Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \Big((t-[t])\,(t+[t]) - (t)^+ \Big)\, dt \qquad\qquad \text{in } [-2,2]$$

e calcolare:

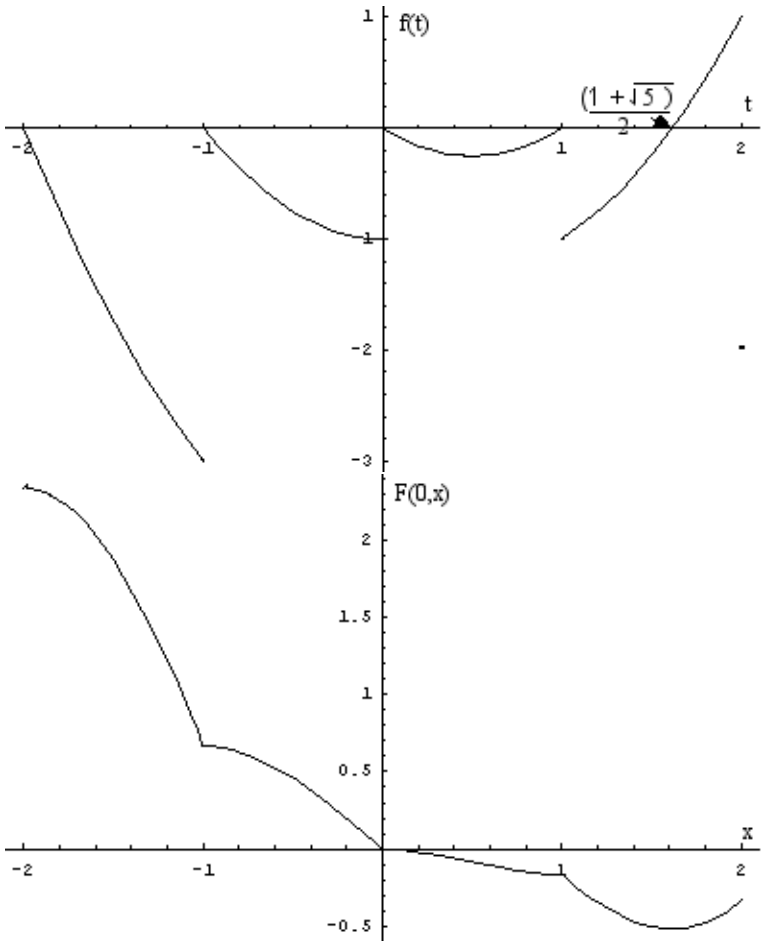
$$F(0,2) \quad F(0,-2)$$

Risoluzione:

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} t^2-4 & -2 \le t < -1 \\ t^2-1 & -1 \le t < 0 \\ t^2-t & 0 \le t < 1 \\ t^2-t-1 & 1 \le t < 2 \\ -2 & t = 2 \end{cases}$$

Di conseguenza i diagrammi di $f(t)$ e $F(0,x)$ sono i seguenti:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(0,2) = \int_0^1 (t^2 - t)\,dt + \int_1^2 (t^2 - t - 1)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 = -\frac{1}{3}$$
$$F(0,-2) = \int_0^{-1} (t^2 - 1)\,dt + \int_{-1}^{-2} (t^2 - 4)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^{-1} + \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_{-1}^{-2} = \frac{7}{3}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{|e^t - 2|}}$$

in tutto il campo di esistenza.

Risoluzione:

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^t}{\sqrt{e^t-2}} & t > ln(2) \\ \frac{e^t}{\sqrt{2-e^t}} & t < ln(2) \end{cases}$$

Quindi

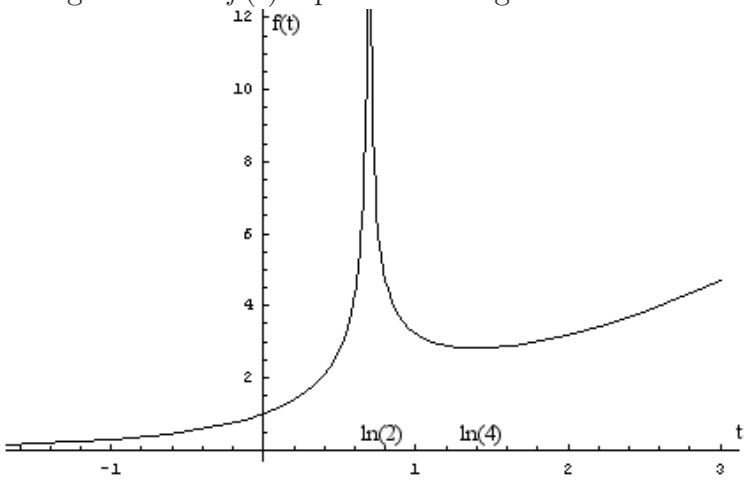
$$\lim_{t \to ln(2)} f(t) = +\infty$$
$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^t}{\sqrt{e^t-2}}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-2e^{-t}}}\right) = +\infty$$

Inoltre:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{e^t\left(e^t-4\right)}{2(e^t-2)^{\frac{3}{2}}} & t > ln(2) \\ -\frac{e^t\left(e^t-4\right)}{2(2-e^t)^{\frac{3}{2}}} & t < ln(2) \end{cases}$$

In conclusione $f(t)$ è sempre positiva, crescente nell'intervallo $(-\infty, ln(2))$, decrescente nell'intervallo $(ln(2), ln(4))$ e crescente nell'intervallo $(ln(4), +\infty)$. È presente un asintoto verticale per $t = ln(2)$.

Il diagramma di $f(t)$ è pertanto il seguente:



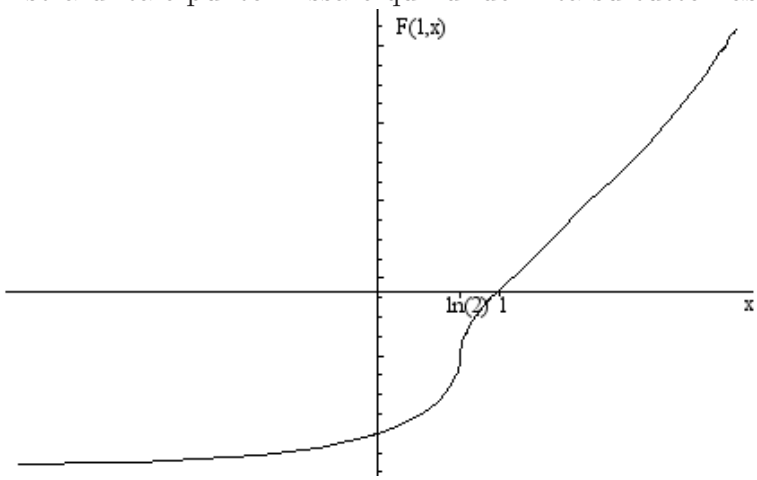
La funzione integrale esiste senz'altro per $x > ln(2)$, per stabilire se essa sia prolungabile in tal punto occorre calcolare $\lim_{x \to ln(2)^+} F(1,x)$. Risulta:

$$\lim_{x \to ln(2)^+} F(1,x) = \lim_{x \to ln(2)^+} \int_1^x \left(\frac{e^t}{\sqrt{e^t-2}}\right) dt = \lim_{x \to ln(2)^+} \left[2\sqrt{e^t-2}\right]_1^x =$$
$$\lim_{x \to ln(2)^+} \left(2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{e-2}\right) = -2\sqrt{e-2}$$

Per stabilire se la funzione integrale sia prolungabile a sinistra nel punto $ln(2)$, calcoliamo $\lim_{x \to ln(2)^-} F(0,x)$. Risulta:

$$\lim_{x \to ln(2)^-} F(0,x) = \lim_{x \to ln(2)^-} \left(\int_0^x \left(\frac{e^t}{\sqrt{2-e^t}}\right)\right) dt = \lim_{x \to ln(2)^-} \left[-2\sqrt{2-e^t}\right]_0^x = \lim_{x \to ln(2)^-} \left(-2\sqrt{2-e^x}+2\right) = 2$$

Essendo i limiti che abbiamo calcolato entrambi finiti, la funzione integrale è prolungabile in $ln(2)$ e a sinistra di tale punto. Essa è quindi definita su tutto l'asse reale ed il suo diagramma è il seguente:



Terzo esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{3x3} si è ottenuta una matrice A_2. Sapendo che:

- $$\left(\underline{e}_1^T + \underline{e}_2^T\right) A_2 = \underline{e}_1^T + \underline{e}_2^T + 5\underline{e}_3^T$$
$$\left(\underline{e}_1^T - \underline{e}_2^T\right) A_2 = \underline{e}_1^T - \underline{e}_2^T + \underline{e}_3^T$$
- $det(A_2) = k + 2$
- Nel primo passo si è scambiata la prima con la terza colonna.
- La seconda colonna di Q_1 è:
$$2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$
- Nel secondo passo non sono stati effettuati scambi, è intervenuta (tra le matrici T) solo $T_{3,2}(-1)$ e $det(Q_1 \cdot Q_2) = 6$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Si osserva immediatamente che la matrice A_2 ha la seguente forma:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Dalle informazioni nel testo risulta che la somma delle prime due righe, ovvero il vettore $[1 \quad 1 \quad a+b]$ coincide con il vettore $[1 \quad 1 \quad 5]$ e che la differenza fra le due prime righe, ovvero il vettore $[1 \quad -1 \quad a-b]$ coincide con il vettore $[1 \quad -1 \quad 1]$. Quindi:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

Infine osserviamo che:

$$det(A_2) = c$$

Pertanto:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

La matrice Q_1 è:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(2) \cdot S_{1,2} = T_{2,1}(1) \cdot T_{3,1}(\frac{1}{2}) \cdot D_1(2) \cdot S_{1,2}$$

Si noti che :

$$det(Q_1) = -2$$

In base al testo:

$$det(Q_1 \cdot Q_2) = det(Q_1) \cdot det(Q_2) = 6$$

Di conseguenza:

$$det(Q_2) = -3$$

e:

$$Q_2 = T_{3,2}(-1) \cdot D_2(-3)$$

Grazie a queste informazioni possiamo determinare A_1 e A. Infatti:

$$A_1 = D_2(-\frac{1}{3}) \cdot T_{3,2}(1) \cdot A_2$$

Ossia:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & k+4 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$A = S_{1,2} \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot T_{2,1}(-1) \cdot T_{3,1}(-\frac{1}{2}) \cdot A_1 \cdot S_{1,3}$$

ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}+k & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$r(A)$ sará :

$$r(A) = \begin{cases} 2 & k = -2 \\ 3 & k \neq -2 \end{cases}$$

Per $k = -2$ una base per $ns(A)$ si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_3 + 3x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_1 = t$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Quindi una base per $ns(A)$ è il vettore:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Una base per $span(A)$ è costituita dalla seconda e terza colonna della matrice A, ovvero dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Esercizio alternativo al primo

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left(arcsen(\cos(\left|t - \frac{\pi}{2}\right|)) \cdot arccos(\cos(t)) - \pi arcsen(\sin(t + \frac{\pi}{2})^-) \right) dt \qquad \text{in } [-\pi, \pi]$$

e calcolare:

$$F(0,\pi) \quad \text{e} \quad F(0,-\pi)$$

Risoluzione

Poichè:

$$\cos(\left|t - \frac{\pi}{2}\right|) = \cos(t - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$$

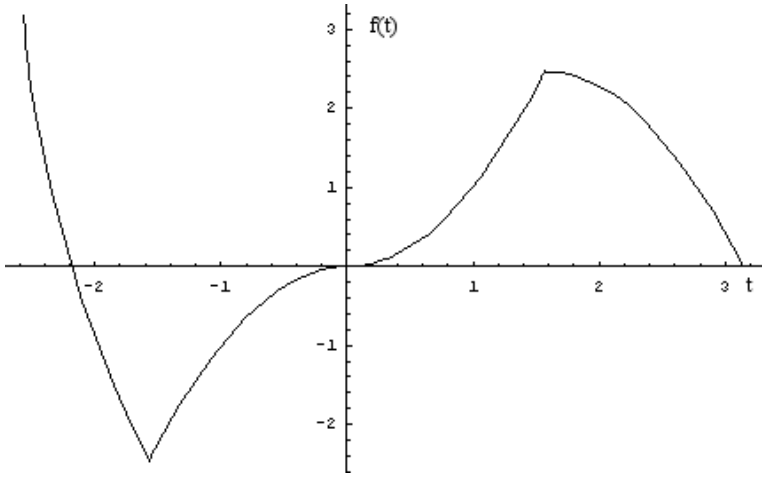
e:

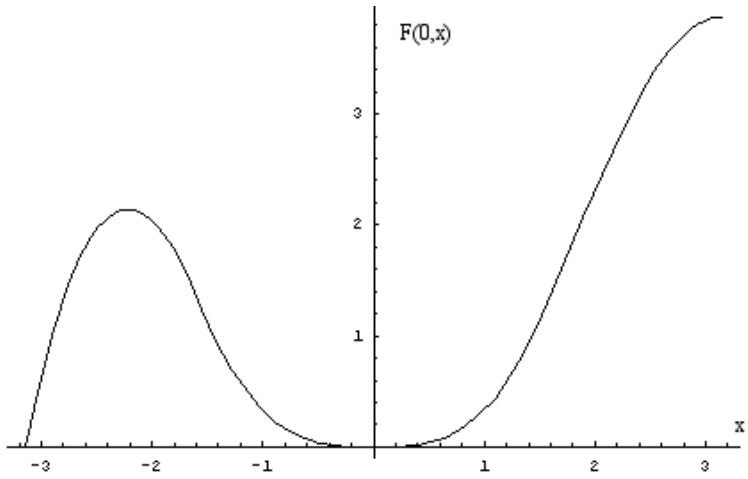
$$\sin(t + \frac{\pi}{2})^- = \begin{cases} 0 & t > -\frac{\pi}{2} \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) & t \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} -t\,(-\pi - t) - \pi\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = t^2 - \frac{\pi^2}{2} & -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ -t^2 & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \\ t^2 & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ t\,(\pi - t) = -t^2 + \pi t & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Di conseguenza la f e la F hanno le forme esposte di seguito:





Passiamo ora al calcolo degli integrali.

$$F(0,\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2)\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t\,(\pi - t))\, dt = \frac{\pi^3}{8}$$
$$F(0,-\pi) = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (-t^2)\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \left(t^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) dt = 0$$