Primo Esercizio

Studiare la funzione:

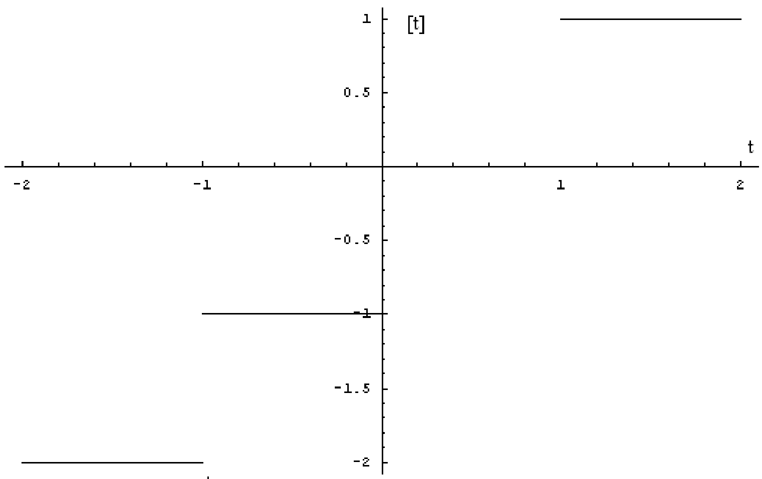
$$F(2,x) = \int_2^x \left(\left(\ln \left(\frac{1}{[t+1]} + [t]\, man(t) \right) \right)^+ - \frac{1}{[t]} \right) dt \qquad \text{in } [1,3]$$

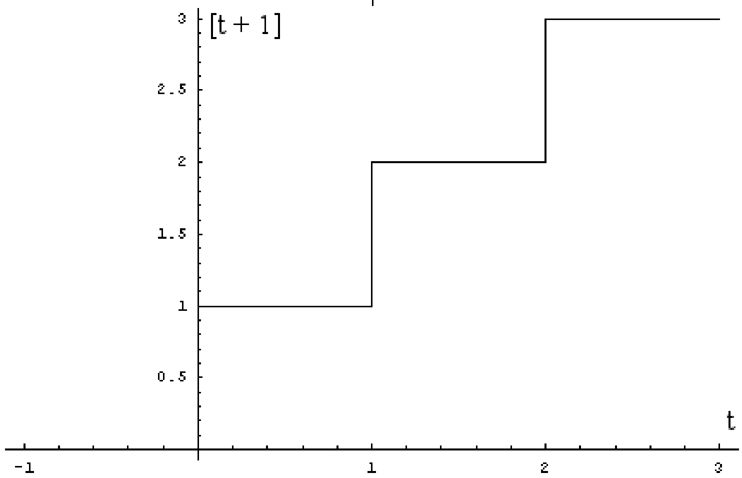
e calcolare:

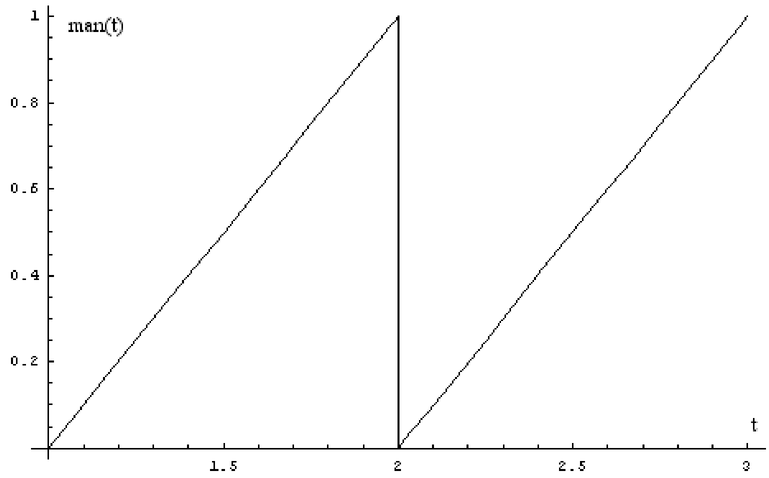
$$F(2,3) \qquad F(2,1)$$

Risoluzione:

Visti i diagrammi della parte intera e della mantissa:







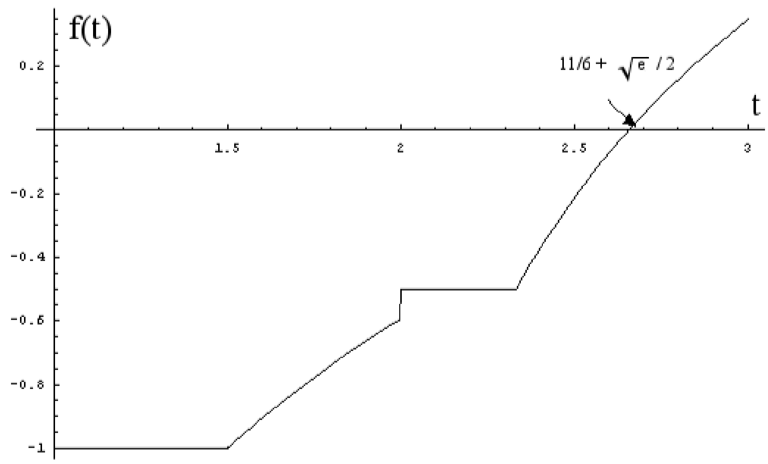
La nostra funzione si può scomporre così:

$$f(t) = \begin{cases} \left(\ln\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^{+} - 1 & 1 \leq t < 2 \\ \left(\ln\left(2t - \frac{11}{3}\right)\right)^{+} - \frac{1}{2} & 2 \leq t < 3 \\ -\frac{1}{3} & t = 3 \end{cases}$$

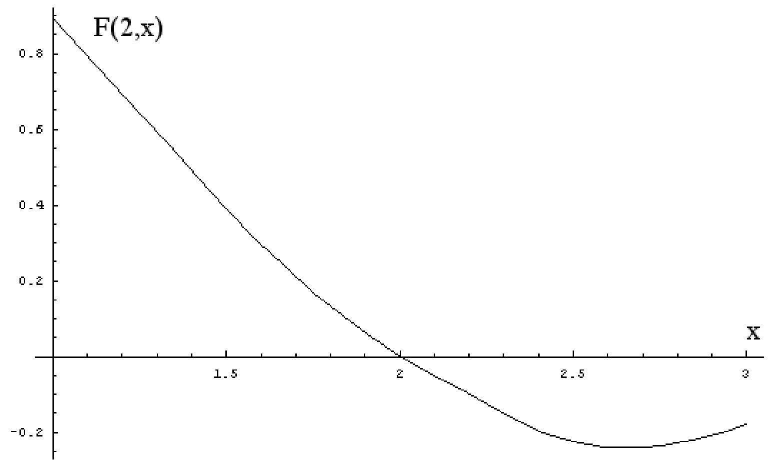
Tenuto conto dell'andamento della curva logaritmica (il logaritmo è positivo se l'argomento è maggiore di 1) si ha:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ \ln\left(t - \frac{1}{2}\right) - 1 & \frac{3}{2} \leq t < 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 \leq t < \frac{t}{3} \\ \ln\left(2t - \frac{11}{3}\right) - \frac{1}{2} & \frac{7}{3} \leq t < 3 \\ -\frac{1}{3} & t = 3 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha la seguente forma:



Pertanto la funzione integrale sarà:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(2,3) = \int_2^{\frac{7}{3}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt + \int_{\frac{7}{3}}^{3} \left(\ln\left(2t - \frac{11}{3}\right) - \frac{1}{2}\right) dt = \left[-\frac{1}{2}t\right]_2^{\frac{7}{3}} +$$
$$+ \left[\frac{1}{12}\left(-11+6t\right)\left(-3+2\ln\left(-\frac{11}{3}+2t\right)\right)\right]_{\frac{7}{3}}^{3} = \frac{7}{6}\left(-1+\ln\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$F(2,1) = \int_1^{\frac{3}{2}} (-1)\, dt + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(\ln\left(t-\frac{1}{2}\right) - 1\right) dt = \left[-t\right]_1^{\frac{3}{2}} +$$
$$+ \left[\left(t - \frac{1}{2}\left(-2+\ln\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = -\frac{3}{2}\left(-1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

Secondo Esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione senza scambi di colonna su di una matrice A_{4x4} si è ottenuta una matrice A_2 e le seguenti informazioni:

- $\underline{e}_1 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4$ appartiene al $ns(A)$
- $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4$ è soluzione del sistema:

$$A_2\underline{x} = 2k\underline{e}_4$$

- Nel primo passo di pivotizzazione si è scambiata la prima con la terza riga di A, è intervenuta la matrice $T_{3,1}(-2)$ ed il pivot è $-\frac{1}{3}$.
- La seconda colonna di Q_2 è : $2\underline{e}_1 - \frac{1}{2}\underline{e}_2 + \underline{e}_3$

Trovare A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e per il $ns(A)$.

Risoluzione

Poiché sono già stati compiuti 2 passi di pivotizzazione, la matrice A_2 ha la forma seguente:

$$A_2 = \left[\begin{array}{cccc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{a} & \underline{b} \end{array} \right]$$

dove $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono incogniti. Siccome non si sono fatti scambi di colonne, l'uguaglianza:

$$A\left(\underline{e}_1 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4\right) = \underline{0}$$

può essere sostituita da

$$A_2\left(\underline{e}_1 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4\right) = \underline{0}$$

Per cui:

$$\underline{e}_1 + \underline{a} - \underline{b} = 0$$

Dall'uguaglianza:

$$A_2\left(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4\right) = 2k\underline{e}_4$$

segue:

$$\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{a} + \underline{b} = 2k\underline{e}_4$$

In conclusione dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \underline{a} - \underline{b} = -\underline{e}_1 \\ \underline{a} + \underline{b} = -\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 2k\underline{e}_4 \end{cases}$$

Sommando, sottraendo e semplificando otteniamo:

$$\begin{array}{l} \underline{a} = -\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + k\underline{e}_4 \\ \underline{b} = \underline{e}_2 + k\underline{e}_4 \end{array}$$

In conclusione, la matrice A_2 ha la seguente forma:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(-\frac{1}{2}) = T_{1,2}(-4) \cdot T_{4,2}(-2) \cdot D_2(-\frac{1}{2})$$

Quindi:

$$A_2 = T_{1,2}(-4) \cdot T_{4,2}(-2) \cdot D_2(-\tfrac{1}{2}) \cdot A_1 \Rightarrow$$
$$A_1 = D_2(-2) \cdot T_{4,2}(2) \cdot T_{1,2}(4) \cdot A_2$$

Pertanto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2+k & 2+k \end{bmatrix}$$

Tenendo conto di quello che è avvenuto nel primo passo, possiamo scrivere:

$$A_1 = T_{3,1}(-2) \cdot D_1(-3) \cdot S_{1,3} \cdot A \Rightarrow$$
$$A = S_{1,3} \cdot D_1(-\tfrac{1}{3}) \cdot T_{3,1}(2) \cdot A_1$$

Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 2+k & 2+k \end{bmatrix}$$

Per $k = 0$ la caratteristica è 2, quindi una base per lo $span(A)$ è costituita da due colonne di questa matrice. Poiché non sono avvenuti scambi di colonne, possiamo prendere come base per $span(A)$ la matrice formata dalle prime due colonne di A. Per trovare $ns(A)$ è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo le equazioni fittizie:

$$x_3 = t_1$$
$$x_4 = t_2$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} t_1 \\ \text{-}t_1\text{-}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \text{-1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto una base per $ns(A)$ è costituita dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \text{-1} & \text{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si osservi che quest'ultima matrice è a rango colonna pieno, in quanto contiene per esempio la sottomatrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha determinante non nullo.

Terzo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \left(|t|^{\left(sgn(t)2^{sgn(t)}\right)} e^{-\frac{1}{3}(t)^+} \right) dt \qquad \text{nel suo campo di esistenza}$$

Risoluzione:

Poniamo:

$$f(t) = \left(|t|^{\left(sgn(t)2^{sgn(t)}\right)} e^{-\frac{1}{3}(t)^+} \right)$$

Essa può essere scritta nel modo seguente:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 e^{-\frac{t}{3}} & t > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-t}} & t < 0 \\ \nexists & t = 0 \end{cases}$$

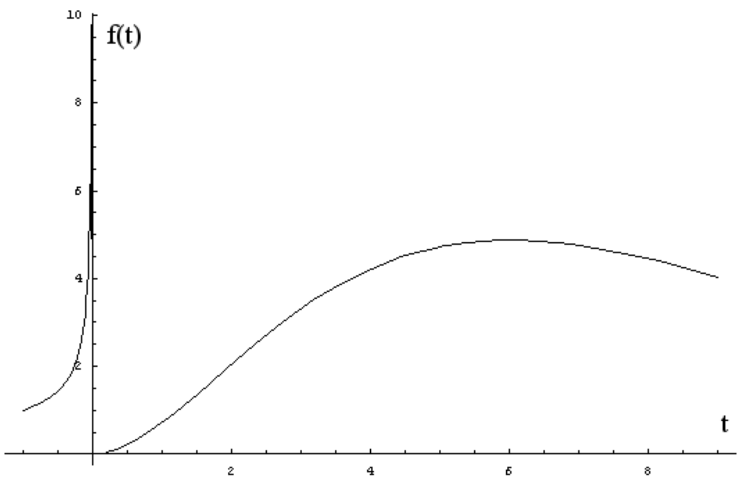
$f(t)$ è sempre positiva nel suo campo di esistenza, è sempre crescente per i $t < 0$. Per i $t > 0$ conviene calcolare la derivata. Risulta:

$$f'(t) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}(t-6)\,t \qquad t > 0$$

Per cui $f(t)$ sarà crescente per $t \in (0,6)$ e decrescente per $t \in (6,+\infty)$. Risulta anche agevole verificare che:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2}{e^{\frac{t}{3}}}\right) = \text{con De l'Hospital} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{6t}{e^{\frac{t}{3}}}\right) = \text{con De l'Hospital} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{18}{e^{\frac{t}{3}}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Per cui il diagramma di $f(t)$ risulta il seguente:



Prima di passare al calcolo della funzione integrale, cerchiamo di stabilire se essa sia prolungabile a sinistra di 0. (È evidente che essa è prolungabile in 0, in quanto risulta banalmente: $\lim_{t\to0^+} f(t) = 0$)

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0^-} \int_{-1}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{-t}}\right) dt$. Poiché:

$$\begin{aligned} &\int \left(\frac{1}{\sqrt{-t}}\right) dt = -\int \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) dz \qquad \text{posto } z = -t \Rightarrow dz = -dt \\ &= -\int z^{-\frac{1}{2}} dz = -2\sqrt{z} + k = -2\sqrt{-t} + k \end{aligned}$$

Risulta:

$$\int_{-1}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{-t}}\right) dt = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = -2\sqrt{-x} + 2$$

E quindi:

$$\lim_{x\to 0^-} \left(-2\sqrt{-x} + 2\right) = 2$$

Pertanto possiamo concludere che la funzione integrale è prolungabile alla sinistra di 0 ed il suo grafico ha la forma seguente: