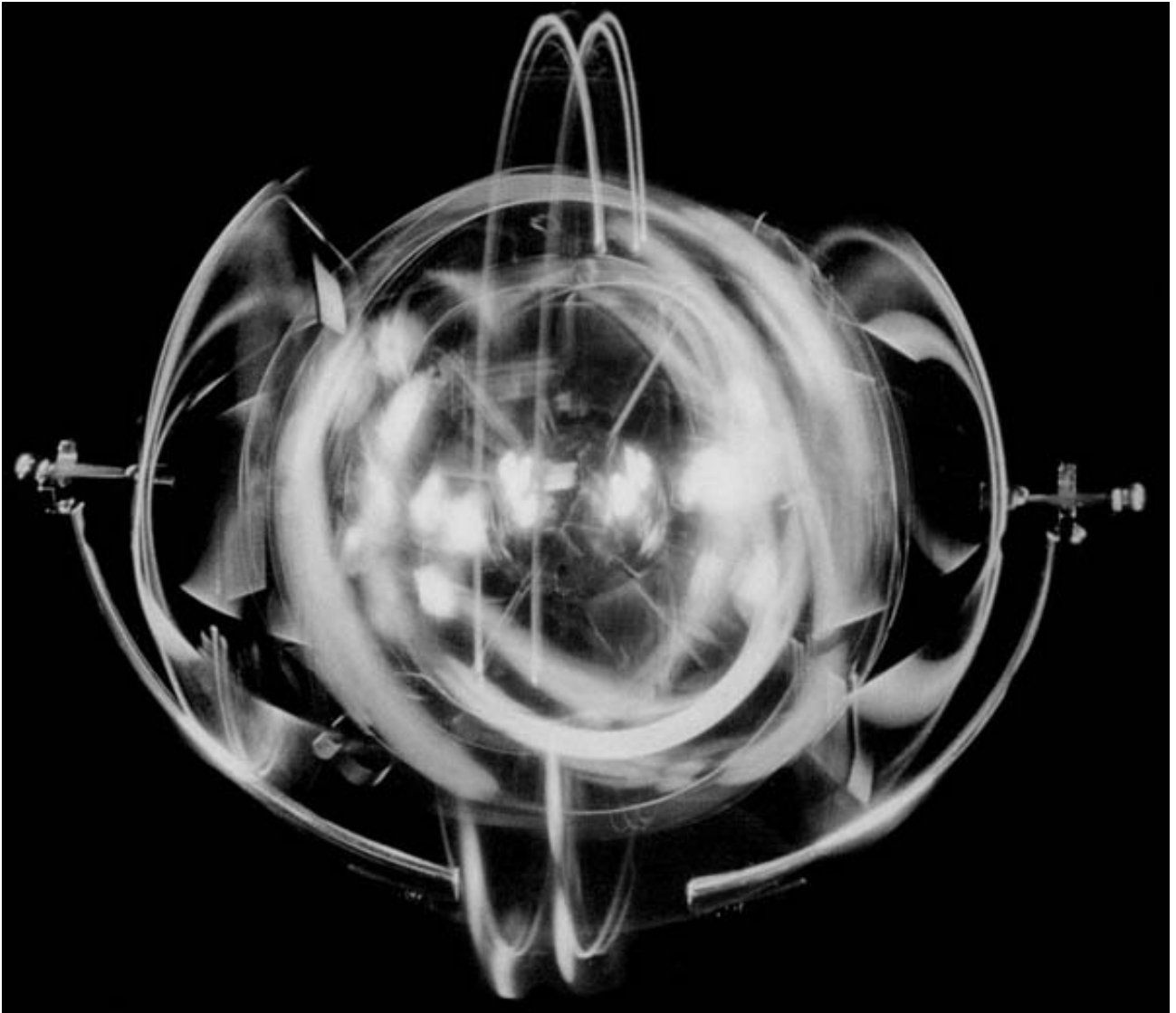


Alcuni esempi di particolare interesse sui moti rotatori

Carlo Caligaris, Iacopo Salvarani,
Sara Magrassi



Indice

Capitolo 1. Cinematica e dinamica del moto rotatorio	5
1. Introduzione	5
2. Traslazione e rotazione di un corpo rigido	6
3. Il momento di inerzia	8
4. Rotolamento di un corpo rigido	9
5. Il momento angolare	10
6. Dinamica della rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso	12
Capitolo 2. La trottola	13
1. L'introduzione al giroscopio: il moto della trottola	13
2. La precessione-1	14
3. La precessione-2	16
Capitolo 3. Il giroscopio	17
1. Il moto del giroscopio	17
2. Le proprietà del giroscopio	21
Capitolo 4. Lo yo-yo (ovvero: ciò che va su, deve tornare giù)	25
1. La storia dello yo-yo	25
2. Come funziona lo yo-yo classico	27
3. La fisica del giocatore professionista	30
4. L'evoluzione della specie	33
5. Le equazioni del moto	34
Capitolo 5. Il Levitron	49
1. Levitron????	49
2. Come funziona?	50
Capitolo 6. Il frisbee (o la fisica dei dischi volanti)	53
1. La scoperta dei dischi volanti	53
2. Dinamiche	54
3. Le proprietà di un frisbee	56
Bibliografia	59

CAPITOLO 1

Cinematica e dinamica del moto rotatorio

1. Introduzione

Durante le nostre attività quotidiane, ci imbattiamo spesso in corpi che ruotano: ad esempio una porta che gira sui cardini, una puleggia che gira sul suo asse o un disco che gira sul piatto del giradischi. In questa breve relazione proponiamo uno studio di alcuni moti particolarmente interessanti e curiosi, la cui spiegazione fisica deve essere ricercata proprio nell'ambito della cinematica e della dinamica del moto rotatorio. Le nozioni di dinamica e cinematica più elementari verranno ricordate quando si renderà necessario un loro utilizzo, tuttavia ci è sembrata giusto inserire una introduzione che richiami quella parte della fisica che studia i moti rotatori. In questa sezione definiremo alcuni concetti a cui faremo ripetutamente riferimento in seguito, senza avventurarci in elaborate dimostrazioni, ma cercando di dare spiegazioni qualitative.

2. Traslazione e rotazione di un corpo rigido

Un corpo rigido compie un moto traslatorio quando ogni punto del corpo subisce il medesimo spostamento nello stesso intervallo di tempo. Compie invece un moto rotatorio quando ogni punto del corpo (eccetto quelli sull'asse di rotazione) si muove lungo una circonferenza. Le grandezze di cui ci serviamo per descrivere il moto rotatorio di un corpo rigido intorno ad un asse fisso sono la coordinata angolare θ ed i vettori velocità angolare ω ed accelerazione angolare α .

La **coordinata angolare** è l'angolo percorso da un corpo in moto rotatorio. Ricordiamo che è convenzione considerare positivo un angolo misurato in senso antiorario. La principale differenza tra la coordinata angolare e quella lineare è la periodicità della seconda, che assume gli stessi valori con un periodo $T=2\pi$.

Il modulo della **velocità angolare** indica la rapidità di variazione della coordinata angolare. In modulo:

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt}$$

La direzione di omega fornisce il senso di rotazione: è da notare come nessuno dei punti di cui il corpo è costituito si muova lungo la direzione assegnata a ω , ma in piani ad essa perpendicolari. L'asse di rotazione fornisce una direzione spaziale che può essere associata in modo univoco al moto (anche in geometria si è soliti individuare un piano conoscendo una retta ad esso perpendicolare ed il punto di intersezione).

L'**accelerazione angolare** è un vettore la cui direzione coincide con l'asse di rotazione. Se l'asse di rotazione viene scelto come asse z , l'accelerazione angolare ha una sola componente. In modulo l'accelerazione è definita come:

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

α_z è positiva quando ω_z è crescente. La cinematica del moto di rotazione con asse fisso si basa su tre relazioni del tutto analoghe a quelle riguardanti il moto di traslazione in una dimensione.

velocità angolare costante

$$\theta = \theta_0 + \omega_z t$$

accelerazione angolare costante

$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega_{z0} + \alpha_z t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2 \end{aligned}$$

Una particella che partecipa ad un moto rotatorio può essere localizzata anche secondo la sua coordinata lineare, la quale è funzione della lunghezza d'arco. La velocità lineare di questa particella ha soltanto la componente tangenziale alla traiettoria ed il modulo di questa

velocità tangenziale è espresso dalla legge:

$$v_t = R\omega_z$$

Secondo lo stesso principio anche l'accelerazione può essere scomposta in una componente tangenziale ed in una componente radiale. La componente tangenziale dell'accelerazione lineare di un punto che percorre una circonferenza è definita come derivata rispetto al tempo della componente tangenziale della velocità lineare. La componente radiale dell'accelerazione lineare corrisponde alla proiezione dell'accelerazione sul raggio della circonferenza, ovvero l'accelerazione centripeta. Si ha:

$$\begin{aligned} a_t &= R\alpha_z \\ a_R &= R\omega^2 \end{aligned}$$

3. Il momento di inerzia

Quando una ruota gira, alla rotazione è associata un'energia cinetica. L'energia cinetica dell'intera ruota è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle che compongono la ruota. Particelle che si trovano a distanze diverse dall'asse di rotazione, hanno differenti velocità lineari, ma essendo la ruota rigida, tutte le particelle hanno la medesima velocità angolare.

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\sum m_i R_i^2 \right) \text{ è l'energia cinetica}$$

e se definiamo $I = \sum m_i R_i^2$

$$\text{otteniamo } K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

La quantità I prende il nome di **momento di inerzia**. La K_{rot} è invece l'**energia cinetica di rotazione** espressa in termini "rotatori". Appare evidente come il momento di inerzia sia l'analogo rotatorio della massa.

Il momento di inerzia non è una proprietà intrinseca di un sistema, ma dipende dalla massa del sistema e dalla posizione dell'asse di rotazione. Esso varia secondo una relazione quadratica dalla distribuzione della massa in direzione perpendicolare all'asse ed è indipendente dalla distribuzione della massa in direzione parallela all'asse. Si può dimostrare come il momento d'inerzia possa essere calcolato secondo la seguente relazione:

$$I = \int_V \rho R^2 dV$$

se, ad esempio, l'asse di rotazione è l'asse z :

$$I = \int_V (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \rho(x, y) dx dy dz$$

dove ρ è la densità del corpo. È possibile trovare tabulati i momenti di inerzia dei solidi più rappresentativi con densità uniforme ed asse di rotazione passante per il centro di massa e coincidente con un asse di simmetria.

Il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse che non sia di simmetria, può risultare assai complesso. Fortunatamente esiste un teorema, detto **teorema degli assi paralleli** che fornisce una relazione tra il momento di inerzia I_p rispetto ad un asse passante per un punto arbitrario P, ed il momento di inerzia I_{cm} rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa del corpo.

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

M è la massa del corpo e d è la distanza tra il centro di massa e l'asse di rotazione.

4. Rotolamento di un corpo rigido

Finora abbiamo discusso soltanto di corpi che ruotano intorno ad un asse fisso. Ora prendiamo in considerazione un corpo che rotola, come una ruota o una palla. Se analizziamo un corpo di sezione circolare che rotola senza strisciare lungo una linea retta, notiamo come l'asse di rotazione abbia un moto traslatorio pur mantenendo un'orientamento costante. Un corpo in tale circostanza ruota intorno ad un asse che passa per il punto di contatto tra il corpo e la superficie su cui questo rotola. Questo asse mantiene un orientamento costante parallelo alla superficie e perpendicolare alla direzione del moto. Dal momento che non si verifica alcuno strisciamento, il punto di contatto è istantaneamente in quiete e l'asse di rotazione del corpo passa istantaneamente per tale punto. L'energia cinetica di un corpo che rotola può essere espressa come somma di due termini: uno che corrisponde alla rotazione intorno al centro di massa e l'altro che corrisponde alla traslazione del centro di massa.

$$K = K_{rot} + K_{cm} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

5. Il momento angolare

Il moto rotatorio è estremamente comune in natura: elettroni, nuclei e molecole, ruote, ingranaggi e pulegge, pianeti, stelle e galassie, tutti ruotano. Ma cosa fa in modo che una ruota cominci a girare? E quando essa gira, cosa la fa fermare? Il momento di una forza che si esercita sulla ruota fa variare la sua velocità angolare proprio come una forza fa variare la velocità lineare di un corpo. Il fatto che la ruota tenda a continuare a girare è una prova del fatto che al moto rotatorio è associata una grandezza analoga alla quantità di moto associata al moto traslatorio: essa è il **momento angolare** o **momento della quantità di moto**.

Definiamo quindi il momento angolare:

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

dove \vec{r} è il vettore posizione del punto materiale misurato a partire da O e \vec{p} è la sua quantità di moto. Essendo definito come un prodotto vettoriale, il momento angolare è ovviamente una grandezza vettoriale. Esso è perpendicolare al piano contenente \vec{r} e \vec{p} . Il valore del momento dipende dal punto O rispetto al quale viene calcolato.

Nel caso di un punto materiale che si muove lungo una circonferenza, il verso del momento angolare dipende dal senso della rotazione mentre la sua direzione è perpendicolare al piano della circonferenza.

Per strano che possa apparire, un punto materiale che si muove in linea retta ha un momento angolare diverso da zero rispetto a qualunque punto che non si trovi sulla sua traiettoria.

punto materiale che si muove in linea retta

$$l = mvr$$

A questo punto si può anche definire l'analogo rotatorio della seconda legge di Newton per un punto materiale.

$$\sum \tau = \frac{dl}{dt}$$

Il momento risultante applicato ad un singolo punto materiale rispetto ad un certo punto è pari alla rapidità di variazione del momento angolare del punto materiale rispetto a quel punto. Il momento angolare totale di un sistema di più punti materiali rispetto ad un punto è definito come la somma vettoriale dei singoli momenti angolari di tutti i punti materiali rispetto a quello stesso punto. La somma dei momenti applicati a tutti i punti materiali di un sistema, può essere suddivisa in due parti: la somma dei momenti agenti sui punti del sistema a causa di forze che esse esercitano l'una sull'altra (il momento risultante interno, e la somma dei momenti agenti sui punti del sistema a causa di forze esercitate su di esse da corpi esterni al sistema (il momento risultante esterno). La terza legge di Newton implica che il momento risultante

interno sia uguale a zero. Pertanto, l'equazione scritta prima, assume una forma leggermente diversa:

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$$

Soltanto i momenti esterni possono far variare il momento angolare di un sistema. Nel Sistema Solare i pianeti ed il Sole esercitano forze gli uni sugli altri ed i momenti prodotti da queste forze rispetto a qualsiasi punto si elidono a due a due. Il momento angolare del Sistema Solare rispetto a qualunque punto non è influenzato dai momenti prodotti dalle forze che si esercitano tra i pianeti o tra il Sole e qualsiasi pianeta. L'equazione è valida se il punto di riferimento è nel centro di massa del sistema, anche quando il centro di massa accelera rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Ciò rende spesso conveniente separare il moto di un sistema in due parti: il moto traslatorio del centro di massa ed il moto rotatorio intorno al centro di massa.

6. Dinamica della rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso

Il moto rotatorio di un corpo rigido intorno ad un asse fisso è di grande interesse pratico. Nel seguito bisognerà aver cura di distinguere tra una distanza r da un punto ed una distanza R da un asse. Il momento angolare è relativo ad un punto, mentre la velocità angolare è relativa ad un asse. La componente assiale del momento angolare di un corpo rigido rispetto ad un qualsiasi punto dell'asse di rotazione è data dalla seguente espressione:

$$L_z = I\omega_z$$

Quando un corpo è simmetrico rispetto all'asse di rotazione, il momento angolare è parallelo all'asse stesso. Le componenti radiali dei momenti delle particelle si elidono a vicenda e la somma delle componenti radiali è nulla. Inoltre, sempre se il corpo è dotato di simmetria, il momento e la velocità angolari sono paralleli tra loro e si può allora scrivere:

$$L = I\omega$$

L'equazione del moto di un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso è:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

Dalle relazioni che abbiamo scritto, possiamo evincere una considerazione che era già intuibile per quanto detto in precedenza: il momento di inerzia è la misura della resistenza che un corpo oppone alla variazione della propria velocità angolare. Per un dato momento risultante esterno, un corpo con un momento di inerzia maggiore subirà un'accelerazione angolare minore.

Se il momento risultante applicato ad un sistema di punti materiali rispetto ad un punto è zero, il momento angolare del sistema rispetto a quello stesso punto è costante.

CAPITOLO 2

La trottola

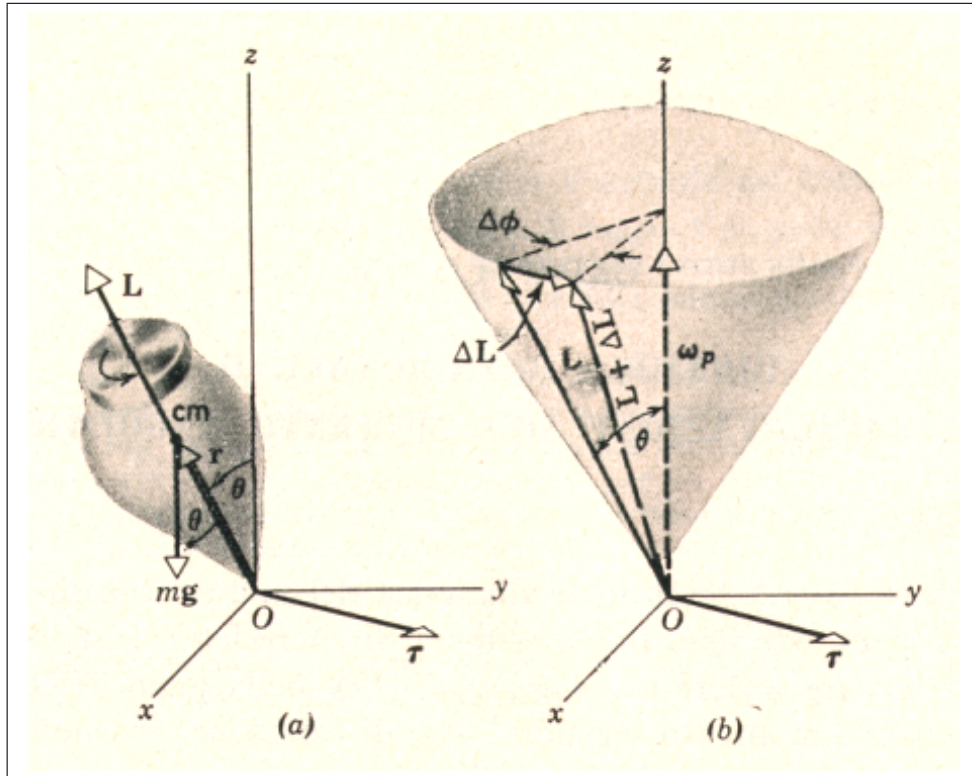
1. L'introduzione al giroscopio: il moto della trottola

Consideriamo una trottola in rotazione attorno al suo asse di simmetria ed il cui estremo è fisso nell'origine O di un sistema inerziale. Sappiamo per esperienza che l'asse di tale trottola si muove attorno all'asse verticale descrivendo un cono. Questo moto è detto **precessione**. Vedremo come lo studio del moto della trottola sia utile per studiare quello del giroscopio.

Ricordiamo che, mentre $\vec{\omega}$ è sempre orientato secondo l'asse di rotazione fisso di un corpo in rotazione su se stesso, in generale \vec{L} non lo è. La velocità ed il momento angolare sono orientati lungo lo stesso asse in caso di corpi dotati di simmetria. Nel caso della trottola rotante queste due grandezze si possono supporre coassiali se $\omega \gg \omega_p$, cioè se la precessione è relativamente lenta in modo tale che l'asse, pur non essendo fisso, cambi direzione solo in modo molto lento.

2. La precessione-1

Abbiamo già citato ω e ω_p . Con queste grandezze intendiamo riferirci alla velocità angolare intorno al proprio asse della trottola ed alla velocità angolare di precessione. Il momento angolare \vec{L} si trova lungo lo stesso asse di rotazione della trottola. Con θ indichiamo l'angolo compreso tra l'asse della trottola e la verticale al piano su cui essa giace.



Sulla trottola agiscono due forze: una reazione verso l'alto dovuta al perno in O e la forza di gravità, o peso, applicata nel centro di massa e diretta verso il basso. Rispetto al punto O il peso è l'unica forza avente momento.

$$\left(\sum \vec{\tau}\right)^{(O)} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$$

\vec{r} è il vettore posizione del centro di massa rispetto al perno. Per la definizione di prodotto vettoriale, il momento è perpendicolare al piano di \vec{r} e $m\vec{g}$, ma quando su un corpo rigido agisce un momento meccanico, si ha una variazione del momento angolare del corpo secondo la relazione fondamentale:

$$\vec{\tau} = d\vec{L}/dt \quad d\vec{L} = \vec{\tau}dt$$

Essendo un vettore, \vec{L} può cambiare in modulo, direzione e verso. L'equazione appena scritta indica come la variazione si \vec{L} , vale a dire

$d\vec{L}$ deve avere la stessa direzione di $\vec{\tau}$. $\vec{\tau}$ abbiamo detto essere perpendicolare al piano di \vec{r} e di $m\vec{g}$; in questo piano giace anche \vec{L} e quindi $d\vec{L}$ è perpendicolare a \vec{L} .

Il momento angolare della trottola alla fine di un intervallo dt è la somma vettoriale di \vec{L} e di $d\vec{L}$, ovvero di due vettori perpendicolari tra loro. Trascurando il modulo della variazione del momento, possiamo dire che il nuovo momento angolare avrà lo stesso modulo del vecchio, ma una diversa direzione. L'estremo del vettore momento angolare descrive così nel tempo un cerchio orizzontale; ma poichè questo vettore giace sempre sull'asse della trottola, si capisce come l'asse debba descrivere lo stesso cerchio descritto dal momento. In questa maniera la trottola si muove attorno alla verticale originando la precessione.

3. La precessione-2

Chiamiamo $d\phi$ l'angolo sotteso al vettore $d\vec{L}$. Possiamo definire la velocità di precessione come:

$$\omega_p = d\phi/dt$$

Se consideriamo $dL \ll L$, possiamo scrivere:

$$d\phi \cong \frac{dL}{L \sin \theta} = \tau \frac{dt}{L \sin \theta} \quad \omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\tau}{L \sin \theta}$$

Poichè:

$$\tau = rmg \sin(\pi - \theta) = rmg \sin \theta$$

possiamo concludere:

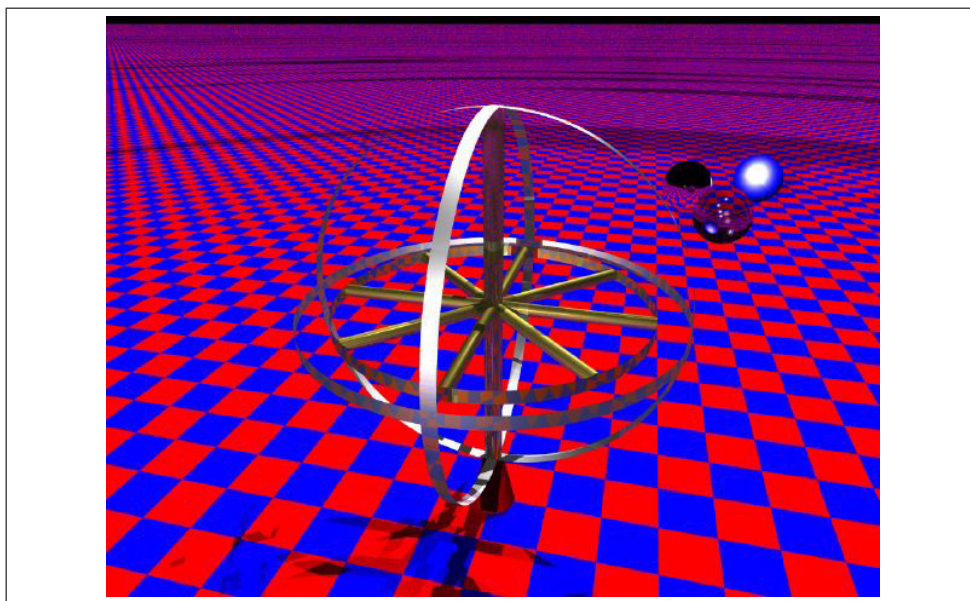
$$\omega_p = \frac{mgr}{L}$$

CAPITOLO 3

Il giroscopio

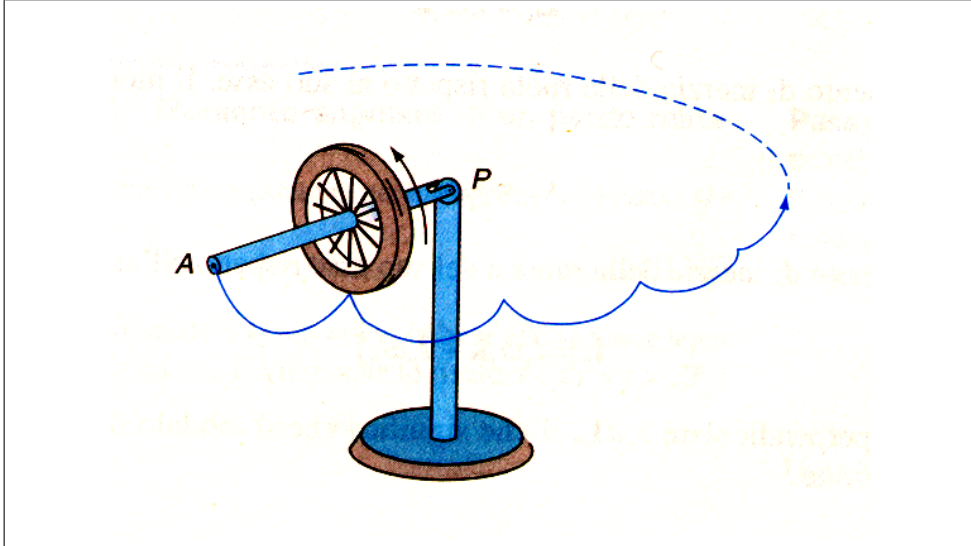
1. Il moto del giroscopio

Generalmente l'equazione $\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ é usata nel caso in cui si tratti un moto di corpi rigidi simmetrici rispetto ad un asse di rotazione con orientamento fisso. In casi del genere la sommatoria dei momenti e $d\vec{L}/dt$ hanno la stessa direzione di \vec{L} . Il caso del giroscopio é piú generale: infatti il momento risultante ed il momento angolare non hanno la stessa direzione. Il moto giroscopico puó essere esemplificato con una trottola o un giroscopio giocattolo.



A volte per riprodurre il fenomeno si ricorre ad una ruota di bicicletta che ruota rapidamente intorno al suo asse con velocità angolare ω_s . Una estremitá dell' asse é collegata alla sommitá di un supporto in modo che possa orientarsi liberamente. Quando si lascia andare l'estremitá libera dell'asse, accade un fenomeno poco prevedibile: la ruota in rotazione sembra sfidare la gravitá e non cade a terra, come ovviamente farebbe se non stesse girando. La ruota ed il suo asse incominciano a girare intorno ad un asse verticale descrivendo una traiettoria circolare. Proprio come nel caso della trottola, questo moto prende il nome di **precessione** e con ω_p viene indicata la velocità angolare di precessione. Affinché si verifichi la precessione, ω_s deve essere molto maggiore di

ω_p . La ruota e l'asse tendono anche ad oscillare durante la precessione: questo moto è chiamato nutazione e tende a smorzarsi per l'attrito del perno; noi trascureremo questo moto.



Consideriamo un sistema di coordinate avente origine nel perno, l'asse y verticale ed il piano xz orizzontale e consideriamo il moto in un istante in cui esso ha la direzione dell'asse z (dalla parte della ruota). Le forze che agiscono sul sistema (ruota ed asse) sono la forza peso \vec{P} applicata al centro di massa della ruota e diretta verso il basso e la reazione \vec{R} esercitata dal supporto sul perno P .

Trascurando il momento della forza d'attrito, il momento risultante esterno applicato al sistema rispetto a P è:

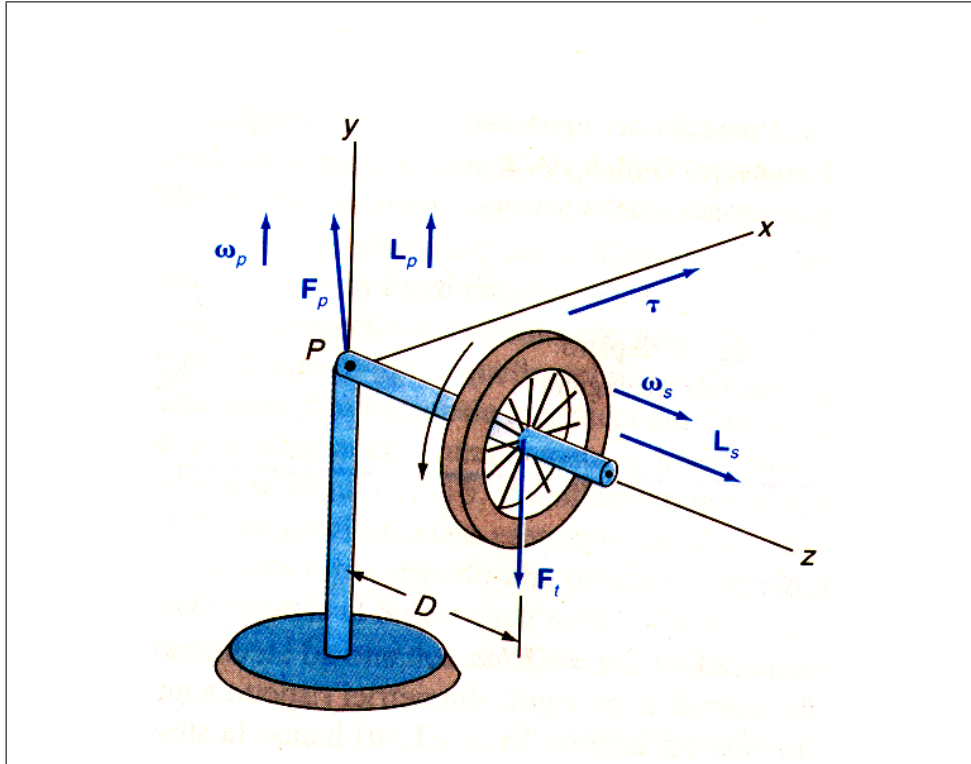
$$\sum \vec{\tau} = F_t D \vec{i} = MgD \vec{i}$$

dove D è la distanza tra il punto di applicazione della forza peso della ruota ed il punto P .

Soltanto il peso contribuisce al momento rispetto a P perché la retta d'azione di \vec{F}_p passa per P . Perciò la variazione infinitesima $d\vec{L}$ del momento angolare totale rispetto a P durante un intervallo di tempo infinitesimo dt è:

$$d\vec{L} = \sum \vec{\tau} dt = (MgDdt) \vec{i}$$

Il momento angolare totale del sistema rispetto a P è la somma del momento angolare dovuto alla rotazione della ruota sul proprio asse (movimento di spin) e del momento angolare dovuto alla precessione della ruota e del suo asse.



$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_s + \vec{L}_p \\ \vec{L}_s &= I_s \omega_s \vec{k} \\ \vec{L}_p &= I_p \omega_p \vec{j} \\ \vec{L} &= I_s \omega_s \vec{k} + I_p \omega_p \vec{j}\end{aligned}$$

\vec{L} è perpendicolare a $d\vec{L}$, il che significa che il modulo di \vec{L} praticamente non varia, ma varia la sua direzione.

Ammettendo $\omega_s \gg \omega_p$, il momento angolare totale risulta praticamente uguale al momento angolare di spin. L'angolo infinitesimo di precessione spazzato nell'intervallo di tempo dt è:

$$\begin{aligned}d\phi &= \frac{dL}{L} = \frac{MgDdt}{I_s \omega_s} \\ \omega_p &= \frac{d\phi}{dt} \\ \omega_p &= \frac{MgD}{I_s \omega_s}\end{aligned}$$

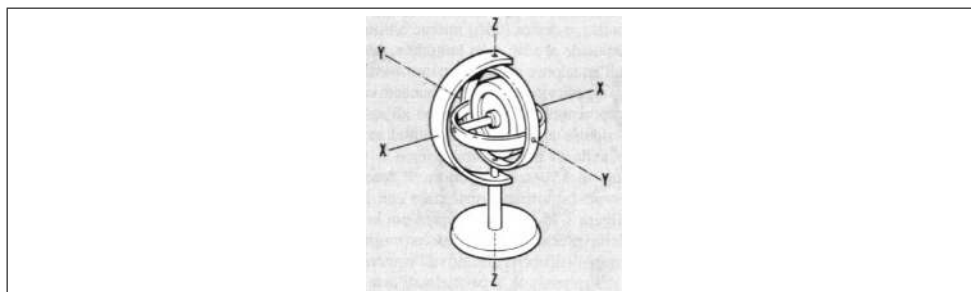
In tal modo abbiamo ricavato un'equazione che fornisce la velocità angolare di precessione. L'equazione indica che, se l'attrito dell'asse fa diminuire ω_s , ω_p aumenta.

Ma perchè la ruota non cade se sta ruotando, ma cade se non è in rotazione?

Supponendo la ruota ferma, \vec{L}_s è nullo. $\sum \tau$ e $d\vec{L}$ hanno entrambi la direzione dell'asse x . Poichè la ruota non gira quando viene lasciata andare, il momento angolare iniziale è nullo; dopo che la ruota è lasciata andare, il momento angolare aumenta di modulo ed è sempre diretto lungo l'asse x : l'asse e la ruota ruotano intorno all'asse x .

Supponendo la ruota inizialmente in rotazione, $d\vec{L}$ (che ha la direzione dell'asse x) si somma al momento angolare preesistente \vec{L}_s (diretto lungo l'asse z dando luogo ad un nuovo vettore $\vec{L} + d\vec{L}$, il quale forma un angolo $d\phi$ con l'asse z . Ciò significa che dopo un tempo dt l'asse della ruota ha preceduto di un angolo $d\phi$. Questa rotazione avviene intorno all'asse verticale y invece che intorno all'asse orizzontale x . Siccome l'asse della ruota si è spostato di un angolo $d\phi$ dall'asse z , il momento risultante ora forma un angolo $d\phi$ con l'asse x . Entrambi i vettori, $\sum \vec{\tau}$ e \vec{L} , ruotano continuamente intorno alla verticale, con $\sum \vec{\tau}$ in anticipo di $\frac{\pi}{2} rad$ su \vec{L} .

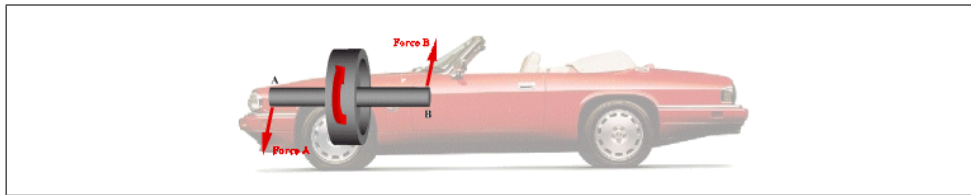
Il momento delle forze non mantiene una direzione fissa quando la ruota gira, mentre la mantiene quando la ruota non gira. È il momento delle forze che causa la precessione di una ruota che gira, come causa la caduta di una ruota che non gira.



2. Le proprietà del giroscopio

La **rigidità o inerzia giroscopica** è la proprietà fondamentale del giroscopio, grazie alla quale l'apparato può essere proficuamente impiegato in molteplici applicazioni aeronautiche. La rigidità giroscopica è una conseguenza dell'inerzia accumulata dal disco, proporzionale alla sua massa e alla sua velocità. Grazie alla rigidità, il giroscopio a tre gradi di libertà una volta messo in rotazione, si mantiene nello stesso piano in cui si trovava al momento dell'inizio della rotazione, indipendentemente dalla posizione assunta dal sistema. In altre parole, una volta messo in rotazione il disco, si può prendere il sistema e capovolgerlo, coricarlo, farlo roteare in qualsiasi direzione, osservando che, nel frattempo, l'asse di rotazione rimane costantemente rivolto nella direzione iniziale.

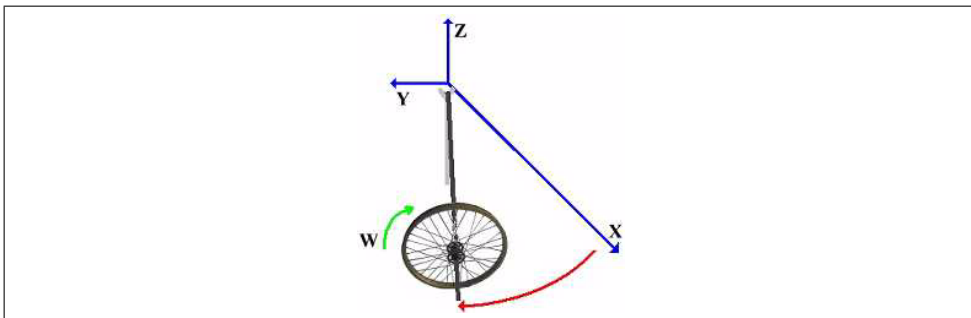
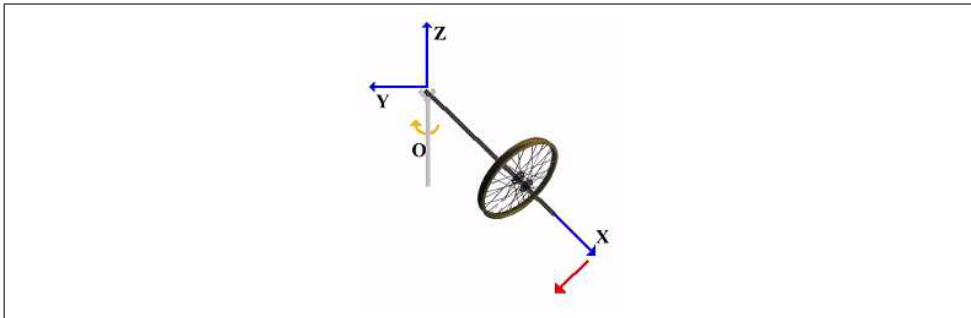
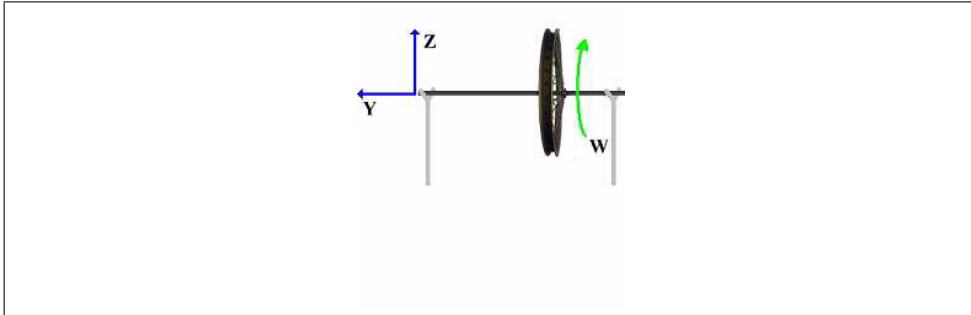
Possiamo considerare, per esempio, l'asse di un giroscopio fissato alla struttura di una macchina (spesso i motori delle auto, per forma e peso, si comportano come giroscopi).



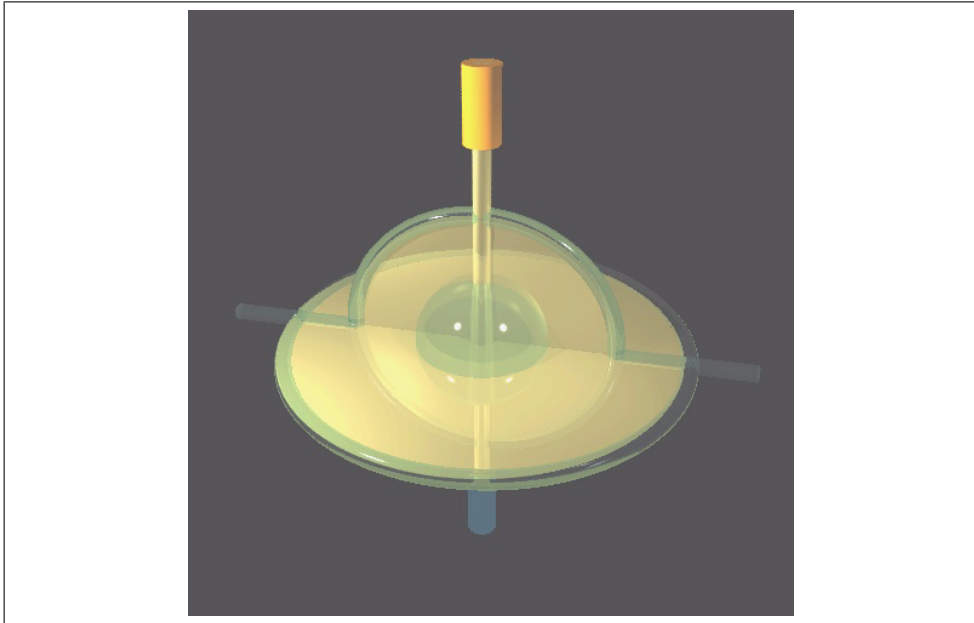
Se il giroscopio ruota ad una velocità abbastanza alta in senso orario, quando la macchina gira verso destra, le forze applicate alla struttura della macchina forzano la parte anteriore della macchina verso il basso e quella posteriore verso l'alto. Se la macchina gira a sinistra, i risultati si invertono. L'esatto contrario accade se il giroscopio sta ruotando in senso antiorario. Il giroscopio interviene con delle forze solo se la macchina si sta spostando lungo un angolo. Questo effetto è noto come precessione giroscopica.

La **precessione** può, in un certo senso, essere vista come una "difesa" del giroscopio nei confronti della forza perturbatrice. La precessione, infatti, cessa nel momento in cui il piano di rotazione del disco si porta a coincidere col piano in cui agisce la forza perturbatrice, cosicché la forza stessa, non avendo più componenti devianti, può solo accelerare il moto di rotazione del disco.

Nelle seguenti immagini si può vedere una ruota di bicicletta comportarsi come un giroscopio. Inizialmente entrambi gli estremi dell'asse sono trattenuti e la ruota gira semplicemente. Se viene rimosso uno dei supporti la gravità esercita una forza che spinge la parte destra dell'asse verso il basso. La precessione giroscopica forza la ruota a precedere intorno al proprio asse. La direzione presa dalla precessione dipende dalla direzione verso cui ruota il giroscopio.



La **deriva giroscopica** è una precessione indesiderata, in genere di lieve entità, ma costante, cui vanno soggetti i giroscopi, provocata dalle piccole forze che si generano internamente al sistema a causa delle inevitabili, se pur minime, imperfezioni costruttive, quali sbilanciamenti del disco, disallineamenti degli assi, e attriti sui sostegni dell'asse di rotazione e degli snodi.



CAPITOLO 4

Lo yo-yo (ovvero: ciò che va su, deve tornare giù)

1. La storia dello yo-yo

D. F. Duncan Sr è colui che ha contribuito alla creazione di un freno idraulico per le automobili, che ha immesso sul mercato il primo parchimetro e che ha avuto l'idea di incentivare l'acquisto di una confezione di cereali mettendo in palio un giocattolo a chiunque avesse spedito due confezioni come prova dell'acquisto. Ebbene: lo yo-yo ha avuto un'improvvisa diffusione all'interno degli Stati Uniti proprio grazie a D. F. Duncan Sr. Egli però non è l'inventore dello yo-yo: è stato preceduto di circa 2500 anni.

A dire il vero non sappiamo con precisione quale sia stato il primo popolo a giocare con lo yo-yo: si ipotizza siano stati i Cinesi, ma le prove a nostra disposizione depongono a favore dei Greci. Lo yo-yo è considerato il secondo giocattolo più vecchio della storia; per la cronaca, il primato assoluto è da attribuire alla bambola. Nell'Antica Grecia il gioco era costruito con legno, metallo e terracotta. Le due metà dello yo-yo erano decorate con immagini degli Dei greci ed alla stregua di un rito di passaggio verso l'età adulta, i bambini greci si separavano dai loro giocattoli e li mettevano sull'altare familiare per rendere omaggio alle loro divinità.

Attorno al 1700 lo yo-yo si è spostato dalle regioni orientali a quelle occidentali, assumendo nomi differenti a seconda delle Nazioni che ne venivano a conoscenza. La parola "yo-yo" è una parola del linguaggio originario delle Filippine e significa "torna indietro"; in questo Paese lo yo-yo è stata un'arma per circa 400 anni ed il suo funzionamento era alquanto ingegnoso: i Filippini del XVI Secolo si nascondevano sugli alberi e colpivano gli animali che passavano sotto di loro con una pietra legata ad un filo. Una volta colpita la preda, potevano tirare su la pietra senza doverla raccogliere.

Il gioco ha caratterizzato anche l'epoca del Regno del Terrore successiva alla Rivoluzione Francese. Durante questo periodo molti aristocratici francesi erano costretti a fuggire verso le Nazioni straniere ed erano usi portare nel loro bagaglio i loro yo-yo fatti di vetro ed avorio. Gli avvistamenti di personaggi storici intenti a rilassarsi con lo yo-yo sono molteplici: il Generale Lafayette attorno al 1780, Napoleone e le sue truppe il 18 Giugno 1815 a Waterloo. Nell'opera datata 1792 "Le Nozze di Figaro", si vede Figaro giocare con lo yo-yo e descriverlo come

”un nobile gioco che disperde la fatica di pensare”.

Attorno al 1860 il gioco si è imposto anche negli Stati Uniti, ma il termine yo-yo non è stato introdotto prima del 1920 quando Pedro Flores, un immigrato filippino, ha cominciato a produrre un gioco etichettato con questo nome. Flores è diventata la prima persona ad occuparsi di una produzione di massa di yo-yo, nella sua piccola fabbrica di giocattoli in California.

A questo punto è entrato in scena Duncan, il quale ha visto il gioco, ne è rimasto positivamente colpito, ne ha acquistato i diritti da Flores nel 1929 ed ha registrato il marchio Yo-Yo©. Duncan ha contribuito alla tecnologia dello yo-yo inserendo una corda che potesse scivolare ed arrotolarsi attorno all’asse, invece di un nodo. La sagoma con cui lo yo-yo si era diffuso in America era quella tradizionale o imperiale, ovvero con le due metà dalle forme leggermente bombate. Duncan ha introdotto la forma ”a farfalla”, un design che ”rivoltava” la forma dei due piccoli cilindri, rendendola concava e non più convessa. La farfalla permette al giocatore di arrotolare lo yo-yo intorno alla corda più facilmente, agevolando alcuni trucchi. Entrambe le versioni esistono ancora oggi.

La fabbrica di Duncan è arrivata a produrre la bellezza di 3600 pezzi all’ora, rendendo la sua sede (Luck, Wisconsin) la capitale mondiale dello yo-yo. La vendita dell’articolo ha raggiunto il suo picco nel 1962, quando Duncan ha venduto 45 milioni di unità. Sfortunatamente, il 1962 ha anche segnato la fine dell’avventura di Duncan nel settore dei giocattoli. Infatti i costi che derivavano dalla sua azienda erano sempre crescenti e non potevano più essere pareggiati dalle pur notevoli entrate. Il parchimetro era da tempo l’attività più redditizia di Duncan, che quindi non ha esitato a vendere la sua attività in campo ludico. Un’altra azienda, la ”Flambeau Plastic Company” ha acquistato il nome ”Duncan” e tutti i marchi di fabbrica della compagnia.

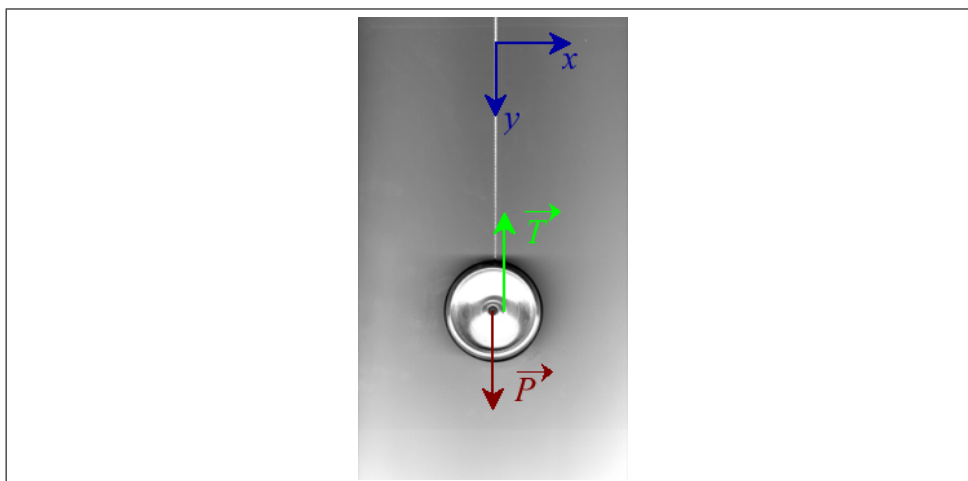
La storia dello yo-yo continua ancora oggi e l’ultima onorificenza di cui si è reso partecipe, è stato l’essere il primo gioco ad essere portato nello spazio aperto.

2. Come funziona lo yo-yo classico

Se esaminiamo uno yo-yo, notiamo come esso consista di due pesanti dischi connessi tra loro da un sottile asse. La traiettoria dello yo-yo può essere vista come una U che parte dal dito del giocatore, scende e ritorna all'altezza del dito; lo yo-yo non può mai prescindere da questa U .

Quando lasciamo cadere lo yo-yo, la forza di gravità agisce sul suo centro di massa e lo spinge verso il basso. Poichè la corda dello yo-yo è arrotolata attorno al suo asse, e poichè un capo della corda è attaccato al nostro dito, lo yo-yo è forzato a ruotare mentre cade. Se lo yo-yo non potesse ruotare, non potrebbe nemmeno cadere.

durante la caduta



$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{T} \text{ rispetto all'asse ideale della fune}$$

Al pari di qualsiasi altro oggetto che cade in un campo gravitazionale, la velocità della caduta aumenta linearmente con il tempo ed alla stessa maniera si comporta anche la velocità angolare. Queste due grandezze raggiungono il valore massimo quando la corda è completamente srotolata. Dal punto di vista fisico, questo comportamento può essere analizzato facendo alcune considerazioni sulla conservazione dell'energia. L'energia potenziale iniziale dello yo-yo viene convertita in energia cinetica del centro di massa ed energia cinetica di rotazione. La maggior parte dell'energia, al pari di un giroscopio, è sfruttata per la rotazione.

(trascurando gli attriti)

accelerazione costante - moto accelerato uniforme

$$\left(\sum \vec{F}\right)_y = m \cdot \vec{a}_y = m \cdot \vec{g} + \vec{T}$$

$$m \cdot a = m \cdot g - T$$

$$V = a \cdot t$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

conservazione dell'energia meccanica

$$\begin{aligned}U_0 + K_0 &= U_f + K_f \\U_0 &= K_{cm} + K_{rot} \\mgh &= \frac{1}{2}mV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{tot}\omega\end{aligned}$$

Consideriamo uno yo-yo "vecchia maniera": usualmente, la corda è legata non troppo saldamente attorno all'asse, permettendo in questo modo allo yo-yo di continuare a ruotare una volta arrivato in fondo. Poiché l'intera lunghezza della corda è stata sfruttata, lo yo-yo non può proseguire oltre e, di conseguenza, la rotazione non può aumentare ulteriormente. Se non si applicano ulteriori forze, l'attrito tra l'asse e la corda dissiperà eventualmente l'energia di rotazione o, in maniera equivalente, il momento angolare dello yo-yo. Questo attrito, dopo un pò di tempo, causa l'arresto della rotazione, non essendo grande abbastanza per permettere all'asse di arrotolare la corda e quindi di iniziare il cammino di risalita.

$$\begin{aligned}&\text{al fondo} \\(\sum \vec{F})_y &= m \cdot \vec{a}_{cm} = 0 \\(\sum \vec{F})_x &= m \cdot \vec{a}_{cm} = 0 \\&\vec{P} = -\vec{T} \\&\vec{F}a = \text{forza d'attrito} \\(\sum \vec{\tau}) &= I \cdot \vec{\alpha} = \vec{\tau}_{Fa}\end{aligned}$$

quando $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{F}a = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{Fa} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$ ed il corpo è fermo

Un istantaneo strappo applicato alla corda causa un breve ma cospicuo incremento dell'attrito tra asse e corda ed un momentaneo aumento della tensione. L'attrito della corda attorno all'asse adesso consente al momento angolare dello yo-yo di iniziare l'avvolgimento della corda. Questo, necessariamente, implica che lo yo-yo cominci a "scalare" la corda.

$$\begin{aligned}&\text{istante al fondo} \\&\vec{M} = \text{forza impulsiva verso l'alto} \\&Fa' > Fa \\&T' > T \\&K' = K'_{rot} + K'_{cm} \\&K'_{rot} = K_{rot} \\&K'_{cm} = L_{\vec{M}} + K\end{aligned}$$

$(\sum \vec{F})_y = \vec{P} + \vec{T}'$ ma il peso non non è una forza impulsiva, quindi: $(\sum \vec{F})_y = \vec{T}'$

Mentre lo yo-yo continua a risalire la corda, l'energia cinetica dello yo-yo è convertita in potenziale gravitazionale corrispondente alla crescente altezza della posizione del centro di massa. Per questa ragione, il momento angolare dello yo-yo e, da questo momento, la sua

rotazione, diminuiscono costantemente mentre lo yo-yo sale. Questo è, naturalmente, il processo opposto alla caduta dello yo-yo.

durante la risalita

$$K'_{rot} + K'_{cm} = mgh$$

$$\left(\sum \vec{\tau}\right) = \vec{\tau}_{\vec{T}'} + \vec{\tau}_{\vec{F}_a}$$

$$\left(\sum \tau\right) = -\tau_{\vec{T}} - \tau_{\vec{F}_a}$$

Se non fosse per la forza d'attrito, lo yo-yo risalirebbe l'intera lunghezza della corda raggiungendo la mano del giocatore. In realtà lo yo-yo si ferma ogni volta ad una altezza inferiore; è possibile mantenere lo yo-yo in movimento dandogli una forza verso l'alto per ogni ciclo. Questa forza deve essere combinata con lo strappo necessario per fare iniziare la risalita. La forza serve per dare al centro di massa una piccola quantità extra di energia cinetica, che compensa il lavoro compiuto dalle forze di attrito, in modo che lo yo-yo possa essere mantenuto in movimento senza limiti di tempo.

3. La fisica del giocatore professionista

Le performance dei migliori giocatori di yo-yo dipendono anche dalla loro conoscenza di alcuni principi fisici. Tutti sanno, ad esempio, che la rotazione dello yo-yo determina il suo momento angolare. Come succede con il giroscopio, mentre lo yo-yo sta girando, il momento lo mantiene nella sua orientazione originale. Nel momento in cui la rotazione viene meno, la stabilità che si aveva prima scompare e lo yo-yo comincia ad ondeggiare da una parte all'altra.

Un altro aspetto da tenere in considerazione è la distribuzione del peso dell'oggetto. Naturalmente, se il peso è distribuito in maniera simmetrica, il comportamento sarà quello che ogni giocatore è in grado di prevedere. Ma si possono immaginare numerosi modi per distribuire la massa dei due dischi che formano il gioco.

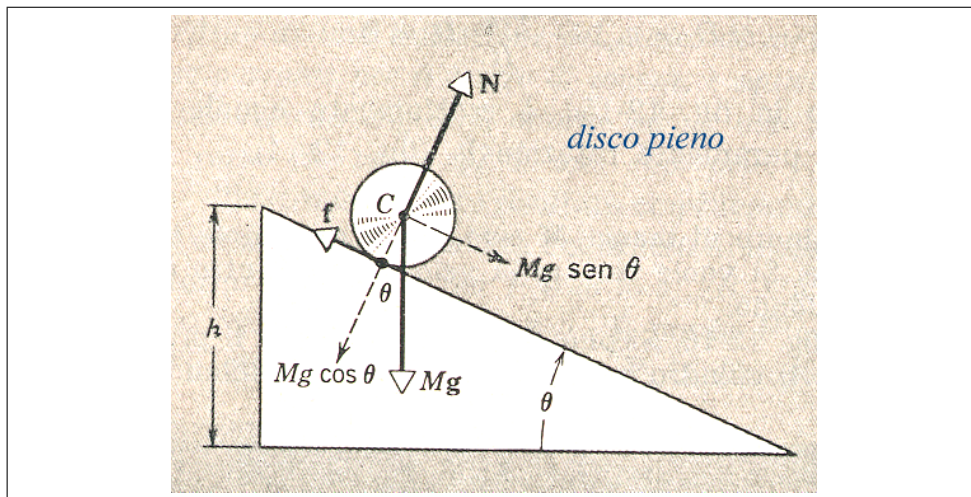
Consideriamo due dischi di massa e raggio uguali; uno dei due è pieno, l'altro è fatto ad anello. Entrambi sono fatti scivolare lungo una rampa: quale è il disco che sviluppa una accelerazione maggiore?

$$m_{disco} = m_{anello}$$

$$r_{disco} = r_{anello}$$

rotolamento puro \Rightarrow il lavoro della forza d'attrito è nullo

$$a_{disco} ? a_{anello} ?$$



Caso disco pieno

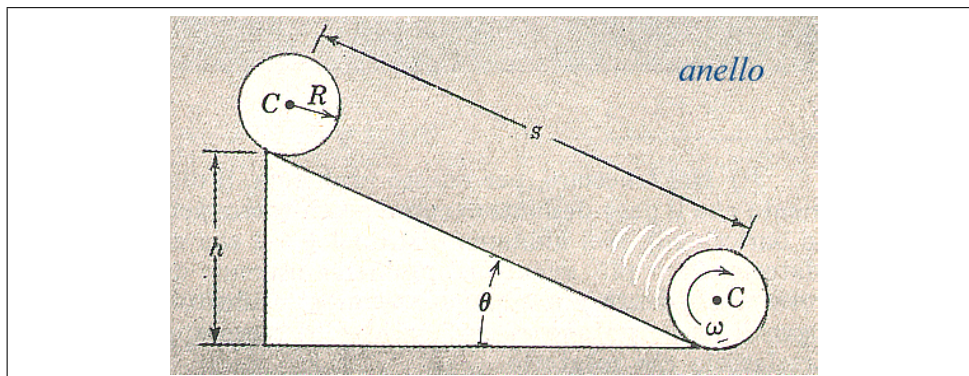
$$U = K_{cm} + K_{rot}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

$$gh = \frac{3}{4}V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$



Caso anello

$$U = K_{cm} + K_{rot}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mR^2 \frac{V^2}{R^2}$$

$$2mgh = V^2m + \frac{mR^2}{R^2}$$

$$2mgh = 2mV^2$$

$$V = \sqrt{gh}$$

$$V_{disco} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{gh}$$

$$V_{anello} = \sqrt{gh}$$

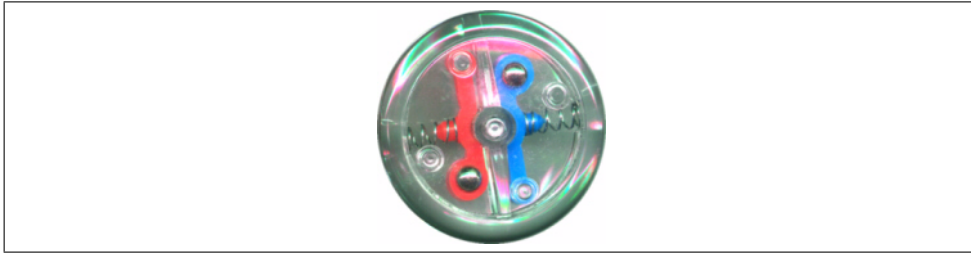
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$$

Alla fine del tragitto $V_{disco} > V_{anello}$ essendo partiti entrambi con $V_0 = 0$ e con $\omega_0 = 0$. Il disco ha un'accelerazione maggiore.

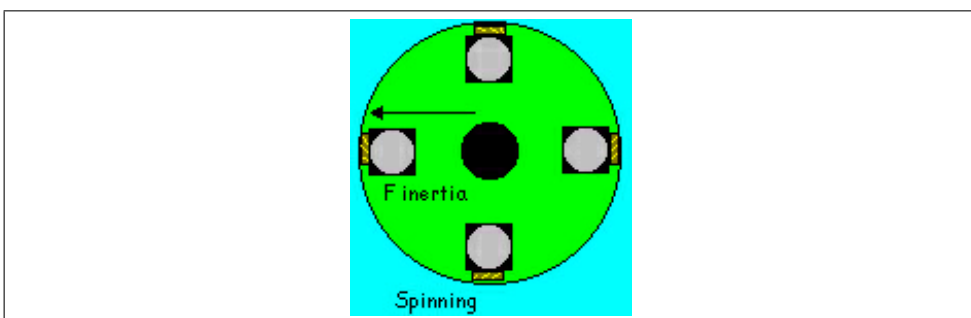
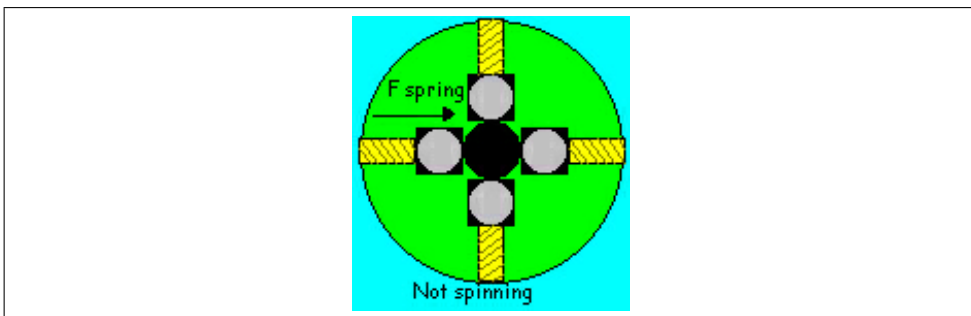
Analogamente si può dimostrare che $\alpha_{anello} > \alpha_{disco}$

La risposta è il disco pieno. In questo la massa è distribuita uniformemente piuttosto che non concentrata lungo il perimetro dell'anello. È più dispendioso dal punto di vista energetico accelerare l'anello piuttosto che il disco. I buoni yo-yo hanno maggiore massa all'esterno del disco, al fine di mantenere lo yo-yo leggero e, allo stesso tempo, di massimizzare il momento angolare. Il momento angolare infatti, è direttamente proporzionale al momento di inerzia. Poichè il momento di inerzia è $\sum m_i r_i^2$, si capisce perchè convenga avere la maggior parte della massa alla maggiore distanza possibile dal centro di massa.

Una delle innovazioni più ingegnose presente in alcuni yo-yo moderni è la cosiddetta frizione. Questa è costituita semplicemente da pesi



che sono posti in una delle due metà dello yo-yo e che sono attaccati ad una molla da una parte e ad un morsetto dall'altra. I morsetti tengono fermo l'asse di rotazione attorno al quale si avvolge la corda. Quando il disco ruota, la forza centrifuga spinge i pesi verso l'esterno e causa la compressione della molla. In questo modo i morsetti lasciano la presa e l'asse rimane fermo mentre i due dischi ruotano ad alta velocità. Quando la velocità angolare comincia a diminuire, la forza centrifuga a sua volta diminuisce in modulo ed i pesi tornano alle loro posizioni originali, bloccando nuovamente l'asse e permettendo allo yo-yo di risalire fino alla mano del giocatore.



4. L'evoluzione della specie

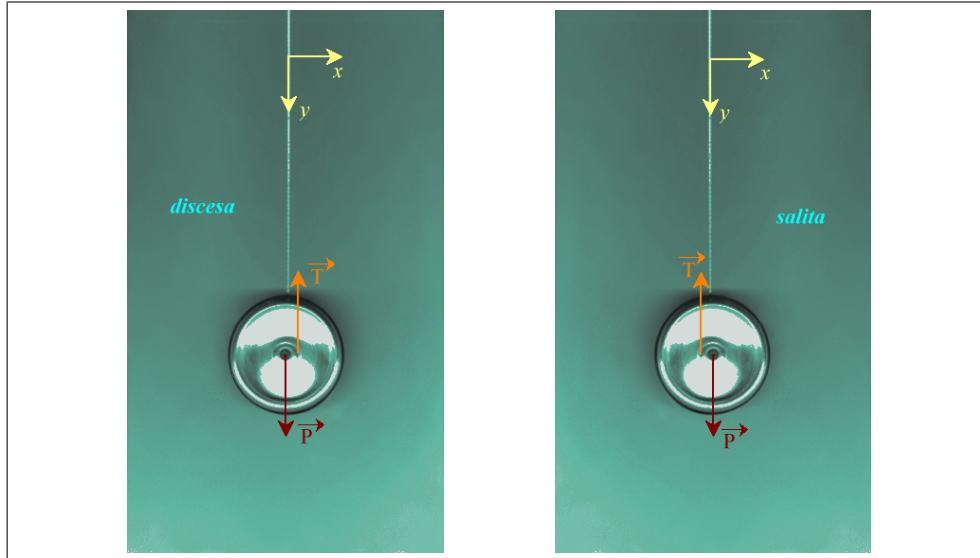
Leggendo la descrizione fisica del moto dello yo-yo proposta nel secondo paragrafo, si può notare come alcune fasi non trovino riscontro nella realtà degli yo-yo moderni. In effetti possiamo dire che oggi il gioco è stato facilitato da una semplice ma sostanziale innovazione.

Negli yo-yo di una volta la corda è unita all'asse con un semplice cappio e l'asse ha la possibilità di ruotare all'interno di questo cappio. In termini pratici tutto questo significa che, quando i dischi sono arrivati al fondo della corda, se non si applicano altre forze, essi continuano a ruotare senza modificare la loro posizione spaziale. Per la risalita il giocatore deve dare uno "strappo" alla fune, aumentando l'attrito tra la stessa fune e l'asse e consentendo alla corda di riavvolgersi.

In un moderno yo-yo tutto questo non è più necessario: la fune è legata saldamente attorno all'asse e quindi lo yo-yo non può ruotare senza avvolgere o svolgere la fune. Uno yo-yo di questo tipo, una volta raggiunto il fondo, comincerà sicuramente la risalita. Senza attriti ritornerebbe sempre all'altezza da cui era partito, ma in realtà si ferma dopo ogni ciclo ad una altezza minore.

5. Le equazioni del moto

Vogliamo ora determinare le equazioni che descrivono il moto dello yo-yo durante la sua discesa e la sua risalita. In particolare ci proponiamo di determinare la legge oraria e le equazioni della velocità e dell'accelerazione del corpo rispetto al tempo. Per semplicità trascureremo la forza di attrito.



velocità iniziale: $V_0 = 0$

velocità alla fine della discesa: V_d

velocità all'inizio della salita: V_s

tempo di discesa: t_d

tempo di salita t_s

lunghezza della corda: l

braccio della tensione rispetto all'asse di rotazione: r

raggio dei dischi: r_d

massa dei dischi: m_d

raggio del perno: r_p

massa del perno: m_p

massa del filo: m_f

diametro del filo: d

lunghezza del filo non avvolto: $x(t)$

posizione: S

posizione nell'istante iniziale $S_0 = 0$

posizione alla fine della discesa (e all'inizio della salita) $S_d = l$

Consideriamo costante il braccio della tensione rispetto all'asse di rotazione ed il momento d'inerzia dello yo-yo.

$$\begin{cases} (\sum \vec{F})_y = m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \\ (\sum \vec{\tau})^{(O)} = I \cdot \vec{\alpha} = \vec{r} \wedge \vec{T} \\ a = \alpha \cdot r \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \cdot g - T = m \cdot a \\ T \cdot r = I \cdot \alpha \\ a = \alpha \cdot r \end{cases}$$

discesa

$$Tr = I \frac{a}{r} \quad Tr^2 = a \cdot I \quad a = \frac{Tr^2}{I}$$

$$T = mg - ma \quad a = \frac{mgr^2 - mar^2}{I + mr^2} \quad aI + mar^2 = mgr^2 \quad a =$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{m}gr^2}{\mathbf{I} + \mathbf{m}r^2}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{m}gr^2}{\mathbf{I} + \mathbf{m}r^2}t$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{V}_0t + \mathbf{S}_0 = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{m}gr^2}{\mathbf{I} + \mathbf{m}r^2}t^2$$

$$x(t_d) = l \quad l = \frac{1}{2}\frac{mgr^2}{I + mr^2}t_d^2$$

$$t_d = \sqrt{2l\frac{I + mr^2}{mgr^2}}$$

$$V_d = V(t_d) = \frac{mgr^2}{I + mr^2}\sqrt{2l\frac{I + mr^2}{mgr^2}}$$

$$V_d = -V_s$$

salita (consideriamo il tempo impiegato per la sola risalita; per ottenere il tempo intero di un ciclo discesa-salita si sommano i due tempi parziali)

$$V_s = -\frac{mgr^2}{I + mr^2}\sqrt{2l\frac{I + mr^2}{mgr^2}} = -\sqrt{\frac{2lmgr^2}{I + mr^2}}$$

$$x(t) = S = \frac{1}{2}at^2 + V_s t + S_d$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \frac{mgr^2}{I + mr^2} t^2 - \sqrt{2l \frac{mgr^2}{I + mr^2}} t + l \\ x(t_s) = 0 &= \frac{1}{2} \frac{mgr^2}{I + mr^2} t_s^2 - \sqrt{2l \frac{mgr^2}{I + mr^2}} t_s + l \\ t_s &= \frac{\sqrt{2l \frac{mgr^2}{I + mr^2}}}{\frac{mgr^2}{I + mr^2}} = \sqrt{2l \frac{mgr^2}{I + mr^2}} \cdot \frac{I + mr^2}{mgr^2} = \sqrt{2l \frac{I + mr^2}{mgr^2}} \\ & t_s = t_d \end{aligned}$$

l'equazione che descrive la salita può anche essere espressa in relazione al tempo totale:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \frac{mgr^2}{mr^2 + I} (t - t_d)^2 - \mathbf{V}_d (t - t_d) + l$$

il momento d'inerzia, può essere calcolato come somma dei momenti di inerzia delle arie parti dello yo-yo: $I_{tot} = I_{dischi} + I_{perno} + I_{filo}$ ricordando che consideriamo il momento di inerzia del filo costante

$$\mathbf{I}_{tot} = 2 \cdot \frac{1}{2} m_d r_d^2 + \frac{1}{2} m_p r_p^2 + \frac{1}{2} m_f (r^2 + r_p^2)$$

Le leggi che abbiamo trovato possono essere utilizzate per scrivere la legge oraria di un qualsiasi yo-yo di cui siano noti i dati iniziali richiesti. Per portare un esempio abbiamo misurato uno degli yo-yo a nostra disposizione ed abbiamo eseguito i calcoli necessari aiutandoci con il programma di calcolo Maple V ©. Abbiamo pensato che sarebbe stato interessante integrare questa parte di testo con il lavoro importato direttamente da Maple V. Infatti, non ci dovrebbero essere difficoltà a seguire i vari calcoli, essendo un programma sufficientemente intuitivo.

```

> restart;
> with(plots):
      dati considerati del sistema cgs
      massa del filo = 1 g
> mf:= 1:
      massa di un disco = 30 g
> md:= 30:
      massa del perno = 10 g
> mp:= 10:
      accelerazione di gravità = 91 cm/s2
> g:= 981:
      raggio del perno = 0.5 cm
> rp:= .5:
      raggio di un disco = 2.8 cm
> rd:= 2.8:
      braccio medio della tensione = 1 cm
> r:= 1:
      lunghezza del filo = 97 cm
> l:= 97:
      velocità iniziale = 0
> vo:= 0:

      massa totale del sistema
> m:= mf+2*md+mp;
>
      m := mf + 2 md + mp

      m = 71 g
      momento di inerzia totale
> intot:= (md*(rd2)) + (1/2*mp*(rp2)) +
      (1/2*mf*(r2 - rp2));

```

$$\text{intot} := m d r d^2 + \frac{1}{2} m p r p^2 + \frac{1}{2} m f (r^2 - r p^2)$$

$$\text{intot} = 236.825 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

velocità alla fine della discesa

$$> \text{vd} := \text{sqrt}(2 * l / (\text{intot} + m * r^2) * m * g * r^2);$$

$$\text{vd} := \sqrt{2} \sqrt{\frac{l m g r^2}{\text{intot} + m r^2}}$$

$$\text{vd} = 209.5137832 \text{ cm/s}$$

tempo di discesa

$$> \text{ts} := \text{sqrt}(2 * l * (\text{intot} + m * r^2) / (m * g * r^2));$$

$$\text{ts} := \sqrt{2} \sqrt{\frac{l (\text{intot} + m r^2)}{m g r^2}}$$

$$\text{ts} = 0.9259534006 \text{ s}$$

accelerazione costante

$$> \text{a}(t) := ((m * g * r^2) / (\text{intot} + m * r^2));$$

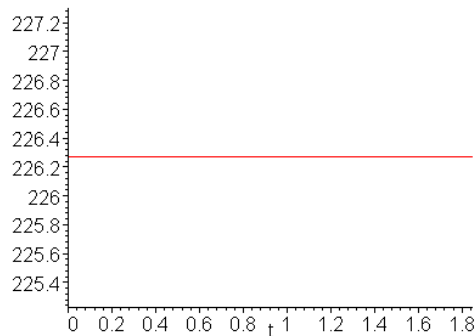
$$\text{a}(t) := \frac{m g r^2}{\text{intot} + m r^2}$$

$$a = 226.2681719 \text{ cm/s}^2$$

grafico dell'accelerazione

$$> \text{plotsetup}(\text{inline});$$

$$> \text{plot}((m * g * r^2) / (\text{intot} + m * r^2), t = 0 .. 2 * \text{ts});$$



velocità in discesa ed in salita

$$> \quad Vd = (m * g * r^2) / (intot + m * r^2) * t;$$

$$Vd = \frac{m g r^2 t}{intot + m r^2}$$

$$> \quad Vs = (m * g * r^2) / (intot + m * r^2) * (t - ts) - (\text{sqrt}(2 * l / (intot + m * r^2) * m * g * r^2));$$

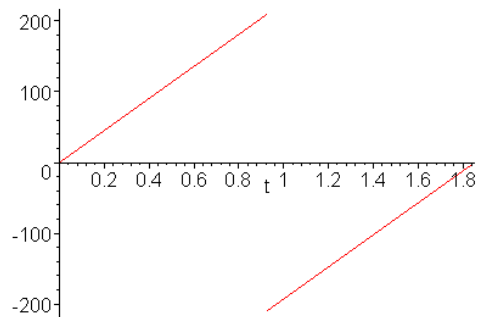
$$Vs = \frac{m g r^2 (t - ts)}{intot + m r^2} - \sqrt{2} \sqrt{\frac{l m g r^2}{intot + m r^2}}$$

grafico della velocità

$$> \quad Vel1 := \text{plot}((m * g * r^2) / (intot + m * r^2) * t, t = 0..ts):$$

$$> \quad Vel2 := \text{plot}((m * g * r^2) / (intot + m * r^2) * (t - ts) - (\text{sqrt}(2 * l / (intot + m * r^2) * m * g * r^2)), t = ts..(2 * ts)):$$

$$> \quad \text{display}(Vel1, Vel2);$$



legge oraria in discesa ed in salita

> $xd(t) = (1/2 * (m*g*r^2) / (intot + m*r^2)* t^2);$

$$xd(t) = \frac{1}{2} \frac{m g r^2 t^2}{intot + m r^2}$$

> $xs(t) = (1/2*(m*g*r^2)/(intot + m*r^2)*(t-ts)^2)-vd*(t-ts)+l;$

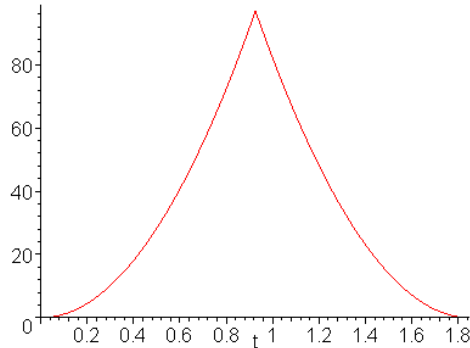
$$xs(t) = \frac{1}{2} \frac{m g r^2 (t - ts)^2}{intot + m r^2} - vd (t - ts) + l$$

grafico della legge oraria

> $Len1:=plot (.5 * (m*g*r^2) / (intot + m*r^2)* t^2, t=0..ts):$

> $Len2 :=plot ((.5*(m*g*r^2)/(intot + m*r^2)*(t-ts)^2)-vd*(t-ts)+l, t=ts..2*ts):$

> $display(Len1, Len2);$



Possiamo complicare un pò le cose introducendo due nuove variabili. Il braccio della tensione rispetto all'asse di rotazione, in realtà non è costante, ma varia a seconda di quanto filo sia avvolto attorno al perno dello yo-yo. Provando a ragionare in due dimensioni, possiamo accorgerci di come il perno e il filo che vi si avvolge attorno, formino un cerchio di raggio variabile. L'area di un cerchio si calcola come πr^2 e quindi l'area del cerchio formato dal filo avvolto e dal perno è pari a: $(l - x(t)) \cdot d + \pi r_p^2$. $(l - x(t)) \cdot d$ è l'area del solo filo avvolto, considerato come un rettangolo.

Il braccio della tensione corrisponde al raggio del cerchio avente l'area che abbiamo appena determinato. Quindi:

$$r(x(t)) = \sqrt{\frac{(l - x(t)) \cdot d + (\pi r_p^2)}{\pi}}$$

Anche il momento di inerzia dello yo-yo non è costante nel tempo: infatti il momento di inerzia del filo avvolto dipende dalla massa del filo e dalla sua distanza dall'asse di rotazione, entrambi variabili nel tempo. In sostanza, questo momento di inerzia è calcolabile come quello di una corona circolare e risulta pari a $\frac{1}{2}m_f(r(x(t))^2 + r_p^2)$. La massa del filo avvolto può essere trovata semplicemente:

$$m_f(x(t)) = \frac{m_f}{l} \cdot (l - x(t))$$

Il momento d'inerzia totale è quindi:

$$I(\mathbf{x}(t)) = 2 \cdot \frac{1}{2}m_d r_d^2 + \frac{1}{2}m_p r_p^2 + \frac{1}{2}m_f(\mathbf{x}(t))(r(\mathbf{x}(t))^2 + r_p^2)$$

La massa totale dello yo-yo può essere espressa come:

$$m(x(t)) = 2m_d + m_p + m_f(x(t))$$

Per svolgere i conti in maniera più "accessibile", usiamo questa volta il principio di conservazione dell'energia applicato punto per punto.

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(l - x(t)) = mgl$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgx(t)$$

I problemi principali sorgono non appena tentiamo di esprimere la velocità angolare in funzione del raggio. Infatti $\omega = \frac{\dot{x}(t)}{r(x(t))}$, ma il raggio non è costante! Bisogna quindi fare alcuni passaggi prima di poter giungere all'equazione desiderata.

Prima di tutto definiamo la coordinata angolare in funzione del tempo.

$$\theta(t) = \frac{x(t)}{r(x(t))} \quad r(x(t)) \cdot \theta(t) = x(t)$$

Derivando possiamo ottenere l'equazione che ci porta a conoscenza della velocità angolare.

$$\dot{x}(t) = r'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \cdot \theta(t) + \dot{\theta}(t) \cdot r(x(t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\dot{x}(t) - r'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \cdot \theta(t)}{r(x(t))} = \omega$$

Ora che conosciamo la formula della velocità angolare in funzione del tempo, possiamo sostituirla nell'equazione dell'energia.

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}I(x(t)) \left(\frac{\dot{x}(t) - r'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \cdot \frac{x(t)}{r(x(t))}}{r(x(t))} \right)^2 = mgx(t)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}I(x(t)) \left(\frac{\dot{x}(t)}{r(x(t))} \cdot \left(1 - \frac{r'(x(t))}{r(x(t))}x \right) \right)^2 = mgx(t)$$

Derivando questa equazione, si può trovare un'equazione differenziale del secondo ordine in cui $\ddot{x}(t)$ è funzione di $x(t)$ e $\dot{x}(t)$.

```
> restart:
> with(plots):
> with(DEtools):
    dati considerati del sistema cgs
    massa del filo = 1 g
> mf:= 1:
    massa di un disco = 30 g
> Md:= 30:
    massa del perno = 10 g
> mp:= 10:
    accelerazione di gravità = 981 cm/s2
> g:= 981:
    raggio del perno = 0.5 cm
> Rp:= .5:
    raggio di un disco = 2.8 cm
> Rd:= 2.8:
    diametro del filo = 0.1 cm
> sf:=.1:
    lunghezza del filo = 97 cm
> Len:= 97:
    inizializzazione di Pi Greco
> pip:=evalf(Pi):
    velocità iniziale = 0
```

```
> vo:= 0:
```

quadrato del Braccio della tensione quando lo yo-yo è sceso di una lunghezza x

> $raq := ((Len-x)*sf+pip*Rp^2)/(pip):$
 $Rq := unapply(raq, x);$

$$Rq := x \rightarrow \frac{(Len - x) sf + pip Rp^2}{pip}$$

braccio della tensione quando lo yo-yo è sceso di una lunghezza x

> $rop := sqrt(Rq(x)): ro := unapply(rop, x);$

$$ro := x \rightarrow \sqrt{\frac{(Len - x) sf + pip Rp^2}{pip}}$$

derivata rispetto ad x del braccio della tensione

> $rdp := diff(ro(x), x): rd := unapply(rdp, x);$

$$rd := x \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{sf}{\sqrt{\frac{(Len - x) sf + pip Rp^2}{pip}} pip}$$

massa del filo quando lo yo-yo e' sceso di x

> $mfx := mf/Len*(Len-x): Mfx := unapply(mfx, x);$

$$Mfx := x \rightarrow \frac{mf (Len - x)}{Len}$$

momento di Inerzia, trascurando il filo

> $Ine := Md*Rd^2+1/2*mp*Rp^2;$

$$Ine := Md Rd^2 + \frac{1}{2} mp Rp^2$$

momento di inerzia considerando anche il filo

> $Inef := Md*Rd^2+1/2*mp*Rp^2+1/2*Mfx(x)*(Rq(x)+Rp^2):$
 > $Inx := unapply(Inef, x);$

$$Inx := x \rightarrow Md Rd^2 + \frac{1}{2} mp Rp^2 + \frac{1}{2} \frac{mf (Len - x) \left(\frac{(Len - x) sf + pip Rp^2}{pip} + Rp^2 \right)}{Len}$$

massa dopo che lo yo-yo e' sceso di x

> $msx := 2*Md+mp+Mfx(x): Msx := unapply(msx, x);$

$$M_{sx} := x \rightarrow 2 M_d + m_p + \frac{m_f (Len - x)}{Len}$$

massa media (metà del filo)

$$> m_{fi} := 2 * M_d + m_p + M_f x (Len/2);$$

$$m_{fi} := 2 M_d + m_p + M_f x \left(\frac{1}{2} Len \right)$$

momento di inerzia medio (metà del filo)

$$> I_{ne} := M_d * R_d^2 + 1/2 * m_p * R_p^2 + 1/2 * M_f x (Len/2) * (R_q (Len/2) + R_p^2);$$

$$I_{ne} := M_d R_d^2 + \frac{1}{2} m_p R_p^2 + \frac{1}{2} M_f x \left(\frac{1}{2} Len \right) \left(R_q \left(\frac{1}{2} Len \right) + R_p^2 \right)$$

braccio medio della tensione

$$> R_m := (sqrt(R_q(0)) + sqrt(R_q(Len))) / 2;$$

$$R_m := \frac{1}{2} \sqrt{R_q(0)} + \frac{1}{2} \sqrt{R_q(Len)}$$

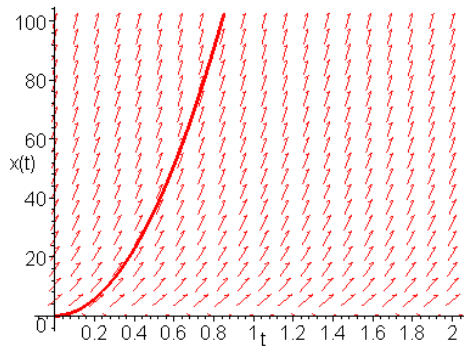
modello differenziale del primo ordine

integrale primo del moto

in questo caso si considerano ancora i valori medi e costanti;
 l'equazione è ottenuta integrando la derivata prima

```
> Eqdif:=diff(x(t),t)=sqrt(2*mfi*g*x(t)/(mfi+Ine/Rm^2));
> DEplot(Eqdif, x(t), t=0..2, [[x(0)=.001]],
x=0..100, stepsize=.01, linecolor=red);
```

$$Eqdif := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{mfi \cdot g \cdot x(t)}{mfi + \frac{Md \cdot Rd^2 + \frac{1}{2} \cdot mp \cdot Rp^2 + \frac{1}{2} \cdot Mfx(\frac{1}{2} \cdot Len) \cdot (Rq(\frac{1}{2} \cdot Len) - Rp^2)}{Rm^2}}}$$



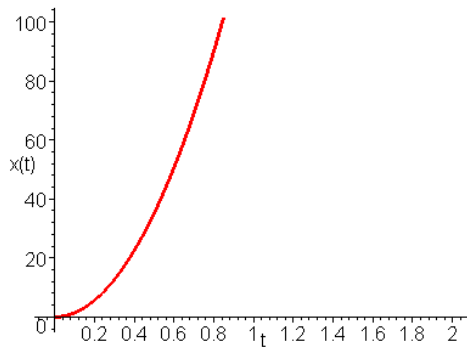
_____ **modello differenziale del secondo ordine**

equazioni del moto

*in questo caso si considerano ancora i valori medi e costanti;
l'equazione è ottenuta derivando la derivata prima e integrando due
volte il risultato ottenuto*

```
>
Eqd:=diff(x(t),t^2)=diff(2*mfi*g*x(t)/(mfi+Ine/Rm^2),t)/(2*diff(x(t),
t));
> DEplot(Eqd, x(t), t=0..2,
[[x(0)=0,D(x)(0)=0]],x=0..100, stepsize=.01,
linecolor=red);
```

$$Eqd := \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) = \frac{mfi g}{mfi + \frac{Md Rd^2 + \frac{1}{2} mp Rp^2 + \frac{1}{2} Mfx \left(\frac{1}{2} Len\right) \left(Rq \left(\frac{1}{2} Len\right) - Rp^2\right)}{Rm^2}$$

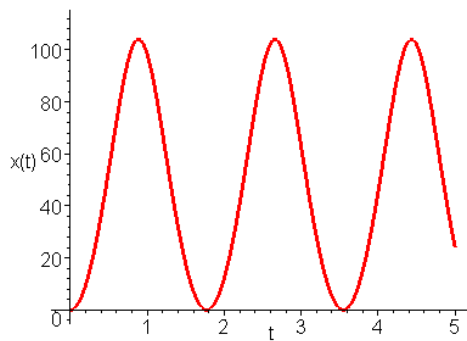


modello differenziale del secondo ordine

massa, momento, braccio variabili

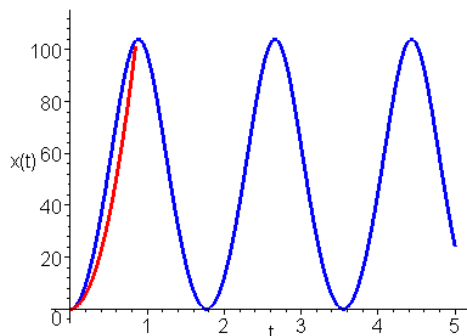
questa è la legge oraria ottenuta considerando tutti i dati variabili; si noti come in questo caso l'equazione descriva sia il comportamento in salita che quello in discesa (non riportiamo l'equazione per la sua eccessiva complessità)

```
> Et:=diff(x(t),t^2)=
diff((2*Msx(x(t))*g*x(t)/(Msx(x(t))+Inx(x(t))/Rq(x(t)))*
(1-rd(x(t))/ro(x(t)))^2),t)/(2*diff(x(t),t)):
> DEplot(Et, x(t), t=0..5,
[[x(0)=0,D(x)(0)=0]],x=0..110, stepsize=.01,
linecolor=red);
```



nell'ultimo grafico confrontiamo le equazioni ottenute con

```
> aa:=DEplot(Eqd, x(t), t=0..5,
[[x(0)=0,D(x)(0)=0]],x=0..100, stepsize=.01,
linecolor=red):
> bb:=DEplot(Et, x(t), t=0..5,
[[x(0)=0,D(x)(0)=0]],x=0..110, stepsize=.01,
linecolor=blue):
> display(aa,bb);
```



Vediamo come il caso in cui abbiamo considerato tutti gli elementi variabili non sia troppo distante dal caso generalizzato con i valori medi costanti.

CAPITOLO 5

Il Levitron

1. Levitron????

Il Levitron è conosciuto nel mondo per essere stato commercializzato come un gioco, ma in realtà è un'invenzione brevettata che esemplifica l'effetto stabilizzante del moto giroscopico. Due potenti magneti permanenti permettono infatti ad un giroscopio di volare a mezz'aria. Il primo magnete costituisce la base del Levitron, mentre l'altro è parte integrante del giroscopio. Questo piccolo giroscopio è null'altro che una semplice trottola.

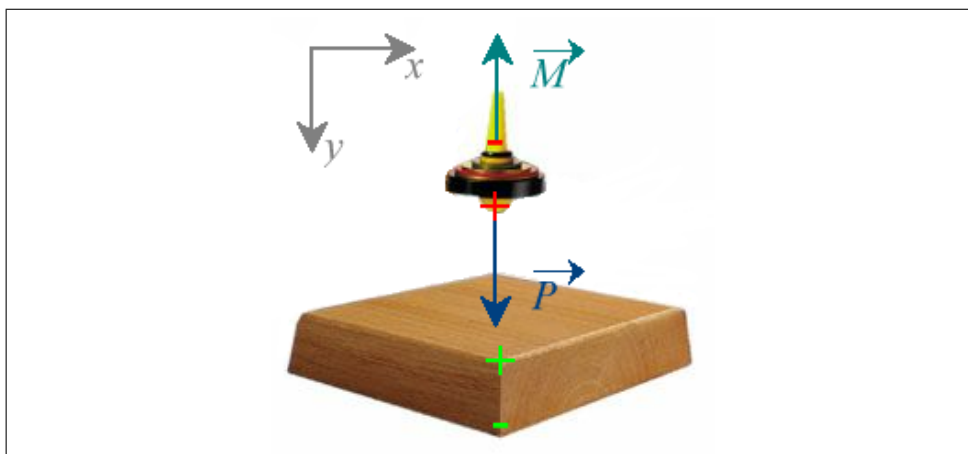


2. Come funziona?

La forza antigravitazionale che respinge la trottola dalla base è la forza magnetica. Sia la trottola (detta anche "top") che la pesante lastra all'interno della base sono magnetizzate, ma con segni opposti. Si può pensare che la base sia magnetizzata con il suo polo positivo che punta verso l'alto, mentre il polo positivo del top punta verso il basso. Il principio utilizzato è quello per cui due poli elettromagneticamente uguali si respingono, mentre due opposti si attraggono, con forze inversamente proporzionali alla distanza. Sulla trottola agiscono quattro forze magnetiche, vale a dire le repulsioni e le attrazioni tra i due poli della base ed i due della stessa trottola. Poichè le forze dipendono dalla distanza, la repulsione tra i poli elettromagneticamente positivi è maggiore e la trottola viene allontanata. Essa si ferma quando questa repulsione diretta verso l'alto bilancia la forza di gravità diretta verso il basso. In questa posizione di equilibrio, la forza risultante è nulla.

posizione di equilibrio

\vec{M} = risultante delle forze magnetiche agenti sulla trottola



$$\begin{aligned} (\sum \vec{F})_y &= m \cdot \vec{a} = 0 \\ (\sum \vec{F})_y &= \vec{M} + \vec{P} \\ P - M &= 0 \end{aligned}$$

La trottola deve necessariamente girare per evitare di girarsi e quindi di essere attratta elettromagneticamente (oltre che dalla forza di gravità) sulla base. Infatti, se il top ruota rispetto all'orizzontale, i due poli opposti si avvicinano e tendono ad attrarsi. Il campo magnetico della base tende a dare un'inclinazione all'asse di rotazione, spingendo la trottola a rovesciarsi. Mentre la trottola sta girando, si ottiene un effetto giroscopico per cui l'asse non si ribalta ma ruota intorno alla direzione del campo magnetico (circa verticale). Questa rotazione è chiamata precessione. Nel caso del Levitron, la precessione si manifesta

sotto forma di piccole oscillazioni che diventano sempre più pronunciate mentre la velocità di rotazione diminuisce.

Perché la trottola rimanga sospesa, occorrono le condizioni di equilibrio stabile, in maniera tale che, un eventuale piccolo spostamento orizzontale o verticale, produca una forza che spinga la trottola nuovamente alla posizione di equilibrio. Per il Levitron, la stabilità è difficile da ottenere. Questo dipende dal fatto che, come la trottola si sposta lateralmente, fuori dall'asse della base magnetica, il campo magnetico della base, attorno al quale l'asse della trottola precede, si sposta leggermente dalla verticale. Essendo il campo molto vicino alla verticale, l'equilibrio è stabile solo in un limitato intervallo di altezze.

Il peso della trottola e l'intensità delle forze magnetiche della base e della stessa trottola, determinano l'altezza di equilibrio dove il magnetismo bilancia la gravità. Questa altezza deve essere compresa in un intervallo stabile. Piccoli cambiamenti di temperatura modificano la magnetizzazione della base e della trottola (aumentando la temperatura, le direzioni dei magneti atomici si dispongono casualmente ed il campo si indebolisce). A meno che il peso non sia corretto per compensare, l'equilibrio uscirà dall'intervallo di stabilità e la trottola cadrà.

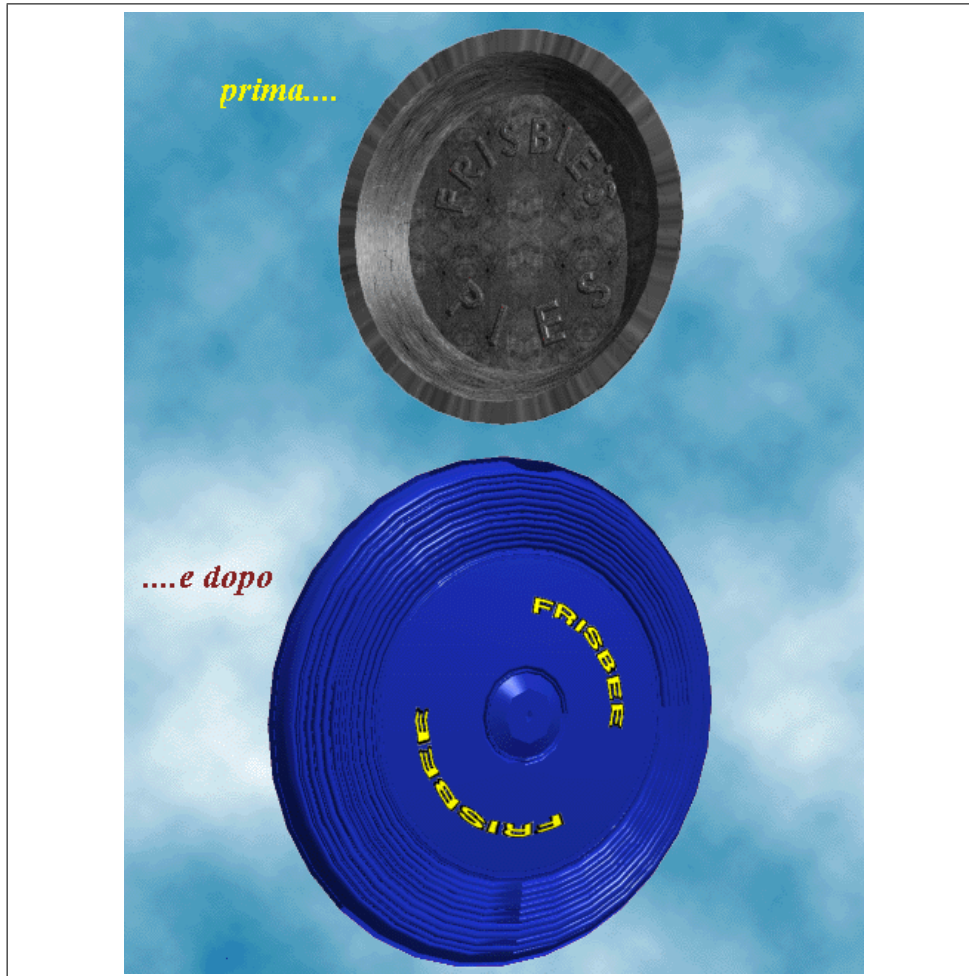
La trottola si trova nel rango stabile di rotazione tra le 20 e le 35 rotazioni al secondo. È completamente instabile oltre le 35-40 rotazioni al secondo e sotto le 18. La trottola raggiunge il limite inferiore di stabilità dopo pochi minuti, essendo frenata dalla resistenza dell'aria. La durata della rotazione del Levitron può essere aumentata ponendolo in uno spazio vuoto o insufflando continuamente aria che lo aiuti a non rallentare o ancora attraverso un meccanismo ad impulso elettromagnetico che gli consentirebbe una durata in aria addirittura di settimane.

CAPITOLO 6

Il frisbee (o la fisica dei dischi volanti)

1. La scoperta dei dischi volanti

Come si sarà facilmente intuito, i dischi volanti a cui abbiamo fatto riferimento nei titoli, non sono UFO, ma più terrestri frisbee. Il termine "disco volante" è il termine con cui il frisbee è maggiormente noto nel mondo. Il primo frisbee è stato una scatola di latta (intesa per contenere una torta) del tardo 1800. Gli studenti dei College dell'epoca erano soliti tirarsi l'uno con l'altro questi dischi. Le fabbriche di torte generalmente scrivevano il loro marchio sui contenitori ed una di queste fabbriche, la "Frisbie Pie Company" di William Frisbie, produceva una torta particolarmente popolare tra gli studenti di Yale. Il resto è facile da immaginare: gli studenti hanno cominciato a chiamare il loro disco volante con il nome che vi era scritto sopra e con il tempo il nome "Frisbie" si è modificato nell'attuale "Frisbee".



2. Dinamiche

Il disco volante è come un incrocio tra un giroscopio ed un'ala di un aereo.

Un'ala funziona avendo il lato superiore e quello inferiore di lunghezze diverse. Il flusso d'aria si muove più velocemente sulla superficie più lunga, creando una regione di bassa pressione sopra l'ala. La regione di alta pressione sotto l'ala cerca di muoversi verso la regione a bassa pressione e come risultato l'ala si solleva. Il principio del frisbee è del tutto simile. L'aria passa sopra la superficie curva del frisbee e crea una zona di bassa pressione sulla sua parte superiore. Sotto il frisbee, l'aria scorre più lentamente, creando una zona di alta pressione.

Questi ragionamenti sulla pressione e sulla velocità sono riassunti dal principio di Bernoulli, secondo il quale se la velocità di un fluido in movimento (liquido o gas) aumenta, la pressione interna di quel fluido diminuisce. Originalmente formulato nel 1738 dal matematico e fisico svizzero Daniel Bernoulli, questo teorema constata che l'energia totale in un fluido a velocità costante è una costante lungo il percorso del

flusso. Un aumento della velocità del flusso deve evidentemente essere bilanciata da una diminuzione della sua pressione.

Il riferimento al **giroscopio** è fatto in relazione all'utilizzo dell'inerzia giroscopica, ovvero la tendenza di un giroscopio a continuare a ruotare nello stesso piano senza girarsi.

Perchè un disco voli è necessaria la combinazione di un movimento rotatorio e di un movimento di traslazione. L'esatta combinazione di questi due movimenti varia di disco in disco, poichè dischi diversi hanno differenti forme. Se si prova a lanciare un disco senza farlo ruotare, esso oscilla e cade. Tutti gli oggetti volanti necessitano di qualcosa che li renda stabili durante il volo: aerei ed uccelli hanno la coda, i razzi hanno appositi piani stabilizzatori. Per il frisbee questo "stabilizzatore" è proprio il moto rotatorio.

Tutte le cose che ruotano hanno un momento angolare la cui direzione è determinata dall'asse di rotazione. Il momento angolare di un oggetto rimane costante fino a quando su di esso non agisce una forza esterna. Questo significa che, una volta che qualcosa inizia a girare, bisogna applicarvi una forza angolare per alterare il suo asse di rotazione. L'esempio del giroscopio è utile anche in questo caso: modificare l'asse di rotazione di un giroscopio è molto più difficile che non spostarlo in linea retta. Lo stesso principio che rende difficile ruotare un giroscopio, rende difficile modificare il piano di rotazione di un frisbee.

Durante il volo il disco è leggermente inclinato. Se il disco sta ruotando in senso orario, allora il lato sinistro (visto dall'alto) si sta muovendo più velocemente dell'altro lato. C'è un corrispondente abbassamento della pressione lungo il lato sinistro e quel lato produrrà un innalzamento maggiore. Il disco tende a girarsi in senso orario e l'inerzia giroscopica agisce per contrastare questa tendenza.

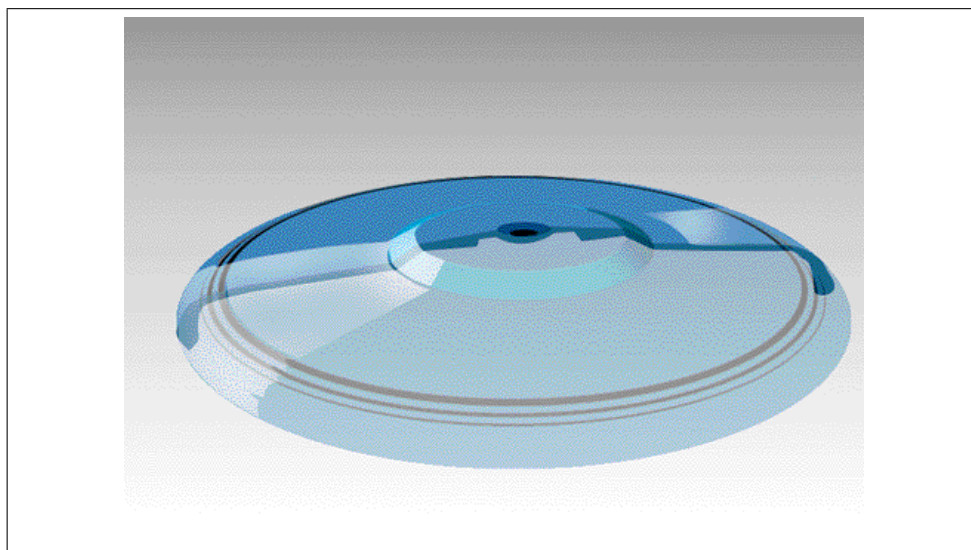
3. Le proprietà di un frisbee

La **rotazione** del disco provvede alla sua stabilità, facendo in modo che il disco continui a volare nella stessa direzione lungo la quale sta già volando. Un disco senza sufficiente rotazione tende a rovesciarsi, ovvero a ruotare attorno all'asse di volo; in questo caso, difficilmente il disco andrà molto lontano. In generale è difficile dare al disco troppa rotazione; questa sovrabbondanza è ben contrastata da altri fattori come la velocità e l'angolo di lancio, piuttosto che dalla semplice tendenza a ruotare meno. La rotazione del disco ha poco a che fare con il vero e proprio "volo" del frisbee.

La **velocità** del disco è il maggiore (ma non il solo) fattore che determina quanto distante un disco possa andare e quanto velocemente possa arrivare alla fine del suo percorso. Al contrario della rotazione, è possibile dare al disco una velocità troppo elevata. La stabilità del disco cambia se si muove più velocemente e l'intervallo di stabilità è determinato sia dalla forma che dalla velocità angolare. Un frisbee generalmente stabile lanciato con velocità traslazionale troppo elevata rispetto a quella di rotazione, si comporta in maniera alquanto instabile, ovvero tende a ruotare.

L'altro fattore da cui dipende il buon risultato o meno di un lancio è la differenza tra l'**angolo di rotazione** e l'angolo del piano del disco. Il disco spesso oscilla all'inizio del suo volo: questo è un problema e dipende dal fatto che il tiratore fa girare il disco su un piano diverso da quello orizzontale. L'oscillazione del disco comporta una mancanza di stabilità ed impedisce al lancio di essere sufficientemente efficace.

Il **grado di elevazione** di un disco si riferisce all'angolo di tiro, con la parte anteriore puntata verso l'alto o verso il basso. Questo indice aiuta a determinare quando distante può viaggiare il disco e, cosa più importante, lungo quale traiettoria.



L'**angolo di rollio** è l'angolo con cui il disco ruota intorno alla direzione del moto. Questo specifica se il lato esterno del disco è sollevato o abbassato. Tendenzialmente aiuta a prevedere il percorso di volo, sulla base del principio per cui il disco curva nella direzione del lato più basso.

Il **vento** può avere un effetto importante su tutti i fattori menzionati fino ad ora, specialmente a seconda della direzione in cui spira. Bisogna ricordarsi che non c'è vento a livello del terreno ed il vento è minore quanto più ci si avvicina a questo livello. Per ottenere un buon lancio, è utile cercare di mantenersi il più vicino possibile alla terra. Il vento frontale aumenta la velocità del vento apparente (il vento in direzione opposta al moto) e quindi aumenta la quantità minima di rotazione necessaria perchè il disco rimanga stabile. Inoltre riduce la gittata massima tendendo a scivolare sotto il disco ed aumentando in questo modo il suo grado di elevazione. Il vento in coda riduce il vento contrario al moto, ma aumenta la tendenza del frisbee ad abbattersi verso terra. La contromisura adatta è lanciare il frisbee con una inclinazione maggiore, in modo da prevenire la tendenza a cadere ed aumentare il tempo di volo. Venti laterali hanno effetto sul rollio del disco spingendo il lato sollevato verso l'alto o spingendo verso il basso il lato inferiore. Inoltre il vento laterale rende molto difficile mantenere piatto il piano del disco nel momento del lancio.

Bibliografia

- [1] *W. Edward Gettys, Frederick J. Keller, Malcolm J. Skove Fisica classica e moderna* McGraw-Hill, Milano, 1998
- [2] *Robert Resnick, David Halliday Fisica* Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1970
- [3] <http://www.physlink.com/ae16.cfm>
- [4] <http://www.afda.com/skills/physics.htm>
- [5] <http://www.levitron.com>
- [6] <http://www.highwired.com/Fleming/physics>
- [7] <http://www.spintastics.com/HistoryOfYoYo>
- [8] wysiwyg://146/http://inventors.about.co...e/inventors/library/weekly/aa120297.htm
- [9] <http://online.cctt.org/physicslab/conte...ssonotes/rotationalmotion/dynamics.a>