con numeri interi):

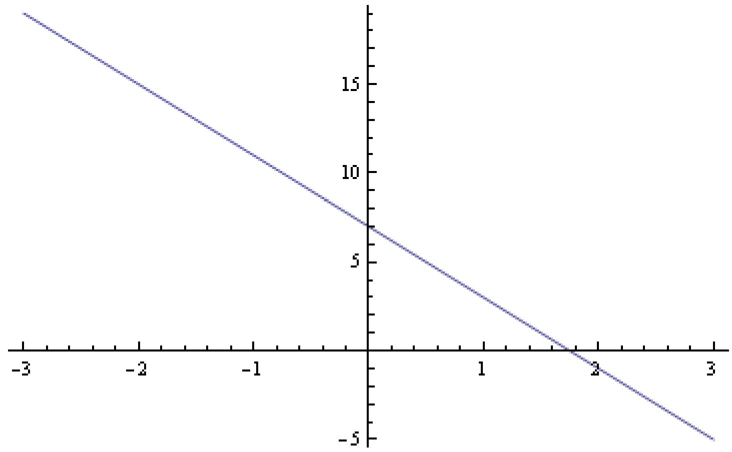
In[16]:= `Table[{x, -4 * x + 7}, {x, 10}]`

Out[16]= {{1, 3}, {2, -1}, {3, -5}, {4, -9}, {5, -13}, {6, -17}, {7, -21}, {8, -25}, {9, -29}, {10, -33}}

E il grafico della retta risulta:

```
In[20]:= Plot[{-4*x + 7}, {x, -3, 3}]
```

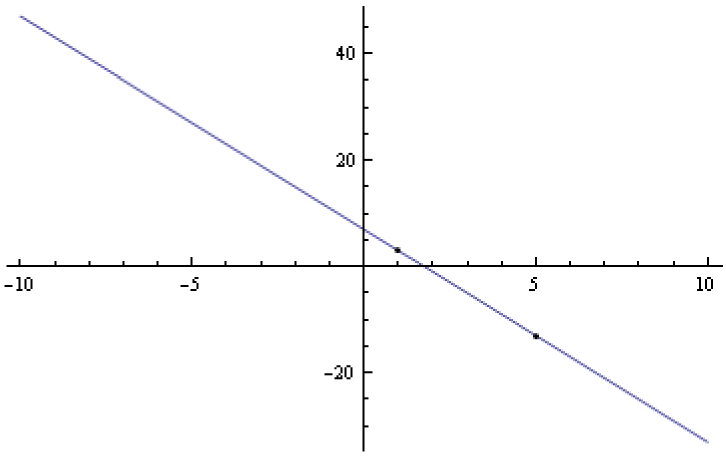
Out[20]=



Si può ovviamente constatare che, per esempio, presa una coppia qualunque di punti le relative rette passano per essi:

```
In[31]:= Plot[{-4*x + 7}, {x, -10, 10}, Epilog → Point[{{1, 3}, {5, -13}}]]
```

Out[31]=



nella figura vediamo infatti rappresentati i punti (1,3) e (5, -13) e la retta rappresentata dalla equazione $y=-4\cdot x+7$ che passa attraverso essi.

L'intersezione delle due rette in questo caso risulta analiticamente:

```
In[52]:= Solve[{y == -4 x + 7 , y == -(3/5)*x + (1/5)}, {x, y}]

Out[52]= {{x → 2, y → -1}}
```

Consideriamo le due rette assieme e combiniamole in un grafico; scegliamo per tracciarle i punti (1,3) e (5, -13) per y = -4 * x + 7 e i punti (2,-1) e (7,-4) per y = -(3/5)*x + (1/5)*:*

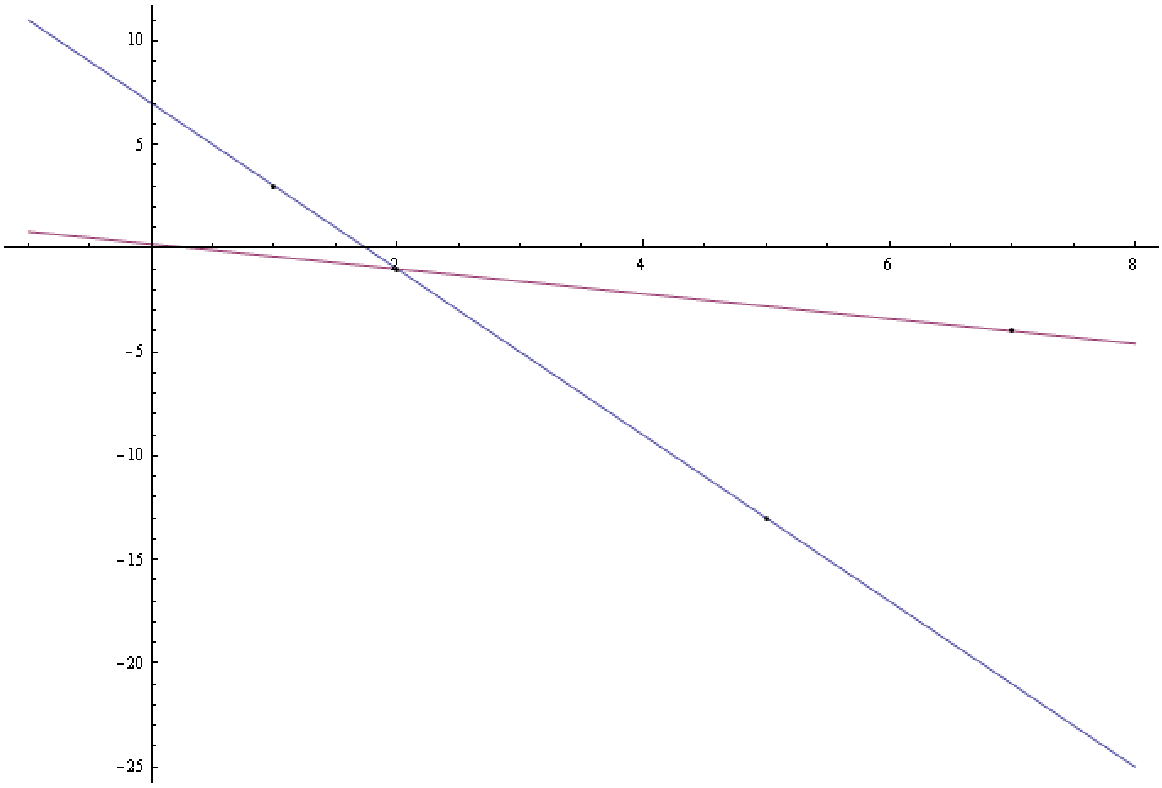
e infatti graficamente risulta :

```
In[64]:= f[x_] := -4 x + 7

In[66]:= f2[x_] := -(3 / 5) * x + (1 / 5)

In[80]:= Plot[{f[x], f2[x]}, {x, -1, 8} , Epilog → Point[{{1, f[1]}, {5, f[5]}, {2, f2[2]}, {7, f2[7]}}]]
```

Out[80]=



come si può vedere il punto di intersezione cade proprio in 2,1.
Affrontiamo un altro sistema:

$$\begin{cases} 3\cdot x+5\cdot y=30 \\ 3\cdot x-2\cdot y=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cdot y=30-3\cdot x \\ -2\cdot y=-12-3\cdot x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{30-3\cdot x}{5} \\ y = \dfrac{-12-3\cdot x}{-2} \end{cases}$$

La tabulazione dei punti con Mathematica è semplice e risulta:

```
In[84]:= Table[{x, (30 - 3 x) / 5}, {x, -5, 5}]
```

Out[84]= $\left\{\{-5, 9\}, \left\{-4, \frac{42}{5}\right\}, \left\{-3, \frac{39}{5}\right\}, \left\{-2, \frac{36}{5}\right\}, \left\{-1, \frac{33}{5}\right\}, \{0, 6\}, \left\{1, \frac{27}{5}\right\}, \left\{2, \frac{24}{5}\right\}, \left\{3, \frac{21}{5}\right\}, \left\{4, \frac{18}{5}\right\}, \{5, 3\}\right\}$

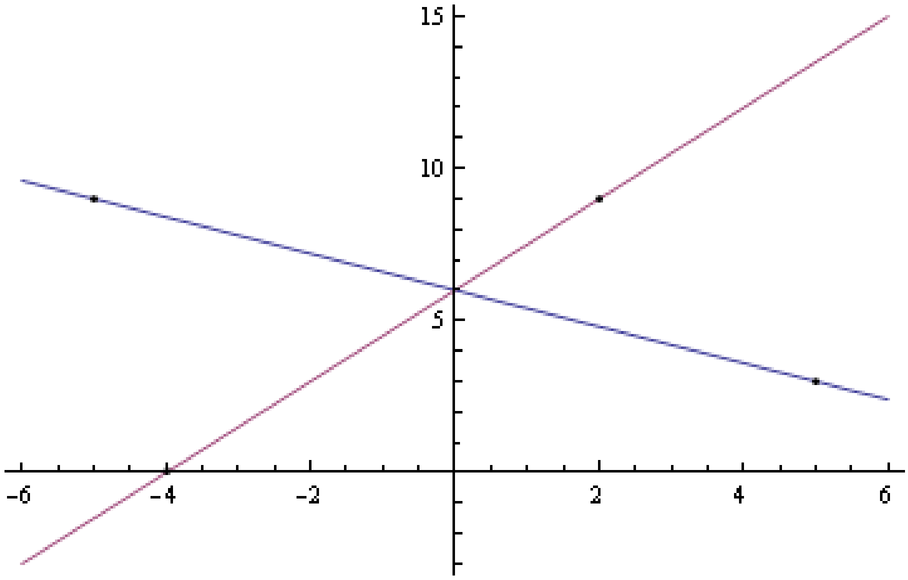
```
In[92]:= Table[{x, (-12 - 3 x) / -2}, {x, -5, 5}]
```

Out[92]= $\left\{\left\{-5, -\frac{3}{2}\right\}, \{-4, 0\}, \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}, \{-2, 3\}, \left\{-1, \frac{9}{2}\right\}, \{0, 6\}, \left\{1, \frac{15}{2}\right\}, \{2, 9\}, \left\{3, \frac{21}{2}\right\}, \{4, 12\}, \left\{5, \frac{27}{2}\right\}\right\}$

La soluzione grafica di questo sistema di equazioni con Mathematica risulta la seguente, con una evidente soluzione nel punto (0,6):

```
In[102]:= Plot[{(30 - 3 x) / 5, (-12 - 3 x) / -2}, {x, -6, 6},
   Epilog → Point[{{-5, 9}, {5, 3}, {-4, 0}, {2, 9}}]]
```

Out[102]=



Viceversa vediamo ora come risulta il grafico di una soluzione in un caso particolare.
Sappiamo infatti dalla teoria che esistono 3 casi:

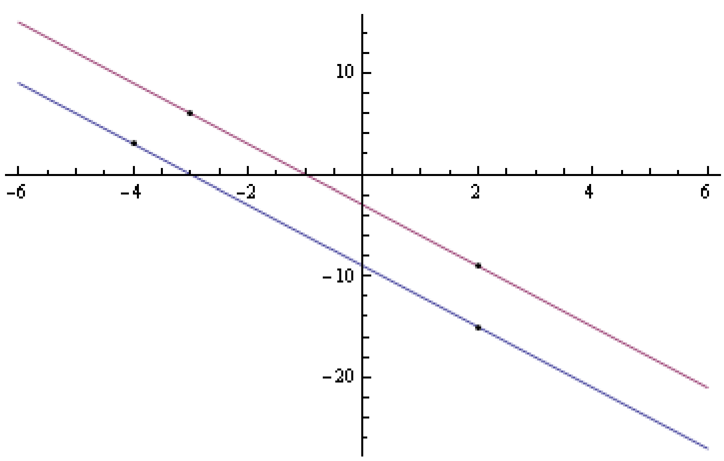
- Soluzione determinata (le due rette sono incidenti in un punto)
- Soluzione indeterminata (le due rette sono sovrapposte)
- Soluzione impossibile (le due rette sono parallele e non sovrapposte)

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}\cdot y=3 \\ 3\cdot x+y=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\cdot x+y=9 \\ y=-3-3\cdot x \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-3\cdot x-9 \\ y=-3\cdot x-3 \end{cases}$$

```
Plot[{-3 x - 9, -3 x - 3}, {x, -6, 6},
 Epilog → Point[{{-4, 3}, {2, -15}, {-3, 6}, {2, -9}}]]
```

In questo caso le due rette sono parallele (coefficiente angolare (m) uguale), ma non sono sovrapposte (q diverso).
Il grafico delle due rette risulta infatti:

Out[124]=



La tabulazione dei punti risulta (nella forma {x, y}):

```
In[105]:= Table[{x, -3 x - 9}, {x, -5, 5}]

{{-5, 6}, {-4, 3}, {-3, 0}, {-2, -3}, {-1, -6},
 {0, -9}, {1, -12}, {2, -15}, {3, -18}, {4, -21}, {5, -24}}

In[111]:= Table[{x, -3 x - 3}, {x, -5, 5}]

{{-5, 12}, {-4, 9}, {-3, 6}, {-2, 3}, {-1, 0},
 {0, -3}, {1, -6}, {2, -9}, {3, -12}, {4, -15}, {5, -18}}
```

Mathematica (se ve ne fosse ancora bisogno) conferma che il sistema non ha soluzioni e quindi le rette sono effettivamente parallele e non coincidenti:

```
In[122]:= Solve[-3 x - 9 == -3 x - 3]

Out[122]= {}
```

Ne segue che il sistema è impossibile.