Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \left(2\left(1 - \left|man(t) - \frac{[t]}{[t+1]}\right|\right) - 1\right) dt \qquad \text{in } [0,3]$$

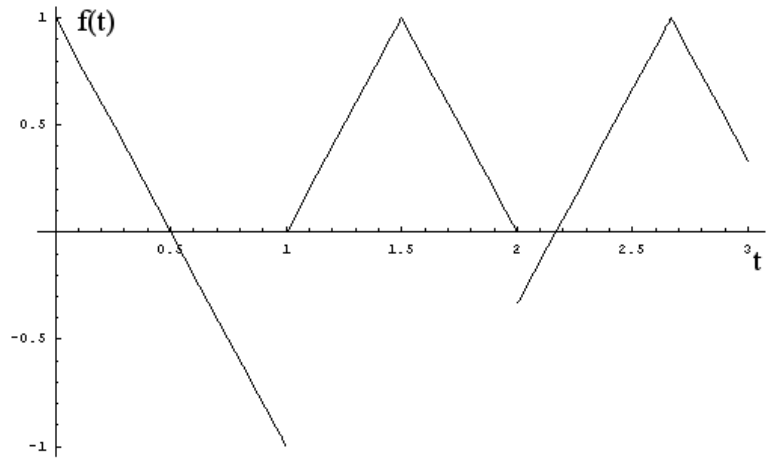
e calcolare: $F(1,0)$ e $F(1,3)$

Risoluzione:

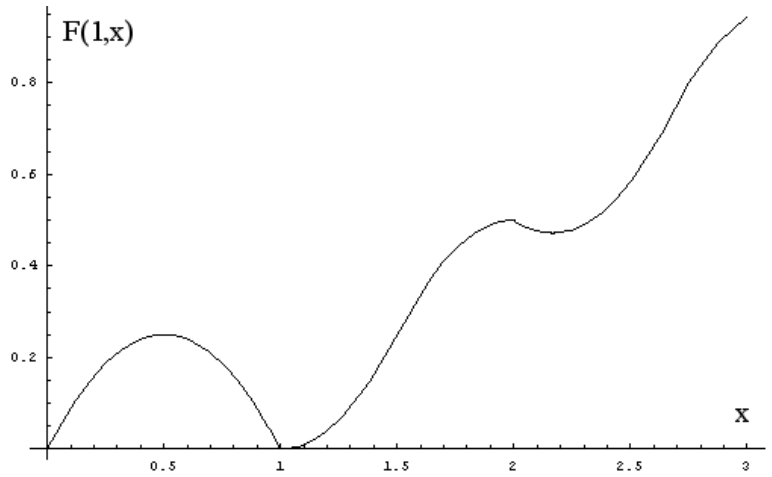
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} 1-2t & 0 \le t < 1 \\ -2+2t & 2 \le t < \frac{3}{2} \\ 4-2t & \frac{3}{2} \le t < 2 \\ 2t - \frac{13}{3} & 2 \le t < \frac{8}{3} \\ \frac{19}{3} - 2t & \frac{8}{3} \le t < 3 \\ -\frac{1}{2} & t = 3 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha la seguente forma:



Pertanto la funzione integrale sarà:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(1,0) = \int_1^0 (1-2t)\,dt = [t-t^2]_1^0 = 0$$

$$F(1,3) = \int_1^{\frac{3}{2}} (-2+2t)\,dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 (4-2t)\,dt + \int_2^{\frac{8}{3}} \left(2t - \frac{13}{3}\right) dt + \int_{\frac{8}{3}}^3 \left(\frac{19}{3} - 2t\right) dt =$$
$$= [t^2-2t]_1^{\frac{3}{2}} + [4t-t^2]_{\frac{3}{2}}^2 + \left[t^2 - \frac{13}{3}t\right]_2^{\frac{8}{3}} + \left[\frac{19}{3}t - t^2\right]_{\frac{8}{3}}^3 = \frac{17}{18}$$

Secondo Esercizio

Dopo 3 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{4x4} si è ottenuta una matrice A_3 e le seguenti informazioni:

- $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \frac{1}{2}\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4$ appartiene al $ns(A)$
- Nel primo passo si è scambiata la prima con la seconda colonna.
- Nel secondo passo si è scambiata la seconda con la quarta colonna.
- Nel terzo passo si è scambiata la terza con la quarta colonna.
- La terza colonna di Q_1, Q_2, Q_3 è $2\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3$

Trovare A, stabilirne la caratteristica e trovare una base per $span(A)$ e per il $ns(A)$.

Risoluzione

Poiché sono già stati compiuti 3 passi di pivotizzazione, la matrice A_3 ha la seguente forma :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & \underline{a} \end{bmatrix}$$

dove $\underline{a}$ è incognito. Poiché deve risultare:

$$A\left(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \frac{1}{2}\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4\right) = \underline{0}$$

e:

$$A_3 = Q_3 \cdot Q_2 \cdot Q_1 \cdot A \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \Rightarrow$$

$$A = Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdot Q_3^{-1} \cdot A_3 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$$

Si ha:

$$A_3 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot \left(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \frac{1}{2}\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4\right) = \underline{0}$$

Ovvero:

$$A_3 \cdot S_{3,4} \cdot S_{2,4} \cdot S_{1,2} \cdot \left(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \frac{1}{2}\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4\right) = \underline{0}$$

E quindi:

$$A_3 \cdot \left(\underline{e}_3 - 2\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_4 + 2\underline{e}_2\right) = \underline{0}$$

Di conseguenza:

$$\frac{1}{2}\underline{a} = 2\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3 \Rightarrow \underline{a} = 4\underline{e}_1 - 4\underline{e}_2 - 2\underline{e}_3$$

La matrice A_3 ha quindi la seguente forma:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La caratteristica della matrice A è pertanto 3. Osserviamo ora che:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(2) \cdot S_{1,3} =$$

$$= T_{2,1}(-1) \cdot T_{3,1}(\frac{1}{2}) \cdot D_1(2) \cdot S_{1,3}$$

Poi:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(-2) \cdot S_{2,3} =$$

$$= T_{1,2}(-1) \cdot T_{3,2}(-\frac{1}{2}) \cdot D_2(-2) \cdot S_{2,3}$$

Infine:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{1,3}(2) \cdot T_{2,3}(-2)$$

Tenuto conto di queste osservazioni, possiamo stabilire che:

$$A_2 = T_{1,3}(-2) \cdot T_{2,3}(2) \cdot A_3 \cdot S_{3,4}$$

Per cui:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poi:

$$A_1 = S_{2,3} \cdot D_2(-\frac{1}{2}) \cdot T_{1,2}(1) \cdot T_{3,2}(\frac{1}{2}) \cdot A_2 \cdot S_{2,4}$$

E quindi:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$A = S_{1,3} \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot T_{2,1}(1) \cdot T_{3,1}(-\frac{1}{2}) \cdot A_1 \cdot S_{1,2}$$

Pertanto:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dal momento che la caratteristica di A è 3, una base per lo $span(A)$ è costituita da tre colonne di questa matrice. Per individuarle possiamo considerare gli scambi di colonne effettuati:

Passo 0	1	2	3	4
Passo 1	2	1	3	4
Passo 2	2	4	3	1
Passo 3	2	4	1	3

Possiamo quindi concludere che una base per lo $span(A)$ è costituita dalla matrice formata dalla prima, seconda e quarta colonna di A. Per trovare $ns(A)$ è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_4 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_3 = t$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 2t \\ \text{-}4t \\ t \\ 4t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \text{-}4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Pertanto una base per $ns(A)$ è costituita dal vettore:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \text{-}4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Terzo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(\frac{1}{2}, x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left(\ln\left|t^2 - t\right|\right) dt \qquad \text{per } x < 1$$

Risoluzione:

Poniamo:

$$f(t) = \ln\left|t^2 - t\right|$$

$f(t)$ esiste per $t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, sarà positiva se $|t^2 - t| > 1$ ovvero $t^2 - t > 1$ oppure $t^2 - t < -1$. Per cui essa sarà positiva per i $t < 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ e negativa altrimenti. Per le proprietà dei logaritmi, per $t < 1$, risulta:

$$f(t) = \ln|t| + \ln(1 - t)$$

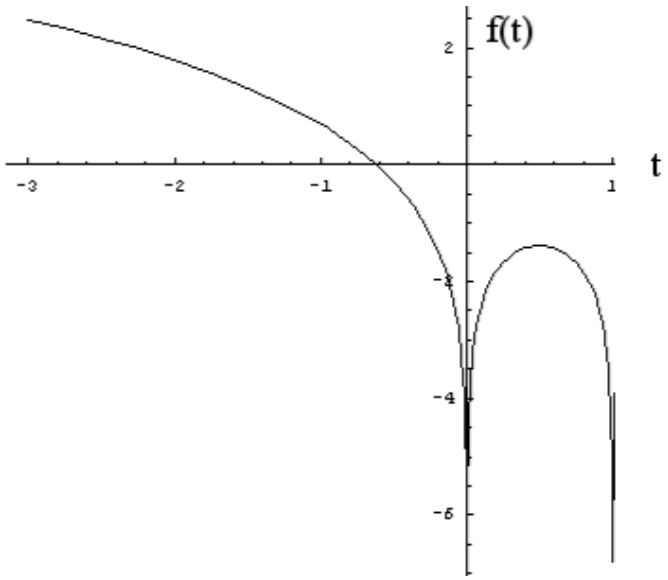
Per cui:

$$f^{'}(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t} = \frac{1-2t}{t\,(1-t)}$$

Pertanto $f(t)$ sarà decrescente per $t \in (-\infty, 0)$ e per $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Sarà invece crescente per $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Tenuto conto che:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} (\ln|t|) = -\infty$$

Il diagramma di $f(t)$ sarà il seguente:



Prima di passare al calcolo della funzione integrale, cerchiamo di stabilire se essa sia prolungabile in 0 e a sinistra di 0. Calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^+} F(\tfrac{1}{2}, x) = \lim_{x \to 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^{x} (\ln(t) + \ln(1-t))\, dt = \lim_{x \to 0^+} [t\,\ln(t) - (1-t)\ln(1-t) - 2t]_{\frac{1}{2}}^{x} =$$
$$\lim_{x \to 0^+} [x\,\ln(x) - (1-x)\ln(1-x) - 2x]_{\frac{1}{2}}^{x} + 1 = 1$$

F è quindi prolungabile in 0. Per vedere se essa sia prolungabile a sinistra di 0, calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0^-} \int_{-1}^{x} (\ln|t| + \ln(1-t))\, dt = \lim_{x\to 0^-} [t\, \ln|t| - (1-t)\ln(1-t) - 2t]_{-1}^{x} =$$
$$\lim_{x\to 0^-} [x\, \ln|x| - (1-x)\ln(1-x) - 2x]_{-1}^{x} + 2\ln(2) - 2 = 2\ln(2) - 2$$

Ricordiamo che $\lim_{x\to 0^-} (x \ln|x|)$ è del tipo $0 \cdot -\infty$ che, trasformato opportunamente e calcolato con De l'Hospital, vale 0. La funzione integrale è pertanto prolungabile anche a sinistra di 0 ed il suo diagramma ha la seguente forma: