Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left((t^2 - 2t) sign \left(\ln(\frac{1}{2} + |[t]\, frac(t)| \right) \right) dt \qquad \text{in } [-1,3]$$

e calcolare:

$$F(0,-1) \quad F(0,1) \quad F(0,3)$$

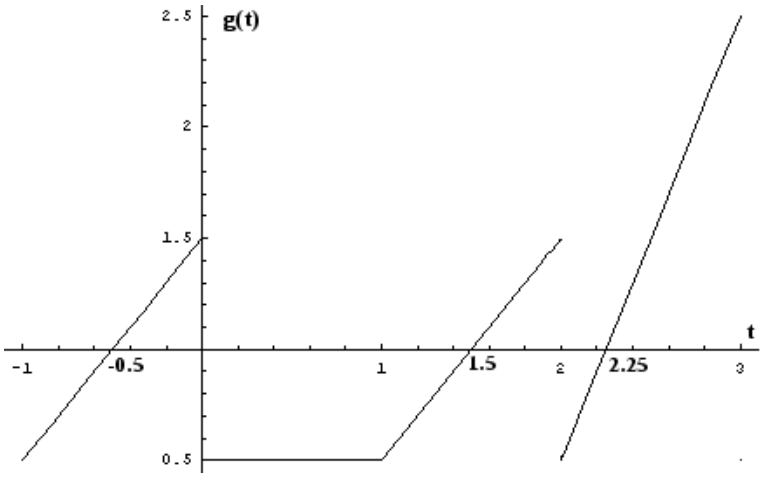
Risoluzione:

Poniamo:

$$g(t) = \frac{1}{2} + |[t]\, frac(t)|$$

Risulta:

$$g(t) = \begin{cases} t + \frac{3}{2} & -1 \le t < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le t < 1 \\ t - \frac{1}{2} & 1 \le t < 2 \\ 2t - \frac{7}{2} & 2 \le t < 3 \\ \frac{1}{2} & t = 3 \end{cases}$$



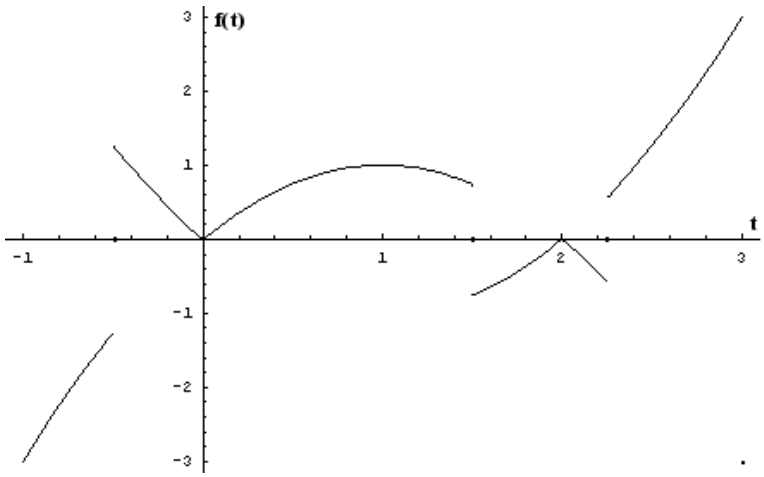
Tenuto conto che :

$$\ln(g(t)) \begin{cases} > 0 & g(t) > 1 \\ < 0 & 0 < g(t) < 1 \\ = 0 & g(t) = 1 \end{cases}$$

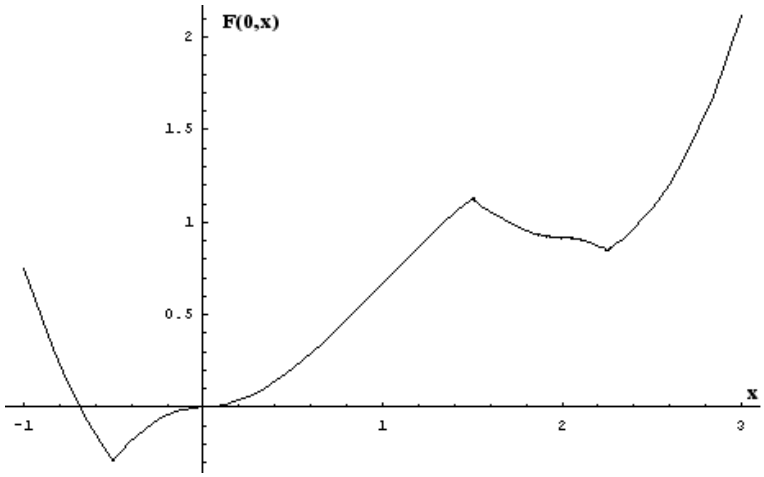
la funzione integranda ha la seguente espressione:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t & -1 \le t < -\frac{1}{2} \vee 0 \le t < \frac{3}{2} \vee 2 \le t < \frac{9}{4} \\ t^2 - 2t & -\frac{1}{2} < t < 0 \vee \frac{3}{2} < t < 2 \vee \frac{9}{4} < t < 3 \\ 0 & t = -\frac{1}{2} \vee t = \frac{3}{2} \vee t = \frac{9}{4} \\ -3 & t = 3 \end{cases}$$

Di conseguenza essa ha il seguente diagramma:



E la corrispondente funzione integrale:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$F(0,-1) = \int_0^{-\frac{1}{2}} (t^2 - 2t)\, dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} (-t^2 + 2t)\, dt = \frac{3}{4}$
$F(0,1) = \int_0^1 (-t^2 + 2t)\, dt = \frac{2}{3}$
$F(0,3) = F(0,1) + \int_1^{\frac{3}{2}} (-t^2 + 2t)\, dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 (t^2 - 2t)\, dt + \int_2^{\frac{9}{4}} (-t^2 + 2t)\, dt + \int_{\frac{9}{4}}^3 (t^2 - 2t)\, dt = \frac{203}{96}$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(\frac{1}{2}, x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1 + (t-1)^+}{\sqrt{\left| sign\,(t)^+ - t^2 \right|}}$$

in tutto il campo di esistenza.

Risoluzione:

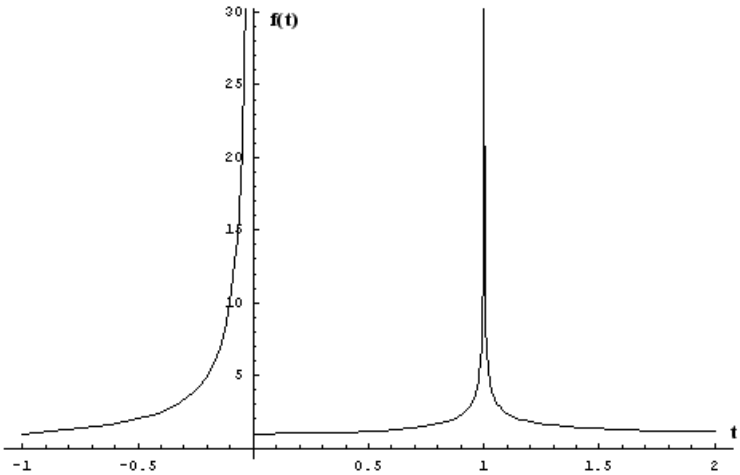
Risulta subito:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|t^2|}} = \frac{1}{\sqrt{t^2}} = \frac{1}{|t|} = \frac{-1}{t} & t < 0 \\ \nexists & t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & 0 < t < 1 \\ \nexists & t = 1 \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & t > 1 \end{cases}$$

Calcolando le derivate nei singoli intervalli, otteniamo:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & t < 0 \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}^3} & 0 < t < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{t^2-1}^3} & t > 1 \end{cases}$$

Si vede che la derivata è positiva prima di 0 e tra 0 e 1, negativa dopo 1.
La funzione integranda pertanto ha il seguente diagramma:



Prima di passare al diagramma della funzione integrale, conviene calcolare i seguenti integrali:

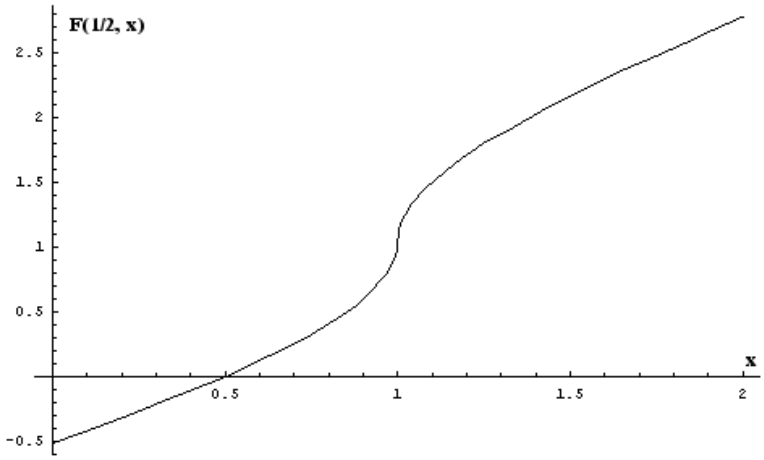
$$\int_{-1}^{x} -\frac{1}{t} dt = -\ln|x|$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = arcsen(x) - \frac{\pi}{6}$$
$$\int_{2}^{x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{3}$$

Da questi calcoli, visto che :

$$\lim_{x \to 0^-} \ln|x| = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} arcsen(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0$$

Si deduce che la funzione è prolungabile in 1 e a destra di 1, è prolungabile in 0, ma non a sinistra di 0.

Il diagramma della funzione integrale risulta pertanto il seguente:



Terzo esercizio

Dopo 3 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{4x4} si è ottenuta una matrice A_3. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4$ è soluzione del sistema:

$$A_3 \cdot S_{2,3} \cdot \underline{x} = D_2(-5) \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \ln(k)\underline{e}_4)$$

- La prima colonna di Q_1 è:

$$\frac{1}{3}\underline{e}_1 - \underline{e}_4$$

- La terza colonna di Q_2 è:

$$-3\underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4$$

- Nel terzo passo si è scambiata la terza con la quarta colonna, il pivot è -2 ed è intervenuta la matrice $T_{2,3}(-1)$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Poichè deve risultare:

$$A_3 \cdot S_{2,3} \cdot (\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4) = D_2(-5) \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \ln(k)\underline{e}_4)$$

Si ha :

$$A_3 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = \underline{e}_1 - 5\underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \ln(k)\underline{e}_4$$

E quindi, indicando con $\underline{a}$ la quarta colonna della matrice A_3:

$$-2\underline{e}_3 + \underline{e}_2 - \underline{a} = -5\underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \ln(k)\underline{e}_4$$

ovvero:

$$\underline{a} = 6\underline{e}_2 - 3\underline{e}_3 + \ln(k)\underline{e}_4$$

Dunque:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-3} \\ 0 & 0 & 0 & \ln(k) \end{bmatrix}$$

La caratteristica della matrice A sarà :

$$r(A) = \begin{cases} 4 & k \neq 1 \cap k > 0 \\ 3 & k = 1 \end{cases}$$

Tenuto conto che:

$$Q_3 = T_{2,3}(-1) \cdot D_3(-\frac{1}{2})$$

e che si è scambiata la terza con la quarta colonna, si ha:

$$A_2 = D_3(-2) \cdot T_{2,3}(1) \cdot A_3 \cdot S_{3,4}$$

Pertanto:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & \text{-2} \\ 0 & 0 & \ln(k) & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè risulta:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-}\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \text{-}\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(-3) \cdot S_{2,3}$$

Si ha:

$$Q_2 = T_{4,2}(-\frac{1}{3}) \cdot T_{3,2}(-\frac{1}{3}) \cdot D_2(-3) \cdot S_{2,3}$$

Da cui segue che:

$$A_1 = S_{2,3} \cdot D_2(-\frac{1}{3}) \cdot T_{3,2}(\frac{1}{3}) \cdot T_{4,2}(\frac{1}{3}) \cdot A_2$$

ossia:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 7 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1+\ln(k) & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nel primo passo è risultato:

$$Q_1 = T_{4,1}(3) \cdot D_1 \frac{1}{3}$$

E quindi:

$$A = D_1(3) \cdot T_{4,1}(-3) \cdot A_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 7 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -3 & \frac{1}{3} & 1+\ln(k) & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Per $k = 1$ $r(A) = 3$ pertanto una base per lo $span(A)$ è costituita da 3 colonne della matrice A. Indicando con :

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4$$

la posizione delle colonne di A, alla fine della pivotizzazione si ottiene:

$$1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 3$$

Allora una base di $span(A)$ è costituita dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Per trovare $ns(A)$ occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_3 = t$$

Si trova che una generica soluzione del sistema è:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{-}6t \\ t \\ 3t \end{bmatrix}$$

E quindi il vettore:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \text{-}6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

è una base di $ns(A)$.

Esercizio alternativo al primo

Studiare la funzione:

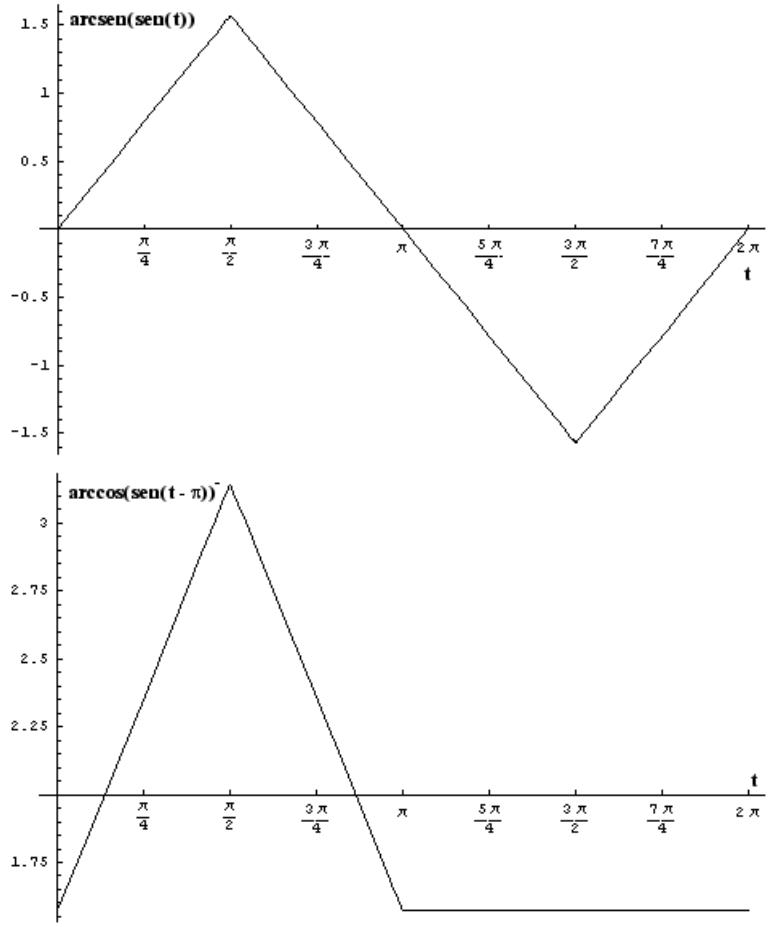
$$F(0,x) = \int_0^x \Big((arcsen(\sin(t)))^2 sign(\sin(t) - \cos(t)) + \pi arccos(\sin(t-\pi)^-) \Big)\, dt \qquad \text{in } [0, 2\pi]$$

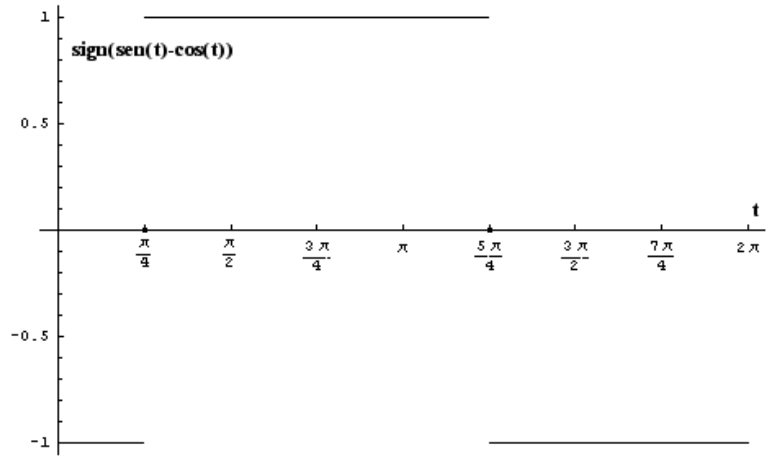
e calcolare:

$$F(0, \frac{\pi}{2}) \quad F(0,\pi) \quad F(0, 2\pi)$$

Risoluzione

Osservando i seguenti diagrammi :

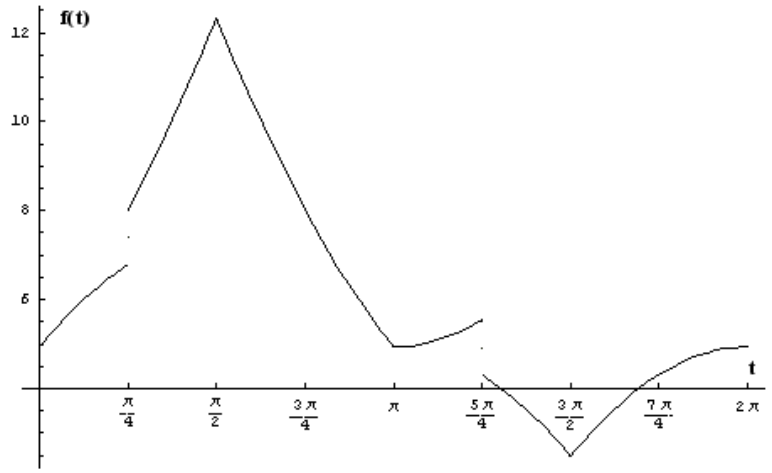




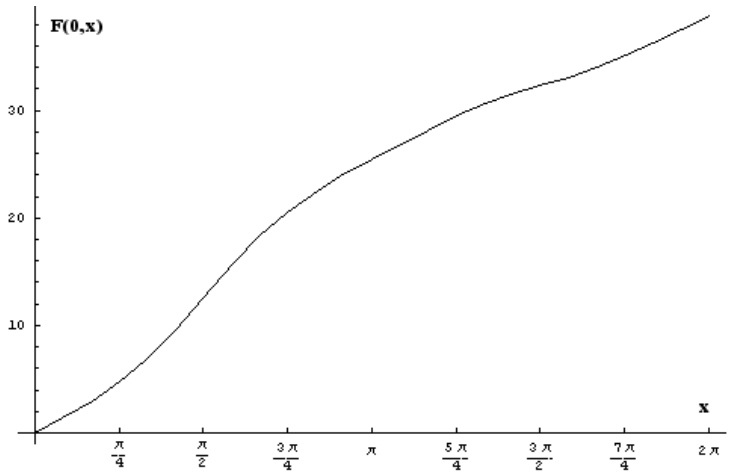
si conclude che la funzione integranda ha la seguente forma:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + \pi\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -t^2 + \pi t + \frac{\pi^2}{2} & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{4}\pi^2 & t = \frac{\pi}{4} \\ t^2 + \pi t + +\frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ (\pi - t)^2 + \pi\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) = t^2 - 3\pi t + \frac{5}{2}\pi^2 & \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \\ (\pi - t)^2 + \frac{\pi^2}{2} = t^2 - 2\pi t + \frac{3}{2}\pi^2 & \pi < t < \frac{5}{4}\pi \\ \frac{\pi^2}{2} & t = \frac{5}{4}\pi \\ -(\pi - t)^2 + \frac{\pi^2}{2} = -t^2 + 2\pi t - \frac{\pi^2}{2} & \frac{5}{4}\pi < t \leq \frac{3}{2}\pi \\ -(t - 2\pi)^2 + \frac{\pi^2}{2} = -t^2 + 4\pi t - \frac{7}{2}\pi^2 & \frac{3}{2}\pi < t \leq 2pi \end{cases}$$

Si tratta dal punto di visto grafico di tanti archi di parabola, per cui una volta stabiliti l'ascissa del vertice e la concavità, il diagramma di $f(t)$ risulta:



Di qui discende che la funzione integrale ha il seguente diagramma:



Passiamo ora al calcolo degli integrali.
Risulta:

$$F(0,\tfrac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-t^2 + \pi t + \frac{\pi^2}{2}\right) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t^2 + \pi t + +\frac{\pi^2}{2}\right) dt = \frac{13\pi^3}{32}$$
$$F(0,\pi) = F(0,\tfrac{\pi}{2}) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(t^2 - 3\pi t + \frac{5}{2}\pi^2\right) dt = \frac{79\pi^3}{96}$$
$$F(0,2\pi) = F(0,\pi) + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(t^2 - 2\pi t + \frac{3}{2}\pi^2\right) dt + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(-t^2 + 2\pi t - \frac{\pi^2}{2}\right) dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(-t^2 + 4\pi t - \frac{7}{2}\pi^2\right) dt = \frac{5\pi^2}{4}$$