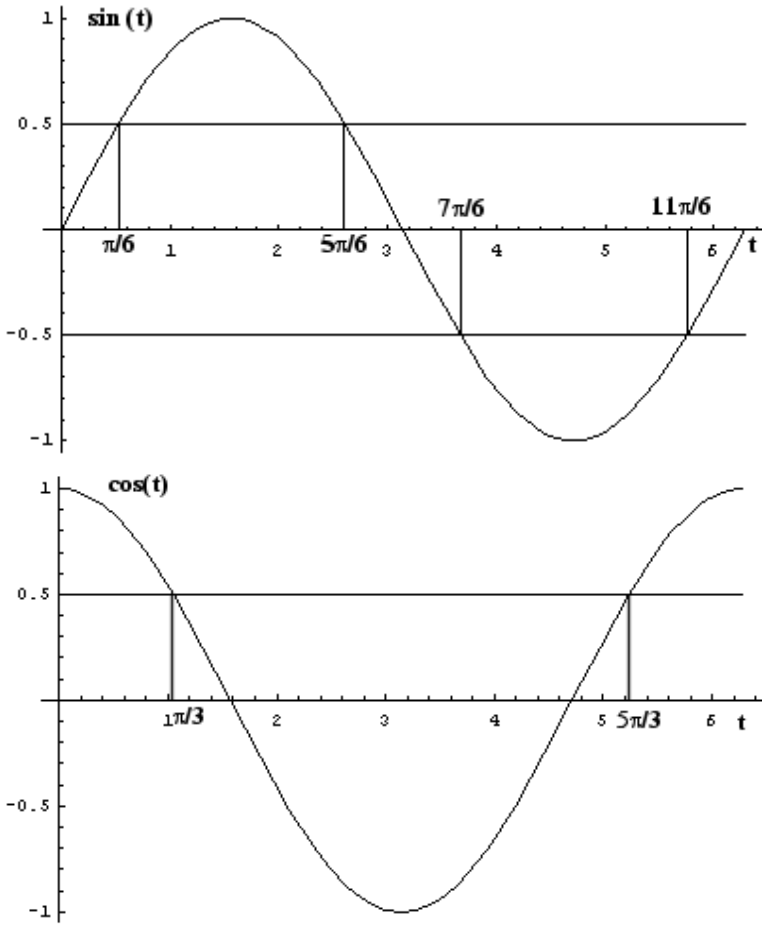
Premessa

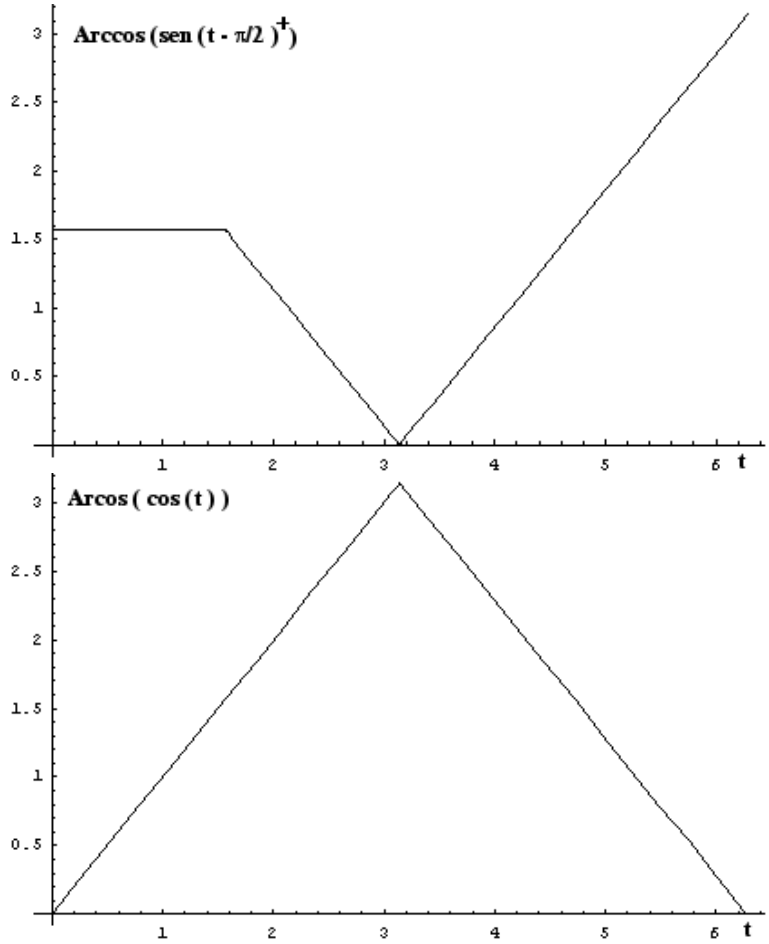
Integrali

Per la soluzione degli esercizi conviene ricordare che:

$$\int \sin(t)dt = -\cos(t) + C$$
$$\int tg(t)dt = -\int \left(-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right) dt = -\ln|\cos(t)| + C$$
$$\int \frac{1}{t} \ln|t|\, dt = \int \ln|t|\, d\left(\ln|t|\right) = \frac{(\ln|t|)^2}{2} + C$$
$$\int \ln(t)dt = t\ln(t) - t + C$$
$$\int t\ln(t)dt = \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{t^2}{4} + C$$

Grafici





Calcolo matriciale

Per quanto riguarda il calcolo matriciale, ricordiamo che:

$$A_3 = Q_3 \cdot Q_2 \cdot Q_1 \cdot A \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$$

E quindi:

$$A = Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdot Q_3^{-1} \cdot A_3 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$$

Pertanto, risolvere il sistema:

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

equivale a risolvere il sistema:

$$A_3 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

Esercizio 1

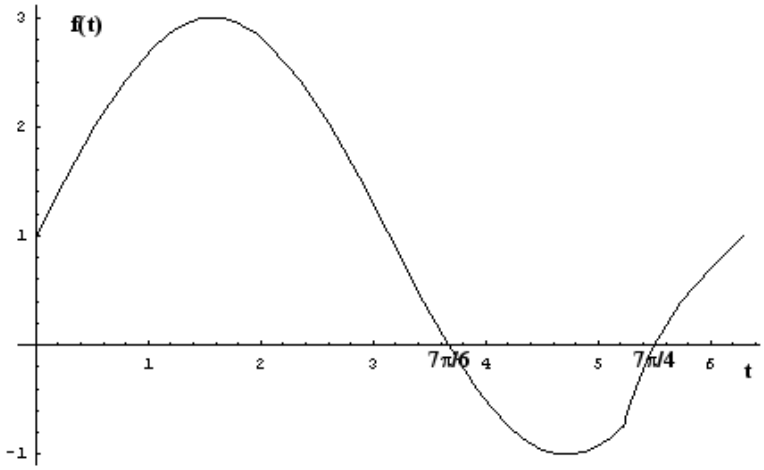
Studiare la funzione:

$$F(\frac{\pi}{2}, x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left(\frac{\sin(t)}{\cos\left(\left(t - \frac{5\pi}{3}\right)^{+} - \frac{\pi}{3}\right)} + 1 \right) dt \qquad \text{in } [0, 2\pi]$$

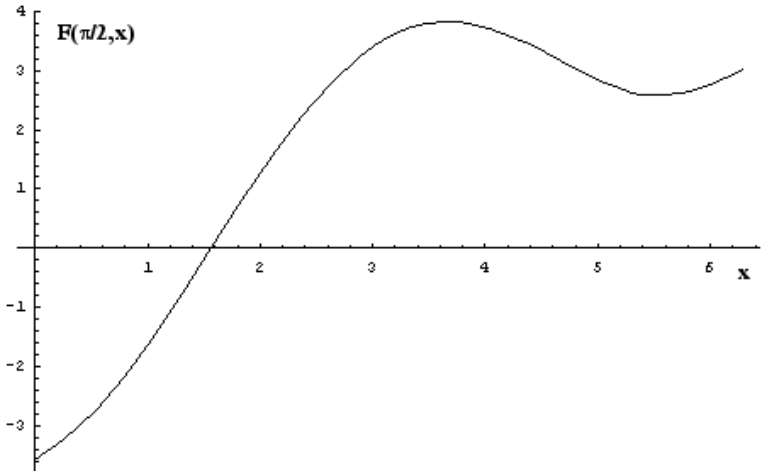
e calcolare $F(\frac{\pi}{2}, 0)$, $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $F(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

Tenendo conto di quanto illustrato in premessa, possiamo scrivere:

$$f(t) = \begin{cases} 2\sin(t) + 1 & 0 \leq t \leq \frac{5\pi}{3} \\ tg(t) + 1 & \frac{5\pi}{3} \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



Di conseguenza la funzione integrale ha la sequente forma:



Infine:

$$F(\tfrac{\pi}{2},0) = -2 - \tfrac{\pi}{2}$$
$$F(\tfrac{\pi}{2},\pi) = 2 + \tfrac{\pi}{2}$$
$$F(\tfrac{\pi}{2},2\pi) = -1 + \tfrac{7\pi}{6} + \tfrac{1}{3}(\pi - 3\ln 2)$$

Esercizio 2

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x t^{[t]} \ln(|t|)dt \qquad \text{in } (-1,2)$$

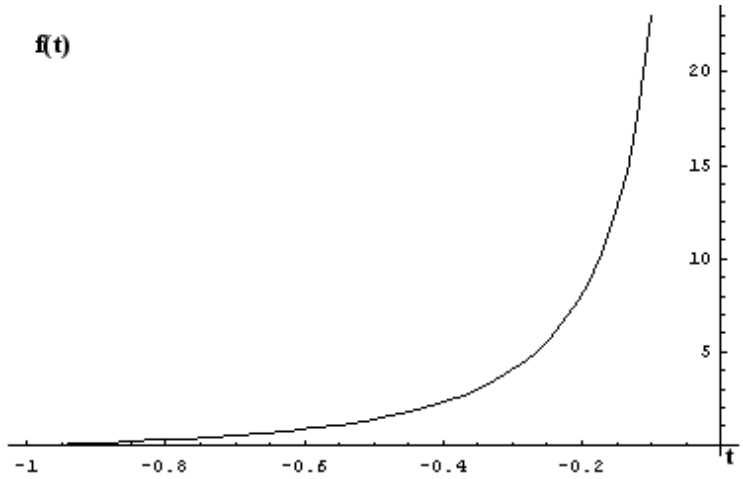
Possiamo subito scrivere che:

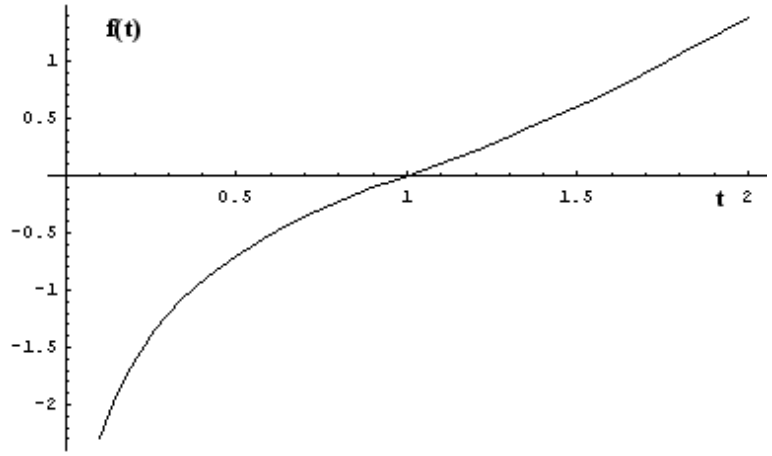
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\ln|t| & -1 < t < 0 \\ \ln(t) & 0 < t \leq 1 \\ t\ln(t) & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

La derivata è dunque:

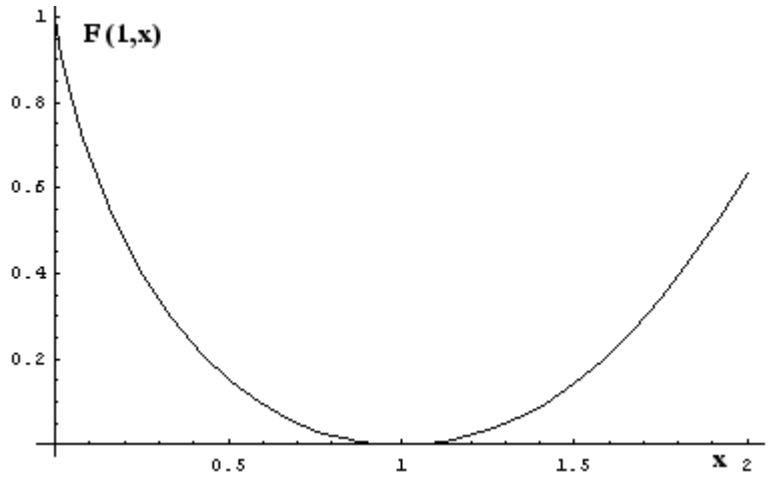
$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}(1-\ln(t)) & -1 < t < 0 \\ \frac{1}{t} & 0 < t < 1 \\ \ln(t)+1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Si osserva che la derivata è positiva in tutti gli intervalli, dunque la funzione integranda ha il seguente diagramma:





E la funzione integrale in $(0, 2]$ ha la seguente forma:



Rimangono da chiarire due punti:

- se la funzione integrale sia prolungabile nello 0
- ammesso che la prima risposta sia positiva, se essa sia prolungabile a sinistra di 0.

A tale scopo calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} F(1,x) = \lim_{x\to 0^+} ((x\ln(x) - x) + 1) = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \int_{-1}^{x} \frac{1}{t} \ln|t|\, dt = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x)^2}{2} = +\infty$$

Pertanto la funzione integrale è prolungabile in 0 ma non a sinistra di 0.

Esercizio 3

Dopo 3 passi di pivotizzazione su di una matrice A_{4x4} si è ottenuta una matrice A_3. Sapendo che:

- $2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_4 \in ns(A)$
- Nel primo passo si è scambiata la prima con la quarta colonna e nel terzo si è scambiata la terza con la quarta colonna.
- Sulle righe sono intervenute le matrici: $S_{1,3}$,$D_2(-\frac{1}{2})$,$S_{3,4}$, $T_{1,3}(-2)$, $D_1(2)$, $T_{2,1}(-3)$, $T_{2,3}(-1)$ e $T_{4,2}(-6)$

Trovare $r(A)$,A_2, A_1 ed A ed una base per $span(A)$ e per il $ns(A)$.

Poichè sono stati compiuti 3 passi, le prime tre colonne della matrice A_3 sono i primi tre vettori della base canonica. Per quanto esposto in premessa, dire che:

$$A \cdot (2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = \underline{0}$$

equivale a scrivere:

$$A_3 \cdot S_{3,4} \cdot S_{1,4} \cdot (2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = \underline{0}$$

Osserviamo che :

$$S_{1,4} \cdot (2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = 2\underline{e}_4 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_1$$

e

$$S_{3,4} \cdot S_{1,4} \cdot (2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = S_{3,4} \cdot (2\underline{e}_4 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_1) = 2\underline{e}_3 - \underline{e}_2 - \underline{e}_1 + 3\underline{e}_4$$

E dunque il sistema :

$$A_3 \cdot S_{3,4} \cdot S_{1,4} \cdot (2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = \underline{0}$$

è equivalente al sistema:

$$A_3\,(2\underline{e}_3 - \underline{e}_2 - \underline{e}_1 + 3\underline{e}_4) = \underline{0}$$

ovvero:

$$-\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 + 3\underline{a} = \underline{0}$$

(qui $\underline{a}$ rappresenta la quarta colonna di A_3).
La matrice A_3 risulta:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prima di passare alla restante parte della soluzione, riassumiamo le operazioni che sono intervenute in ognuno dei tre passi, indicando semplicemente le matrici che le rappresentano:

Terzo passo:
Sulle righe:

$$T_{1,3}(-2)\ ,\ T_{2,3}(-1)$$

Sulle colonne :

$$S_{3,4}$$

Secondo passo:
Sulle righe:

$$D_2(-\frac{1}{2})\ ,\ T_{4,2}(-6)$$

Primo passo:
Sulle righe:

$$S_{1,3}\ ,\ D_1(2)\ ,\ T_{2,1}(-3)$$

Sulle colonne:

$$S_{1,4}$$

Grazie a queste considerazioni, possiamo stabilire subito che:

$$A_2 = T_{1,3}(2) \cdot T_{2,3}(1) \cdot A_3 \cdot S_{3,4}$$

$$A_1 = D_2(-2) \cdot T_{4,2}(6) \cdot A_2$$

$$A = S_{1,3} \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot T_{2,1}(3) \cdot A_1 \cdot S_{1,4}$$

In conclusione risulta:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 4 & -2 & -\frac{7}{3} & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

La caratteristica di A è 3. Per trovare una base per $span(A)$ basta individuare le tre colonne di A che sono intervenute nella pivotizzazione. Consideriamo il vettore: [1 2 3 4] , dopo un passo diventa: [4 2 3 1], dopo il terzo passo è: [4 2 1 3]. Pertanto le colonne cercate sono la quarta, la seconda e la prima.

Per trovare $ns(A)$ basta rislovere il sistema:

$$\begin{cases} x_4 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_3 = t$$

si vede che una generica soluzione del sistema è:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \\ t \\ -\frac{1}{3}t \end{bmatrix}$$

Per cui:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

è una base di $ns(A)$.

Esercizio alternativo al primo.

Studiare la funzione:

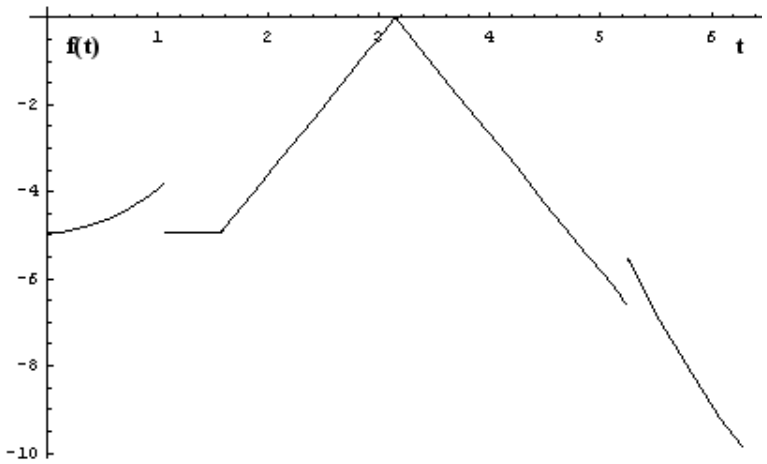
$$F(\frac{\pi}{2}, x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left(sign\left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right)^{+} (arccos\,(cos(t)))^2 - \pi arccos\left(\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^{+}\right)\right) dt$$

e calcolare $F(\frac{\pi}{2}, 0)$, $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $F(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

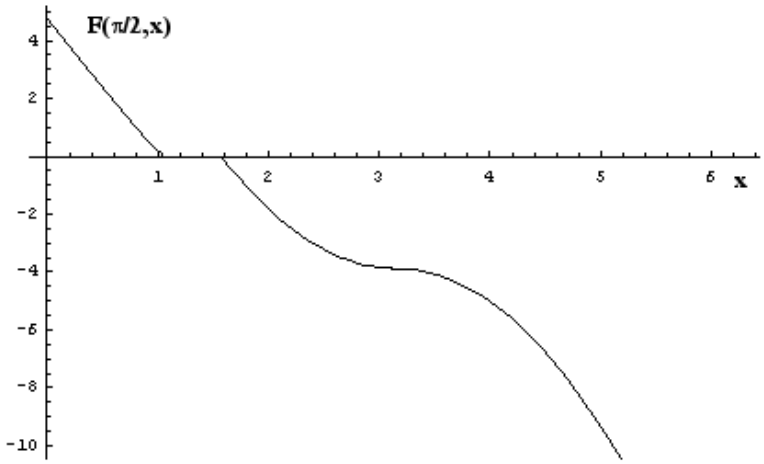
Si osserva che:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - \frac{\pi^2}{2} & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi}{3} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ t\pi - \pi^2 & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \pi^2 - t\pi & \pi \leq t \leq \frac{5\pi}{3} \\ 5\pi^2 - 5t\pi + t^2 & \frac{5\pi}{3} \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Pertanto la funzione integranda ha la seguente forma:



E quindi la funzione integrale è:



In conclusione, risulta:

$$F(\frac{\pi}{2}, 0) = \frac{25\pi^3}{162}$$
$$F(\frac{\pi}{2}, \pi) = \frac{-\pi^3}{8}$$
$$F(\frac{\pi}{2}, 2\pi) = \frac{-397\pi^3}{648}$$