Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(2,x)=\int_2^x \left(\left([t+1]\,(t-[t])-1 \right)^+ (t-2) + sgn\left(\left(t-[t]-\frac{1}{[t+1]} \right)^- \right) \right) dt \qquad \text{in } [0,3]$$

e calcolare:

$$F(2,0) \quad F(2,3)$$

Risoluzione:

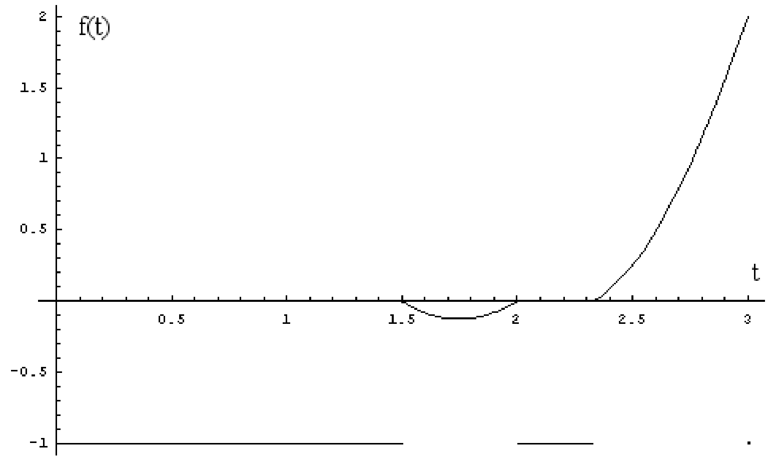
Risulta:

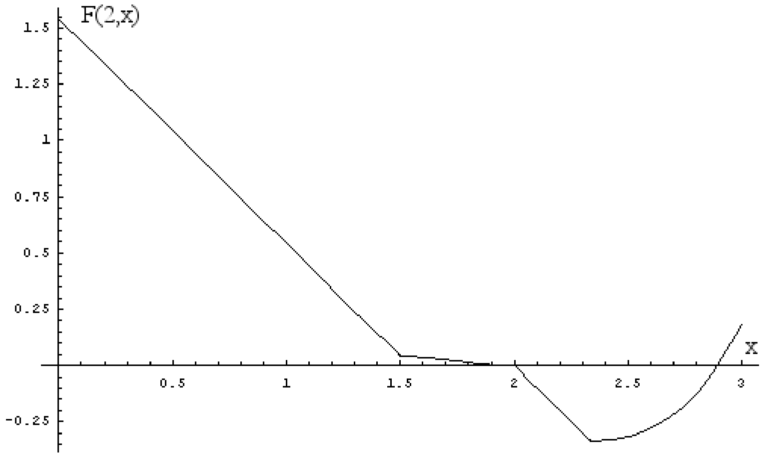
$$f(t)=\begin{cases} (t-1)^+ (t-2) + sgn\,(t-1)^- & 0\le t<1 \\ (2t-3)^+ (t-2) + sgn\left(t-\frac{3}{2}\right)^- & 1\le t<2 \\ (3t-7)^+ (t-2) + sgn\left(t-\frac{7}{3}\right)^- & 2\le t<3 \\ -1 & t=3 \end{cases}$$

Di conseguenza :

$$f(t)=\begin{cases} -1 & 0\le t<\frac{3}{2} \\ (2t-3)\,(t-2) & \frac{3}{2}\le t<2 \\ -1 & 2\le t<\frac{7}{3} \\ (3t-7)\,(t-2) & \frac{7}{3}\le t<3 \\ -1 & t=3 \end{cases}$$

Pertanto, ricordando che nell'intervallo tra $\frac{3}{2}$ e 2 il diagramma della funzione é una parabola con la conca rivolta verso l'alto, che si annulla nei punti $\frac{3}{2}$ e 2 e che ha il vertice per $t=\frac{7}{4}$ e che nell'intervallo tra $\frac{7}{3}$ e 3 il diagramma é ancora una parabola con la conca verso l'alto che si annulla negli estremi ed ha il vertice nel punto $t=\frac{13}{6}$ possiamo dedurre che i diagrammi di $f(t)$ e $F(2,x)$ sono i seguenti:





Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(2,0) = \int_2^{\frac{3}{2}} (2t^2 - 7t + 6)\, dt + \int_{\frac{3}{2}}^0 (-1)\, dt = \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t\right]_2^{\frac{3}{2}} + [-t]_{\frac{3}{2}}^0 = \frac{5}{27}$$
$$F(2,3) = \int_2^{\frac{7}{3}} (-1)\, dt + \int_{\frac{7}{3}}^3 (3t^2 - 13t + 14)\, dt = [-t]_2^{\frac{7}{3}} + \left[t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 14t\right]_{\frac{7}{3}}^3 = \frac{37}{24}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \frac{1 + (t)^+}{1 - t\,|t|} dt$$

in tutto il campo di esistenza.

Risoluzione:

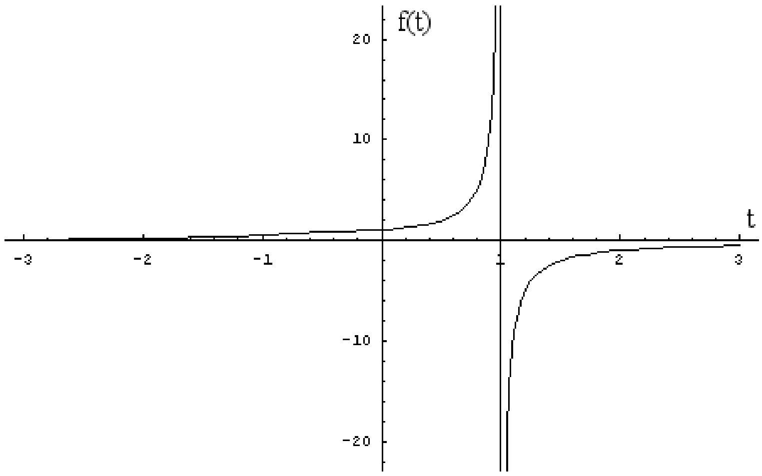
La funzione

$$f(t) = \frac{1 + (t)^+}{1 - t\,|t|}$$

è definita su tutto l'asse reale escluso $t = 1$ e risulta:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-t} & t \geq 0, t \neq 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & t \leq 0 \end{cases}$$

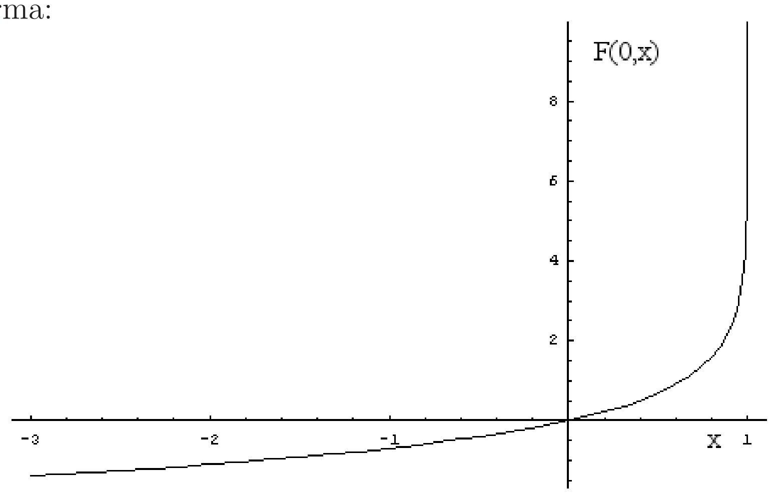
Senza calcolare le derivate si deduce immediatamente che la $f(t)$ ha la seguente forma:



Per stabilire se F é prolungabile in 1 ed eventualmente oltre bisogna calcolare $\lim_{x\to 1^-} F(2,x)$. Risulta:

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \lim_{x\to 1^-}\left[-\ln|1-t|\right]_0^x = \lim_{x\to 1^-}\ln|1-x| = +\infty$$

Pertanto F non é prolungabile in 1 e di conseguenza nemmeno oltre. Essa presenta la seguente forma:



Terzo esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{3x3} si è ottenuta una matrice A_2. Sapendo che:

- Nel primo passo si è scambiata la prima con la terza colonna e la prima con la seconda riga.
- Nel secondo passo si è scambiata la seconda con la terza colonna.
- Durante i due passi sono intervenute inoltre le matrici:

$$D_2(5) \quad , \quad T_{3,1}(-1) \quad , \quad T_{3,2}(-2) \quad , \quad T_{2,1}(\frac{1}{2}) \quad , \quad D_1(2) \quad \text{e} \quad T_{1,2}(-2)$$

- A_2 è simmetrica ed inoltre risulta:

$$det(A_2) + \frac{1}{3}det(A_1) + det(A) = k - 1$$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

La matrice A_2 è simmetrica e le su prime due colonne sno i rispettivi vettori della base canonica. Dunque:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

(c è l'unico elemento incognito della matrice A_2)
Ovviamente:

$$det(A_2) = c$$

Poichè:

$$A_2 = T_{1,2}(-2) \cdot T_{3,2}(-2) \cdot D_2(5) \cdot A_1 \cdot S_{2,3}$$

deve essere:

$$A_1 = D_2(\frac{1}{5}) \cdot T_{3,2}(2) \cdot T_{1,2}(2) \cdot A_2 \cdot S_{2,3}$$

Di conseguenza si ha:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & c & 2 \end{bmatrix}$$

e:

$$det(A_1) = -\frac{1}{5}c$$

Essendo:

$$A_1 = T_{3,1}(-1) \cdot T_{2,1}(\frac{1}{2}) \cdot D_1(2) \cdot S_{1,2} \cdot A \cdot S_{1,3}$$

deve risultare:

$$A = S_{1,2} \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot T_{2,1}(-\frac{1}{2}) \cdot T_{3,1}(1) \cdot A_1 \cdot S_{1,3}$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & c & 1 \end{bmatrix}$$

Per cui:

$$det(A) = \frac{-1}{10}c$$

Sfruttando l'eq:

$$det(A_2) + \frac{1}{3}det(A_1) + det(A) = k - 1$$

ricaviamo:

$$c - \frac{1}{15}c - \frac{1}{10}c = k - 1 \Rightarrow \frac{5}{6}c = k - 1 \Rightarrow c = \frac{6}{5}(k-1)$$

La caratteristica di A sará pertanto 3 se $k \neq 1$ e 2 se $k = 1$

In quest'ultimo caso, per trovare una base dello $span(A)$ basterá prendere due colonne della matrice. Per individuarle ricordiamo gli spostamenti delle colonne. All'inzio:

$$[1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3]$$

Dopo un passo:

$$[3 \quad , \quad 2 \quad , \quad 1]$$

Dopo due passi:

$$[3 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2]$$

Quindi una base per lo $span(A)$ é costituita dalla terza e dalla prima colonna della matrice A:

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ricavare una base di $ns(A)$ visogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_2 = t$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

il secondo vettore della base canonica rappresenta una base per $ns(A)$

Esercizio alternativo al primo

Studiare la funzione:

$$F(\pi, x) = \int_{\pi}^{x} \left(\left(arccos(\cos(t)) - \frac{\pi}{2} \right)^{+} arcsen(\sin(t)) + \pi \left(arcsen(\cos(t - \pi)) \right) \right) dt \qquad \text{in } [0, 2\pi]$$

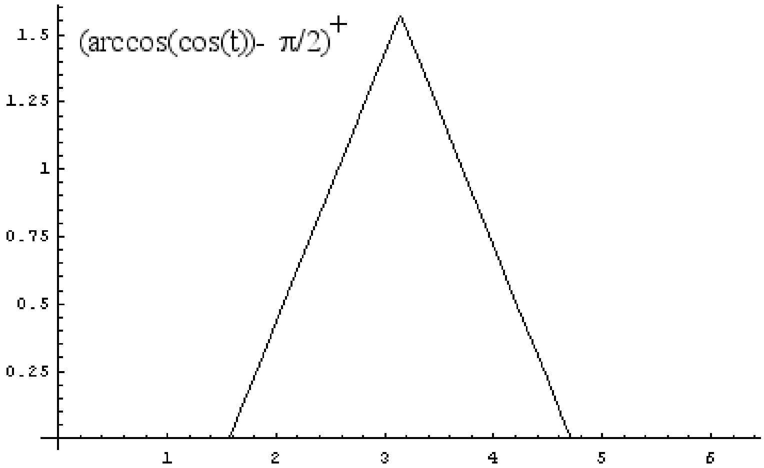
e calcolare:

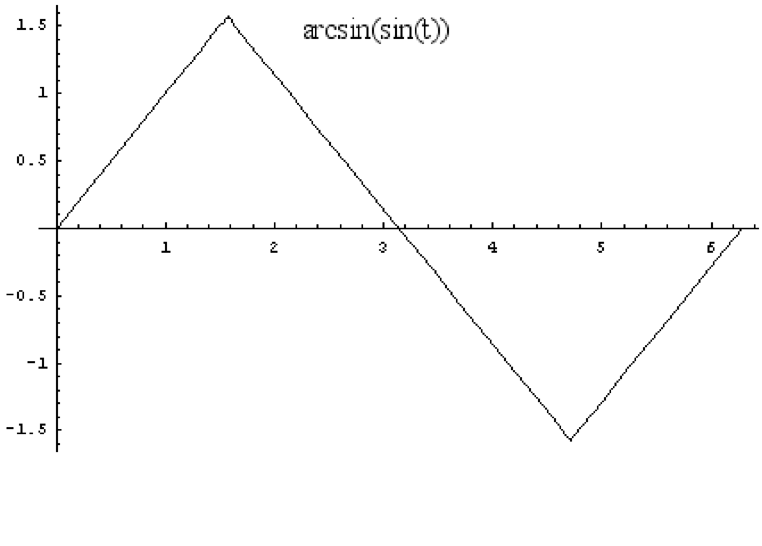
$$F(\pi, 0) \quad \text{e} \quad F(\pi, 2\pi)$$

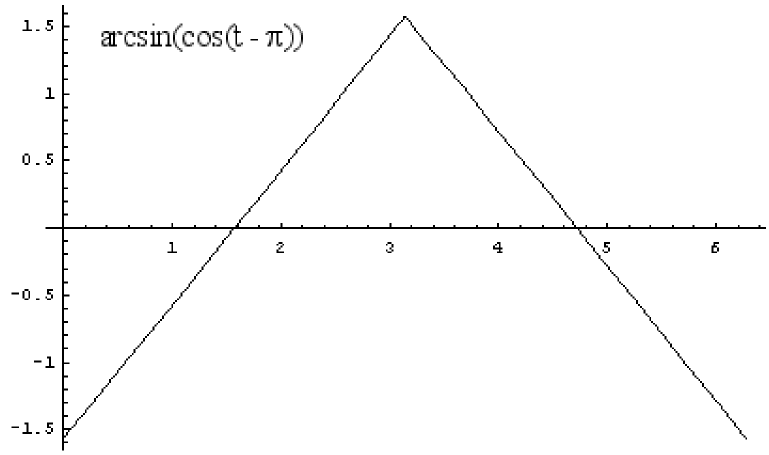
Risoluzione

Osservando i diagrammi di:

$$\begin{array}{l} \left(arccos(\cos(t)) - \frac{\pi}{2} \right)^{+} \\ arcsen(\sin(t)) \\ arcsen(\cos(t - \pi)) \end{array}$$



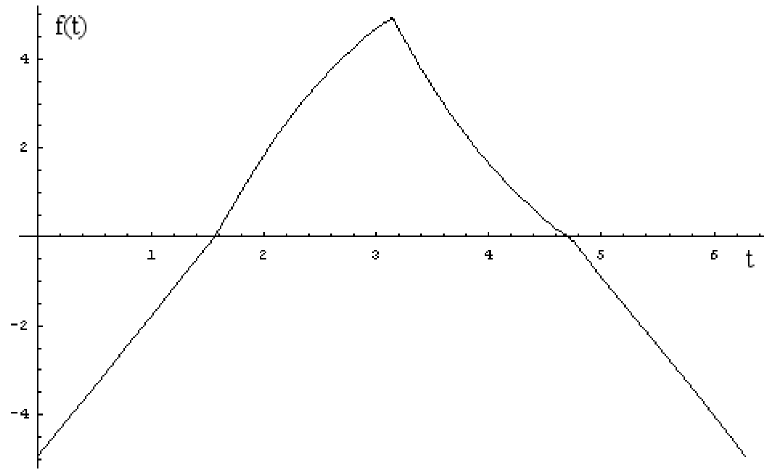


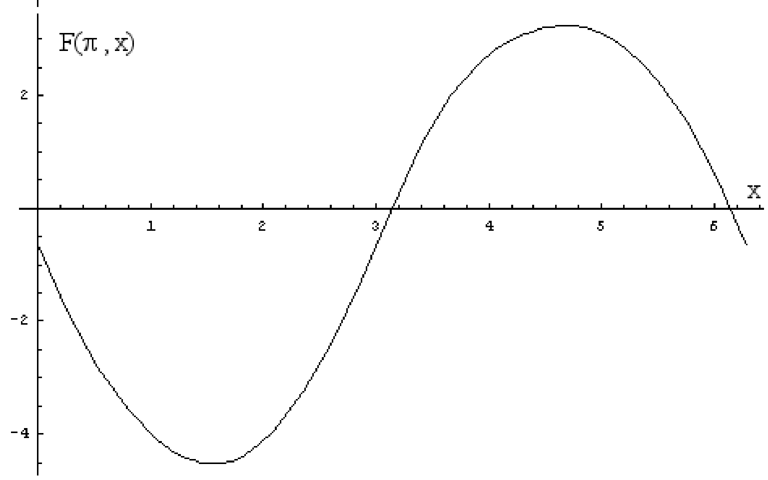


risulta subito:

$$f(t) = \begin{cases} \pi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \left(t - \frac{\pi}{2}\right)(2\pi - t) & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ \left(\frac{3}{2}\pi - t\right)(2\pi - t) & \pi \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ \pi\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) & \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Di conseguenza la f e la F hanno le forme esposte di seguito:





Passiamo ora al calcolo degli integrali.
Per ragioni di simmetria risulta:

$$F(\pi,0)=F(\pi,2\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)(2\pi-t)\,dt+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\pi\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)dt=\frac{-\pi^3}{48}$$