Primo Esercizio

Studiare la funzione:

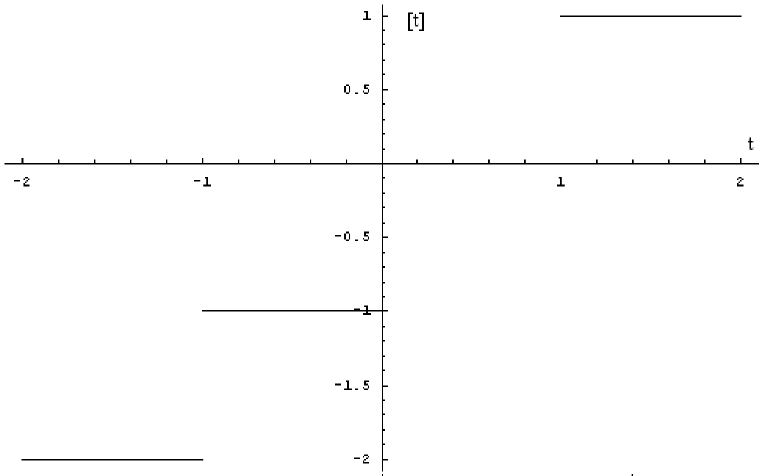
$$F(0,x) = \int_0^x \left(([t]-t)^2 \cdot sgn\left(t^2-1\right)^- + (t+1)^+ + (t-1)^+ \right) dt \qquad \text{in } [-2,2]$$

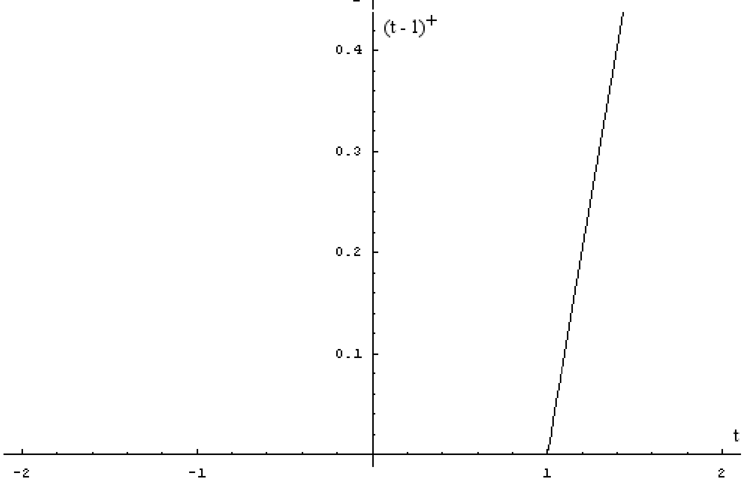
e calcolare:

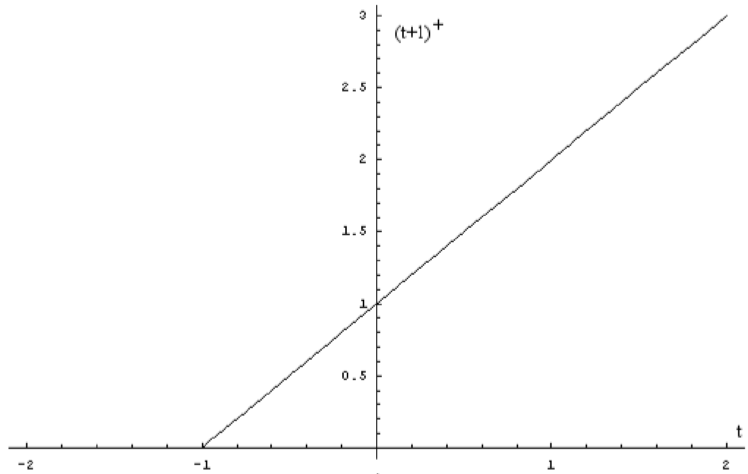
$$F(0,2) \qquad F(0,-2)$$

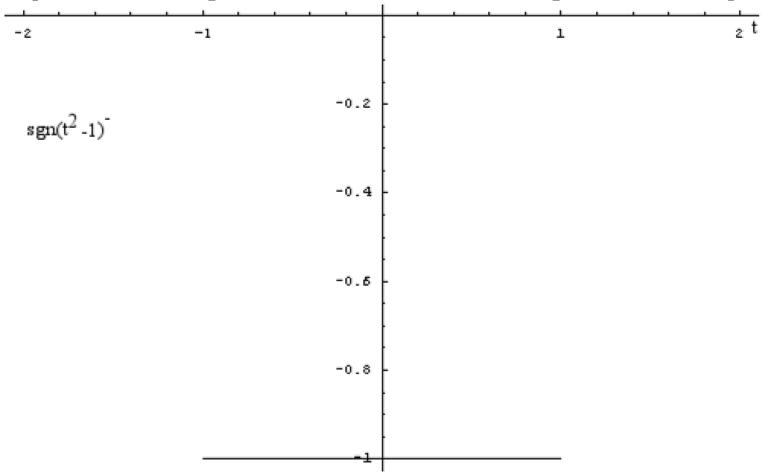
Risoluzione:

Visti i diagrammi:





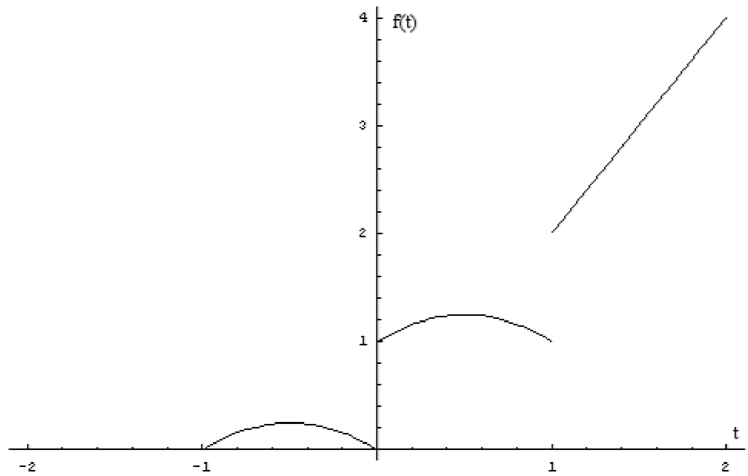




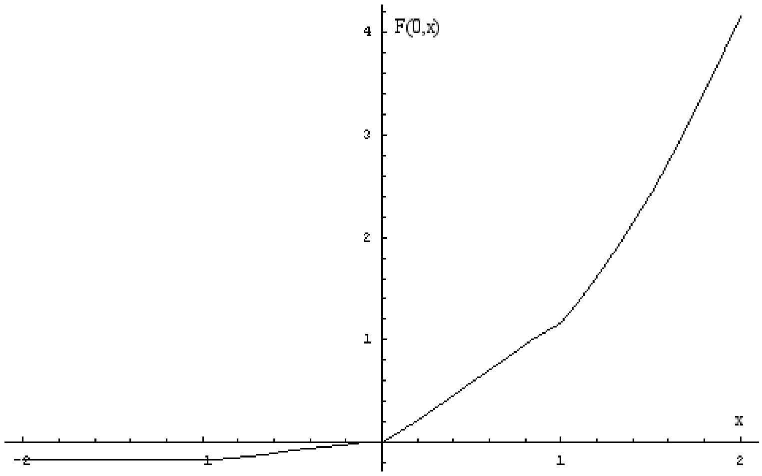
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 \leq t \leq -1 \\ -t^2 - t & -1 < t < 0 \\ -t^2 + t + 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2t & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha la seguente forma:



Pertanto la funzione integrale sarà:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(0,2) = \int_0^1 (-t^2 + t + 1)\,dt + \int_1^2 (2t)\,dt = \frac{25}{6}$$
$$F(0,-2) = \int_0^{-1} (-t^2 - t)\,dt = -\frac{1}{6}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \frac{2\sin(t) - 1}{\cos(t)^+} dt$$

in tutta quella parte del campo di esistenza compresa tra $-\pi$ e π.

Risoluzione:

La funzione è definita per $t \neq \frac{\pi}{2}$ e risulta :

$$f(t) = \begin{cases} 2\sin(t) - 1 & -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{2\sin(t)-1}{\cos(t)} & 0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Per disegnare il diagramma della funzione integranda nell'intervallo $[-\pi, 0]$ è sufficiente ricordare l'andamento della funzione sin in questo intervallo. Per disegnare il diagramma nell'intervallo $[0, \pi]$ conviene invece calcolare la derivata prima.

$$f'(t) = \frac{2 - \sin(t)}{cos^2(t)}$$

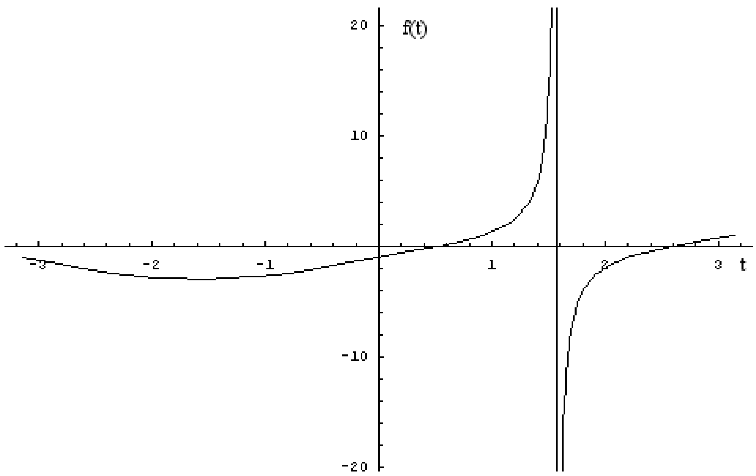
Tenuto conto di tutte queste considerazioni, possiamo affermare che:

$$f(t) \text{ è } \begin{cases} \text{negativa} & \text{in} & -\pi < t < \frac{\pi}{6} & e & \frac{\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{6} \\ \text{positiva} & \text{in} & \frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{2} & e & \frac{5\pi}{6} < t < \pi \end{cases}$$

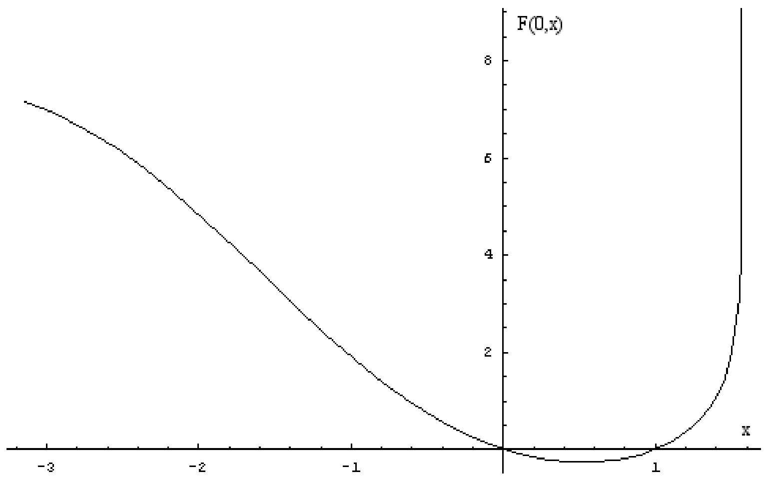
Inoltre:

$$f(t) \text{ è } \begin{cases} \text{crescente} & \text{in} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} e \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ \text{decrescente} & \text{in} \quad -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha il seguente diagramma:



La funzione integrale nell'intervallo $(-\pi, \frac{\pi}{2})$, inoltre, ha la forma:



Per stabilire se F è prolungabile in $\frac{\pi}{2}$ ed eventualmente oltre bisogna calcolare $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(0, x)$. Risulta:

$$\begin{aligned} &\int \left(\tfrac{2\sin(t)-1}{\cos(t)}\right) dt = \int \left(\tfrac{\sin(t)+\sin(t)-1}{\cos(t)}\right) dt = \int \left(\tan(t) + \tfrac{\sin(t)-1}{\cos(t)}\right) dt = \\ &\int \left(\tan(t) + \tfrac{(\sin(t)-1)(\sin(t)+1)}{\cos(t)(\sin(t)+1)}\right) dt = \int \left(\tan(t) - \tfrac{\cos(t)}{\sin(t)+1}\right) dt = \\ &-\ln|\cos(t)| - \ln(\sin(t)+1) + k = -\ln|\cos(t)(\sin(t)+1)| + k \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left[-\ln|\cos(t)(\sin(t)+1)|\right]_0^x = \\ &\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = -\ln|\cos(x)(\sin(x)+1)| = +\infty \end{aligned}$$

La funzione integrale non è quindi prolungabile in $\frac{\pi}{2}$ e di conseguenza nemmeno oltre.

Terzo esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{3x3} si è ottenuta una matrice A_2. Sapendo che:

- Nel primo passo si è scambiata la prima con la terza colonna e la prima con la seconda riga.Il primo pivot era 3 ed è intervenuta la matrice $T_{3,1}(-1)$
- Nel secondo passo la seconda colonna di Q_2 è risultata:

$$2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

- Il vettore:

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

  è soluzione del sistema:

$$D_3(k) \cdot A_2 \cdot \underline{x} = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - (k-1)\,\underline{e}_3 \qquad (k \neq 0)$$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Sapendo che:

$$D_3(k) \cdot A_2 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3) = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - (k-1)\,\underline{e}_3 \qquad (k \neq 0)$$

chiamando con $\underline{\mathrm{a}}$ la terza colonna della matrice A_2, risulta:

$$A_2 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3) = D_3(\frac{1}{k}) \cdot (2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - (k-1)\,\underline{e}_3) \qquad (k \neq 0)$$

e quindi:

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{a} = D_3(\frac{1}{k}) \cdot (2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - (k-1)\,\underline{e}_3) \qquad (k \neq 0)$$

Da cui consegue:

$$\underline{a} = -\underline{e}_1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)\underline{e}_3$$

La matrice A_2 ha quindi la seguente forma:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k-1}{k} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$r(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 3 & k \neq 1 e k \neq 0 \\ 2 & k = 1 \end{array} \right]$$

Siccome:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(2) = T_{1,2}(1) \cdot T_{3,2}(-\frac{1}{2}) \cdot D_2(2)$$

risulta:

$$A_1 = D_2(\frac{1}{2}) \cdot T_{1,2}(-1) \cdot T_{3,2}(\frac{1}{2}) \cdot A_2$$

Ovvero:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{k-1}{k} \end{bmatrix}$$

Poicè:

$$A_1 = T_{3,1}(-1) \cdot D_1(\frac{1}{3}) \cdot S_{1,2} \cdot A \cdot S_{1,3}$$

si ha:

$$A = S_{1,2} \cdot D_1(3) \cdot T_{3,1}(1) \cdot A_1 \cdot S_{1,3}$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 + \frac{k-1}{k} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che la caratteristica di A è minima per $k = 1$ e in tal caso una base di $span(A)$ è costituita dalla terza e seconda colonna della matrice A stessa. (Durante la pivotizzazione abbiamo scambiato la prima con la terza colonna)

Per trovare una base di $ns(A)$ bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_1 = t$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto una base di $ns(A)$ è costituita dal vettore:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$