

Linguaggio binario

Alfabeto

$$A = \{0,1\}$$

Parole

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...

Il linguaggio binario può essere usato come *sistema di codifica* di un insieme.

Esempio:

0	:	a_1
1	:	a_2
10	:	a_3
	:	.
	:	.

Il linguaggio binario può essere usato come sistema di numerazione.

Il sistema di numerazione binario è un sistema di numerazione *posizionale*.

Regola generale

Un numero N in base b è rappresentato da una sequenza di caratteri (cifre)

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

Il valore di N è dato da

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

con $b > 1$ e $0 \leq a_i < b$

Casi particolari

$$b = 10$$

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \times 1$$

$$a_i : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$b = 2$$

$$N = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0 \times 1$$

$$a_i : \{0, 1\}$$

bit : **binary digit** : cifra binaria : 0 o 1

Esempi

Il numero binario 101110 rappresenta il seguente numero N:

$$N = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0 = 46$$

Un numero binario rappresenta una somma di potenze di 2

Potenza di 2	32	16	8	4	2	1
Cifra binaria	1	0	1	1	1	0
Prodotto	32	0	8	4	2	0

Osservare che l'espressione di N potrebbe essere scritta così:

$$N = (((((1 \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 0$$

Proprietà

Una parola binaria di n bit permette di rappresentare i numeri interi \mathbf{N} che soddisfano alla seguente condizione:

$$0 \leq N \leq 2^n - 1$$

Inversamente, per rappresentare in binario un numero \mathbf{N} , occorrerà un numero di bit n dato da

$$n = \lceil \log_2 N \rceil$$

(n è il più piccolo intero maggiore di $\log_2 N$)

$$2^{n-1} \leq N < 2^n$$

Conversione dal sistema binario al sistema decimale

Algoritmo di conversione

- 1) Posizionarsi sulla sinistra del numero da convertire
- 2) Inizializzare N a 0
- 3) Leggere la cifra binaria che segue procedendo verso destra
- 4) Se non ci sono più cifre nel numero da convertire, allora fine della procedura
- 5) Moltiplicare N per 2 e sommare la cifra letta
- 6) Tornare al punto 3

Esempio:

1 0 1 1 1 0

cifra	N	$N \times 2$
	0	0
1	1	2
0	2	4
1	5	10
1	11	22
1	23	46
0	46	

Conversione dal sistema decimale al sistema binario

Un numero intero N può essere rappresentato come

$$N = q_0 \times 2 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < 2$$

Se $q_0 \geq 2$, si ha

$$q_0 = q_1 \times 2 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < 2$$

cioè

$$\begin{aligned} N &= (q_1 \times 2 + r_1) \times 2 + r_0 \\ &= q_1 \times 2^2 + r_1 \times 2 + r_0 \end{aligned}$$

Continuando a dividere per 2 i quozienti così ricavati, otteniamo:

$$N = r_n \times 2^n + r_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + r_2 \times 2^2 + r_1 \times 2^1 + r_0 \times 2^0$$

Di conseguenza

$$r_n r_{n-1} \dots r_2 r_1 r_0$$

costituisce la rappresentazione del numero N in base $b=2$. Le cifre della rappresentazione binaria si ottengono dunque prendendo i resti delle divisioni successive per 2 e disponendoli a cominciare dalla cifra meno significativa.

Esempio:

Si debba convertire $N=59$

$$\begin{array}{rcl} & 59 & \\ q_0 = & 29 & r_0 = 1 \\ q_1 = & 14 & r_1 = 1 \\ q_2 = & 7 & r_2 = 0 \\ q_3 = & 3 & r_3 = 1 \\ q_4 = & 1 & r_4 = 1 \\ q_5 = & 0 & r_5 = 1 \end{array}$$

Si ottiene il numero binario

111011

Rappresentazione esadecimale

Base $b = 16$

Alfabeto

$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$$

Il passaggio dal binario all'esadecimale si attua prendendo i bit (a partire da destra) a gruppi di 4 e sostituendoli con la corrispondente cifra esadecimale.

Ad esempio:

$$10111001_2 = B9_{16}$$

in quanto

$$\begin{array}{l} 1001_2 = 9_{16} \\ 1011_2 = B_{16} \end{array} \quad e$$

Analogamente, per la conversione inversa, ciascuna cifra esadecimale viene sostituita da una sequenza di 4 bit.

Binario b=2	Decimale b=10	Esadecimale b=16
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	10	A
1011	11	B
1100	12	C
1101	13	D
1110	14	E
1111	15	F

Aritmetica binaria

Somma

$$\begin{array}{r} 10010110 \\ + 11011010 \\ \hline 101110000 \end{array}$$

150_{10}
 218_{10}
 368_{10}

Sottrazione

$$\begin{array}{r} 101000 \\ - 011001 \\ \hline 001111 \end{array}$$

40_{10}
 -25_{10}
 15_{10}

Moltiplicazione

$$\begin{array}{r} 11010 \\ \times 101 \\ \hline 11010 \\ 00000 \\ 11010 \\ \hline 10000010 \end{array}$$

26_{10}
 5_{10}
 130_{10}