Premessa

Per la risoluzione degli esercizi 1 e 2 può essere utile ricordare alcuni integrali indefiniti notevoli:

$$\int \ln(z)dz = z\ln(z) - \int z\frac{1}{z}dz = z\ln(z) - z + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{z}}dz = \int z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{z} + C$$
$$\int ze^{-z}dz = \int z\, d(-e^{-z}) = -ze^{-z} - \int -e^{-z}\, dz = -ze^{-z} - e^{-z} + C$$

Per quanto riguarda le funzioni parte intera, parte positiva, parte negativa e segno, rimandiamo ai suggerimenti indicati nel primo plico di esercizi risolti (**Esercizi.pdf**) reperibile sul sito **http://clik.to/dsciutti**.

Esercizio 1

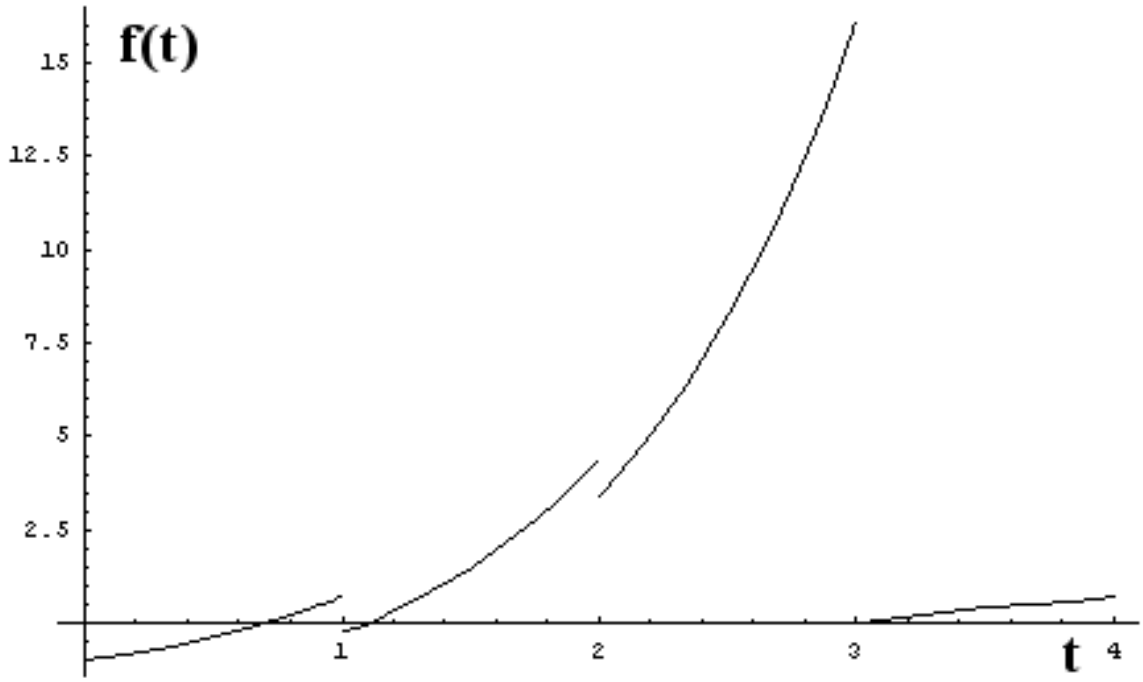
Studiare la funzione :

$$F(1,x) = \int_1^x \left(\left(e^t - [t+2]\right) sign\,(3-t)^+ + \ln\left(1 + (t-3)^+\right)\right) dt$$

per $x \in [0,4]$ e calcolare $F(1,0)$, $F(1,2)$ e $F(1,4)$.

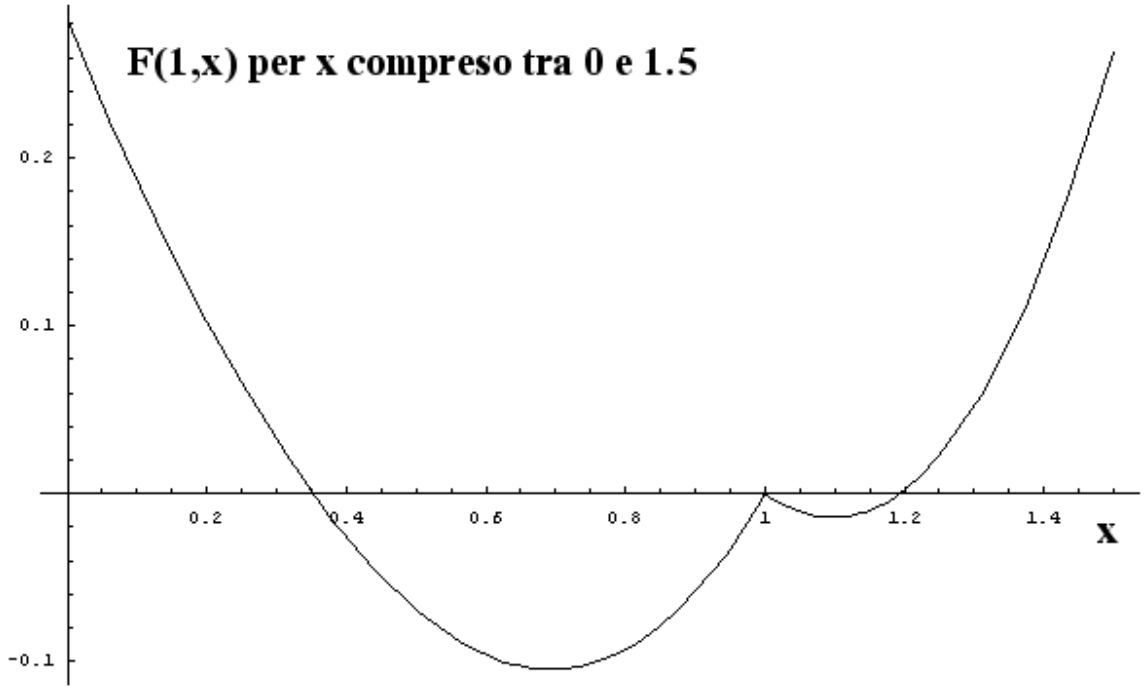
Risulta:

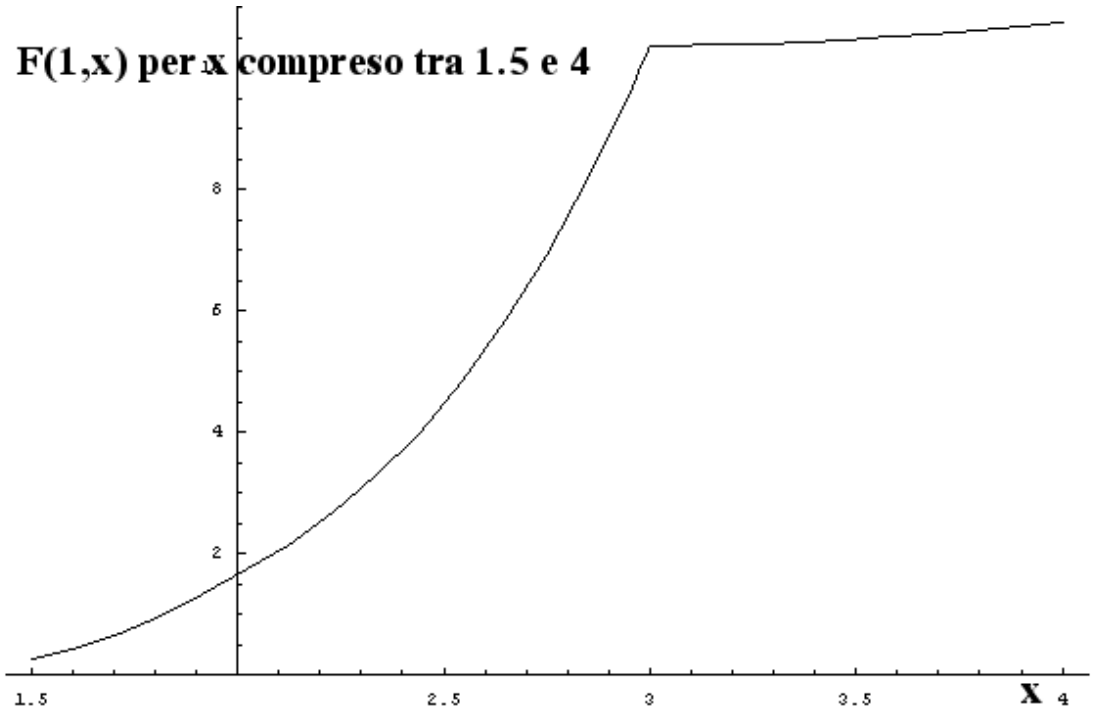
$$f(t) = \begin{cases} e^t - 2 & t \in [0,1) \\ e^t - 3 & t \in [1,2) \\ e^t - 4 & t \in [2,3) \\ \ln(t-2) & t \in [3,4] \end{cases}$$



Dalla figura si nota che la funzione $f(t)$ è crescente nei quattro intervalli considerati, è sempre positiva nei secondi due, mentre nei primi due cambia segno, esattamente nei punti dove $e^t = 2$ ovvero $t = \ln(2)$ e $e^t = 3$ ovvero $t = \ln(3)$.

La funzione integrale risultante avrà la seguente forma:


F(1,x) per x compreso tra 0 e 1.5
0.2
0.1
-0.1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
x


F(1,x) per x compreso tra 1.5 e 4
8
6
4
2
1.5
2.5
3
3.5
x
4

$F(1,0) = \int_1^0 (e^t - 2)\, dt = [e^t - 2t]_1^0 = 3 - e$
$F(1,2) = \int_1^2 (e^t - 3)\, dt = [e^t - 2t]_1^2 = e^2 - e - 3$
$F(1,4) = F(1,2) + \int_2^3 (e^t - 4)\, dt + \int_3^4 \ln(t-2) dt = -8 - e - e^3 + 2\ln(2)$

Ricordiamo:

$$\int \ln(t-2)dt = \int \ln(z)dx$$

avendo posto $t - 2 = z$

Esercizio 2

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x (\frac{sign(t)^-}{\sqrt{|t|}} + (t)^+ e^{-(t)^+})dt$$

e rappresentare la funzione integrale nel suo campo di esistenza.
Facoltativo: Calcolare:

$$\lim_{x \to +\infty} F(1,x)$$

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & t > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-t}} & t < 0 \\ \nexists & t = 0 \end{cases}$$

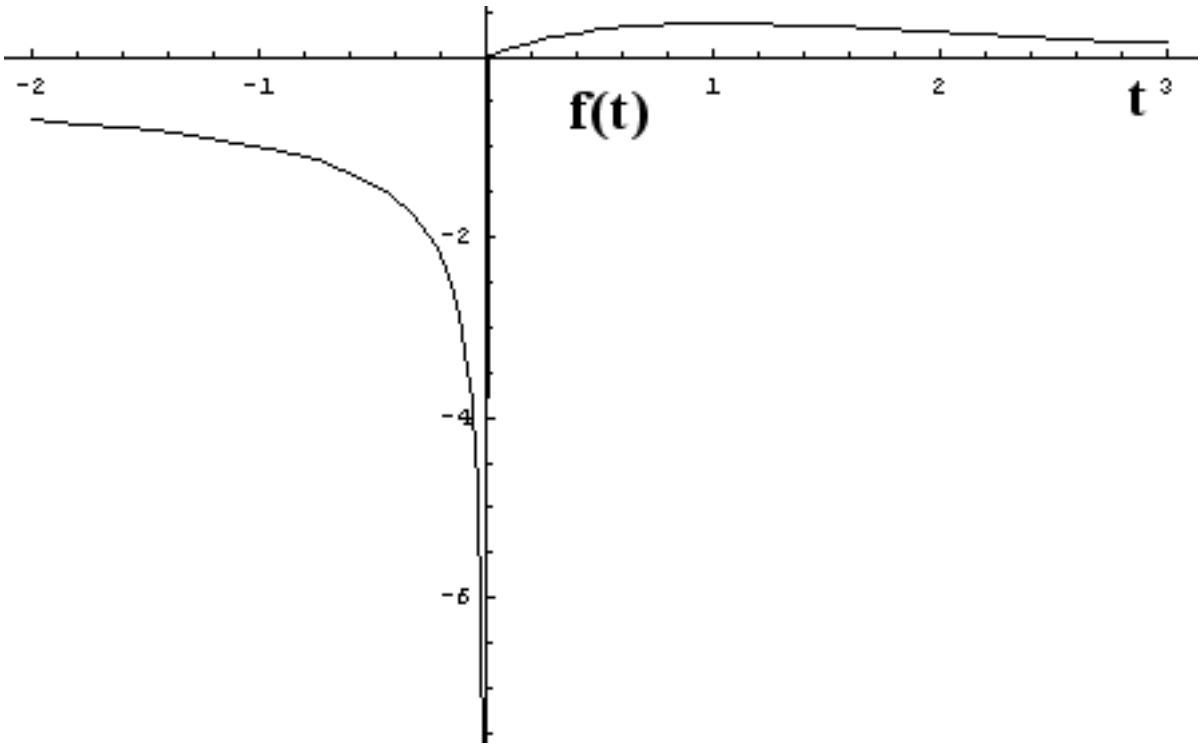
Per $t > 0$ si ha:

$$f'(t) = e^{-t}\,(1-t)$$

Inoltre (non richiesto):

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

Il diagramma della funzione integranda risulta pertanto:



Esaminando la funzione integranda per $t > 0$ vediamo che essa è sempre positiva ed è crescente fra 0 e 1 e decrescente a destra di 1. Prima di disegnare la funzione integrale vediamo se essa è prolungabile a sinistra di 0. A tale scopo prendiamo un punto a caso a sinistra di 0, per esempio -1, e un punto $x \in (-1, 0)$ e calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^-} \int_{-1}^{x} -\frac{1}{\sqrt{-t}} dt$$

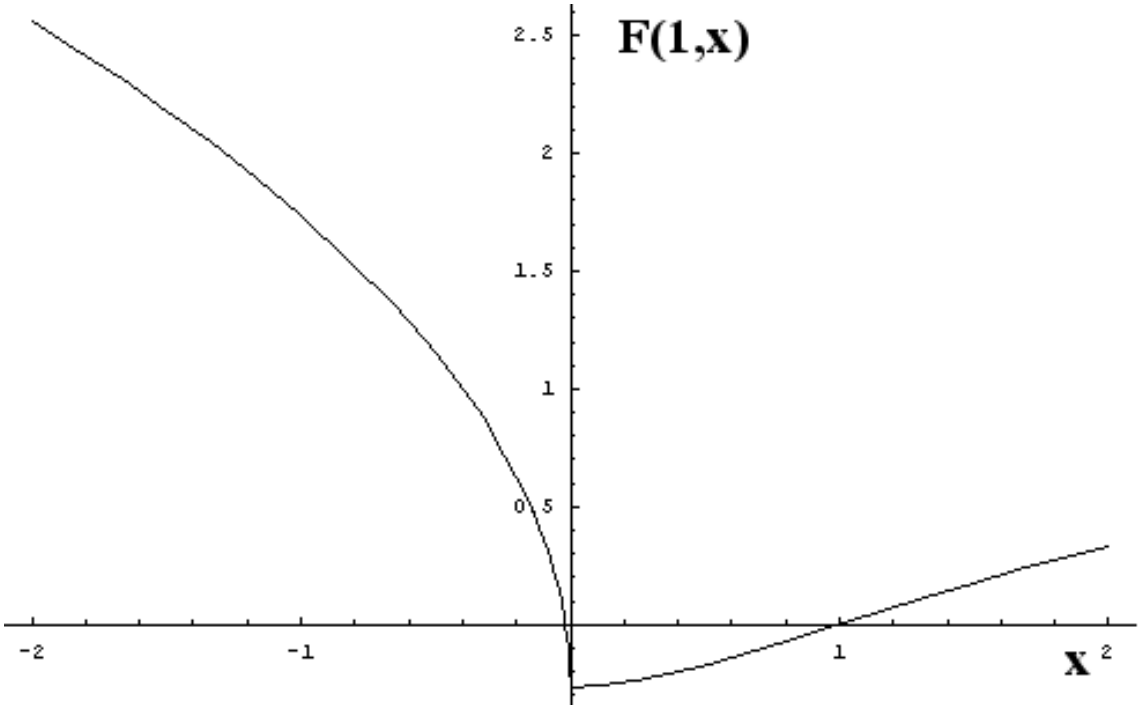
Si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} \int_{-1}^{x} -\frac{1}{\sqrt{-t}} dt = \lim_{x \to 0^-} 2\sqrt{(x)} - 2 = -2$$

Poichè tale limite è finito, la funzione integrale è prolungabile anche a sinistra di 0. Ricordiamo che :

$$\int -\frac{1}{\sqrt{-t}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz \text{ ponendo } -t = z \to -dt = dz$$

Riportiamo qui il diagramma della funzione integrale:



Rispondiamo adesso alla domanda facoltativa:
per $x > 0$

$$F(1,x) = \frac{2}{e} - e^{-x}(1+x) = \frac{2}{e}\frac{1+x}{e^x}$$

poichè :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

la risposta alla domanda facoltativa è:

$$\lim_{x\to+\infty} F(1,x) = \frac{2}{e}$$

Esercizio 3

Dopo 2 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{3x3} senza effettuare scambi di colonne, si hanno le seguenti informazioni:

- il vettore $2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - 2\underline{e}_3$ è soluzione del sistema $A_2\underline{x} = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + k\underline{e}_3$

- la seconda colonna di Q_1 è $2\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 + \underline{e}_3$
- Nel secondo passo di pivotizzazione non si sono fatti scambi di righe. Il secondo pivot è -2 e sono intervenute le matrici $T_{1,2}(-1)$ e $T_{3,2}(2)$

Trovare A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e per il $ns(A)$.

Poichè sono già stati compiuti 2 passi di pivotizzazione, la matrice A_2 ha la forma seguente:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underline{a} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Inoltre deve essere:

$$A_2\,(2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - 2\underline{e}_3) = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + k\underline{e}_3$$

Per cui:

$$2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - 2\underline{a} = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + k\underline{e}_3 \rightarrow 2\underline{a} = \underline{e}_1 - k\underline{e}_3 \rightarrow \underline{a} = \frac{1}{2}\underline{e}_1 - \frac{k}{2}\underline{e}_3$$

In conclusione:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Risulta quindi:

$$r(A) = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 3 & k \neq 0 \end{cases}$$

Sappiamo che:

$$A_2 = T_{1,2}(\text{-}1) \cdot T_{3,2}(2) \cdot D_2(\text{-}\frac{1}{2}) \cdot A_1$$

E quindi:

$$A_1 = D_2(\text{-}2) \cdot T_{1,2}(1) \cdot T_{3,2}(\text{-}2) \cdot A_2$$

Per cui:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Ora notiamo che :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(2) \cdot S_{1,2} = T_{2,1}(-\frac{3}{2}) \cdot T_{3,1}(\frac{1}{2}) \cdot D_1(2) \cdot S_{1,2}$$

Per cui:

$$A_1 = Q_1 \cdot A = T_{2,1}(-\frac{3}{2}) \cdot T_{3,1}(\frac{1}{2}) \cdot D_1(2) \cdot S_{1,2} \cdot A$$

e ciò implica:

$$A = S_{1,2} \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot T_{3,1}(-\frac{1}{2}) \cdot T_{2,1}(\frac{3}{2}) \cdot A_1$$

Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Per $k = 0$ la caratteristica è 2 e quindi una base per $span(A)$ è costituita (non essendoci stati scambi di colonne) dalle prime due colonne di A. Per trovare $ns(A)$ risolviamo il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ovvero l'equivalente $A_2\underline{x} = 0$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Sopprimendo l'equazione superflua e aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_3 = t$$

si vede che una generica soluzione è:

$$\underline{x}^*(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Per cui:

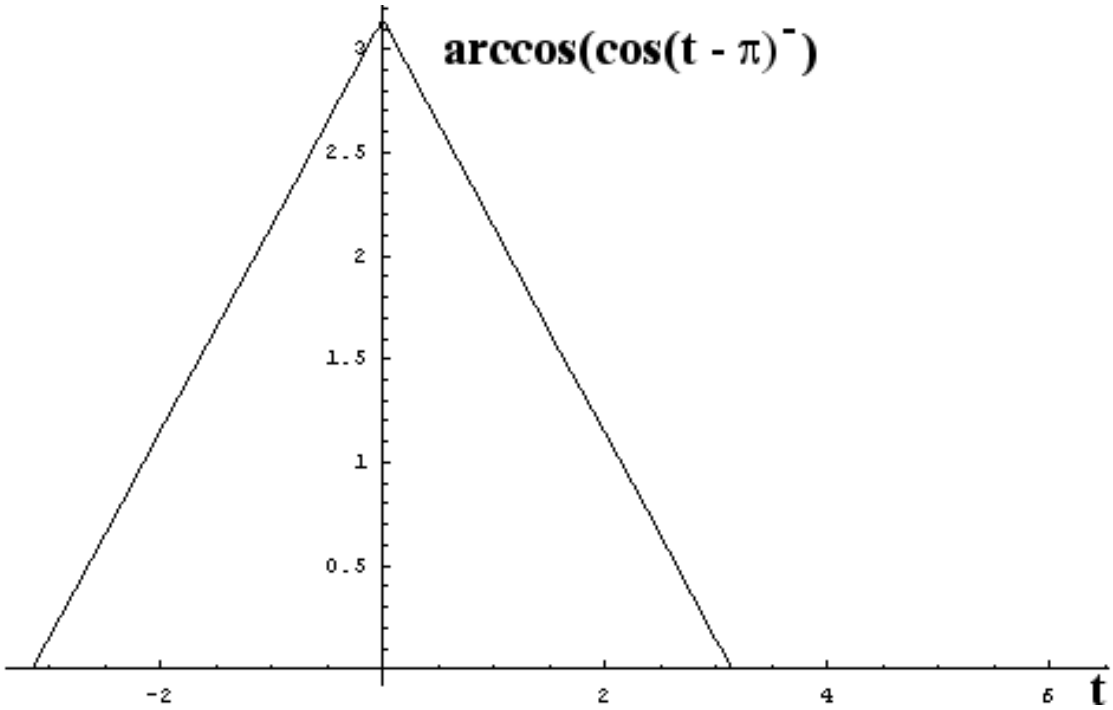
$$ns(A) = span(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

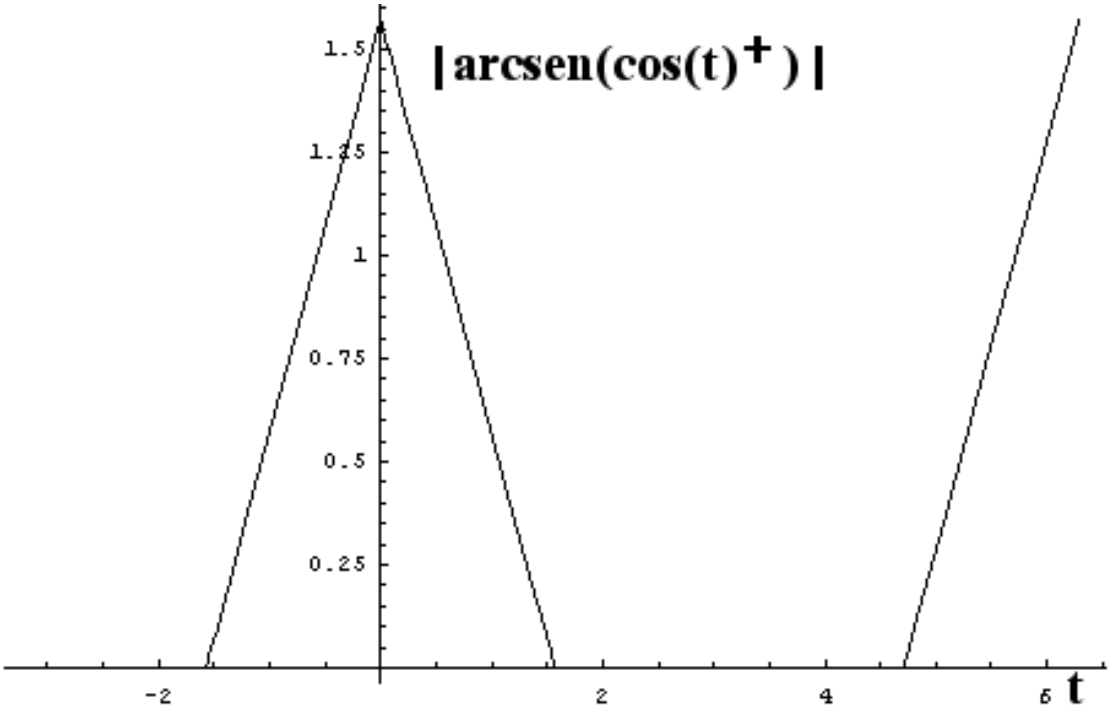
Esercizio 4

Studiare la funzione:

$$F(\frac{\pi}{2}, x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left(\left(arccos \left(cos\,(t-\pi)^{-} \right) \right)^2 - \pi \left| arcsen\,(cos\,(t))^{+} \right| \right) dt$$

nell'intervallo [-$\pi, 2\pi$] e calcolare: $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $F(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ e $F(\frac{\pi}{2}, \text{-}\pi)$.

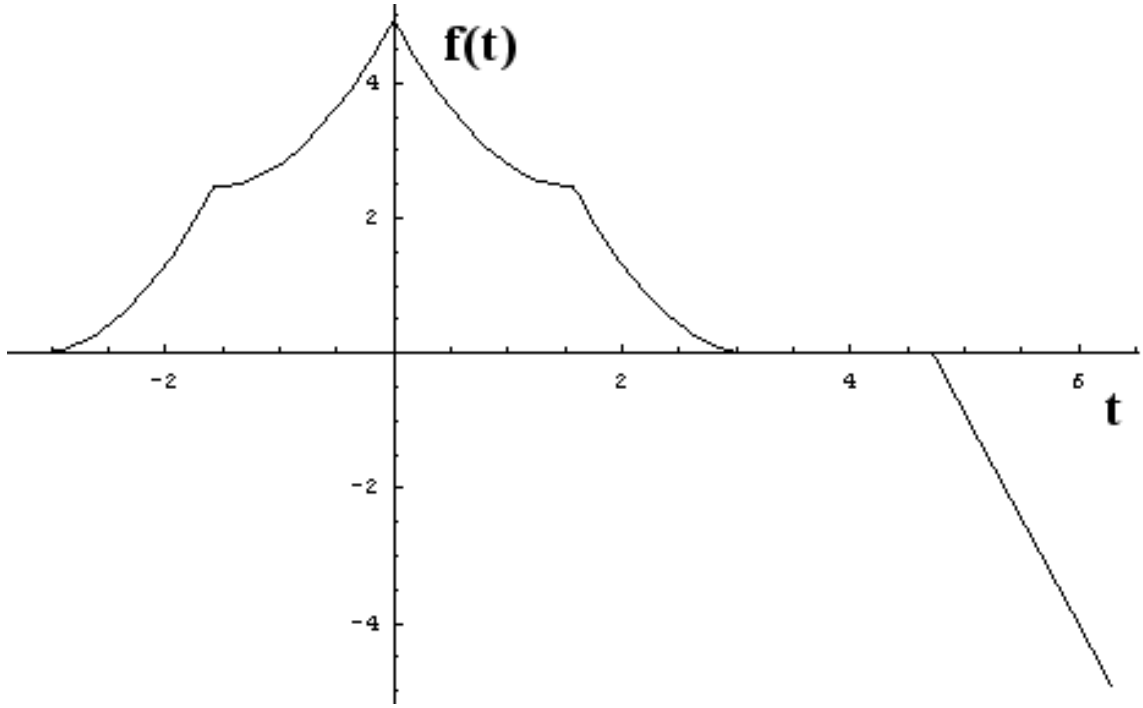




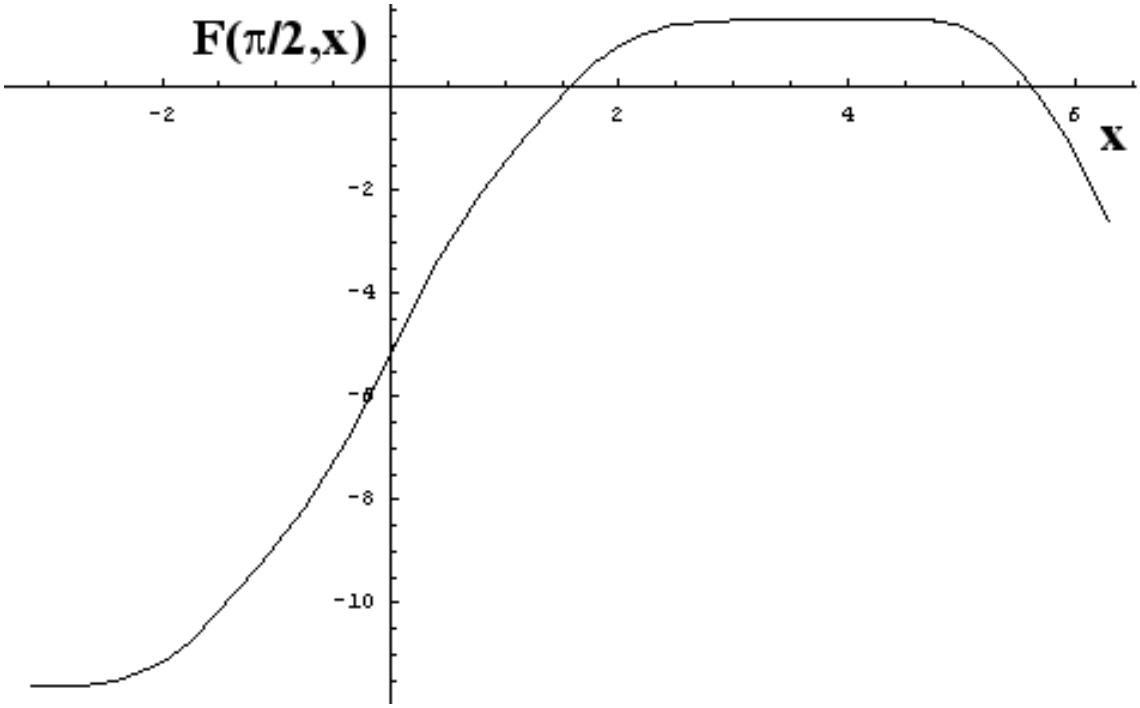
Dai grafici presentati consegue che:

$$f(t) = \begin{cases} (t+\pi)^2 & \text{-}\pi \leq t < \text{-}\frac{\pi}{2} \\ (t+\pi)^2 - \pi\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = t^2 + t\pi + \frac{\pi^2}{2} & \text{-}\frac{\pi}{2} \leq t < 0 \\ (\pi-t)^2 - \pi\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = t^2 - t\pi + \frac{\pi^2}{2} & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ (\pi-t)^2 & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \\ 0 & \pi \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \text{-}\pi t + \frac{3\pi^2}{2} & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

E quindi il diagramma di tale funzione è:



Tale funzione è non negativa in $\left[\text{-}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ e negativa in $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, crescente nell'intervallo $[\text{-}\pi, 0]$ e decrescente in $[0, 2\pi]$. Quindi la funzione integrale ha il seguente diagramma:



Pe rispondere all'ultima parte dell'esercizio, conviene calcolare i seguenti integrali:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} (t+\pi)^2\, dt \\
a_2 &= \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \left(t^2 + t\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) dt \\
a_3 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(t^2 - t\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) dt = a_2 \\
b_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)^2\, dt \\
b_2 &= 0 \\
b_3 &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{3\pi^2}{2} - t\pi\right)^2 dt
\end{aligned}
$$

In conclusione:

$$
\begin{aligned}
F(\tfrac{\pi}{2}, \pi) &= b_1 = \frac{\pi^3}{24} \\
F(\tfrac{\pi}{2}, 2\pi) &= b_1 + b_2 + b_3 = -\frac{\pi^3}{12} \\
F(\tfrac{\pi}{2}, -\pi) &= a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{3\pi^3}{8}
\end{aligned}
$$

Osservazione: La risoluzione di questo esercizio può essere notevolmente semplificata tenendo conto della parità della funzione integranda.