Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(\pi, x) = \int_{\pi}^{x} \left(\left(\sin(t) - \frac{1}{2} \right)^{+} + \cos(t-\pi)^{+} \right) dt \qquad \text{in } [0, 2\pi]$$

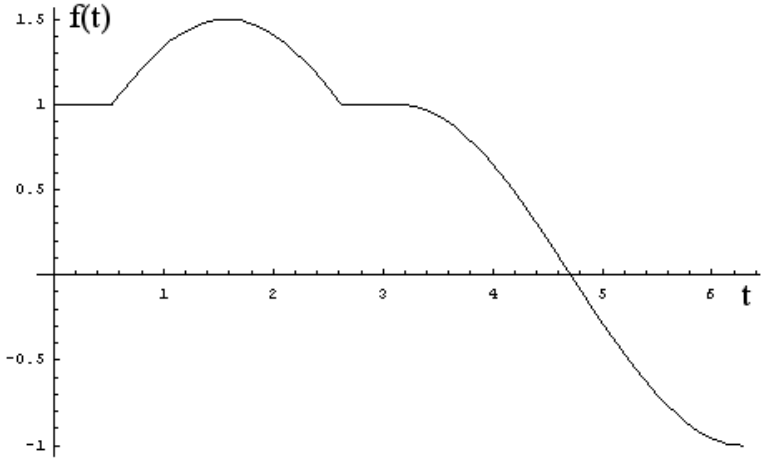
e calcolare: $F(\pi, 0)$ e $F(\pi, 2\pi)$

Risoluzione:

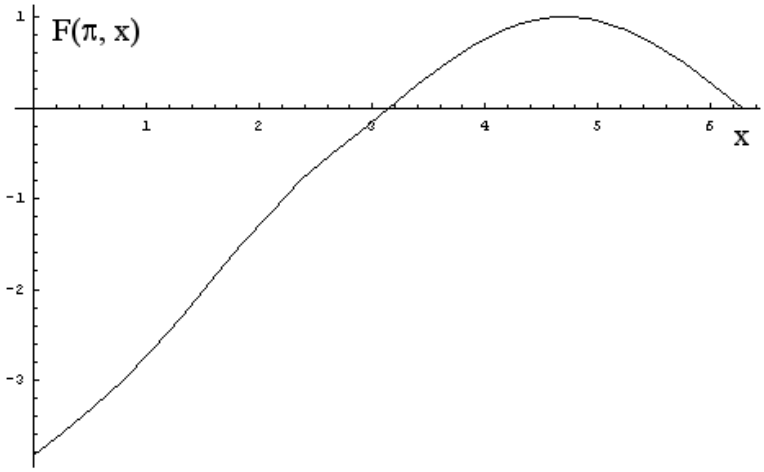
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} + \sin(t) & \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6} \\ 1 & \frac{5\pi}{6} \leq t \leq \pi \\ -\cos(t) & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha la seguente forma:



Pertanto la funzione integrale sarà:



Calcoliamo adesso gli integrali richiesti dall'esercizio. Risulta:

$$F(\pi, 0) = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{6}} 1dt + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \sin(t))\, dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} 1dt = -\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$F(\pi, 2\pi) = \int_{\pi}^{2\pi} (-\cos(t))\, dt = [-\sin(t)]_{\pi}^{2\pi} = 0$$

Secondo Esercizio

Dopo 2 passi di pivotizzazione senza scambi di colonne su di una matrice A_{3x3} si è ottenuta una matrice A_2 e le seguenti informazioni:

- La prima colonna di Q_1 è $\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \underline{e}_3$
- Nel secondo passo di pivotizzazione si è scambiata la seconda con la terza riga e sono intervenute le matrici: $D_2(3) \qquad T_{3,2}(-1)$
- Infine i complementi algebrici dei posti $(3,2)$ e $(3,1)$ della matrice A_2 valgono 4 e $det(A_2) + 2det(A_1) = k+1$.

Trovare A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e per il $ns(A)$.

Risoluzione

Poiché sono già stati compiuti 2 passi di pivotizzazione, la matrice A_2 ha la forma seguente:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

dove a, b e c sono incogniti. Poiché $m_{3,1} = -a$ e $m_{3,2} = -b$ si ha $a = -4$ e $b = -4$. Inoltre $det(A_2) = c$ e:

$$A_2 = T_{3,2}(-1) \cdot D_2(3) \cdot S_{2,3} \cdot A_1 \Rightarrow$$

$$A_1 = S_{2,3} \cdot D_2(\tfrac{1}{3}) \cdot T_{3,2}(1) \cdot A_2 \Rightarrow$$

$$det(A_1) = -\tfrac{1}{3}det(A_2) = -\tfrac{1}{3}c$$

In conclusione deve risultare:

$$c - \frac{2}{3}c = k+1 \Rightarrow c = 3\,(k+1)$$

La matrice A_2 è:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{-4} \\ 0 & 1 & \text{-4} \\ 0 & 0 & 3\,(k+1) \end{bmatrix}$$

La caratteristica della matrice A è dunque:

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1 \\ 2 & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

Dalla relazione: $A_1 = S_{2,3} \cdot D_2(\frac{1}{3}) \cdot T_{3,2}(1) \cdot A_2$ ricaviamo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{-4} \\ 0 & 1 & 3k\text{-1} \\ 0 & \frac{1}{3} & \text{-}\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Osserviamo che:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(\frac{1}{2}) = T_{3,1}(2) \cdot D_1(\frac{1}{2})$$

Pertanto:

$$A = D_1(2) \cdot T_{3,1}(-2) \cdot A_1$$

Ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \text{-8} \\ 0 & 1 & 3k\text{-1} \\ \text{-2} & \frac{1}{3} & \text{-}\frac{76}{3} \end{bmatrix}$$

Per $k = -1$ la caratteristica di A è 2. Visto che non sono stati effettuati scambi di colonne, una base per lo $span(A)$ è costituita dalla matrice formata dalle prime 2 colonne di A. Per trovare $ns(A)$ è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_3 = t$$

si ottiene:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 4t \\ 4t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto una base per $ns(A)$ è costituita dal vettore:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terzo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left(\ln(1+t) + \frac{\pi}{2} - arctan(t)^+\right) dt \qquad \text{nel suo campo di esistenza}$$

Risoluzione:

Posto:

$$f(t) = \ln(1+t) + \frac{\pi}{2} - arctan(t)^+$$

Osserviamo che tale funzione risulta definita per i $t > -1$ e si ha:

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1+t) + \frac{\pi}{2} & -1 < t < 0 \\ \ln(1+t) + \frac{\pi}{2} - arctan(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

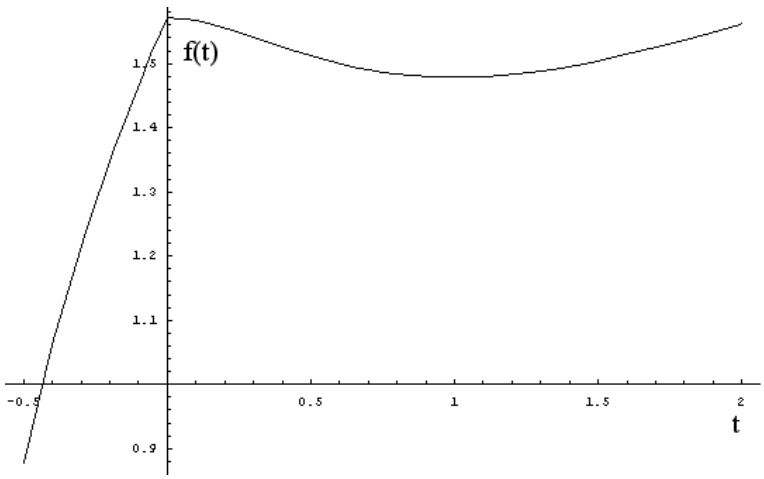
Dunque $f(t)$ è sempre positiva per i $t > 0$, mentre per i $t \in (-1, 0)$ $f()$ è positiva solo se $\ln(1+t) > -\frac{\pi}{2}$ ossia $t > e^{-\frac{\pi}{2}} - 1$. In conclusione:

$$f(t) \begin{cases} > 0 & t > e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 \\ < 0 & t \in \left(-1, t > e^{-\frac{\pi}{2}} - 1\right) \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t+1} & -1 < t < 0 \\ \frac{t^2 - t}{(1+t^2)(1+t)} & t > 0 \end{cases}$$

Per cui $f(t)$ sarà crescente per $t \in (-1, 0)$ e per $t > 1$. Sarà poi decrescente per $t \in (0, 1)$. Di conseguenza il diagramma di $f(t)$ risulta il seguente:



Osserviamo che $\lim_{t \to 0^+} f(t) = -\infty$ e stabiliamo se F sia prolungabile in -1. A tale scopo calcoliamo:

$$\lim_{x \to -1^+} F(0,x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\int_0^x \left(\ln(1+t) + \frac{\pi}{2}\right) dt\right) =$$
$$= \lim_{x \to -1^+} \left[(t+1)\ln(t+1) + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) t\right]_0^x = \lim_{x \to -1^+} \left[(x+1)\ln(x+1) + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) x\right]_0^x = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Ricordiamo che $\lim_{x \to -1^+} ((x+1)\ln(x+1))$ è del tipo $0 \cdot -\infty$ che, trasformato opportunamente e calcolato con De l'Hospital, vale 0. La funzione F è dunque prolungabile in -1 ed il suo grafico ha la forma seguente: