Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \left(\left(t^2 - 2t - 3\right)^- + 1 \right) dt \qquad \text{in } [-2 \quad 4]$$

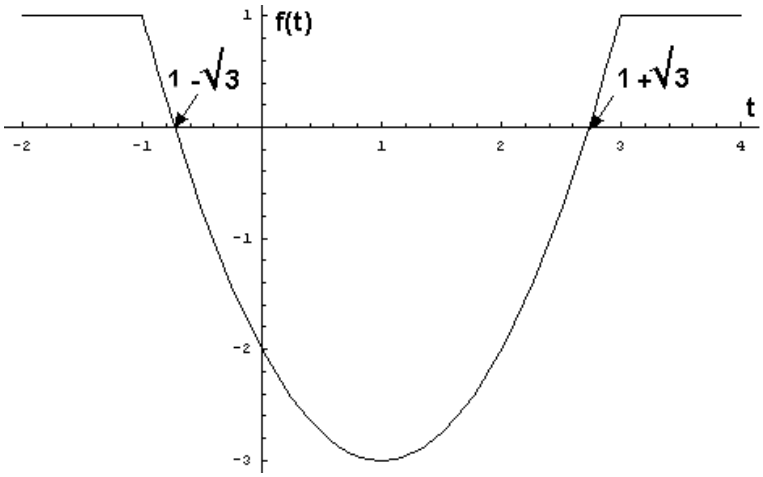
e calcolare: $F(1,-2)$

Risoluzione:

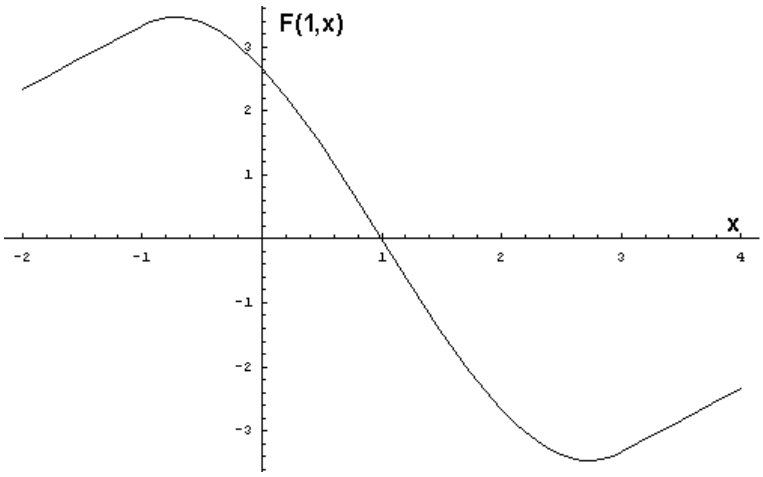
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le -1 \\ t^2 - 2t - 2 & -1 \le t \le 3 \\ 1 & 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

Per cui il diagramma di $f(t)$ ha la seguente forma:



(I punti $1 - \sqrt(3)$ e $1 + \sqrt(3)$ si trovano risolvendo l'equazione $t^2 - 2t - 2 = 0$).
Il diagramma di $F(1,x)$ è pertanto il seguente:



Calcoliamo ora $F(1,-2)$. Si ha:

$$F(1,-2) = \int_1^{-2} f(t)dt = \int_1^{-1} (t^2 - 2t - 2)\, dt + \int_{-1}^{-2} dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t\right]_1^{-1} + [t]_{-1}^{-2} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{7}{3}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left(\log_2(1+t) + \frac{1}{(2t-5)^+ + 1}\right) dt$$

in tutto il campo di esistenza.

Risoluzione:

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} \log_2(1+t) + 1 & -1 < t \leq \frac{5}{2} \\ \log_2(1+t) + \frac{1}{2t-4} & t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Pertanto $f(t)$ è positiva per $t \geq \frac{5}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
Inoltre:

$$\lim_{t\to-1^+} f(t) = -\infty$$

e

$$f(t) = 0 \Rightarrow \log_2(1+t) + 1 = 0 \Rightarrow 1 + t = 2^{-1} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

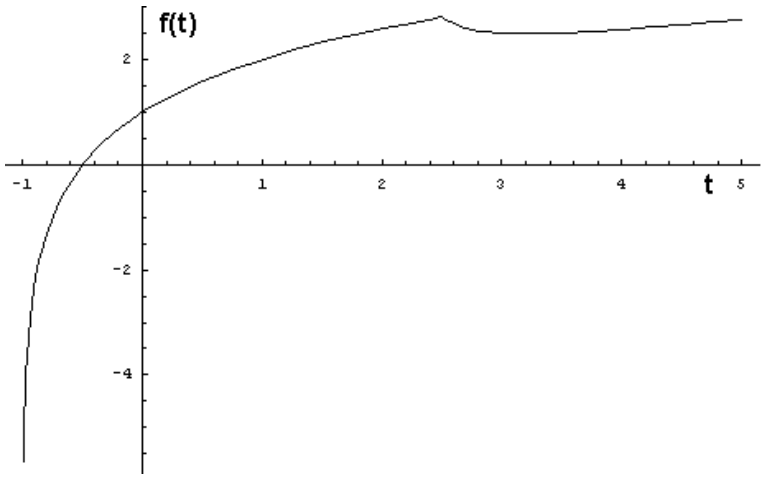
Calcolando la derivata si ottiene:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(2)(1+t)} & -1 < t \leq \frac{5}{2} \\ \frac{1}{\ln(2)(1+t)} - \frac{2}{(2t-4)^2} & t > \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ponendo $f'(t) > 0$ si ricava che la funzione $f(t)$ è:

- crescente per $-1 < t \leq \frac{5}{2}$
- decrescente per $\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{1}{4}\left(8 + \ln(2) + \sqrt{24\ln(2) + \ln(2)^2}\right)$
- crescente per $t \geq \frac{1}{4}\left(8 + \ln(2) + \sqrt{24\ln(2) + \ln(2)^2}\right)$

Per cui $f(t)$ ha il seguente diagramma:



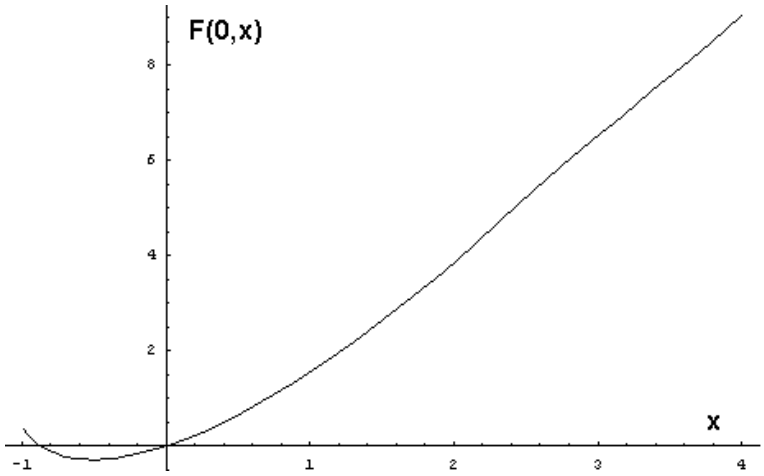
Prima di passare al diagramma della funzione integrale dobbiamo stabilire se essa è prolungabile nel punto -1. A tale scopo occorre calcolare $\lim_{x\to -1^+} F(0,x)$. Risulta:

$$\lim_{x\to -1^+} F(0,x) = \lim_{x\to -1^+} \int_0^x \left(\log_2(1+t)+1\right) dt =$$

$$\lim_{x\to -1^+} \left[\frac{1}{\ln(2)}\left((t+1)\ln(t+1)-t\right)+t\right]_0^x =$$

$$\lim_{x\to -1^+} \left(\frac{1}{\ln(2)}\left((x+1)\ln(x+1)-x\right)+x\right) = \frac{1}{\ln(2)} - 1$$

Essendo questo limite finito la funzione integrale è prolungabile in -1. Il diagramma ha la forma seguente:



Terzo Esercizio

Su di una matrice A_{4x5} si sono compiuti tre passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_3. Sapendo che:

- Nei primi due passi si sono effettuati solo scambi. In particolare:

- Nel primo si è scambiata la prima riga con la seconda e la prima colonna con la quarta.
- Nel secondo si è scambiata la seconda riga con la terza e la seconda colonna con la quinta.

- Nel terzo passo non ci sono stati scambi e la terza colonna di Q_3 è $2\underline{e}_3$
- La quarta colonna di A_3 è $\underline{e}_1 - \left(\log_2 \left|\frac{k}{3}\right|\right) \underline{e}_4$
- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_5 \in ns(A_2)$

trovare la matrice A e discuterne la caratteristica al variare di k.

Risoluzione:

Poichè sono già stati fatti tre passi di pivotizzazione, la matrice A_3 ha la seguente forma:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \underline{a} & \underline{b} \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Ovvero:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \underline{b} \\ 0 & 0 & 0 & \log_2 \left|\frac{k}{3}\right| & \end{bmatrix}$$

Siccome nel terzo passo non si sono fatti scambi di colonne $ns(A_2) = ns(A_3)$. Deve risultare:

$$A_3 \left(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_5\right) = \underline{0}$$

e quindi:

$$\underline{b} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

La matrice A_3 ha quindi la seguente forma:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \log_2 \left|\frac{k}{3}\right| & 0 \end{bmatrix}$$

La caratteristica di A sarà pertanto 3 se e solo se:

$$\log_2 \left|\frac{k}{3}\right| = 0 \Rightarrow \left|\frac{k}{3}\right| = 1 \Rightarrow k = \pm 3$$

Altrimenti, sempre assumendo $k \neq 0$, $r(A) = 4$.

Risulta:

$$Q_3 = D_3\,(2)$$

e ciò implica:

$$A_2 = D_3\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A_3$$

Inoltre:

$$A_2 = S_{2,3} \cdot A_1 \cdot S_{2,5} \Rightarrow A_1 = S_{2,3} \cdot A_2 \cdot S_{2,5}$$

e

$$A_1 = S_{1,2} \cdot A_2 \cdot S_{1,4} \Rightarrow A_2 = S_{1,2} \cdot A_1 \cdot S_{1,4}$$

In conclusione risulta:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \log_2\left|\frac{k}{3}\right| & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\log_2\left|\frac{k}{3}\right| & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\log_2\left|\frac{k}{3}\right| & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$