

# ANALISI RETICOLARE

## 3.8 I reticoli CPM E PERT

Il diagramma reticolare è una rappresentazione grafica della struttura del processo; nella sua forma classica esso assume la forma di un grafo orientato in cui gli archi rappresentano le attività necessarie al completamento del progetto i cui eventi iniziali e finali sono rappresentati dai nodi attraverso i quali le attività sono poste in reciproca relazione come mostrato in figura 3.34.

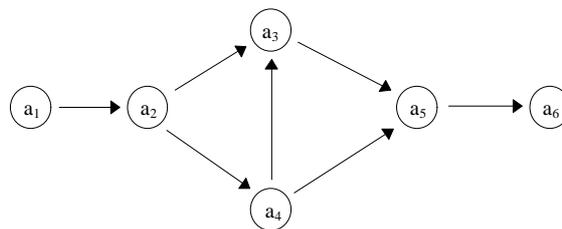


Fig. 3.34 *Struttura tipica della rappresentazione reticolare di un processo produttivo in cui gli archi rappresentano le attività e i nodi gli eventi iniziali e finali di queste.*

Le origini dell'analisi reticolare dei processi produttivi risalgono alla fine degli anni '50, quando furono sviluppati due procedimenti distinti che avevano però la medesima struttura logica.

Il primo denominato CPM (acronimo di Critical Path Method) comporta l'assegnazione di un'unica stima della durata delle attività, il secondo invece denominato PERT (da Program Evaluation and Review Technique) prevede l'uso di tre stime di durata (minima o ottimistica, media e massima o pessimistica).

Attraverso il primo procedimento si ottiene un'unica stima della durata totale della realizzazione mentre attraverso il secondo possono essere ricavate le stime della durata minima, della durata media e della durata massima.

L'approccio utilizzato nella tecnica PERT pur se più articolato ha però mostrato nel tempo gravi punti deboli di cui discuteremo in seguito; per questa ragione esso è stato via via abbandonato.

Tuttavia il nome PERT ha continuato a essere genericamente associato ai procedimenti di analisi reticolare.

Anche se il livello di analisi principale della programmazione reticolare è quello temporale sono stati sviluppati procedimenti che consentono di prendere in considerazione anche altri aspetti la cui analisi non può essere scissa dalla articolazione temporale del processo.

In particolare sono state proposte estensioni che consentono di gestire la minimizzazione dei costi (PERT-COST)<sup>1</sup> o il livellamento delle risorse<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Il PERT-COST è una tecnica che tende a individuare il modo ottimale per accelerare la realizzazione di un'opera, in funzione dei costi connessi con l'accelerazione delle diverse attività; per un approfondimento di tale tecnica si veda

Prima di entrare nel merito delle tecniche di risoluzione dei reticoli, spendiamo alcune parole per parlare della preparazione dei dati necessari alla costruzione del reticolo perchè proprio la sottovalutazione di questa fase è una delle principali cause della difficoltà di applicazione dell'analisi reticolare.

- *L'organizzazione dei dati*

Il primo passo è costituito dalla definizione delle attività necessarie per il completamento della realizzazione e delle loro quantità caratteristiche.

A tal scopo è necessario aver prima chiaro il livello di dettaglio che si vuol descrivere; la scelta deve essere fatta cercando una mediazione tra il miglior grado di approssimazione che un maggior dettaglio può consentire e la più difficile leggibilità e gestione che un reticolo più esteso comporta.

Una valido riferimento per la definizione delle attività è costituito dal computo metrico dell'opera che consente di controllare che nessuna voce d'opera sia trascurata.

La traduzione delle voci di computo in attività è però spesso un lavoro complesso; è infatti necessario disporre di una approfondita conoscenza delle tecnologie realizzative impiegate affinché la definizione delle lavorazioni e delle risorse necessarie non sia superficiale.

In questa fase è quindi necessario analizzare in modo approfondito i disegni esecutivi dell'opera, individuando se è il caso, eventuali modifiche che renderebbero più efficiente la sequenza delle attività.

Oltre alla conseguenza tecnologica, espressa attraverso i vincoli di propedeuticità tra le attività, devono essere individuati durante la preparazione dei dati anche vincoli derivanti da altri aspetti.

La più importante fonte di limitazioni allo svolgimento arbitrario delle operazioni è costituita in genere dalla topologia dell'opera e del cantiere stesso. Tipicamente la limitazione degli spazi a disposizione vincola il numero di operazioni che possono contemporaneamente essere svolte sulla singola opera.

Altre limitazioni sono imposte dalla condivisione di alcune risorse da parte di più operazioni che non possono perciò essere svolte contemporaneamente. Al fine di poter costruire il reticolo del processo, tutte le restrizioni devono essere individuate e tradotte in vincoli di precedenza tra le attività.

Il passo successivo è quello della stima delle durate delle singole operazioni; per far ciò deve essere nota l'entità delle risorse di cui si dispone. Come è stato detto se si utilizza la procedura CPM è sufficiente una sola stima mentre nel caso del PERT sono necessarie tre stime che tengono in considerazione di eventuali influenze dovute a eventi prevedibili solo in termini probabilistici.

A questo punto è possibile costruire il reticolo nel modo descritto nel seguente paragrafo.

---

ad esempio O'BRIEN J.J., *CPM in construction management*, McGraw Hill, New York, 1993; MAGGI P.N., *Il processo edilizio*, Città Studi, Milano, 1994, cap. 6 vol.2; GOTTFRIED A., *Ergotecnica edile: applicazione di metodi e strumenti*, Progetto Leonardo, Bologna, 1992, cap. 7.

<sup>2</sup> Il livellamento dell'impiego delle risorse nel tempo sarà trattato nel capitolo 4.

- *Costruzione del reticolo*

Le attività sono rappresentate nel reticolo da archi che congiungono nodi; questi ultimi rappresentano quindi gli eventi di inizio o di fine delle attività.

L'ipotesi base del reticolo PERT o CPM è che una attività può avere inizio solo dopo che tutte quelle che convergono al suo nodo di partenza siano state completate. Per costruire il reticolo è sufficiente collegare tra loro gli archi in modo che siano rispettate le relazioni di precedenza.

Per l'ipotesi base, il reticolo non può contenere cicli chiusi come quello mostrato nella figura 3.35-a; un ciclo infatti non può rappresentare un processo reale perchè le attività in esso contenute sarebbero predecessori di se stesse.

Inoltre affinchè il reticolo non contenga ambiguità è necessario che due nodi non siano mai direttamente collegati da più di un arco. Nel caso in cui tra due eventi vengano svolte più attività è sufficiente introdurre, in tutti i rami paralleli tranne in uno, un evento fittizio e una attività fittizia di durata nulla nel modo rappresentato in figura 3.35-b.

Le attività fittizie possono essere usate in genere per esprimere una relazione di precedenza tra due eventi non collegati da una attività reale come mostrato in figura 3.35-c; ciò è utile soprattutto per evitare la contemporaneità di attività che utilizzano le medesime risorse.

Infine il reticolo deve avere un solo nodo di avvio e un solo nodo finale; qualora gli eventi conclusivi (o iniziali) reali siano più d'uno è possibile ricondurre il reticolo alla situazione canonica congiungendo questi attraverso attività fittizie ad un nodo finale (o iniziale) unico come mostrato in figura 3.35-d.

Nel costruire il reticolo dovrà essere prestata l'attenzione di seguire un ordine nella disposizione delle attività che consenta di collocare quelle le cui propedeuticità siano già allocate nel reticolo.

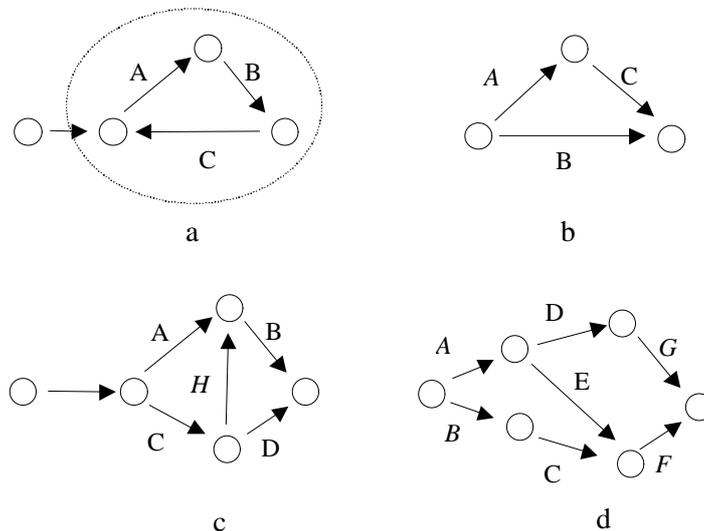


Fig. 3.35 *Situazioni non ammissibili (a) o particolari (b,c,d) che possono presentarsi nella costruzione di un modello reticolare.*

- *Calcolo della durata dell'intera realizzazione*

Per illustrare il procedimento di valutazione della durata dell'intero progetto consideriamo un esempio molto schematico di realizzazione di un parcheggio. Le attività e le relative durate necessarie per il completamento dell'opera sono secondo una stima deterministica:

- A*, pulizia del lotto e tracciamenti, 4 giorni;
- B*, sbancamenti piazzali di parcheggio, 3 giorni;
- C*, sbancamenti e rilevati viabilità, 4 giorni;
- D*, compattazione e stabilizzazione della viabilità, 5 giorni;
- E*, compattazione e stabilizzazione dei piazzali, 3 giorni;
- F*, impianti elettrici, 4 giorni;
- G*, posa pensiline, 5 giorni;
- H*, sistemazioni esterne, 8 giorni;
- I*, asfaltatura, 2 giorni.

Tenendo conto delle precedenze tra le attività è possibile tracciare il reticolo in figura 3.36 nel quale si individuano anche gli eventi che caratterizzano il processo.

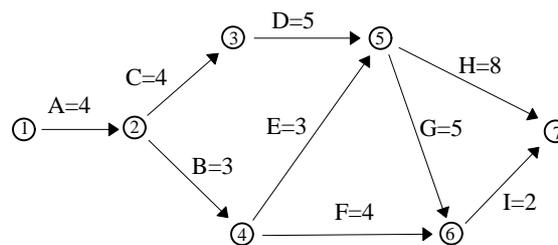


Fig. 3.36 *Rappresentazione reticolare della realizzazione del parcheggio.*

Per calcolare la durata dell'intero processo è sufficiente notare che il reticolo gode della proprietà di Markov e cioè che la sequenza di attività che determina la data di un evento, come sequenza di durata massima tra tutte quelle possibili, non ha influenza sulla sequenza di durata massima che da quell'evento conduce alla chiusura del processo.

È possibile allora interpretare il problema come un problema di programmazione dinamica individuando gli stadi in modo che i nodi di uno stadio si colleghino solo ai nodi degli stadi successivi.

Per il nostro esempio otteniamo lo schema in figura 3.37.

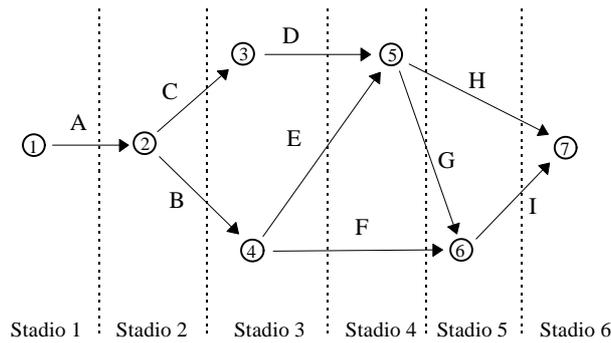


Fig. 3.37 Schematizzazione del problema della ricerca delle date degli eventi come problema di programmazione dinamica.

Per trovare la durata dell'intero processo si può allora partire dall'evento iniziale e percorrendo il reticolo stadio per stadio individuare per ogni evento la massima tra le date ottenute sommando alle durate delle attività in esso convergenti le date degli eventi da cui queste hanno inizio.

Le date così ottenute sono le minime possibili in cui l'evento può avvenire. Il valore ottenuto per l'evento finale è la durata del processo. Nel nostro caso si ottengono i risultati mostrati nella figura 3.38 in cui si osserva che la durata totale della realizzazione è di 21 giorni.

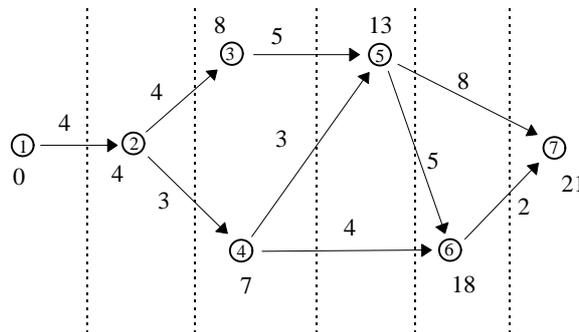


Fig. 3.38 Calcolo delle date degli eventi della realizzazione del parcheggio.

Il secondo passo è quello di ricostruire la sequenza di attività che determinano questa durata che assume il nome di *percorso critico*.

Per far ciò è necessario ripercorrere stadio per stadio il reticolo a ritroso individuando per ogni evento la minima tra le date ottenute sottraendo le durate delle attività che da esso hanno inizio alle date degli eventi in cui tali attività hanno termine.

Le date così ottenute sono le massime in cui l'evento può avvenire senza che la chiusura dei lavori subisca una dilazione.

La differenza tra la data massima e la data minima di un evento è detta slittamento dell'evento e misura l'intervallo di tempo a disposizione per ritardare l'evento senza che la durata totale subisca variazioni. Lo slittamento dell'evento può essere utilizzato per ritardare o allungare l'esecuzione delle attività che terminano sull'evento o che da esso hanno inizio.

Come è ovvio lungo la sequenza che determina la durata totale il tempo minimo e

quello massimo coincideranno per cui ogni ritardo sulle attività di tale sequenza si ripercuoterà sulla durata totale.

Tale sequenza è detta *sequenza critica* o *percorso critico*; la sequenza critica collega sempre l'evento iniziale con l'evento finale del processo e non necessariamente contiene un unico ramo ma può anche svilupparsi su più diramazioni parallele.

Come è mostrato in figura 3.39 gli eventi con slittamento nullo determinano la sequenza critica del nostro esempio.

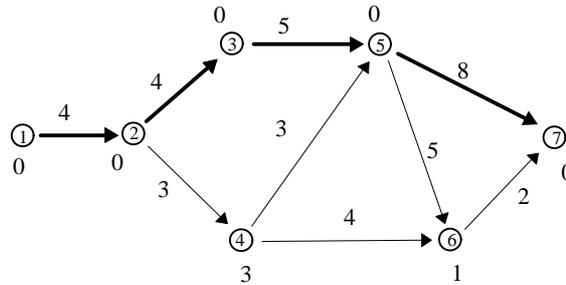


Fig. 3.39 Individuazione della sequenza critica della realizzazione del parcheggio ottenuta attraverso il calcolo degli slittamenti riportati accanto ai rispettivi eventi.

Le attività che non appartengono alla sequenza critica possono fino ad un certo limite essere avviate in ritardo rispetto ai tempi minimi dei loro eventi iniziali o essere allungate senza che la durata totale del processo ne sia influenzata.

I limiti di tali slittamenti sono:

*lo slittamento libero*, che rappresenta l'intervallo di tempo entro il quale un'attività può essere ritardata o la sua durata incrementata senza che ciò intacchi la possibilità delle attività che hanno inizio dal suo evento finale di essere a loro volta ritardate o allungate senza influenzare la durata totale del processo; lo slittamento libero è calcolato come differenza tra l'intervallo che intercorre tra i tempi minimi iniziale e finale e la durata dell'attività:

$$S_i^{i-j} = (T_{\min}^j - T_{\min}^i) - d^{i-j}$$

*lo slittamento totale*, che rappresenta l'intervallo totale di tempo entro il quale l'attività può essere ritardata o allungata senza che ciò influenzi la durata totale dell'intero processo; esso è calcolato come differenza tra l'intervallo che intercorre tra i tempi minimo iniziale e massimo finale e la durata dell'attività:

$$S_i^{i-j} = (T_{\max}^j - T_{\min}^i) - d^{i-j}$$

### 3.8 I reticoli PDM

Il limiti di rappresentatività dei reticoli PERT e CPM non sono trascurabili, essi sono infatti la principale causa della inefficienza di questi modelli.

In questo paragrafo analizzeremo un diverso modello reticolare chiamato PDM acronimo

di *Precedence Diagramming Method* che ampliando le tipologie di vincoli utilizzabili consente di tradurre in modo molto più efficace i vincoli tecnologici in vincoli temporali.

Le relazioni utilizzate nei reticoli CPM e PERT sono tutte di tipo *'fine-inizio'*; due attività sono legate da questo vincolo quando l'evento finale della prima è l'evento finale dell'altra; in questo caso la prima attività deve essere completamente portata a termine prima che la seconda possa avere inizio.

Nei reticoli PDM sono introdotti altri tipi di vincoli che consentono una maggiore varietà di articolazioni temporali tra le attività; per far i vincoli sono trattati in modo esplicito mentre nei modelli precedenti sono solo desumibili dalla condivisione di eventi tra le attività.

A differenza dei casi precedenti, nel reticolo PDM le attività sono rappresentate dai nodi e i vincoli sono invece descritti in modo esplicito dagli archi che collegano le attività.

Le relazioni tra due attività *A* e *B* possono essere nei reticoli PDM di quattro tipi fondamentali:

*'inizio-inizio'*, essa vincola l'attività *B* ad essere avviata solo dopo che l'attività *A* sia stata avviata; questa relazione è spesso chiamata anche *'start-start'* o *SS*;

*'fine-fine'*, essa vincola l'attività *B* a essere portata a termine solo dopo che sia stata portata a termine l'attività *A*; questa relazione è anche detta *'finish-finish'* o *FF*;

*'inizio-fine'*, con questa relazione si indica che l'attività *B* può essere portata a termine solo dopo che l'attività *A* sia stata avviata; essa è anche chiamata *'start-finish'* o *SF*;

*'fine-inizio'*, questa relazione vincola l'attività *B* ad essere avviata solo dopo che l'attività *A* sia stata completata; essa è la sola relazione utilizzata nei reticoli CPM e PERT ed è chiamata anche *'finish-start'* o *FS*.

Oltre alle nuove relazioni nei reticoli PDM sono introdotti gli *sfasamenti* che misurano l'intervallo di tempo che deve trascorrere affinché la relazione si possa in atto.

Ad esempio nei reticoli classici, un'attività può essere avviata immediatamente dopo che quella precedente sia stata portata a termine; questo è il caso in cui lo sfasamento è nullo; può essere però necessario ritardare l'avvio dell'attività, in questo caso lo sfasamento non è più nullo ma è la misura dell'intervallo di tempo che intercorre tra la fine della prima attività e l'avvio della seconda.

Gli sfasamenti possono essere espressi anche in termini di percentuale di completamento dell'attività vincolante; in questo caso si parlerà di *fattore di sfasamento*.

In figura 3.46 sono mostrate le rappresentazioni grafiche delle relazioni con l'indicazione degli sfasamenti quando questi non sono nulli.

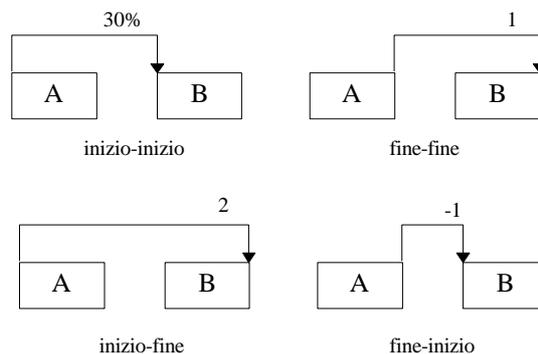


Fig. 3.46 *Rappresentazione grafica dei vincoli tra le attività (nodi del grafo) in un reticolo PDM. Accanto ai vincoli sono anche indicati, quando diversi da zero, gli sfasamenti che devono essere considerati per poterne esplicitare l'espressione in termini temporali.*

Nel caso della relazione *inizio-inizio* l'attività *B* può essere avviata dopo che il completamento dell'attività *A* sia pari almeno al 30%; nel caso della relazione *fine-fine* l'attività *B* può essere terminata solo dopo che sia trascorso 1 giorno dalla chiusura dell'attività *A*; nel caso della relazione *inizio-fine* l'attività *B* può essere conclusa solo dopo che l'attività *A* sia stata avviata da almeno 2 giorni; infine il caso della relazione *fine-inizio* è assegnato uno sfasamento negativo di 1 giorno tra la fine dell'attività *A* e l'avvio dell'attività *B* in modo che quest'ultima possa essere avviata un giorno prima che l'attività *A*.

Vediamo ora come possono essere combinate le relazioni viste per rappresentare alcune tipiche articolazioni di attività, confrontando dove possibile la rappresentazione PDM con la rappresentazione CPM o PERT.

Un tipico esempio è lo sfasamento dell'avvio di un'attività rispetto all'avvio di un'altra in modo che gli effetti della prima preparino l'esecuzione della seconda.

Ad esempio prima di effettuare lo scavo per una platea di fondazione sotto il livello di falda è necessario abbassarne il livello tramite estrazione dell'acqua con aghi che però deve essere in anticipo almeno di 1 giorno sullo scavo.

In figura 3.47-a è mostrata la rappresentazione PDM di questo semplice processo, come è mostrato nella stessa figura nel caso del reticolo CPM è necessario rappresentare il pompaggio in due parti, quella precedente allo scavo e quella successiva.

Un altro tipico esempio è quello dell'esecuzione in linea delle attività come nel caso rappresentato in figura 3.47-b in cui si esegue, un giorno la trivellazione e il giorno successivo il getto dei pali procedendo così fino al completamento della palificata è possibile rappresentare il processo in modo molto semplice.

Nel caso invece in cui lo stesso processo sia rappresentato come un reticolo CPM sarebbe necessario frammentare l'attività di trivellazione e quella di getto in tante parti quanti sono i giorni necessari al completamento per poi porle in relazione come mostrato nella stessa figura<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Per un'esauriva trattazione dei reticoli PDM e delle loro specificità rispetto ai più tradizionali reticoli CPM si può fare riferimento a CALLAHAN M.T., QUACKENBUSH D.G., ROWINGS J.E., *Construction project scheduling*, McGraw Hill, New York, 1992

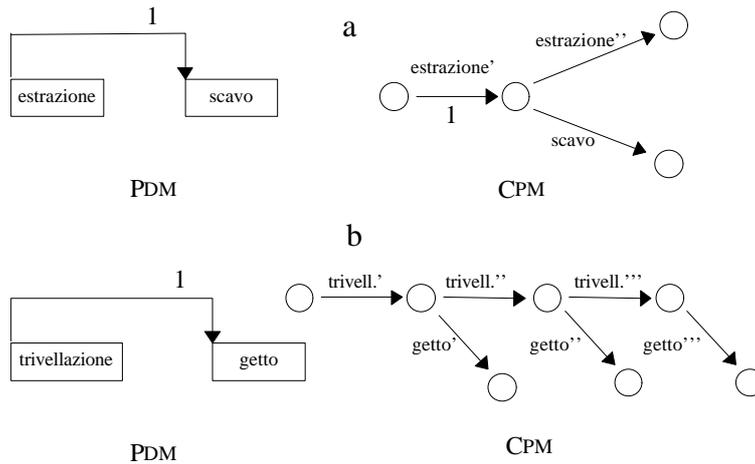


Fig. 3.47 Due esempi che mostrano la maggiore agilità di rappresentazione dei reticoli PDM rispetto ai reticoli CPM.

- Calcolo della durata dell'intera realizzazione

Per illustrare il procedimento di valutazione della durata dell'intero processo consideriamo un esempio molto schematizzato di realizzazione delle fondazioni di un edificio in cui le attività e le relative durate sono le seguenti:

- A: pulizia e spianamento, 2 giorni;
- B: scavo, 2 giorni, avvio 1 giorno dopo l'avvio di A;
- C: cassetatura, 2 giorni
- D: posizionamento gabbie, 1 giorno;
- E: getto cls, 1 giorno;
- F: maturazione del cls, 3 giorni;
- G: scasseratura, 2 giorni;
- H: riempimento scavo, 1 giorno.

La rappresentazione del reticolo è quella in figura 3.48 in cui nei nodi sono indicate anche le durate delle attività e in corrispondenza degli archi gli eventuali sfasamenti diversi da zero:

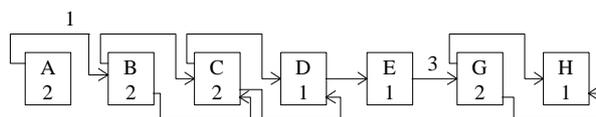


Fig. 3.48 Rappresentazione PDM della realizzazione delle strutture di fondazione di un edificio. All'interno dei nodi che rappresentano le diverse attività sono anche indicate le relative durate.

Come si può osservare le attività *B*, *C* e *D* sono eseguite in linea senza sfasamento così come le attività *G* e *H*.

La fase di maturazione *F* non è stata rappresentata come tale ma come sfasamento associato alla relazione tra le attività *E* e *G* in quanto non importante per la gestione delle risorse.

L'esecuzione in linea senza sfasamento è in effetti un'organizzazione poco realistica, non possiamo ad esempio pensare di scavare, disporre i casseri e le armature nello stesso luogo e nello stesso tempo; se però lo sfasamento è piccolo<sup>4</sup> è preferibile trascurarlo nel calcolo tenendone però conto a posteriori per la stima.

Supponiamo che questo sia il nostro caso, infatti immaginiamo in prima analisi di cominciare a disporre i casseri non appena non si è più nella zona d'azione dell'escavatore e di disporre quasi contemporaneamente le armature.

L'esecuzione in semplice successione del processo comporterebbe una durata pari alla somma delle durate delle singole attività e cioè 14 giorni.

Vediamo come è invece valutabile nel nostro caso la durata del processo organizzato con molte attività in linea.

Fondamentalmente il procedimento di risoluzione è analogo a quello del calcolo CPM anche se presenta una maggiore difficoltà dovuta al maggior numero di vincoli che ne limita la risoluzione manuale ai soli casi più semplici. La tecnica base di risoluzione dei reticoli PDM si articola sempre nel calcolo dei tempi minimi di inizio e fine attività eseguito partendo dall'inizio verso la fine e nel calcolo dei tempi massimi in senso inverso. Una volta individuati gli stadi in modo analogo ai reticoli CPM si esegue il calcolo del tempo minimo di ogni evento (inizio e fine di ogni attività) come data massima tra quelle ottenute sommando agli sfasamenti delle relazioni ad esso associate, le date degli eventi a cui le relazioni si connettono. Per il calcolo è inoltre necessario considerare l'evento iniziale di ogni attività collegata all'evento finale da un arco la cui durata è quella dell'attività stessa.

Nel nostro caso gli stadi sono individuati dalle singole attività; applicando la procedura descritta si ottengono i risultati mostrati in figura 3.49 in cui si vede che la durata dell'intero processo è pari a 9 giorni.

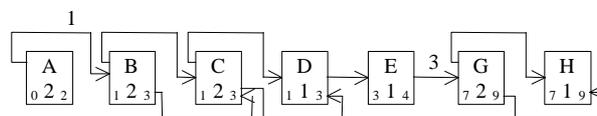


Fig. 3.49 *Calcolo delle date minime di inizio e fine delle lavorazioni necessarie al completamento della struttura di fondazione*

Per il calcolo dei tempi massimi è necessario partire dall'evento finale, che in un reticolo più articolato può essere individuato ricercando l'evento con la maggiore data minima, e procedendo a ritroso si calcola per ogni evento la minima data tra quelle

<sup>4</sup> ad esempio inferiore a mezza giornata lavorativa

ottenute sottraendo gli sfasamenti delle relazioni ad esso associate alle date a cui tali relazioni si connettono. Anche in questo caso è necessario considerare l'evento iniziale di ogni attività collegata all'evento finale da un arco la cui durata è quella dell'attività stessa.

Nel nostro esempio si ottengono i risultati mostrati in figura 3.50 in cui si nota che i tempi minimi sono per ogni attività uguali ai tempi massimi tranne che per le attività *D* e *H*.

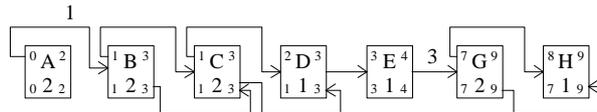


Fig. 3.50 Calcolo delle date massime di inizio e fine delle lavorazioni per la struttura di fondazione. Le date massime sono indicate nella parte superiore dei nodi mentre quelle minime sono riportate nella parte inferiore. Si può notare che solo per le attività *D* e *H* questi tempi non coincidono.

Queste due attività hanno la possibilità di essere slittate di 1 giorno in quanto l'intervallo di tempo che intercorre tra il tempo iniziale minimo e il tempo finale massimo è maggiore della loro durata.

Analogamente ai reticoli CPM chiamiamo slittamento totale la differenza tra il tempo totale a disposizione e la durata dell'attività:

$$S_i = (T_{\max}^f - T_{\min}^i) - d$$

Nel caso del nostro esempio lo slittamento totale a disposizione può essere utilizzato in tre modi possibili o in combinazioni di questi modi:

- posticipare l'avvio dell'attività* fino a 1 giorno dopo la data minima di avvio;
- allungare la durata dell'attività* di 1 giorno rispetto a quella di calcolo;
- segmentare l'esecuzione dell'attività* in modo che la durata totale sia superiore di 1 giorno rispetto a quella di calcolo.

Lo slittamento totale non può però essere usato in modo arbitrario in quanto è necessario verificare, una volta impiegato in uno dei modi visti, il soddisfacimento delle relazioni che vincolano l'esecuzione.

Ad esempio nel caso delle due attività *A* e *B* in linea rappresentate in figura 3.51, in cui la prima ha una durata maggiore della seconda è possibile:

- ritardare l'avvio di B* figura 3.51-a;
- allungare la durata di B* figura 3.51-b;
- segmentare l'esecuzione di B* figura 3.51-c.

Non è però ammissibile la configurazione in figura 3.51-d, in cui l'attività *B* è in anticipo nel completamento rispetto all'attività *A*.

Occorre quindi, per collocare temporalmente l'attività, come in questo caso la *B*, all'interno del proprio slittamento verificare sempre che le frazioni di completamento

siano sempre compatibili con le date.

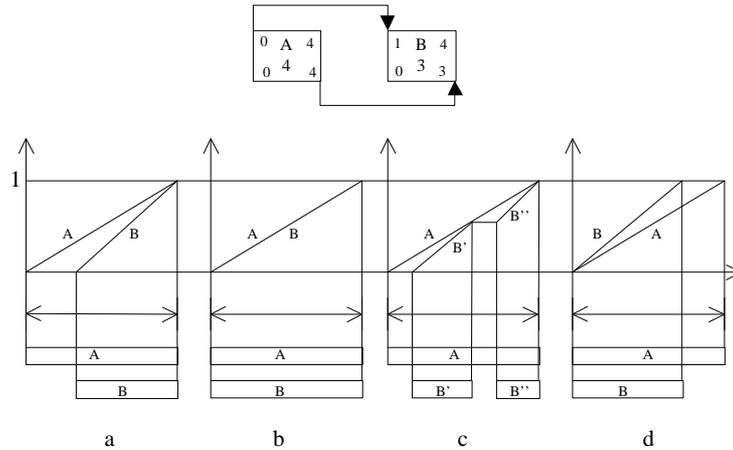


Fig. 3.51 *Quattro diversi modi di utilizzare lo slittamento a disposizione per l'attività B. La situazione individuata nella parte d della figura non è però ammissibile in quanto l'attività B si troverebbe sempre in anticipo di completamento rispetto alla A.*

Lo slittamento libero di un'attività è definito invece come differenza tra l'intervallo di tempo che intercorre tra le date minime di avvio e chiusura e la durata dell'attività stessa:

$$S_l = (T_{\min}^f - T_{\min}^i) - d$$

Lo slittamento libero può, al contrario di quello totale, essere utilizzato arbitrariamente.

- *La sequenza critica*

Analogamente ai reticoli CPM la sequenza critica è definita come quell'insieme di attività ed eventi che non possono essere ritardati senza ritardare la data di completamento dell'intero processo.

Essa è costituita anche nel caso dei reticoli PDM da un percorso continuo dall'inizio alla fine del processo e può contenere anche il solo avvio o la sola chiusura di un'attività. Come è infatti mostrato in figura 3.52, nel nostro esempio l'avvio delle attività D e H può slittare di 1 giorno mentre la chiusura è vincolata ad una data ben precisa. In questo caso la sola chiusura delle attività farà parte del percorso critico che contiene tutti gli eventi con pari data minima e massima. Un'attività è allora definita critica solo se sono critici sia il suo avvio che la sua chiusura.

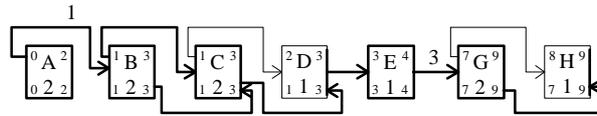


Fig. 3.52 *Individuazione del percorso critico come sequenza degli eventi che hanno pari data minima e massima. Un'attività è definita critica solo se sono critiche sia la sua data iniziale che la sua data finale.*

- *Coerenza del reticolo PDM*

Una attenzione particolare deve essere posta per evitare di inserire relazioni non necessarie che renderebbero ridondante la struttura vincolare come nell'esempio di figura 3.53-a in cui l'attività *B* è vincolata a iniziare sia dopo l'avvio che dopo la fine dell'attività *A*.

La prima relazione è ovviamente dominata dalla seconda in quanto le durate delle attività non possono essere negative e quindi non dovrebbe essere posta nel reticolo.

Oltre alla maggiore complessità che le relazioni sovrabbondanti comporterebbero, spesso queste sono fonte di errori che rendono incoerente il reticolo.

Il caso più tipico è quello della formazione di cicli che nei reticoli PDM sono di più difficile individuazione rispetto ai reticoli CPM e ciò a causa della complessità delle articolazioni temporali che è possibile rappresentare.

Un tipico esempio di ciclo è quello di figura 3.53-b in cui l'attività *B* è contemporaneamente vincolata a essere avviata dopo la fine e prima dell'avvio dell'attività *A*.

Non costituisce invece un ciclo la configurazione in figura 3.53-c, anche se molti software la rilevano come tale; in questo caso l'attività *B* è vincolata ad essere avviata dopo l'avvio dell'attività *A* e a essere portata a termine prima della fine della stessa.

Affinchè ciò sia possibile è ovviamente necessario che la durata di *B* sia maggiore o resa tale, rispetto alla durata dell'attività *A*.

Le configurazioni temporalmente inconsistenti sono di ancora più difficile individuazione in quanto la loro formazione dipende anche dalle durate delle attività.

Un altro esempio di configurazione temporalmente inconsistente è quella in figura 3.53-d in cui l'attività *B* deve essere eseguita in linea con l'attività *A* ma ha una durata maggiore di quest'ultima.

Infine una buona regola da seguire è quella di avere una sola attività il cui avvio non sia vincolato ad altri eventi e una sola attività la cui chiusura sia egualmente libera da vincoli; queste saranno rispettivamente l'attività iniziale e quella finale del processo.

Se più di un'attività hanno tali caratteristiche è buona norma introdurre un'attività fittizia che a seconda dei casi apra o chiuda il processo; ciò consente di evitare ambiguità nel calcolo del reticolo.

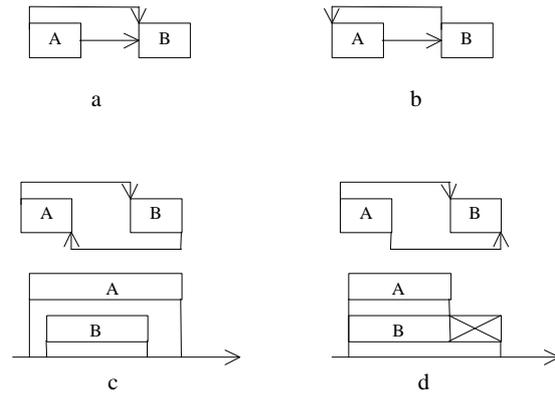


Fig. 3.53 *Situazioni singolari che possono presentarsi nella costruzione di un reticolo PDM.*

### Esempio di applicazione dei modelli reticolari nella rappresentazione di un cantiere per la costruzione di un edificio.

Analizziamo un processo più complesso le cui attività, relative durate e precedenze tecnologiche sono di seguito elencate:

- A*, pulizia e tracciamenti, 3 settimane;
- B*, sbancamenti, opere di sostegno e scavi, 3 settimane, dopo *A*;
- C*, opere di fondazione, 2 settimane, dopo *B*;
- D*, strutture esterne in muratura, 6 settimane, dopo *C*;
- E*, strutture interne in cls, 2 settimane, dopo *D* e *H*;
- F*, solai di copertura, 4 settimane, dopo *D* e *E*;
- G*, completamento copertura, 2 settimane, dopo *F*;
- H*, solai piano terra; 3 settimane, dopo *C*;
- I*, pavimentazioni, 2 settimane, dopo *P*;
- L*, impianti idraulici esterni, 3 settimane, dopo *B*;
- M*, impianti idraulici interni, 2 settimane, dopo *D*, *E* e *L*;
- N*, impianti elettrici esterni, 2 settimane, dopo *D*, *E* e *G*;
- O*, impianti elettrici interni, 2 settimane, dopo *D*, *E*, *G* e *N*;
- P*, finiture muratura, 5 settimane, dopo *M* e *O*;
- Q*, montaggio controsoffitti, 3 settimane, dopo *M* e *O*.

Il primo passo da eseguire è come al solito quello di tradurre la struttura del processo descritto in un reticolo.

Per far ciò è conveniente in prima analisi tradurre tutti i vincoli di propedeuticità in relazioni del tipo *fine-inizio* per poi eventualmente introdurre se possibile e necessario articolazioni più compatte.

Una volta che ciò sia stato fatto è conveniente eliminare le relazioni ridondanti; è però importante notare che la ridondanza o meno di una relazione dipende dalla configurazione dell'intera struttura e quindi eventuali variazioni successive del reticolo potrebbe non rendere più lecita l'eliminazione di alcune relazioni prima considerate ridondanti.

In figura 3.54 è rappresentato il reticolo PDM del processo; le relazioni ridondanti sono disegnate con una linea tratteggiata e all'interno dei nodi insieme all'indicazione dell'attività è mostrata la durata della stessa.

È importante notare che è stata inserita una attività fittizia di chiusura *Z* di durata nulla al fine di chiudere il processo in modo non ambiguo; tale attività è posta in relazione di conseguenza assoluta con tutte le attività reali la cui fine non è vincolata ad altri eventi, nel caso le attività *I* e *Q*.

In figura 3.55 sono mostrati i risultati del calcolo delle date minime degli eventi di avvio e termine di tutte le attività, eseguito nel modo descritto in precedenza. Da questo calcolo può essere già desunta la durata totale della realizzazione pari a 33 settimane.

Il calcolo delle date massime degli eventi consente in seguito di individuare la sequenza critica evidenziata in figura 3.56 con un tratto più spesso e costituita dalle attività 'A-B-C-D-E-F-G-N-O-P-I'.

Per via dell'uso delle sole relazioni di tipo *fine-inizio* è possibile rappresentare il

processo anche con il reticolo CPM mostrato in figura 3.57; come si nota è necessario introdurre in questo caso alcune attività fittizie per descrivere tutti i vincoli di propedeuticità del processo.

Il problema che a questo punto frequentemente si pone è quello di scegliere la migliore strategia per accelerare la realizzazione dell'opera.

È proprio in tale problema che si può apprezzare la maggiore capacità espressiva dei reticoli PDM rispetto ai reticoli CPM e PERT.

Infatti utilizzando questi ultimi modelli, la sola possibilità per ridurre la durata della realizzazione appare quella di ridurre la durata delle attività critiche incrementando le risorse ad esse assegnate.

Invece nel caso dei reticoli PDM è possibile agire sulla struttura temporale del processo interpretando in modo diverso i vincoli tecnologici di precedenza tra le attività.

Per chiarire meglio quanto detto prendiamo le prime tre attività (*A-B-C*) del nostro esempio per le quali abbiamo interpretato la dipendenza della seconda dalla prima e della terza dalla seconda attività attraverso una esecuzione in successione. È possibile pensare di avviare gli sbancamenti e gli scavi (attività *B*) non appena la pulizia e i tracciamenti (attività *A*) siano stati portati a termine in una parte del lotto e di avviare la realizzazione delle fondazioni (attività *C*) quando gli scavi nella stessa parte fossero terminati ma non prima che i tracciamenti di tutta l'opera fossero stati effettuati.

Nell'ipotesi che la frazione di completamento per avviare le attività susseguenti sia pari a  $1/3$  dovremo vincolare gli avvii delle tre attività a rispettare uno sfasamento di  $1$  giorno l'una dall'altro.

Contemporaneamente per garantire che i vincoli di propedeuticità non siano violati è necessario imporre che *B* sia portata a termine dopo *A* e similmente *C* dopo *B*; come stabilito, l'avvio di *C* sarà inoltre legato alla chiusura di *A*.

In figura 3.58 è rappresentata la nuova struttura del processo e come si può notare la durata totale è ridotta di 3 settimane rispetto al caso precedente pur conservando le durate e le risorse di tutte le attività immutate.

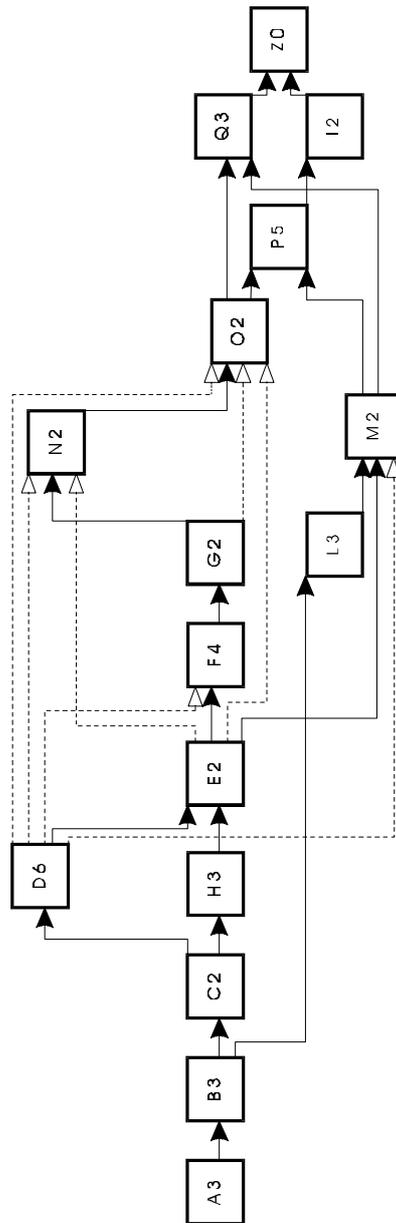


Fig. 3.54 Reticolo PDM della costruzione dell'edificio. Le relazioni ridondanti sono disegnate con una linea tratteggiata e all'interno dei nodi insieme all'attività è indicata la durata della stessa. L'attività fittizia Z è stata inserita in modo che l'attività di chiusura sia univocamente determinata.

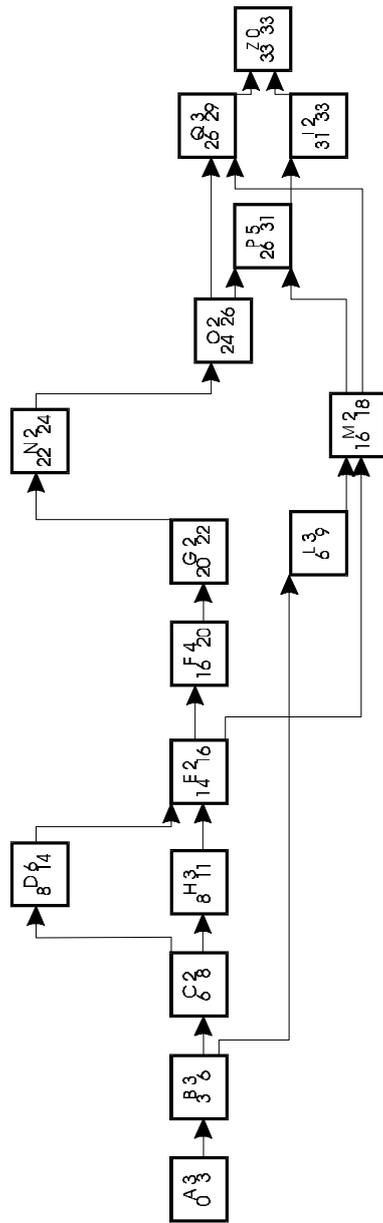


Fig. 3.55 Risultati del calcolo delle date minime degli eventi di avvio e termine di tutte le attività

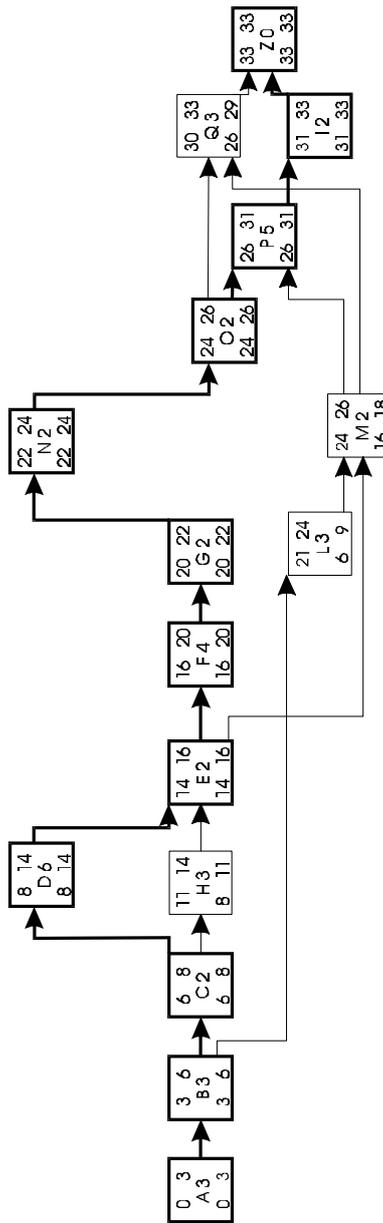


Fig. 3.56 Risultati del calcolo delle date massime degli eventi e conseguente individuazione del percorso critico evidenziato con un tratto più spesso e costituito dalle attività 'A-B-C-D-E-F-G-N-O-P-I'

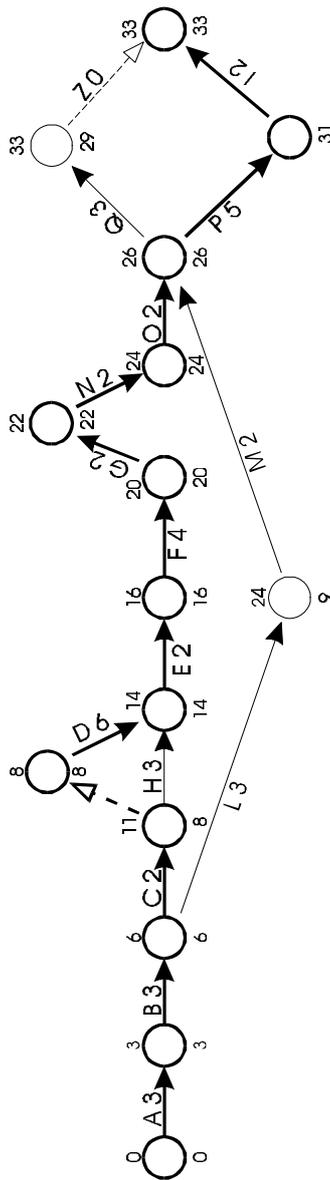


Fig. 3.57 Reticolo CPM della costruzione dell'edificio con evidenziazione del percorso critico. Come si nota con questo modello è necessario introdurre due attività fittizie al fine di ottenere la corretta rappresentazione del processo.

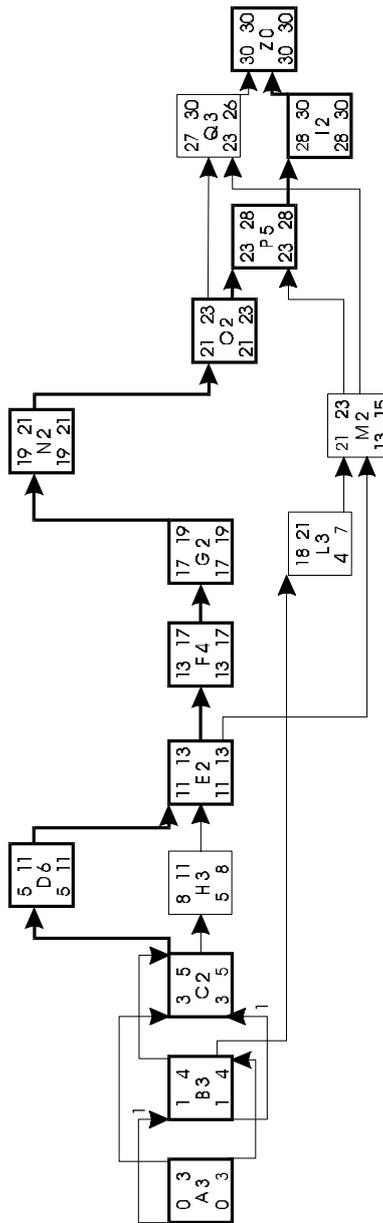


Fig. 3.58 Schema di una diversa organizzazione dei lavori di costruzione dell'edificio che consente, a parità di risorse impiegate, di accelerare i lavori di 3 settimane compattando come mostrato l'esecuzione delle attività (A, B, C).