Esempi di sitemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile) - classe 2H

Svolgimento di un sistema lineare (in forma omogenea), con il metodo del confronto:

$$\begin{cases} 5\cdot x+2\cdot y=-1 \\ 4\cdot x-y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cdot x=-2\cdot y-1 \\ 4\cdot x=y+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5\cdot x}{5}=\dfrac{(-2\cdot y-1)}{5} \\ \dfrac{4\cdot x}{4}=\dfrac{(y+3)}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{(-2\cdot y-1)}{5} \\ x=\dfrac{(y+3)}{4} \end{cases} \qquad \frac{(y+3)}{4}=\frac{(-2\cdot y-1)}{5} \qquad \frac{(5\cdot y+15)}{20}=\frac{(-8\cdot y-4)}{20}$$

$$\frac{(5\cdot y+15)}{20}\cdot 20=\frac{(-8\cdot y-4)}{20}\cdot 20 \qquad 5\cdot y+15=-8\cdot y-4 \qquad 5\cdot y+8\cdot y=-15-4$$

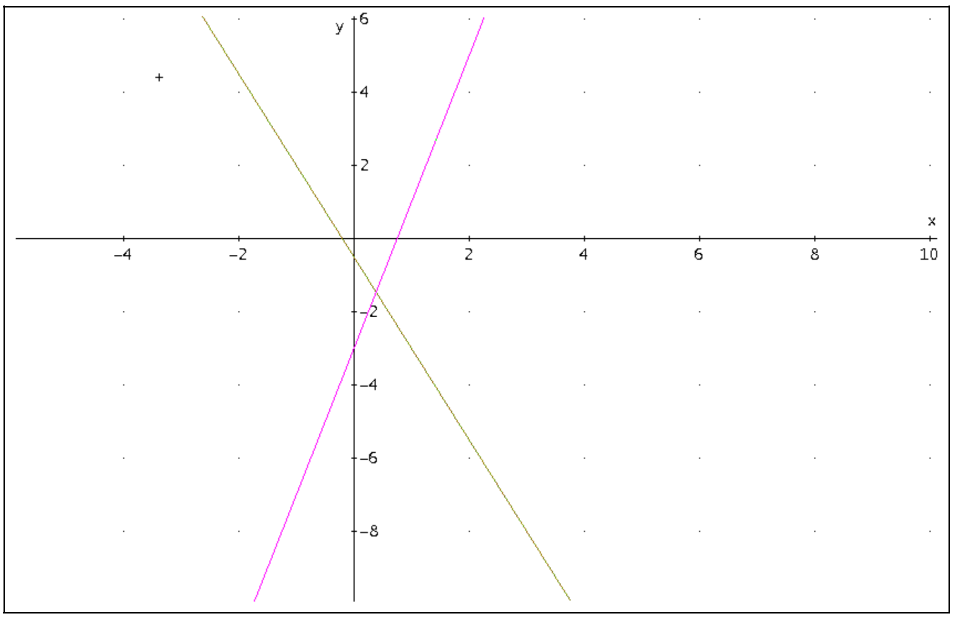
$$13\cdot y=-19 \qquad y=-\left(\frac{19}{13}\right)$$

$$x=\frac{\left(-\left(\frac{19}{13}\right)+3\right)}{4} \qquad x=\frac{\dfrac{(-19+39)}{13}}{4} \qquad x=\frac{\dfrac{20}{13}}{4} \qquad x=\frac{20}{13}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x=\frac{5}{13}$$

Significato geometrico del sistema appena risolto

Il diagramma qui a lato rappresenta le due rette che si può dimostrare che sono definite dalle due equazioni del sistema. Il punto di intersezione è appunto la soluzione del sistema trovata.



Queste considerazioni sono del tutto valide per qualunque sistema lineare a due equazioni in due incognite.
Consideriamo ora il sistema:

$$\begin{cases} 4\cdot x+2\cdot y=9-3\cdot y \\ -5+2\cdot x+3\cdot x-y=4-6\cdot y+x \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\cdot x+5\cdot y=9 \\ +2\cdot x+3\cdot x-x-y+6\cdot y=4+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cdot x+5\cdot y=9 \\ 4\cdot x+5\cdot y=9 \end{cases}$$

Le due equazioni del sistema risultano identiche; quando questo avviene siamo sicuramente di fronte ad una soluzione indeterminata del sistema, ossia siccome le due equazioni coincidono esse sono equivalenti ad una sola (una non aggiunge nulla all'altra), per cui il sistema equivale all'unica equazione:

$$4\cdot x+5\cdot y=9$$

è noto che non è possibile risolvere in modo determinato una sola equazione in due variabili indipendenti x e y, ragion per cui sono infatti infinite le soluzioni che soddisfano questa equazione.
C'è a questo punto da chiedersi se esse siano tutti valori possibili di x e y.
Questo è escluso; proviamo infatti, ad esempio un qualunque valore x = 3, y = 4, risulta:

$$4\cdot x+5\cdot y=9 \quad \rightarrow \quad 4\cdot 3+5\cdot 4=9 \quad \rightarrow \quad 12+20\neq 9$$

quindi per alcuni valori di x e y l'equazione non risulta verificata. In realtà i valori di x e y che soddisfano l'equazione lineare sono si infiniti, ma non sono tutti i valori possibili di x e y, ma solo certi valori legati fra loro (appunto dall'equazione stessa).

In ogni caso il sistema indeterminato fornisce in ultima analisi, come spiegato a lezione, una forma di tipo 0 = 0. Confermiamolo:

$$\begin{cases} 4\cdot x+5\cdot y=9 \\ 4\cdot x+5\cdot y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4} \\ 4\cdot x+5\cdot y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4} \\ \dfrac{4\cdot(9-5\cdot y)}{4}+5\cdot y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4} \\ (9-5\cdot y)+5\cdot y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4} \\ 9=9 \end{cases}$$

e sottraendo 9 da tutte e due i membri della seconda equazione:

$$\begin{cases} x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4} \\ 9-9=9-9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4} \\ 0=0 \end{cases}$$

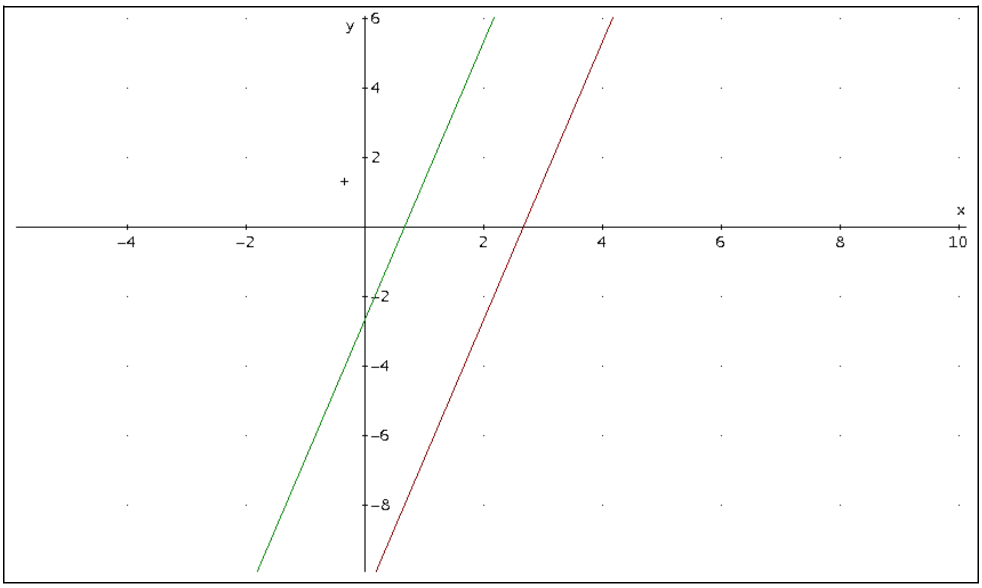
quindi sostituendo la x precedentemente trovata non è stato possibile determinare la y, o meglio una y. In realtà ciò equivale a dire che $\forall y$ và bene, basta che la x soddisfi la condizione: $x=\dfrac{(9-5\cdot y)}{4}$

In questo caso ricollegandosi a quanto detto prima relativamente al significato geometrico delle equazioni lineari in x e y, le due equazioni sono identiche, ossia le due rette (linee dritte infinite) sono sovrapposte una all'altra, e quindi tutti i punti di queste rette sono soluzione, perché intersezione tra le due.

Infine un esempio di sistema impossibile:

$$\begin{cases} 3\cdot x-\dfrac{3}{4}\cdot y=2 \\ 4\cdot x-y-3=5-\dfrac{1}{4}\cdot y+x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\cdot x-\dfrac{3}{4}\cdot y=2 \\ 4\cdot x-x-y-\dfrac{1}{4}\cdot y=5+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\cdot x-\dfrac{3}{4}\cdot y=2 \\ 3\cdot x-\dfrac{3}{4}\cdot y=8 \end{cases}$$

si può già notare come le due equazioni del sistema portato in forma canonica siano analoghe nella parte a sinistra e differenti nella costante a destra. Ciò indica già che il sistema è impossibile (infatti non è possibile che la stessa equazione abbia due differenti risultati, vale a dire 2 e 8). In realtà geometricamente le equazioni di questo sistema corrispondono a due rette tra di loro parallele, e per questo esse non hanno alcun punto di incontro (quindi il sistema non ha soluzione, quindi è impossibile).
Questa situazione è indicata dal grafico delle rette corrispondenti alle equazioni sopra proposte. Già visivamente risulta chiaro che le due linee non hanno intersezioni.



Pur tuttavia rendiamo per rendere evidente anche numericamente che il sistema è impossibile svolgiamo ulteriormente i conti e isoliamo quindi la x in una delle due equazioni (metodo di sostituzione) :

$$\begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ 3\cdot x-\frac{3}{4}\cdot y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ 3\cdot(\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3})-\frac{3}{4}\cdot y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ (\frac{3}{4}\cdot y+2)-\frac{3}{4}\cdot y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ \dfrac{(3\cdot y+8)}{4}-\frac{3}{4}\cdot y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ \dfrac{((3\cdot y+8)-3\cdot y)}{4}=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ \dfrac{+8}{4}=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{(\frac{3}{4}\cdot y+2)}{3} \\ 2=8 \end{cases}$$

arrivati a questo punto si può constatare che l'uguaglianza 2 = 8 è comunque falsa, ossia mai verificata. In definitiva non esiste una y che soddisfi il sistema, e quindi non esiste di conseguenza neanche una x che lo soddisfi.
Il sistema è quindi impossibile.