

Teorema di Nöther

Teorema 1 (di Nöther) Se la Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ è invariante sotto l'azione φ , allora le equazioni di Lagrange per L hanno l'integrale primo:

$$I(q, \dot{q}) := \xi(q) \cdot p(q, \dot{q})$$

ove ξ è il generatore infinitesimo dell'azione, e $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ è il vettore dei momenti coniugati alle q .

Dimostrazione. Consideriamo un moto $t \mapsto q_t$ del sistema di Lagrangiana $L(q, \dot{q})$. L'invarianza di L implica che, per ogni t ed ogni α , si ha

$$0 = \frac{d}{d\alpha} L(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \cdot \dot{q}_t)$$

Ricordando come si è ottenuto il sollevamento di φ allo spazio degli atti di moto, quanto scritto risulta uguale a:

$$0 = \frac{d}{d\alpha} L(\varphi_\alpha(q_t), \frac{d\varphi_\alpha}{dt}(q_t))$$

Allora si ha che quanto scritto è uguale, per la regola della derivazione delle funzioni composte, a:

$$0 = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \varphi_\alpha^j}{\partial \alpha}(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d\varphi_\alpha^j}{dt}(q_t) \right]$$

(L è calcolato in $(\varphi_\alpha(q_t), \frac{d\varphi_\alpha}{dt}(q_t))$). Inverto ora l'ordine di derivazione tra α e t , e mi ricordo che se $t \mapsto q_t$ è moto di $L(q, \dot{q})$, allora (teorema dell'invarianza per il cambiamento di coordinate) $t \mapsto \varphi_\alpha(q_t)$ è moto di $\tilde{L}_\alpha(q, \dot{q}) = L(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \cdot \dot{q}_t)$, e:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \cdot \dot{q}_t) = \frac{\partial L}{\partial q}(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \cdot \dot{q}_t)$$

Quindi:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \varphi_\alpha^j}{\partial \alpha}(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_\alpha^j}{\partial \alpha}(q_t) \right]$$

Per la regola di derivazione di prodotti di funzioni, otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \varphi_\alpha^j}{\partial \alpha}(q_t) \right]$$

A questo punto definiamo (L è sempre calcolato in $(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \cdot \dot{q}_t)$)

$$I_\alpha(q, \dot{q}) := \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q) \cdot \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \varphi_\alpha^j}{\partial \alpha}(q) \right] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}(q)$$

Definisco ora:

$$\xi_{\bar{\alpha}}(q) := \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}(q) \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

Ci si accorge subito che:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi_{\bar{\alpha}}(q)) &= \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha}(\varphi_{\bar{\alpha}}(q)) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial \varphi_{\alpha+\bar{\alpha}}}{\partial \alpha}(q) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha}(q) \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}}\end{aligned}$$

Da ciò esce che

$$\xi_{\bar{\alpha}}(q) = \xi(\varphi_{\bar{\alpha}}(q))$$

Prendiamo I_{α} per $\alpha = \bar{\alpha}$. È facile vedere che (I è quello dell'enunciato):

$$I(\varphi_{\alpha}(q), \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}) \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}} = I_{\bar{\alpha}}(q, \dot{q})$$

Usando la definizione di $\xi_{\bar{\alpha}}(q)$, si ha che (L è come al solito calcolata in ...):

$$I_{\bar{\alpha}}(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \xi_{\bar{\alpha}}(q)$$

Possiamo però scrivere:

$$\begin{aligned}\xi_{\bar{\alpha}}(q) &= \xi(\varphi_{\bar{\alpha}}(q)) \\ &= \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha}(\varphi_{\bar{\alpha}}(q)) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial q}(\varphi_{\bar{\alpha}}(q)) \frac{\varphi_{\alpha}(q)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \xi(q)\end{aligned}$$

E quindi $I_{\bar{\alpha}}(q, \dot{q})$ si può scrivere come

$$\begin{aligned}I_{\bar{\alpha}}(q, \dot{q}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \xi(q) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \right)^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q} \right) \cdot \xi(q) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(L(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}) \right) \cdot \xi(q)\end{aligned}$$

Dove si può giustificare l'ultimo passaggio con un semplice controllo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(L(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}) \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q} \right]_j \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}) \left[\frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \right]_{ji}\end{aligned}$$

Da qui segue la giustificazione di cui sopra. Tuttavia ora si può scrivere, grazie all'invarianza di L sotto l'azione di φ , $L(\varphi_{\bar{\alpha}}(q), \frac{\partial \varphi_{\bar{\alpha}}}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}) = L(q, \dot{q})$. Dacchè $\bar{\alpha}$ è arbitrario, l'ultima relazione vale $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$, e si arriva a

$$I_{\alpha}(q, \dot{q}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}) \cdot \xi(q) = I(q, \dot{q})$$

Dunque concludiamo, ricordando che I_{α} è integrale primo del sistema, come prima mostrato. \square

Osservazione. Facciamo notare che questa dimostrazione è molto lunga rispetto alla dimostrazione standard del Teorema di Nöther, che ad un certo punto propone di porre $\alpha = 0$, semplificando il tutto in quanto $\varphi_\alpha(q)$ è l'identità per $\alpha = 0$, appunto. Tuttavia quello che mostriamo in più in questa dimostrazione è che l'integrale primo I_α è invariante rispetto all'azione φ_α . Questo è interessante perché quando si va ad affrontare la riduzione alla Routh si usa tacitamente questo fatto, dacché si prende come integrale primo il momento coniugato alla coordinata ignorabile, che è il medesimo I dell'enunciato, in quanto nel caso ci sia una coordinata ignorabile, l'azione sotto la quale L è invariante ha $\xi(q) = 1$.