Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(2,x) = \int_2^x \left((t-1)^+ (t-2)^- + \left(6t - t^2 - 8\right)^+ sgn\,(t-3) \right) dt \qquad \text{in } [0,4]$$

e calcolare:

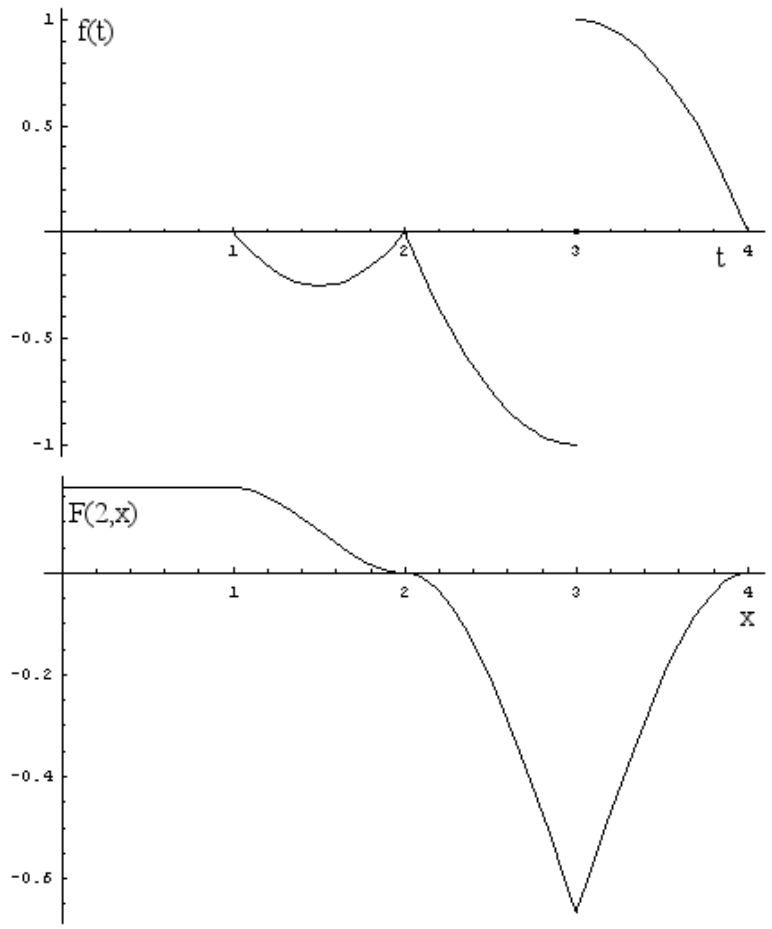
$$F(2,0) \quad F(2,4)$$

Risoluzione:

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ t^2 - 3t + 2 & 1 \le t < 2 \\ t^2 - 6t + 8 & 2 \le t < 3 \\ 0 & t = 3 \\ -t^2 + 6t - 8 & 3 < t \le 4 \end{cases}$$

Per cui :



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Osservando il diagramma della funzione integrale, confrontato con quello della funzione integranda, si vede subito, per proprietà geometriche, che $F(2,4)=0$ e:

$$F(2,0)=F(2,1)=\int_2^1\left(t^2-3t+2\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^1=\frac{1}{6}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(3,x)=\int_3^x \ln\left(\frac{t+1}{t^2}\right)dt \qquad\qquad \text{in } (0,+\infty)$$

e stabilire se F é prolungabile nell'origine.

Risoluzione:

Posto:

$$f(t)=\ln\left(\frac{t+1}{t^2}\right)$$

osserviamo che:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=+\infty$$

in quanto:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t+1}{t^2}=+\infty$$

Poi:

$$\lim_{t\to +\infty} f(t)=-\infty$$

in quanto:

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{t+1}{t^2}=\lim_{t\to +\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)=0$$

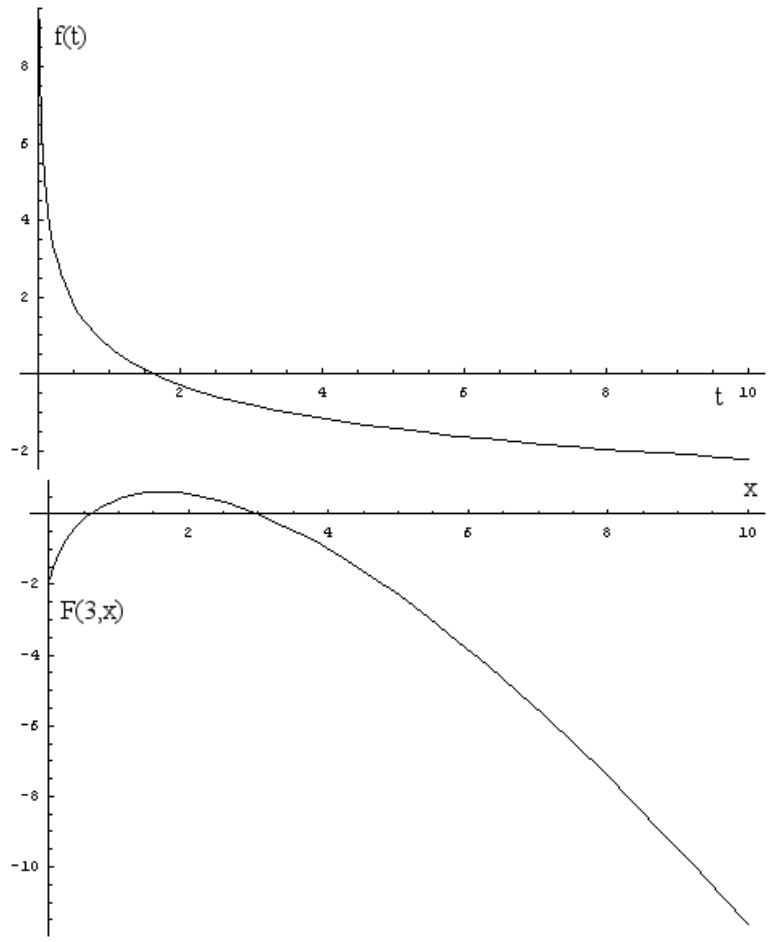
Inoltre:

$$f'(t)=D\left(ln\left(t+1\right)-2ln\left(t\right)\right)=\frac{-t-2}{t\left(t+1\right)}$$

E quindi f é decrescente in tutto l'intervallo $(0,+\infty)$
Resta da individuare il punto in cui risulta $f(t)=0$. In questo punto deve essere:

$$\frac{t+1}{t^2}=1\Rightarrow t^2-t-1=0\Rightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Pertanto i diagarammi di f e F sono i seguenti:



Per stabilire se la F è prolungabile in 0, calcoliamo $\lim_{x\to 0^+} F(3,x)$.
Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} F(3,x) = \lim_{x\to 0^+} \int_3^x \ln\left(\frac{t+1}{t^2}\right) dt = \lim_{x\to 0^+} \int_3^x \left(\ln(t+1) - 2\ln(t)\right) dt =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left[(t+1)\ln(t+1) - 2\left(t\ln(t)\right) + t\right]_3^x =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left((x+1)\ln\left(x+1\right) - 2x\ln(x) + x\right) - \left(4\ln(4) - 6\ln(3) + 3\right) = -\left(4\ln(4) - 6\ln(3) + 3\right)$$

Nota:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

La funzione F è pertanto prolungabile in 0.

Terzo esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{3x4} si è ottenuta una matrice A_2. Sapendo che:

- Ne primo passo si é scambiata la prima con la seconda colonna

- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4$ è soluzione del sistema:

$$A_2 \cdot \underline{x} = k\underline{e}_3$$

- $2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4 \in ns(A)$
- La seconda colonna di Q_2 é: $\underline{e}_2 - \underline{e}_3$
- Nel primo passo il pivot é 3 e sono intervenute le matrici:

$$T_{2,1}(1) \qquad \text{e} \qquad T_{3,1}(-2)$$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Dall'uguaglianza:

$$A_2 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4) = k\underline{e}_3$$

Segue che:

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{a} + \underline{b} = k\underline{e}_3 \tag{1}$$

Dal fatto che:

$$A\,(2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4) = \underline{0}$$

Ricordando che:

$$A = Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdot A_2 \cdot S_{1,2}$$

Segue:

$$A_2 \cdot S_{1,2} \cdot (2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4) = \underline{0}$$

Ossia:

$$A_2 \cdot (2\underline{e}_2 + 3\underline{e}_1 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4) = \underline{0}$$

In conclusione:

$$3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$$

($\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono rispettivamente la terza e la quarta colonna di A_2)
Unendo la precedente equazione con l'eq.1, sommando membro a membro, ricaviamo:

$$\underline{b} = -2\underline{e}_1 - \frac{3}{2}\underline{e}_2 + \frac{k}{2}\underline{e}_3$$

e di conseguenza :

$$\underline{a} = \underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2 + \frac{k}{2}\underline{e}_3$$

La matrice A_2 risulta pertanto:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Si vede che se $k = 0$, $r(A) = 2$ altrimenti $r(A) = 3$.

Poiché $Q_2 = T_{3,2}(-1)$:

$$A_1 = T_{3,2}(1) \cdot A_2$$

Ovvero:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{k+1}{2} & \frac{k-3}{2} \end{bmatrix}$$

Poiché:

$$A_1 = T_{2,1}(1) \cdot T_{3,1}(-2) \cdot D_1(\frac{1}{3}) \cdot A \cdot S_{1,2}$$

si ha:

$$A = D_1(3) \cdot T_{2,1}(-1) \cdot T_{3,1}(2) \cdot A_1 \cdot S_{1,2}$$

ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{k+5}{2} & \frac{k-11}{2} \end{bmatrix}$$

Poiché per $k = 0$ la caratteristica é 2, una base per $span(A)$ é costituita dalle prime due colonne della matrice A, non importa l'ordine con cui sono messe.

Per trovare il $ns(A)$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

Pertanto, aggiungendo le equazioni fittizie:

$$\begin{cases} x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

si ricava subito:

$$\underline{x}^* = t_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una base di $ns(A)$ è quindi costituita dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio alternativo al primo

Studiare la funzione:

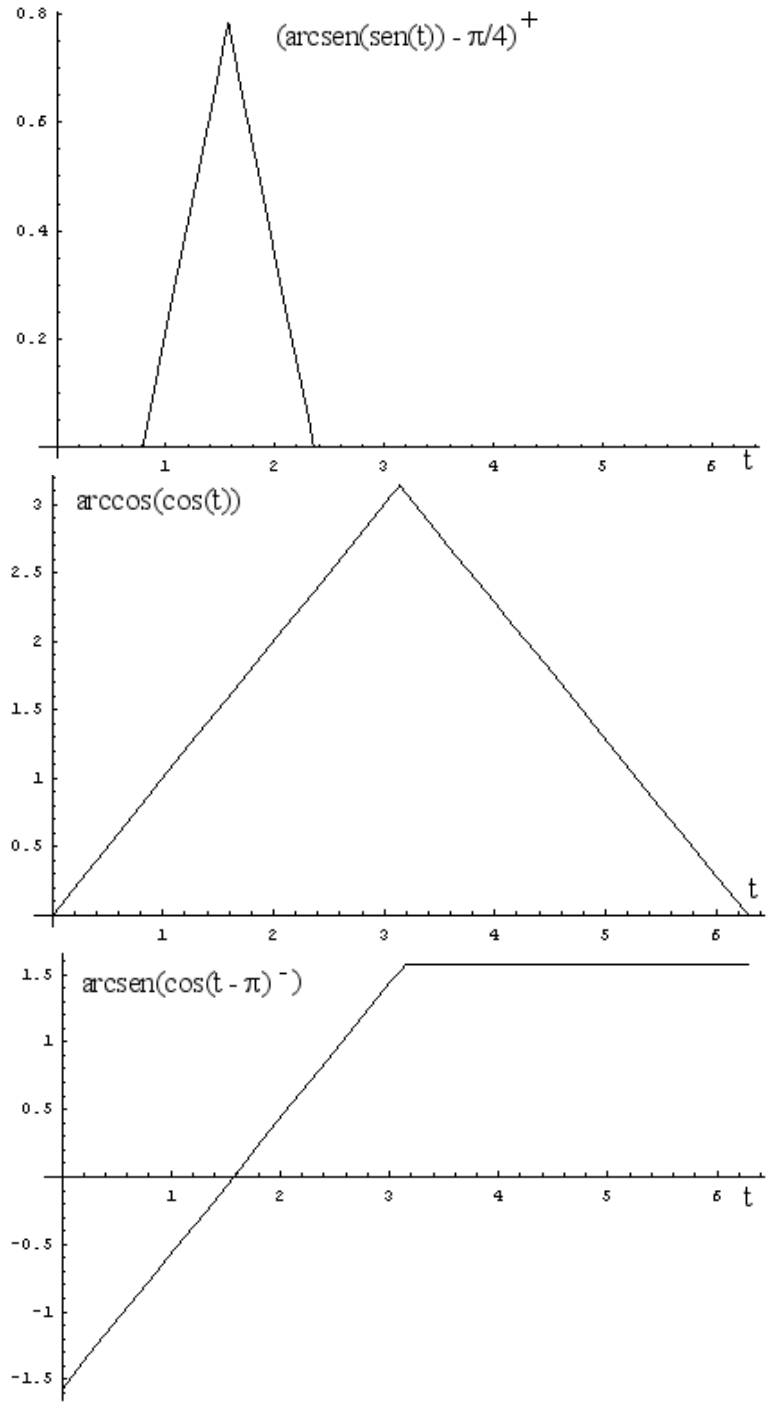
$$F(\pi, x) = \int_{\pi}^{x} \left((arcsen(\sin(t)) - \frac{\pi}{4})^{+} \cdot arccos(\cos(t)) + \pi \left(arcsen(\cos(t-\pi)^{-} \right) \right) dt \qquad \text{in } [0, 2\pi]$$

e calcolare:

$$F(\pi, 0) \quad \text{e} \quad F(\pi, 2\pi)$$

Risoluzione

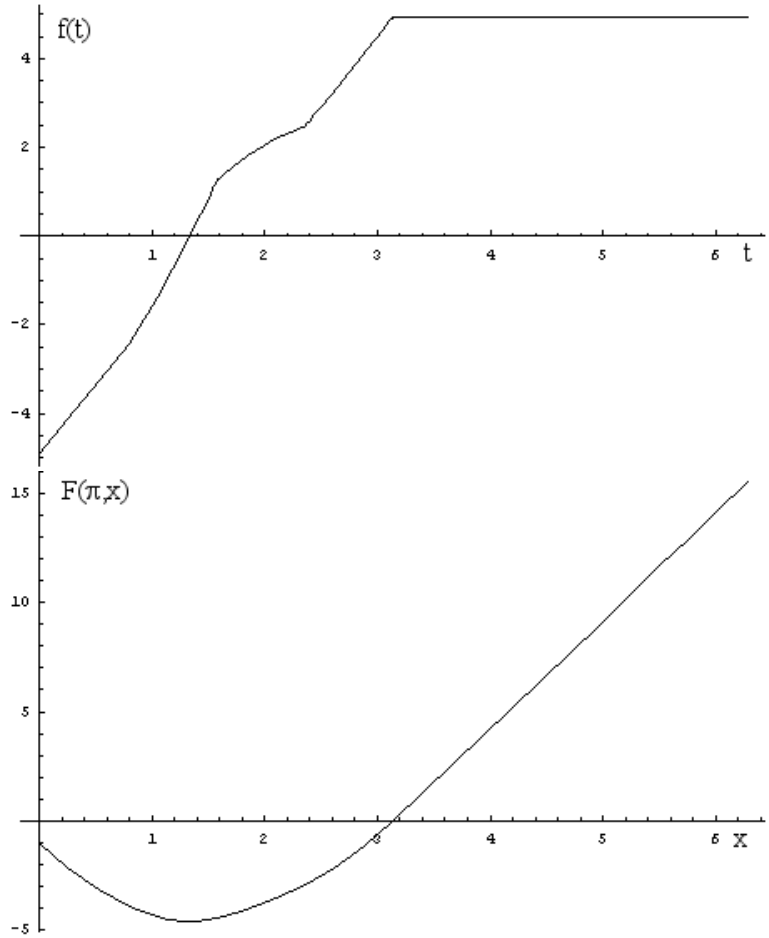
Osservando i diagrammi:



si desume:

$$f(t) = \begin{cases} \pi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ t\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = t^2 + \frac{3\pi t}{4} - \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ t\left(-t + \frac{3\pi}{4}\right) + \pi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -t^2 + \frac{7\pi t}{4} - \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4} \\ \pi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \pi \\ \frac{\pi^2}{2} & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Di conseguenza la f e la F hanno le forme esposte di seguito:



Passiamo ora al calcolo degli integrali.
Con semplici considerazioni geometriche si desume che:

$$F(\pi, 2\pi) = \frac{\pi^3}{2}$$

Mentre:

$$F(\pi, 0) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-t^2 + \frac{7\pi t}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) dt +$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(t^2 + \frac{3\pi t}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) dt = -\frac{\pi^3}{32}$$