TEORIA DEGLI ERRORI

Misurare una grandezza = Associare a quella grandezza un numero ed una unità di misura

Le grandezze **discrete** si contano e si esprimono con un numero **intero.**

Le grandezze **continue** si misurano e si esprimono con un numero **reale**.

E' praticamente **impossibile** misurare con assoluta **precisione** grandezze fisiche che variano in modo continuo; Il valore esatto si dovrebbe esprime con un **numero infinito di cifre**.

Nel caso in cui si voglia esprimere il valore di una grandezza con **assoluta precisione**, occorre specificare anche il **margine d'errore**.

$$Gv = Gm \pm E \quad = \quad Gm \pm \varepsilon\%$$

L'imprecisione (errore) in una misura è dovuta a diverse cause (limitata precisione e sensibilità degli strumenti, metodi di misura, fattori ambientali, perizia dell'operatore, ecc.)

CLASSIFICAZIONE DEGLI ERRORI NELLE MISURE ELETTRICHE

1) ERRORE STRUMENTALE

Dovuto alle caratteristiche degli strumenti utilizzati che possono essere più o meno precisi e sensibili.

Esempio: Voltometro con portata 100 V e Classe di precisione 0,5

L'errore strumentale si può ridurre (ma non eliminare) utilizzando strumenti con classe di precisione elevata.

2) ERRORE SISTEMATICO

Dovuto al metodo di misura.

Esempio 1: Voltometro a monte o valle.

Esempio 2: Misura profondità di un pozzo attraverso la misura del tempo di caduta di un sasso $h = ½ * g * t^2$ (l'errore sistematico dovuto alla velocità del suono).

Nel misurare delle grandezze spesso si possono adottare diversi metodi: alcuni sono semplici ma introducono degli errori; altri sono più complessi ma non introducono errori.

L'errore sistematico si può eliminare/ridurre utilizzando metodi di misura più complessi.

3) ERRORE ACCIDENTALE

Dovuto all'imperizia dell'operatore

Esempio: Errore di apprezzamento; Errore di parallasse.

L'errore può incidere positivamente o negativamente sulla grandezza misurata; Ripetendo la misura più volte e calcolando il valor medio, l'errore accidentale tende a ridursi.

4) ERRORE GROSSOLANO

Dovuto alla scarsa abilità/preparazione dell'operatore.
Esempio: Collegamenti errati; Cavetti o morsetti difettosi; Malfunzionamento degli strumenti; Errori di lettura/scrittura; Errori di calcolo; Fattori ambientali quali temperatura e campi elettrici/magnetici; ecc..
Solo una corretta **analisi dell'attendibilità** dei risultati può rilevare tale errore; qualche volta è sufficiente ripetere la prova rimontando il circuito.
Questo tipo di errore deve comunque essere escluso.

Esempio cronometro

Errori strumentali	Precisione dello strumento (non si possono eliminare, sono del tipo +/-)
Errori sistematici	Nessuno (si possono ridurre o eliminare e sono del tipo + oppure -)
Errori accidentali	Velocità di risposta dell'operatore ai comandi di start e stop (si possono eliminare, sono del tipo casuale +/- tipo parallasse e apprezzamento) Es. cronometro:
Errori grossolani	Scambio dell'indice dei secondi con quello dei minuti (non si devono commettere)

Gli errori grossolani non sono ammessi; gli altri si, ma bisogna sempre averli sotto controllo (essere consapevoli della loro incidenza sul valore misurato).

CONCLUSIONI: E' sempre indispensabile verificare l'attendibilità di una misura attraverso l'analisi dei risultati (comparazione, calcoli, ripetizione misura anche con metodi diversi, ecc.) e l'accettabilità dell'errore commesso.

TIPI DI ERRORE

Gv = Valore vero della generica grandezza misurata G

Gm = Valore misurato della generica grandezza G

ERRORE ASSOLUTO $E = Gm - Gv$

ERRORE RELATIVO $\varepsilon = \dfrac{Gm - Gv}{Gv}$

ERRORE RELATIVO PERCENTUALE $\varepsilon\% = \dfrac{Gm - Gv}{Gv} \times 100$

N. B. Le formule sopra sono delle definizioni, non delle formule per calcolare l'errore;
L'errore non si calcola con le formule sopra, ma per altre vie.

Il valore esatto di una grandezza si definisce come

$$\mathbf{Gv = Gm \pm E \;=\; Gm \pm \varepsilon\%}$$

L'errore si esprime sempre in ±.

Esempio: Cronometro per la misura della durata di un evento.

Durata evento T = 200 s

Errore strumentale: 3% come indicato dal costruttore
Errore sistematico: 0, il metodo di misura non introduce errori
Errore accidentale: X%, in quanto l'operatore non può essere assolutamente veloce
Errore grossolano: 0, in quanto l'operatore è competente e preciso

$T = 200\ s \pm 3\%$ $E = \pm\, 200 \times 3/100 = \pm\, 6\ s$ $T = 200 \pm 6\ s$

Esempio 1: Teoria degli errori - Esempio 1.xls

ESERCITAZIONE CON LE FORMULE DEGLI ERRORI

GRANDEZZA	VALORE VERO	U. M.	VALORE MISURATO	U. M.	ERRORE ASSOLUTO	U. M.	ERRORE REL. PERC.
Tensione	102,65	V	101,00	V	-1,65	V	-1,61%
Tensione	56,00	V	56,68	V	0,68	V	1,21%
Tensione	74,00	V	76,00	V	2	V	2,70%
Corrente	3,25	A	3,01	A	-0,24	A	-7,38%
Corrente	1,25	A	1,98	A	0,73	A	58,40%
Corrente	4,02	A	7,89	A	3,87	A	96,27%
Resistenza	1.359	Ω	1.200	Ω	-159	Ω	-11,70%
Resistenza	15.365	Ω	16.052	Ω	687	Ω	4,47%
Resistenza	72.698	Ω	75.000	Ω	2.302	Ω	3,17%

N.B. Quando si eseguono misure, il valore vero non si conosce mai

NELLA REALTA' DELLE MISURE ELETTRICHE, I DATI CHE SI HANNO A DISPOSIZIONE SONO:
- IL VALORE MISURATO
- L'IMPRECISIONE (SOLITAMENTE ERRORE PERCENTUALE) COMMESSO NELLA MISURA

- IN TAL CASO VIENE RICHIESTO DI ESPRIMERE IL VALORE MISURATO NEL MODO PIU' PRECISO POSSIBILE

GRANDEZZA	VALORE MISURATO	U. M.	ERRORE DELLA MISURA	VALORE ESATTO			
Tensione	50	V	3,00%	50	±	1,50	V
Tensione	125,23	V	1,20%	125,23	±	1,50	V
Tensione	358,25	V	2,50%	358,25	±	8,96	V
Corrente	1,22	A	3,00%	1,22	±	0,037	A
Corrente	1,22	A	1,20%	1,22	±	0,015	A
Corrente	6,87	A	2,50%	6,87	±	0,172	A
Resistenza	1.350	Ω	3,00%	1.350	±	41	W
Resistenza	12.750	Ω	1,20%	12.750	±	153	W
Resistenza	66.811	Ω	2,50%	66.811	±	1.670	W

ATTENDIBILITA' DI UNA MISURA

..\CURVA DI GAUSS\Gauss.DOC

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Tipo di misura

Misura diretta: Es. Misura di una lunghezza
Misura indiretta: Es. Misura di una superficie

Spesso il valore di una grandezza si ricava indirettamente attraverso calcoli eseguiti su altre grandezze misurate.

Esempio: Sup. = Base x Haltez $P = V \times I$ $R = V / I$ $R = R1 + R2$

Gli errori commessi sulle grandezze misurate (V, I) portano ad un errore diverso sulle grandezze calcolate che è funzione del tipo di operazione eseguita.

SOMMA DI 2 GRANDEZZE MISURATE (G1 e G2)

$G1 = G1m \pm \varepsilon_{1\%} = G1m \pm E1$ $G2 = G2m \pm \varepsilon_{2\%} = G2m \pm E2$

SOMMA $\Rightarrow$ $G = G1 + G2 = G1m \pm E1 + G2m \pm E2 = \underbrace{G1m + G2m}_{\text{Valori misurati}} + \underbrace{(\pm E1 \pm E2)}_{\text{Errore}}$

Mettendosi nella situazione peggiore in cui i 2 errori sono dello stesso segno e quindi si sommano, diventa:

$$G = G1m + G2m \pm (E1+E2)$$

Conclusione 1: L'errore <u>assoluto</u> commesso nella somma di due o più grandezze misurate è pari alla somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure.

Esprimendo l'errore in termini relativi (che è più significativo), si ha: $\varepsilon = \dfrac{E1 + E2}{G}$

Sostituendo agli errori assoluti gli errori relativi ($E = \varepsilon * G$), diventa $\varepsilon = \dfrac{G1 \times \varepsilon1 + G2 \times \varepsilon2}{G1 + G2}$

ed approssimando i valori misurati ai valori veri, si ha: $\varepsilon \; =\sim \dfrac{G1m \times E1 + G2m \times E2}{G1m + G2m}$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{G1 \times \varepsilon1 + G2 \times \varepsilon2 + G3 \times \varepsilon3 + G4 \times \varepsilon4 + \ldots\ldots\ldots}{G1 + G2 + G3 + G4 + \ldots\ldots}}$$

Conclusione 2: L'errore <u>relativo</u> commesso nella somma di due o più grandezze misurate è pari alla media pesata dei singoli errori relativi. Se i 2 errori relativi hanno lo stesso valore, l'errore relativo sulla somma ha ancora lo stesso valore

Es. 1 → G1 = 120 ± 2% G2 = 300 ± 2% G = 420 ± 2% (nella peggiore ipotesi)

Es. 2 → G1 = 120 ± 3% G2 = 300 ± 2% G = 420 ± 2,3% (nella peggiore ipotesi)

$$\boldsymbol{\varepsilon\% = \frac{120 \text{ x } 3\% + 300 \text{ x } 2\%}{120 + 300} = 2{,}3\%}$$

Esempio di somma di errori:

Grandezza 1 ⇒ V1 = 30 V ± 1% = 30 ± 0,3 V Grandezza 2 ⇒ V2 = 50 V ± 3% = 50 ± 1,5 V

Somma ⇒ V = 30 + 50 + (± 0,3 ± 1,5) = 80 ± 1,8 = 80 ± 1,8/80*100 = 80 ± 2,25%

Oppure ⇒ V = 30 + 50 = 80 V $\varepsilon\% = \frac{30 \text{ x } 1\% + 50 \text{ x } 3\%}{30 + 50} = 2{,}25\%$

DIFFERENZA DI 2 GRANDEZZE MISURATE (G1 e G2)

$G1 = G1m \pm \varepsilon_{1\%} = G1m \pm E1 \qquad G2 = G2m \pm \varepsilon_{2\%} = G2m \pm E2$

$G = G1 - G2 \;=\; G1m \pm E1 - G2m \pm E2 \;=\; G1m - G2m - (\pm E1 \pm E2)$

Che, mettendosi nella situazione peggiore in cui i 2 errori sono dello stesso segno e quindi si sommano, diventa:

$$G = G1m - G2m \pm (E1+E2)$$

Conclusione 1: L'errore assoluto commesso nella differenza di due grandezze misurate è pari alla somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure.

Esprimendo l'errore in termini relativi (che è più significativo) e approssimando i valori veri a quelli approssimati si ha:

$$\varepsilon = \frac{E1 + E2}{G} = \frac{G1 \text{ x } \varepsilon1 + G2 \text{ x } \varepsilon2}{G1 - G2} =\sim \frac{G1m \text{ x } E1 + G2m \text{ x } E2}{G1m - G2m}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{G1 \text{ x } \varepsilon1 + G2 \text{ x } \varepsilon2}{G1 - G2}}$$

Se $\varepsilon1 = \varepsilon2 = \varepsilon12$ $\qquad \varepsilon = \varepsilon12 \text{ x } \left(\frac{G1 + G2}{G1 - G2}\right) \qquad \varepsilon = \varepsilon12 \text{ x } (\geq 1)$

Conclusione 2: L'errore relativo commesso nella differenza di due o più grandezze misurate è maggiore di almeno il più piccolo degli errori relativi delle singole misure in quanto al denominatore appare la differenza G1m – G2m. Quanto più G2m tende a G1m tanto più aumenta l'errore relativo, raggiungendo valori non accettabili.

Es. 1 → $\quad$ **G1 = 110 ± 2% = 110 ± 2,2** $\quad$ **G2 = 100 ± 2% = 100 ± 2**

G = G1 – G2 = 10 ± 4,4 = 10 ± 44% $\quad$ **(nella peggiore ipotesi)**

Pertanto la differenza tra 2 grandezze è una operazione da evitare quanto G2m tende a G1m cioè quando i 2 valori misurati sono dello stesso ordine di grandezza.

PRODOTTO DI 2 GRANDEZZE MISURATE (G1 e G2)

$G1 = G1m \pm \varepsilon_{1\%} = G1m \pm E1$ $\qquad$ $G2 = G2m \pm \varepsilon_{2\%} = G2m \pm E2$

$G = G1 * G2 = (G1m \pm E1) * (G2m \pm E2) = G1m*G2m \pm G1m*E2 \pm G2m*E1 \pm E1*E2$

Dalla relazione generica $G = Gm \pm E$ si ricava l'errore assoluto del prodotto

$E = Gm - G = (G1m*G2m) - [G1m*G2m \pm G1m*E2 \pm G2m*E1 \pm E1*E2] =$

$= \pm G1m*E2 \pm G2m*E1 \pm E1*E2$

Sostituendo agli errori assoluti gli errori relativi ($E = \varepsilon*G$), diventa

$= \pm G1m*G2m*\varepsilon2 \pm G2m*G1m\varepsilon1 \pm G1m*G2m*\varepsilon1*\varepsilon2$

L'errore relativo $\varepsilon = E / G = E / (G1m*G2m) = \pm \varepsilon2 \pm \varepsilon1 \pm \varepsilon1*\varepsilon2$

L'errore relativo solitamente è un valore piccolo molto inferiore a 1, pertanto il prodotto $\varepsilon1*\varepsilon2$ è trascurabile e quindi

$\varepsilon = \pm \varepsilon2 \pm \varepsilon1$ che nella ipotesi peggiore diventa

$$\boxed{\varepsilon = \pm (\varepsilon1 + \varepsilon2)}$$

Conclusione: L'errore relativo commesso nel prodotto di due grandezze misurate è pari alla somma dei singoli errori relativi

Es. 1 → G1 = 12 ± 1% $\qquad$ G2 = 100 ± 2% $\qquad$ G = 120 ± 3% $\qquad$ (nella peggiore ipotesi)

DIVISIONE DI 2 GRANDEZZE MISURATE (G1 e G2)

$G1 = G1m \pm \varepsilon_{1\%} = G1m \pm E1$ $\qquad$ $G2 = G2m \pm \varepsilon_{2\%} = G2m \pm E2$

$G = G1 / G2 \;=\; (G1m \pm E1) / (G2m \pm E2) \;=\; (G1m \pm G1m*\varepsilon1) / (G2m \pm G2m*\varepsilon2)$

$= G1m\,(1 \pm \varepsilon1) / G2m(1 \pm \varepsilon2)$

L'errore assoluto del prodotto (si ricava dalla generica relazione $E = Gm - G$)

$E = Gm - G = (G1m/G2m) - G1m\,(1 \pm \varepsilon1) / G2m(1 \pm \varepsilon2) = (G1m/G2m)*(1 - (1 \pm \varepsilon1) / (1 \pm \varepsilon2)$

L'errore relativo $\qquad \varepsilon = E / G = E / (G1/G2) =\sim E / (G1m/G2) = (1 - (1 \pm \varepsilon1) / (1 \pm \varepsilon2)$

$= [(1 \pm \varepsilon2) - (1 \pm \varepsilon1)] / (1 \pm \varepsilon2) = (\pm \varepsilon1 \pm \varepsilon2) / (1 \pm \varepsilon2)$

Mettendosi nella ipotesi peggiore in cui i 2 errori sono dello stesso segno e si sommano e trascurando il denominatore in quanto ε è un numero molto inferiore a 1 si ha:

$$\boxed{\varepsilon = \pm (\varepsilon1 + \varepsilon2)}$$

Conclusione: L'errore relativo commesso nella divisione di due grandezze misurate è pari alla somma dei singoli errori relativi

Es. 1 → G1 = 500 ± 1% G2 = 100 ± 2% G = 5 ± 3% (nella peggiore ipotesi)

CONCLUSIONI

OPERAZIONE	ERRORE RELATIVO RISULTANTE	FORMULA
Moltiplicazione	L’errore commesso sul prodotto è maggiore (somma) dei 2 errori di partenza	$\varepsilon = \varepsilon 1 + \varepsilon 2$
Divisione	L’errore commesso sul quoziente è maggiore (somma) dei 2 errori di partenza	$\varepsilon = \varepsilon 1 + \varepsilon 2$
Somma	L’errore commesso sulla somma è compreso (media pesata) tra i 2 errori di partenza	$\varepsilon = \dfrac{G1 \times \varepsilon 1 + G2 \times \varepsilon 2}{G1 + G2}$
Differenza	**L’errore commesso sulla differenza è tanto maggiore quanto più G2 tende a G1. Può raggiungere valori non accettabili** E’ sempre maggiore del corrispondente somma.	$\varepsilon = \dfrac{G1 \times \varepsilon 1 + G2 \times \varepsilon 2}{G1 - G2}$
Potenza	L’errore commesso sulla potenza **n**-esima e pari a **n** volte l’errore di partenza	$\varepsilon = n * \varepsilon 1$
Radice	L’errore commesso sulla radice **n**-esima e pari a **1/n** volte l’errore di partenza	$\varepsilon = 1/n * \varepsilon 1$

1 **La somma è un’operazione sempre consentita in quanto non modifica sostanziante l’errore risultante.**

2 **Il prodotto, divisione, potenza, sono operazioni da evitare, se possibile, in quanto l’errore risultante è somma dei 2 errori.**

3 **La differenza è una operazione da evitare in quanto fa aumentare l’errore relativo tanto più quanto G2 tende a G1.**

4 **La radice è una operazione consentita in quanto riduce l’errore relativo.**

ESERCIZIO

Valori misurati	Prodotto Grandezza ε %	Divisione Grandezza ε %	Somma Grandezza ε %	Differenza Grandezza ε %
G1 = 120 ± 2% G2 = 10 ± 2%	1200 ± 4,00%	12 ± 4,00%	130 ± 2,00%	110 ± 2,36%
G1 = 120 ± 2% G2 = 10 ± 4%	1200 ± 6,00%	12 ± 6,00%	130 ± 2,15%	110 ± 2,55%
G1 = 120 ± 2% G2 = 100 ± 2%	12000 ± 4,00%	1,2 ± 4,00%	220 ± 2,00%	20 ± 22%
G1 = 50 ± 2% G2 = 50 ± 6%	2500 ± 8,00%	1 ± 8,00%	100 ± 4,00%	0 ± #####
G1 = 120 ± 6% G2 = 30 ± 2%	3600 ± 8,00%	4 ± 8,00%	150 ± 5,20%	90 ± 8,67%
G1 = 120 ± 2% G2 = 60 ± 7%	7200 ± 9,00%	2 ± 9,00%	180 ± 3,67%	60 ± 11%

CIFRE SIGNIFICATIVE ED ARROTONDAMENTI

Come visto il risultato di una misura è sempre affetto da errore pertanto è inutile rappresentarla con un numero con tante cifre affette da incertezza.

Esempio 1

V = 137,84 V ± 1%   in questo numero già la 3ª cifra è incerta; Infatti il valore vero è compreso tra

V1 = 137,84+1,3784 = **139,2184 V**   e   V2 = 137,84-1,3784 = **136,4616 V**

In tal caso un'approssimazione alla 3ª cifra e sufficiente   → **V = 138 V ± 1%**

Che vuol dire valore vero di V compreso tra   139,38 V   e   136,62 V

CIFRE SIGNIFICATIVE = Numero di cifre sicure + 1 (la 1ª incerta) contate da sinistra a destra a partire dalla 1ª cifra diversa da zero.

Il risultato di una misura va arrotondato per far apparire le sole cifre significative.

ARROTONDAMENTI (a partire dalla cifra più a destra)

Se la cifra da arrotondare è seguita da:

0, 1, 2, 3, 4   arrotondamento per difetto   (la cifra da arrotondare resta invariata)
6, 7, 8, 9   arrotondamento per eccesso   (si aggiunge una unità alla cifra da arrotondare)
5 seguito da zero   arrotondamento per difetto o eccesso
5 con cifra da arrotondare pari   arrotondamento per difetto
5 con cifra da arrotondare dispari arrotondamento per eccesso

Esempi

364832,5285729
364832,528573
364832,52857
364832,5286
364832,529
364832,53
364832,5
364832
364830
364800
364900
365000
$3,65*10^5$ Numero con precisione dell'ordine del 10%
3 Cifra certa;   6 Cifra certa;   5 Prima cifra incerta

CLASSE DI PRECISIONE DEGLI STRUMENTI

Errore strumentale = Errore sistematico

Cl = Classe di uno strumento = 0,05 – 0,1 – 0,2 – 0,5 – 1 – 1,5 – 2,5 – 5 (Secondo le Norme CEI)

Cl = Errore massimo che uno strumento può commettere, è riferito al valore di fondo scala, e si somma (±) a qualsiasi misura venga effettuta.

Esempi:

Voltometro, Portata = 150 V, Cl = 1 → $\quad Emax = \pm \frac{Portata}{Cl} x100 = \pm \frac{150}{1} x100 = \pm 1{,}5\ V$

Voltometro, Portata = 400 V, Cl = 0,5 → $\quad Emax = \pm \frac{Portata}{Cl} x100 = \pm \frac{400}{0{,}5} x100 = \pm 2\ V$

Domanda: Volendo misurare con la massima precisione una tensione di 100 V conviene usare il Voltometro 1 o 2???