Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left(\left(arcsin(t) + \frac{\pi}{6} \right)^+ + sgn(t - \frac{1}{2})^+ arccos(t)^+ - \frac{\pi}{6} \right) dt \qquad \text{in } [-1,1]$$

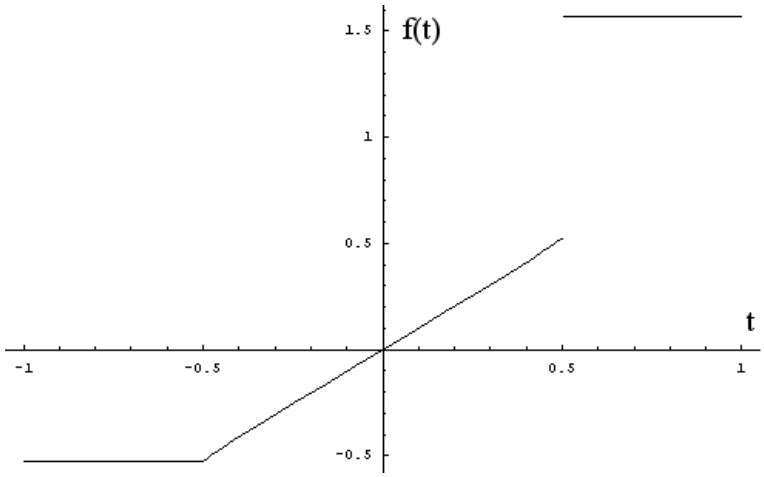
e calcolare: $F(0,1)$ e $F(0,-1)$

Risoluzione:

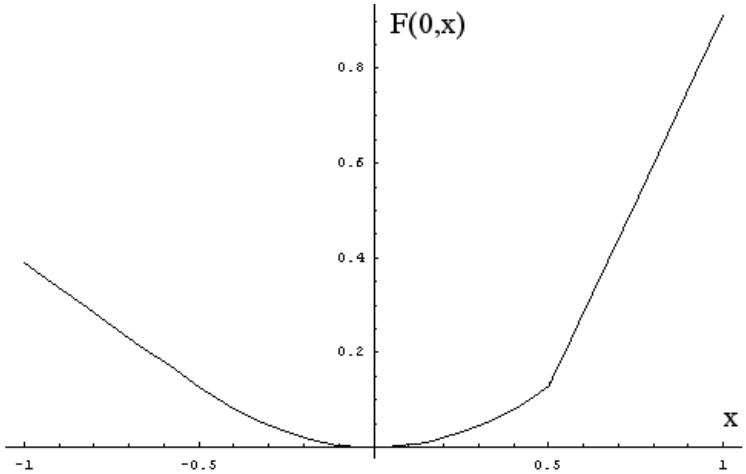
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} & -1 \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ arcsin(t) & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha la seguente forma:



Pertanto la funzione integrale sarà:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(0,1) = \int_0^{\frac{1}{2}} arcsin(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\pi}{2}dt = \left[tarcsin(t) + \sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{t\pi}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$F(0,-1) = \int_0^{-\frac{1}{2}} arcsin(t)dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{\pi}{6}dt = \left[t\,arcsin(t) + \sqrt{1-t^2}\right]_0^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{t\pi}{6}\right]_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$$

Ricordiamo che, integrando per parti, risulta:

$$\int arcsin(t)dt = t\,arcsin(t) - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

E, ponendo $\sqrt{1-t^2} = z$, si ha:

$$-\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int 1dz = z + k = \sqrt{1-t^2} + k$$

Secondo Esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{4x4} si è ottenuta una matrice A_2 e le seguenti informazioni:

- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 - \underline{e}_4$ è soluzione del sistema:

$$A_2 \cdot \underline{x} = (k-1) \cdot \underline{e}_4 - \underline{e}_3$$

- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 2\underline{e}_4$ appartiene al $ns(A_1)$
- Nel primo passo di pivotizzazione non si sono fatti scambi, è intervenuta la matrice $T_{3,1}(-4)$ e $det(Q_1^{-1}) = 2$
- Nel secondo passo si è scambiata la seconda con la quarta colonna e la seconda colonna di Q_2 è $\frac{1}{3}\underline{e}_2 - \underline{e}_4$

Trovare A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e per il $ns(A)$.

Risoluzione

Poiché sono già stati compiuti 2 passi di pivotizzazione, la matrice A_2 ha la forma seguente:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}$$

dove $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono vettori incogniti. Poiché deve risultare:

$$A_2 \left(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 - \underline{e}_4\right) = (k-1) \cdot \underline{e}_4 - \underline{e}_3$$

si ha:

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{a} - \underline{b} = (k-1) \cdot \underline{e}_4 - \underline{e}_3$$

Dalla relazione:

$$A_1 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 2\underline{e}_4) = \underline{0}$$

E dal fatto che:

$$A_2 = Q_2 \cdot A_1 \cdot S_{2,4} \Rightarrow A_1 = Q_2^{-1} \cdot A_2 \cdot S_{2,4}$$

segue:

$$A_2 \cdot S_{2,4} \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 2\underline{e}_4) = \underline{0}$$

ovvero:

$$A_2 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_4 - \underline{e}_3 + 2\underline{e}_2) = \underline{0}$$

ossia:

$$\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{b} - \underline{a} = \underline{0}$$

Concludendo risulta:

$$\begin{cases} \underline{b} - \underline{a} = -\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 \\ \underline{b} + \underline{a} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 - (k-1)\,\underline{e}_4 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{a} = \underline{e}_1 + \frac{3}{2}\underline{e}_2 + \frac{1}{2}\underline{e}_3 + \frac{(1-k)}{2}\underline{e}_4 \\ \underline{b} = -\frac{1}{2}\underline{e}_2 + \frac{1}{2}\underline{e}_3 + \frac{(1-k)}{2}\underline{e}_4 \end{cases}$$

Pertanto la matrice A_2 ha la seguente forma:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-k}{2} & \frac{1-k}{2} \end{bmatrix}$$

E quindi la caratteristica di A vale:

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 1 \\ 4 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(\frac{1}{3}) = T_{4,2}(-3) \cdot D_2(\frac{1}{3})$$

Pertanto:

$$A_1 = D_2(3) \cdot T_{4,2}(3) \cdot A_2 \cdot S_{2,4}$$

Ossia:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{k+2}{2} & \frac{10-k}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Poiché nel primo passo non si sono fatti scambi di colonne, risulta:

$$A = Q_1^{-1} \cdot A_1$$

ma:

$$Q_1^{-1} = D_1(\alpha) \cdot T_{3,1}(4)$$

Essendo il determinante di questa matrice uguale a 2, deve risultare:

$$\alpha = 2$$

Pertanto:

$$A = D_1(2) \cdot T_{3,1}(4) \cdot A_1$$

Ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 3 \\ 4 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{k+2}{2} & \frac{10-k}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Per $k = 1$ la caratteristica di A è 3, quindi una base per lo $span(A)$ è costituita da tre colonne di questa matrice. Per individuarle possiamo considerare gli scambi di colonne effettuati:

Passo 0	1	2	3	4
Passo 1	1	2	3	4
Passo 2	1	4	3	2

Una base per lo $span(A)$ per $k = 1$ è quindi una matrice formata dalla prima, terza e quarta colonna di A. Per trovare $ns(A)$ è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_2 = t$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} t \\ t \\ \text{-}t \\ 2t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \text{-}1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pertanto una base per $ns(A)$ è costituita dal vettore:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \text{-}1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Terzo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(2,x) = \int_2^x \left(2 - \sqrt{\frac{e^t}{\cosh(t)-1}}\right) dt \qquad \text{per} \;\; x > 0$$

Risoluzione:

Poniamo:

$$f(t) = 2 - \sqrt{\frac{e^t}{\cosh(t-1)}}$$

Osserviamo che essa è definita per $t > 0$. Per poter stabilire la positività e la negatività, conviene svolgere alcuni calcoli. Risulta:

$$\cosh(t-1) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 = \frac{e^t + e^{-t} - 2}{2} =$$

Siccome $e^{-t} = \frac{1}{e^t}$:

$$= \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{2e^t} = \frac{(e^t-1)^2}{2e^t}$$

Per cui:

$$f(t) = 2 - \frac{\sqrt{2}e^t}{|e^t - 1|}$$

Quindi, poiché $t > 0$:

$$f(t) = 2 - \frac{\sqrt{2}e^t}{e^t - 1}$$

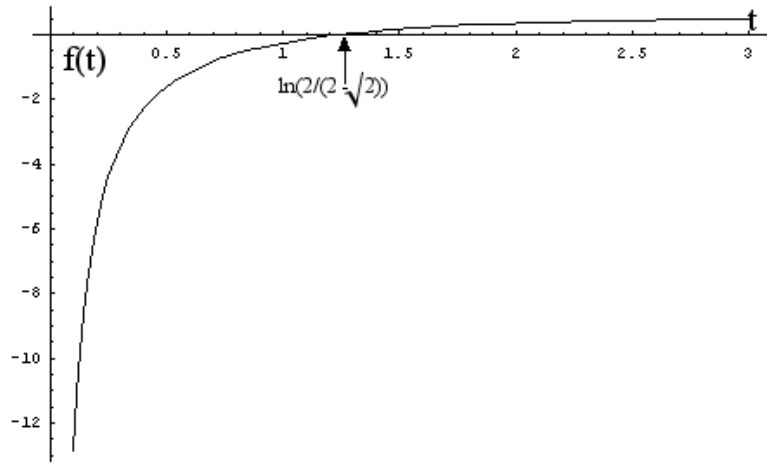
Di conseguenza $f(t)$ è positiva se $e^t > \frac{2}{2-\sqrt{2}}$ ovvero se $t > \ln(\frac{2}{2-\sqrt{2}})$ e negativa altrimenti. Calcoliamo la derivata prima. Risulta:

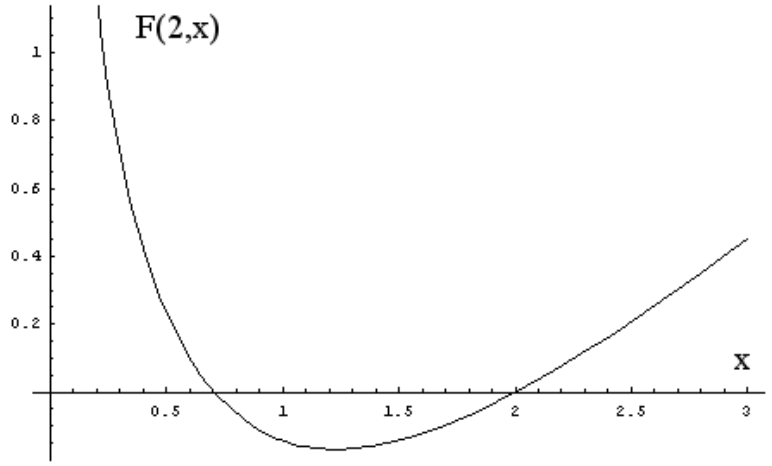
$$f^{'}(t) = \sqrt{2}\frac{e^t}{(e^t-1)^2}$$

Per cui $f(t)$ sarà crescente per $t > 0$. Inoltre $\lim_{t\to 0^+} f(t) = -\infty$, pertanto è lecito chiedersi se la F sia prolungabile in 0. A tale scopo calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0^+} F(2,x) = \lim_{x\to 0^+} \int_2^x \left(2 - \sqrt{2}\tfrac{e^t}{e^t-1}\right) dt = \lim_{x\to 0^+} \left[2t - \sqrt{2}\ln(e^t-1)\right]_2^x =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \left[2x - \sqrt{2}\ln(e^x-1)\right] - \sqrt{2}\ln(e^2-1) = +\infty$$

Pertanto F non è prolungabile in 0. Di conseguenza i diagrammi della funzione integranda e della funzione integrale sono i seguenti:


f(t)
t
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-2
-4
-6
-8
-10
-12
ln(2/(2 - √2))


F(2,x)
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1
1.5
2
2.5
3