Soluzione dei sistemi lineari con metodo grafico – classe 2H

(con esempi di utilizzo del software open source multipiattaforma Geogebra e calcolatrice grafica Texas Instruments TI-89)

Metodo grafico

Il metodo grafico per la risoluzione dei sistemi lineari, a differenza dei metodi algebrici si basa ad un certo punto, per la risoluzione del sistema lineare sul tracciamento di due rette, le cui equazioni sono espresse dalle due equazioni del sistema lineare stesso.
Possiamo essere sicuri che si tratta sempre di rette, nella rappresentazione grafica, proprio perché le equazioni di tipo lineare (tutti i termini in x e y sono alla prima potenza), descrivono questo tipo di luogo geometrico, ossia una linea, una retta (linea infinita).
Risolvere il sistema in questo senso vuol dire trovare l'intersezione delle due rette che sono presenti nel sistema. Il motivo è presto spiegato.
La soluzione del sistema è tale perchè riesce a soddisfare entrambe le equazioni del sistema.
Ora pensiamo cosa rappresenta la prima retta (chiamiamola r); essa è associata alla prima equazione e rappresenta tutti i punti (infiniti) che soddisfano la prima equazione del sistema.
Lo stesso dicasi per la seconda retta e la seconda equazione. Perchè i punti sono quelli su una retta ? Ciò si può constatare direttamente seppur è noto dalla geometria analitica e dallo studio di funzioni, rami della matematica che non noti in seconda professionale.

Un esempio

Proviamo a prendere in considerazione un sistema e a svolgere un ragionamento particolareggiato:

$$\begin{cases} x+2\cdot y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Il sistema non è in forma normale. Tuttavia allo scopo di studiare le curve espresse dalle due equazioni è più utile portare entrambe le funzioni in una forma y = f(x), ossia y = <una espressione in x e termini noti>. Effettuiamo questa operazione, che in un sistema lineare è sempre possibile.

$$\begin{cases} 2\cdot y=8-x \\ -y=-x-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{(8-x)}{2} & (r) \\ y=x+1 & (s) \end{cases}$$

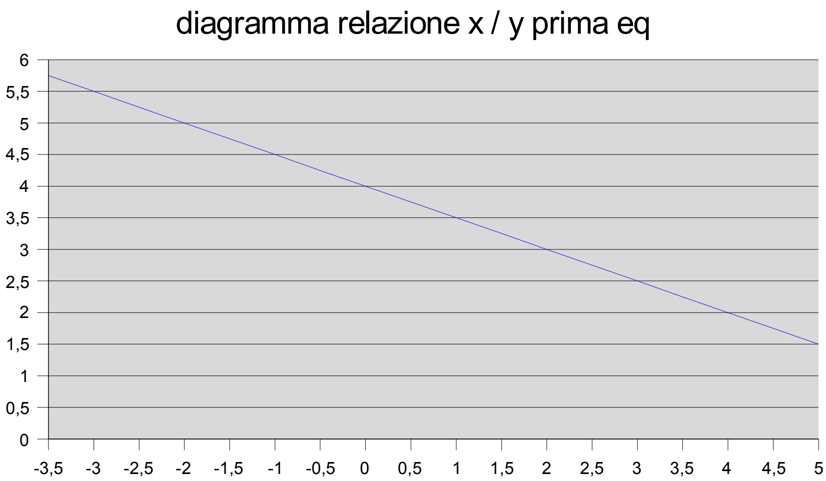
Da questo momento è possibile ragionare in modo più comodo sulle due equazioni.

Consideriamo una delle due. Considerato x un valore indipendente notiamo subito che y non può esserlo altrettanto, nel senso che resta determinata da x, ossia ha un ben preciso valore quando si fissa il valore di x. Questo è vero per entrambe le equazioni.

Si tratta ora di capire che tipo di luogo geometrico, ossia di curva (se di curva si tratta), è descritto dalle relazioni del nostro sistema.

Ricaviamo una serie di punti determinati dalla prima equazione (r):

X	Y
-4	6
-3,5	5,75
-3	5,5
-2,5	5,25
-2	5
-1,5	4,75
-1	4,5
-0,5	4,25
0	4
0,5	3,75
1	3,5
1,5	3,25
2	3
2,5	2,75
3	2,5
3,5	2,25
4	2
4,5	1,75
5	1,5



ne risulta un andamento della relazione tra x e y che risulta di tipo lineare, come mostrato dall'interpolazione effettuata da OpenOffice Calc.

Analoga cosa accade con la seconda equazione. Le relazioni quindi esprimono linee rette. Per ogni x solo una certa y che cade sul punto appartenente alla retta verifica l'equazione prevista.

Il sistema nel suo complesso, nel caso generale, quindi non può che essere soddisfatto per un determinato punto nel che cade in una certa specifica x e specifica y, ove entrambe le equazioni sono verificate, e questo unico punto è l'intersezione delle due rette.

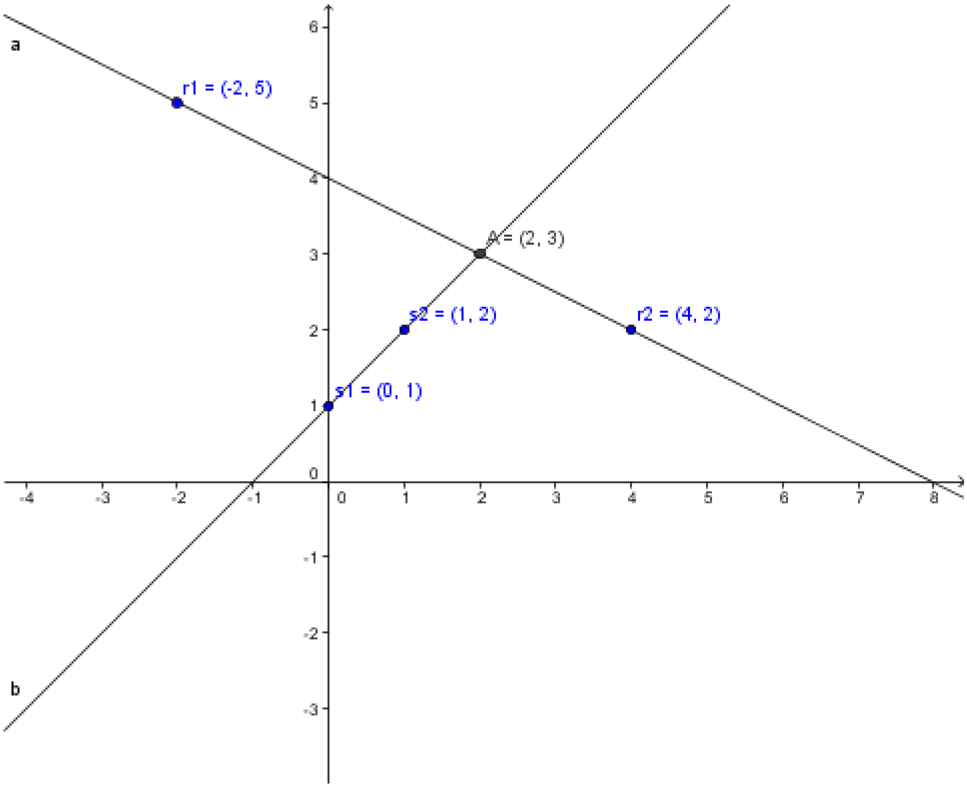
Soluzione geometrica

Utilizziamo ora il sw open sorce Geogebra ( ) per dare risposta a quale sia la soluzione di questo sistema lineare, utilizzando sistemi grafici.

Per individuare le due rette che si incrociano basta individuare una coppia di punti. Prendiamo quindi due punti a caso nella lista sopra per la prima equazione e calcoliamo due punti anche per la seconda, ad esempio: s1 = (0, 1), s2 = (1, 2)

A questo punto possiamo tirare anche la seconda retta e determinare l'intersezione.

Per la prima equazione (r) possiamo scegliere i punti r1 = (-2, 5) e r2 = (4, 2). Tramite Geogebra segnamo i punti sul piano cartesiano elettronico, specificando le relative coordinate e poi imponiamo a Geogebra di disegnare la retta che passa da r1 e r2.
Per la seconda equazione procediamo nella identica maniera. Ora entrambe le rette sono segnate sul piano cartesiano di Geogebra. Un apposita opzione ci permette di individuare il punto di incrocio delle due rette e quindi di disegnare e determinare il punto di intersezione.
Riporto qui il risultato finale derivante dal metodo grafico applicato tramite Geogebra:



E quindi si conclude graficamente che la soluzione del sistema è data dal punto (2, 3).
Quindi dalla coppia x = 2 e y = 3.
Constatiamo se ciò è vero:

$$\begin{cases} y=\dfrac{(8-x)}{2} \\ y=x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3=\dfrac{(8-2)}{2} \\ 3=2+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3=\dfrac{6}{2}=3 \\ 3=3 \end{cases}$$

Essendo le due uguaglianze verificate, quella indicata è veramente la soluzione (unica) del sistema.

Un esercizio

Svolgo qui uno degli esercizi già affrontati a lezione dalla professoressa. Il sistema è:

$$\begin{cases} 3\cdot x-2\cdot y=-12 \\ x+2\cdot y=4 \end{cases} \quad \text{....isoliamo la y....} \quad \begin{cases} -2\cdot y=-12-3\cdot x \\ 2\cdot y=4-x \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{3\cdot x+12}{2} & (r) \\ y=\dfrac{4-x}{2} & (s) \end{cases}$$

Individuiamo qualche punto che soddisfano le equazioni lineari:

Sulla prima r si possono individuare le coppie $x=0, \quad y=\frac{3\cdot 0+12}{2}=\frac{0+12}{2}=\frac{12}{2}=6$ e

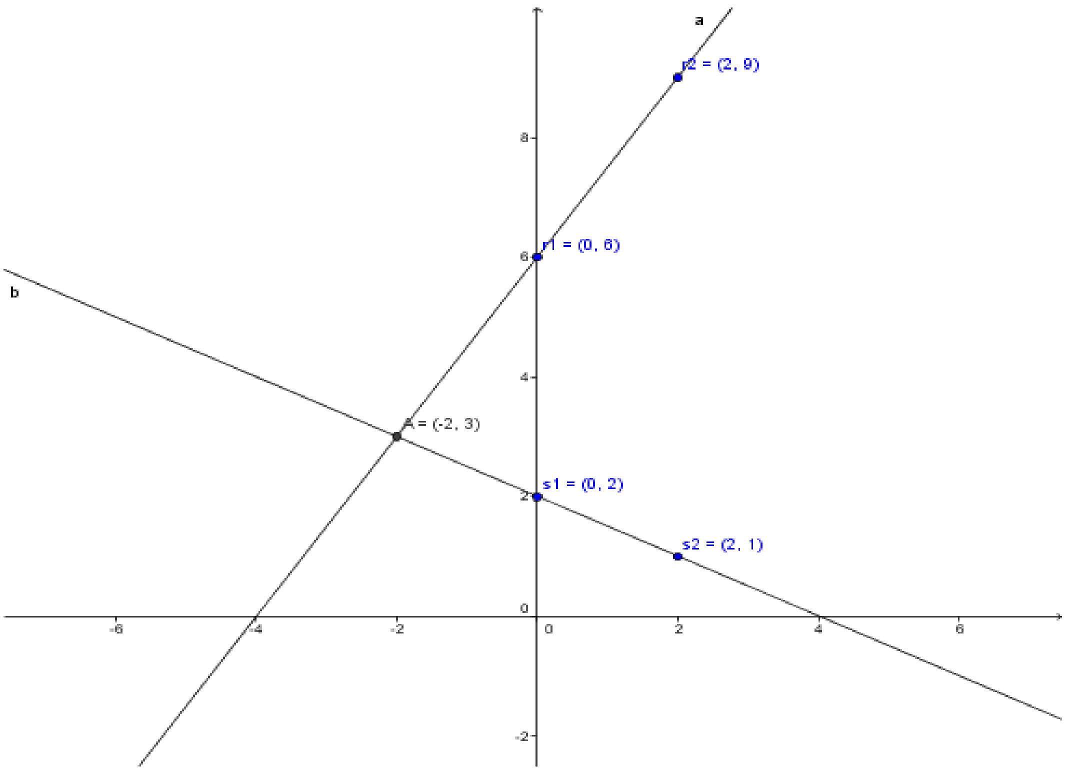
$x=2, \quad y=\frac{3\cdot 2+12}{2}=\frac{6+12}{2}=\frac{18}{2}= 9$ e per la (s) $x=0, \quad y=\frac{4-0}{2}=\frac{4}{2}= 2$ e

$x=2, \quad y=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}= 1$

Quindi i punti per il tracciamento delle rette risultano:

r1 (0,6) r2 (2, 9) e s1 (0, 2) s2 (2, 1)

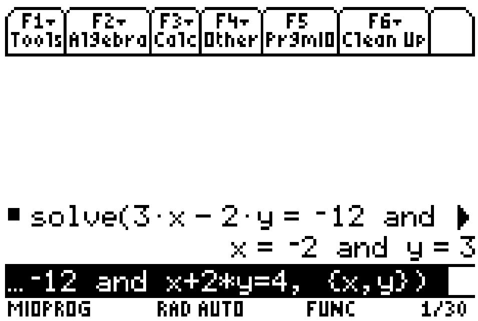
Inserendo opportunamente in Geogebra questi punti e individuando le rette che passano per essi si ottiene il grafico che descrive la soluzione:



essa risulta essere il punto qui indicato con A (-2,3), per cui la soluzione del sistema è x = -2 e y = 3.

Una possibile verifica, sempre con mezzi di calcolo informatico potrebbe essere utilizzare uno strumento di calcolo simbolico (CAS) come la potente calcolatrice scientifico-simbolica Texas TI-89. La funzione solve (presente in modo analogo anche in altri programmi con CAS) permette di trovare immediatamente le soluzioni di un sistema (anche non lineare).

Nel nostro caso dunque risulta:

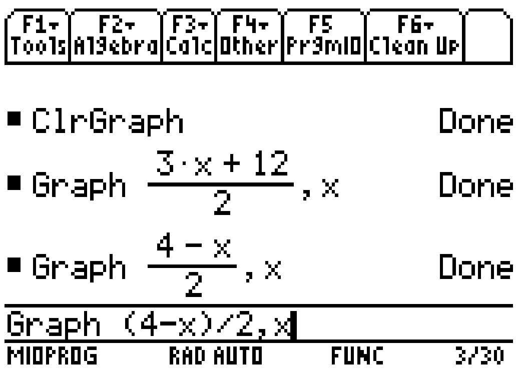


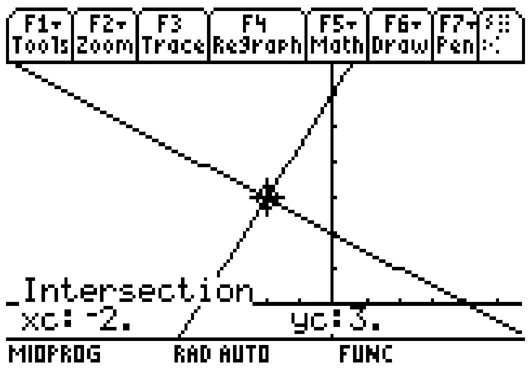
(L'istruzione per risolvere il problema risulta:

solve(3*x – 2*y = -12 and x + 2*y = 4, {x,y}))

come si vede anche la calcolatrice TI-89 rende lo stesso valore da noi trovato con Geogebra, ossia x = -2 e y = 3.

Di queste rette è possibile sulla Ti-89 plottare le stesse (essendo una calcolatrice grafica); ciò è possibile con il comando Graph applicato ad ognuna delle due rette r e s:





e successivamente trovare anche l'intersezione dei due oggetti grafici grazie ad un apposito comando (Intersection) della TI-89.