Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left((t)^- + (t-1)^+ - \frac{1}{2}\,[t]\, sgn\,(t) \right) dt \qquad \text{in } [-1 \quad 3)$$

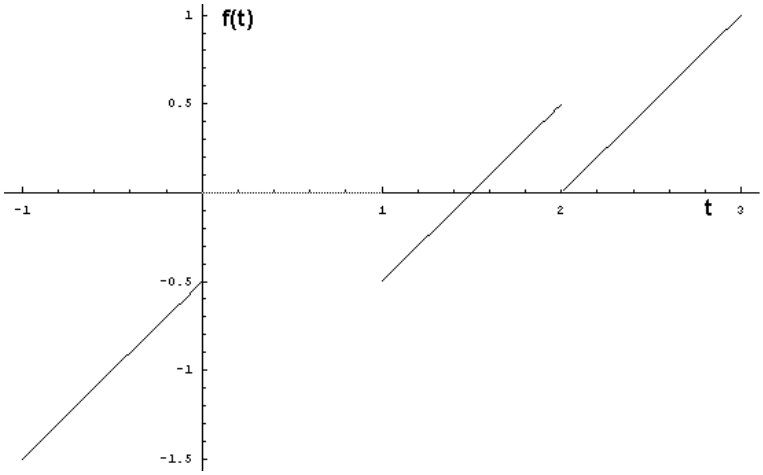
e calcolare: $F(0,3)$

Risoluzione:

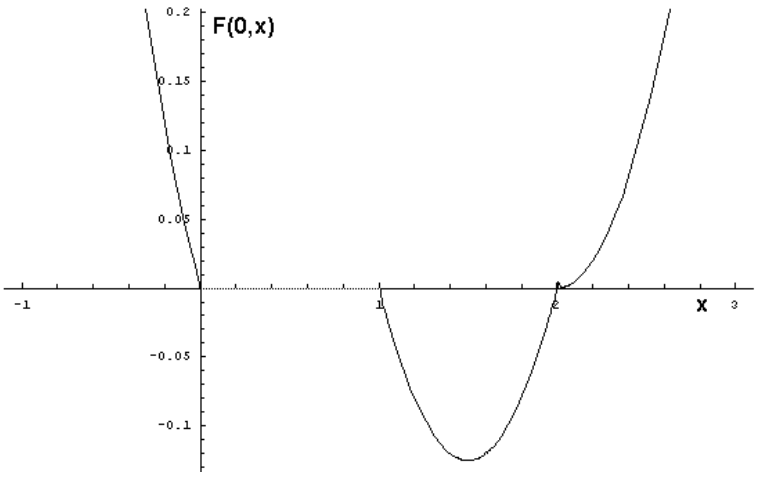
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & -1 \le t < 0 \\ 0 & 0 \le t < 1 \\ t - \frac{3}{2} & 1 \le t < 2 \\ t - 2 & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

In conclusione la funzione integranda ha il seguente diagramma:



e la funzione integrale, di conseguenza:



Calcoliamo ora $F(0,3)$. Risulta:

$$F(0,3) = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 \left(t - \tfrac{3}{2}\right) dt + \int_2^3 (t-2)\,dt = \tfrac{1}{2}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \left(\frac{1}{e^{-t} - sgn\,(t)} \right) dt$$

in tutto il campo di esistenza.

Risoluzione:

Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{-t}+1} & t < 0 \\ \frac{1}{e^{-t}-1} & t > 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

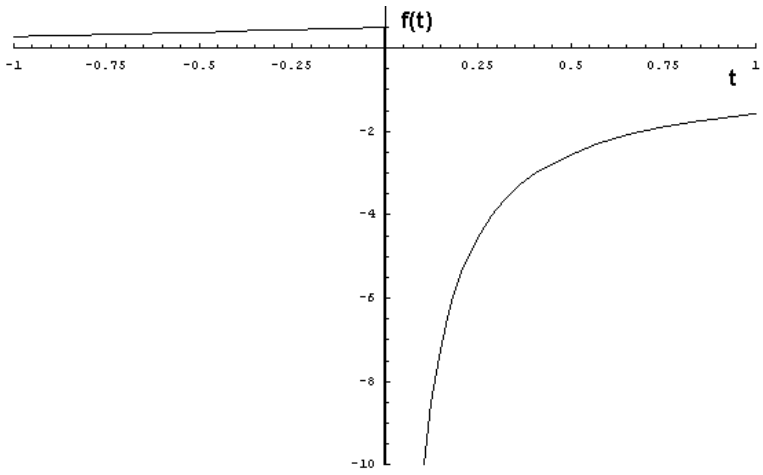
Calcolando i limiti agli estremi del campo si ricava:

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = -1$$
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = -\infty$$
$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = \tfrac{1}{2}$$
$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$$

Infine:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2} & t < 0 \\ \frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2} & t < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione integranda ha il seguente diagramma:



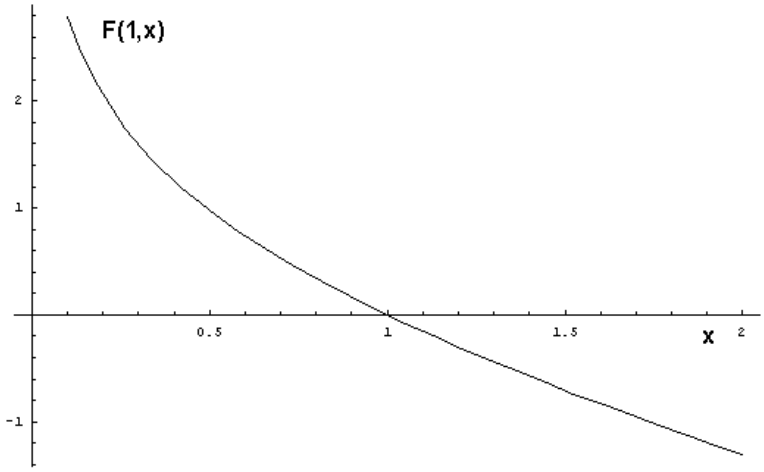
Per stabilire se F è prolungabile in 0 ed eventualmente a sinistra di 0 bisogna calcolare $\lim_{x\to 0^+} F(1,x)$. Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} F(1,x) = \lim_{x\to 0^+} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} \int_1^x \left(\frac{1}{e^{-t}-1}\right) dt =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \left(\frac{e^t}{1-e^t}\right) dt = \lim_{x\to 0^+} \left[-\ln|1-e^t|\right]_1^x =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\ln|1-e^x| + \ln|1-e|\right) = +\infty$$

La funzione $F(1,x)$ non è prolungabile in 0 nè tantomeno a sinistra di 0. Il diagramma di $F(1,x)$ è pertanto il seguente:



Terzo esercizio

Su di una matrice A_{3x4} si sono compiuti due passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_2. Sapendo che:

- la seconda colonna di Q_1 è $3\underline{e}_1 - \underline{e}_3$
- nel secondo passo l'unica operazione è lo scambio tra la seconda e la quarta colonna
- $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \frac{1}{2}\underline{e}_4 \in ns\,(A_1)$
- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$ è soluzione del sistema:

$$A_2\underline{x} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$$

trovare A e la caratteristica di A.

Risoluzione:

Avendo compiuto due passi di pivotizzazione, si ha:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underline{a}\ \underline{b} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Poichè:

$$A_2\left(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3\right) = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$$

si ha:

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{a} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 \Rightarrow \underline{a} = -\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$$

Essendo:

$$A_1\left(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \frac{1}{2}\underline{e}_1\right) = \underline{0}$$

deve risultare:

$$A_2 \cdot S_{2,4} \cdot \left(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \frac{1}{2}\underline{e}_1\right) = \underline{0}$$

E quindi:

$$\left(\underline{e}_1 + 2\underline{b} - \underline{a} + \frac{1}{2}\underline{e}_2\right) = \underline{0}$$

Di qui si ricava che:

$$\underline{b} = -\frac{1}{2}\underline{e}_1 - \frac{3}{4}\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

In conclusione, la matrice A_2 è la seguente:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La caratteristica di A pertanto è 3.
Sapendo che:

$$A_2 = A_1 \cdot S_{2,4} \Rightarrow A_1 = A_2 \cdot S_{2,4}$$

risulta:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo che:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(3) \cdot S_{1,2} = T_{3,1}\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot D_1(3) \cdot S_{1,2}$$

Quindi:

$$A_1 = T_{3,1}\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot D_1(3) \cdot S_{1,2} \cdot A$$

Ossia:

$$A = S_{1,2} \cdot D_1\left(\frac{1}{3}\right) \cdot T_{3,1}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot A_1$$

Per cui:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$