# Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left( 2\left(1 - |t-2|\right)^+ - \frac{sgn\,(t-1)}{3} \right) dt \qquad \text{in } [0 \quad 5]$$

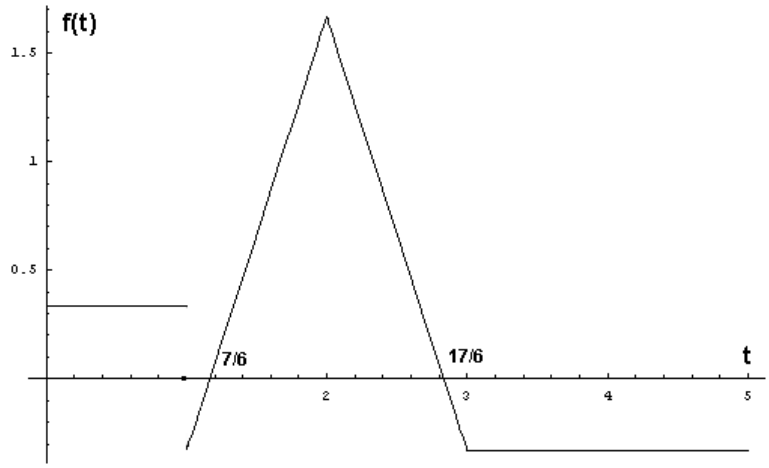
e calcolare: $F(0,3)$

## Risoluzione:

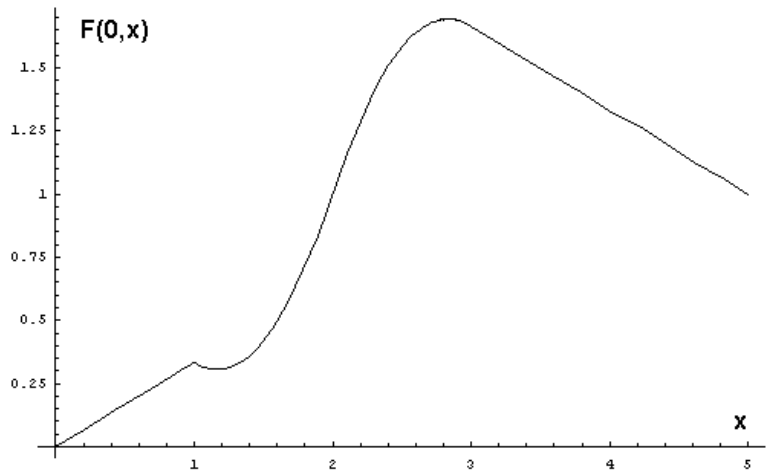
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \le t < 1 \\ 0 & t = 1 \\ 2t - \frac{7}{3} & 1 < t \le 2 \\ \frac{17}{3} - 2t & 2 \le t \le 3 \\ -\frac{1}{3} & 3 \le t \le 5 \end{cases}$$

Per cui i diagrammi di $f(t)$ e $F(0,x)$ sono rispettivamente:




e



Nota bene: i punti di incontro della funzione integranda con l'asse delle $x$ si ottengono risolvendo le equazioni:

$$2t - \frac{7}{3} = 0$$
$$\frac{17}{3} - 2t = 0$$

Calcoliamo ora $F(0,3)$. Si ha:

$$F(0,3) = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\right) dt + \int_1^2 \left(2t - \frac{7}{3}\right) dt + \int_2^3 \left(\frac{17}{3} - 2t\right) dt =$$

$$= \left[\frac{t}{3}\right]_0^1 + \left[t^2 - \frac{7}{3}t\right]_1^2 + \left[\frac{17}{3}t - t^2\right]_2^3 = \frac{5}{3}$$

# Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \left(t^{\frac{sgn(t)}{3}} e^{-(t)^+}\right) dt$$

in tutto il campo di esistenza.

## Risoluzione:

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} t^{\frac{1}{3}} & t > 0 \\ t^{-\frac{1}{3}} & t < 0 \end{cases}$$

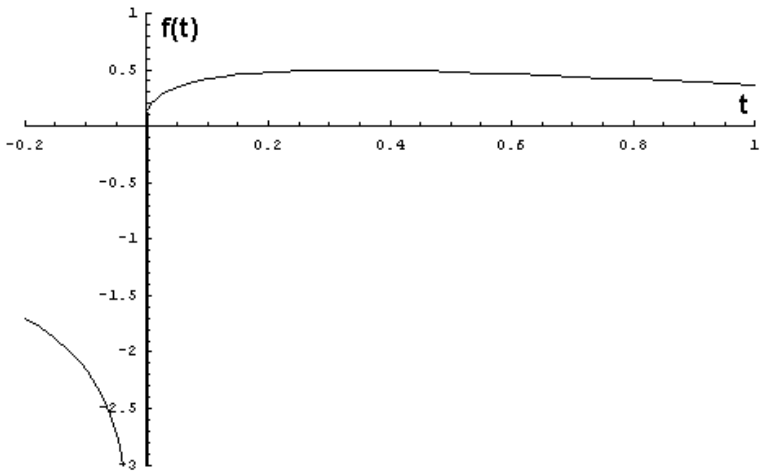
Per $t = 0$ la funzione non esiste. Per cui:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}(1-3t)}{3\sqrt[3]{t^2}} & t > 0 \\ \\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}} & t < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza $f(t)$ è positiva per $t > 0$ e negativa per $t < 0$. Inoltre $f'(t)$ è positiva per $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ e negativa per $t < 0$ e per $t > \frac{1}{3}$. Infine:

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$$
$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = -\infty$$
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{t}}{e^t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{3e^t \sqrt[3]{t^2}} = 0$$

Pertanto si desume che la funzione $f(t)$ ha il seguente grafico:

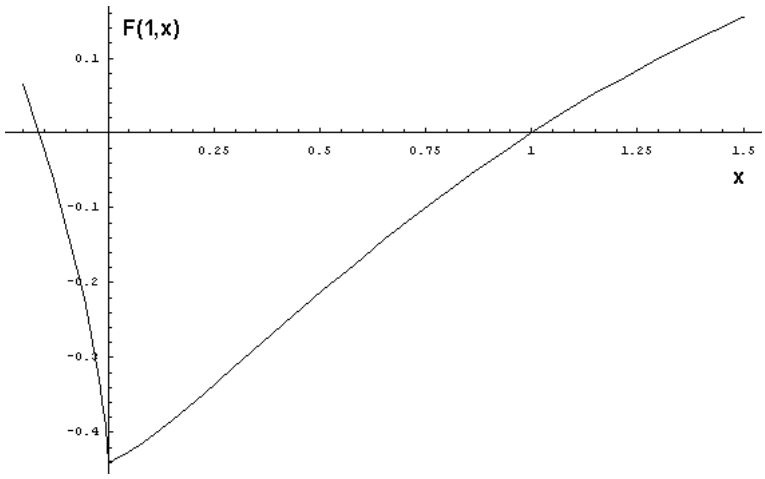



Prima di passare al diagramma della funzione integrale dobbiamo stabilire se essa è prolungabile a sinistra di 0. A tale scopo, preso $x < 0$, occorre calcolare :

$$\lim_{z\to 0^-} \int_z^x f(t)dt = \lim_{z\to 0^-} \int_z^x t^{-\frac{1}{3}} dt = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\right]_z^x =$$

$$\lim_{z\to 0^-} \left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{z^2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

Pertanto la funzione integrale è prolungabile a sinistra di 0 e ha il seguente grafico:




Nota bene: Con semplici calcoli (non richiesti in questo esame) si potrebbe stabilire che $\lim_{x\to+\infty} F(1,x)$ è finito e $\lim_{x\to-\infty} F(1,x) = +\infty$.

# Terzo Esercizio

Su di una matrice $A_{4x4}$ si sono compiuti tre passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice $A_3$. Sapendo che:

- Non sono stati effettuati scambi di colonne

- La prima colonna di $Q_1$ è : $\underline{e}_1 + \underline{e}_2$
- La seconda colonna di $Q_2$ è: $\underline{e}_2 + \underline{e}_3$
- La quarta colonna di $Q_3$ è: $-\underline{e}_3$
- $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4$ è soluzione del sistema: $A_2\underline{x} = \underline{e}_1 + \underline{e}_3$

trovare la matrice $A$ e la sua caratteristica.

## Risoluzione:

Poichè sono già stati fatti tre passi di pivotizzazione, la matrice $A_3$ ha la seguente forma:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \underline{a} \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = D_3\left(-1\right) \cdot S_{3,4}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{3,2}\left(1\right)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{2,1}\left(1\right)$$

Sapendo che:

$$A_2\left(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4\right) = \underline{e}_1 + \underline{e}_3$$

e:

$$A_3 = Q_3 \cdot A_2$$

Si ricava:

$$Q_3 \cdot A_2\left(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4\right) = Q_3\left(\underline{e}_1 + \underline{e}_3\right)$$

Ovvero:

$$A_3\left(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4\right) = Q_3\left(\underline{e}_1 + \underline{e}_3\right)$$

Ossia:

$$\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 - \underline{a} = \underline{e}_1 + \underline{e}_4 \Rightarrow \underline{a} = 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4$$

La matrice $A_3$ è dunque:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-1} \end{bmatrix}$$

Quindi $r(A) = 4$ e

$$A_2 = S_{3,4} \cdot D_3(-1) \cdot A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-1} \\ 0 & 0 & \text{-1} & \text{-2} \end{bmatrix}$$

Poi:

$$A_1 = T_{3,2}(-1) \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-1} & 0 & \text{-1} \\ 0 & 0 & \text{-1} & \text{-2} \end{bmatrix}$$

Infine:

$$A = T_{2,1}(-1) \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-1} & 0 & \text{-1} \\ 0 & 0 & \text{-1} & \text{-2} \end{bmatrix}$$