Esercizi

In ciascuno di questi esercizi viene proposta una soluzione al problema di rappresentare una funzione integrale relativa alla $f(t)$ indicata.

La scelta del punto iniziale è stata effettuata in base a considerazioni di convenienza. Tuttavia ricordo che, a causa della proprietà addittiva e della simmetria, risulta:

$$F(x_1,x)=\int_{x_1}^{x} f(t)dt=\int_{x_1}^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^{x} f(t)dt=-\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt+\int_{x_0}^{x} f(t)dt=F(x_0,x)-F(x_0,x_1)$$

Quindi, una volta nota la funzione integrale a partire da x_0, sono note anche quelle a partire da altri punti.

Osservazione:
Le proprietà succitate valgono solo a patto che negli intervalli indicati la $f(t)$ sia integrabile (anche in senso improprio) .

Vederemo volta per volta di verificare questa condizione.

Nella maggior parte degli esercizi si è fornita anche l'espressione in forma chiusa della funzione integrale, grazie al fatto che in molti intervalli le funzioni integrande hanno primitive semplici. Lo studente può utilizzare questa forma per calcolare i valori della funzione integrale nei punti che desidera.

In questo plico si fa riferimento ad alcuni degli esercizi proposti in precedenza, in particolare agli esercizi risolti 1 e 4 del primo plico (**Esercizi.pdf**) e 1, 2 e 4 del secondo plico (**EserciziFunzioniNov2004.pdf**). Entrambi i files sono reperibili sul sito: **http://clik.to/dsciutti**

Prima parte

Esercizio 1 (funzione integranda dell'Esercizio 2 del primo plico.)

$$f(t)=(t+2)^{([t]+1)^{+}-1}-4(t-1)^{+}-2^{-sgn(t)+5sgn\left((t-2)^{+}\right)} \qquad (-3,3)$$

Risoluzione:

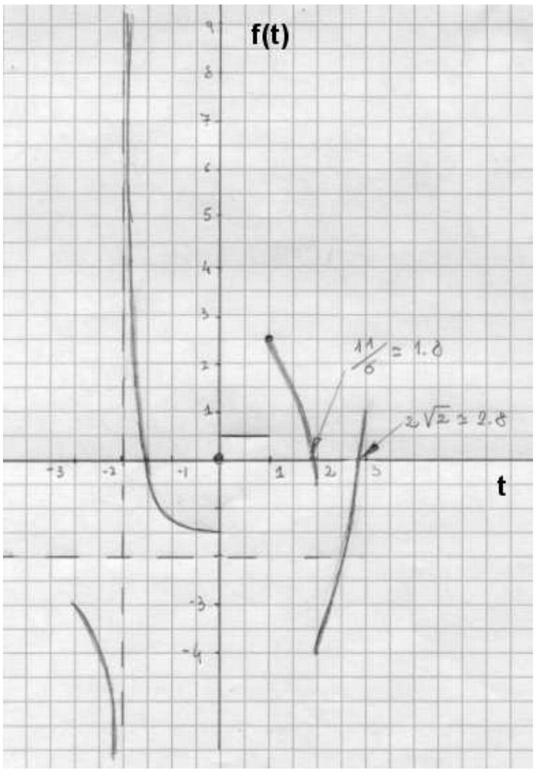
$$F(0,x)=\begin{cases} 4-\ln(4)-2x+\ln(2+x) & -2\le x\le 0\\ \frac{x}{2} & 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}\left(3x^2-11x+7\right) & 1\le x\le 2\\ \frac{89}{6}-8x+\frac{x^3}{3} & 2<x\le 3\end{cases}$$

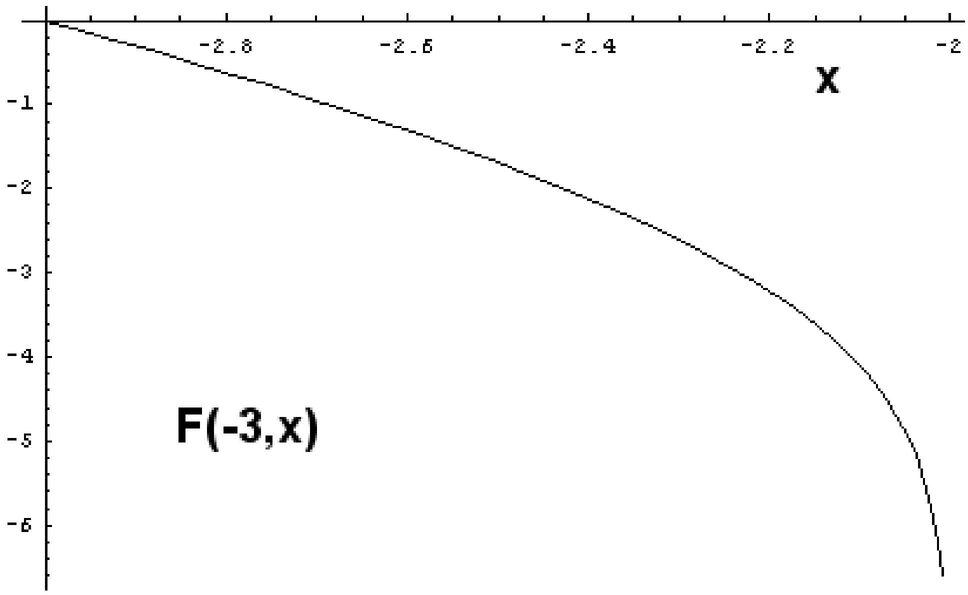
Facciamo notare che :

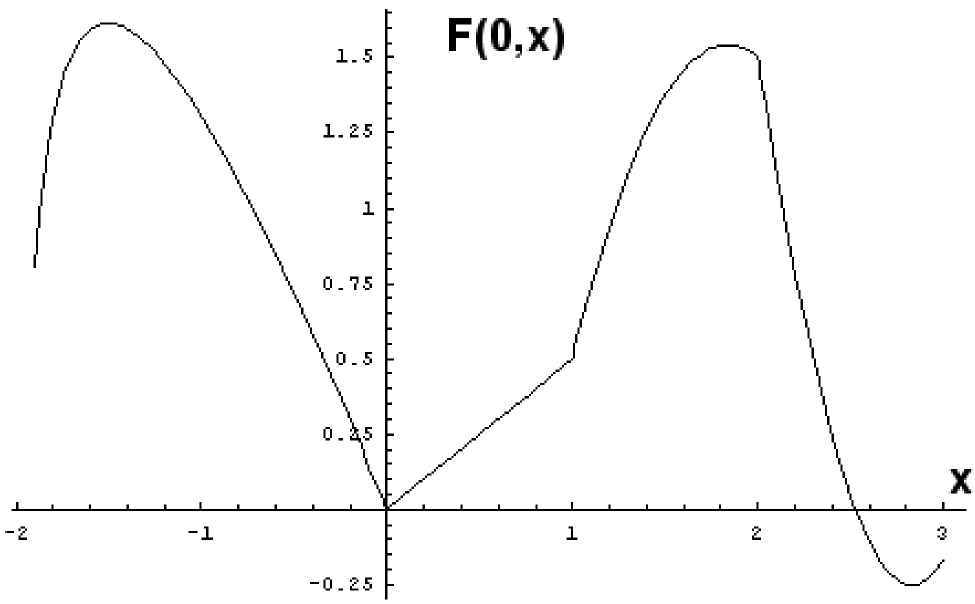
$$\lim_{x \to -2^+} F(0,x) = -\infty$$

Pertanto la funzione non è prolungabile in -2 e, a maggior ragione, neanche a sinistra di -2.
In conclusione se, al posto di 0, si sceglie un altro punto iniziale a destra di -2, la nuova funzione integrale si limita a spostarsi verticalmente. Se invece si sceglie un punto a sinistra di -2, per esempio -3, F cambia sostanzialmente e risulta definita solo nell'intervallo $[-3,-2)$.

Riportiamo ora un semplice diagramma di f(t),F(0,x) e F(-3,x)




F(-3,x)
x
-2.8
-2.6
-2.4
-2.2
-2
-1
-2
-3
-4
-5
-6


F(0,x)
x
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-2
-1
1
2
3

Esercizio 2 (funzione integranda dell'Esercizio 4 del primo plico.)

$$f(t) = \left| sgn(t) + \left[\frac{t}{2\pi}\right] \right| sen\left(\left(sgn(t) + \left[\frac{t}{2\pi}\right] \right) t \right) \qquad [-2\pi, 6\pi]$$

Risoluzione:

$$F(0,x) = \begin{cases} \cos(2x) - 1 & -2\pi \le x \le 0 \\ -\cos(x) + 1 & 0 \le x \le 2\pi \\ -\cos(2x) + 1 & 2\pi \le x \le 4\pi \\ -\cos(3x) + 1 & 4\pi \le x \le 6\pi \end{cases}$$

Ricordiamo che:

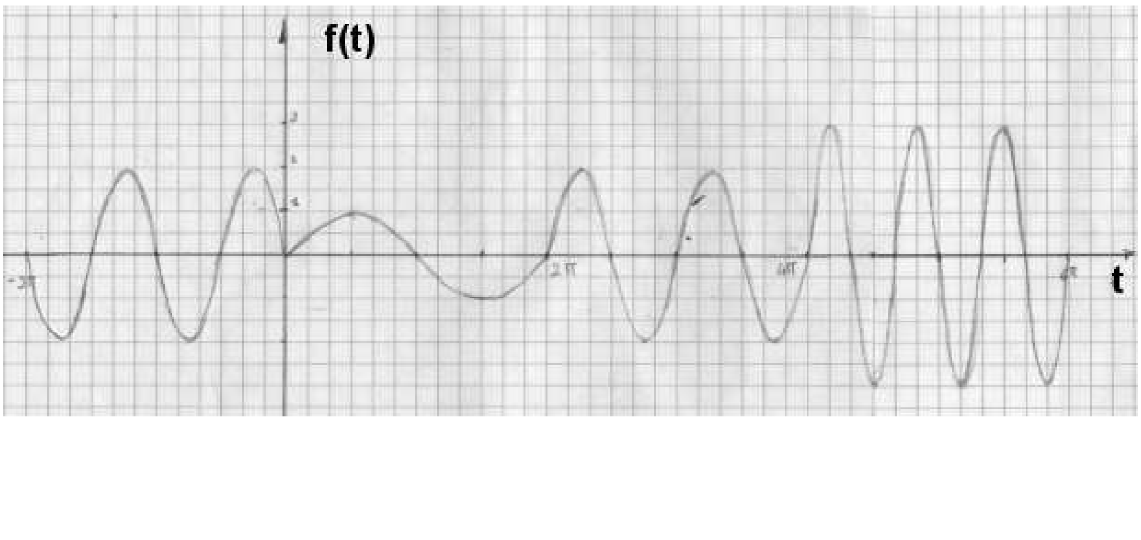
$$\int k \sin(kt)dt = \int \sin(kt)d(kt) = -\cos(kt) + c$$

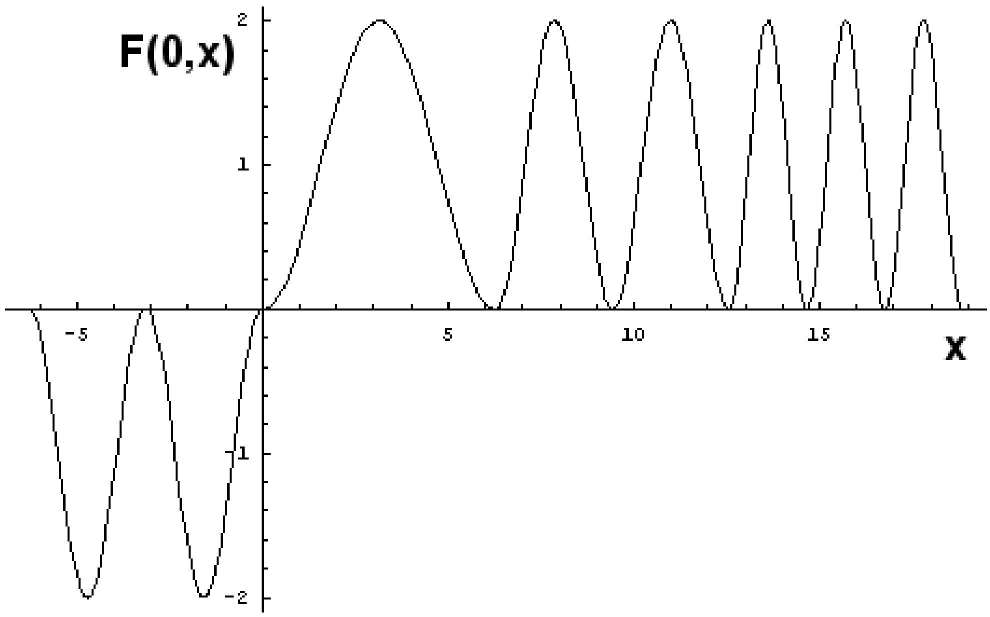
e:

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \sin(kt)dt = 0$$

Non essendoci asintoti la scelta del punto iniziale produce solo uno spostamento verso l'alto o verso il basso del diagramma della funzione integrale. Infatti, per esempio :

$$F(\pi, x) = F(0,x) - F(0,\pi) = F(0,x) - 2$$





Esercizio 3 (funzione integranda dell'Esercizio 1 del secondo plico.)

Studiare la funzione:

$$f(t) = t^{1+\left[(t-2)^-\right]+\frac{1}{2}sign\left(\left(t-t^2\right)^+\right)}\, e^{-\frac{1}{3}(t-1)^+} \qquad \text{in} \qquad (-1, +\infty)$$

Risoluzione:

Visto che nel punto 0 la funzione $f(t)$ presenta un asintoto verticale, scegliamo $x_0 = 1$.

$$F(1,x) = \begin{cases} -2 + 2\sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 3\left(1 - e^{\frac{1-x}{3}})\right) & 1 \leq x \leq 2 \\ 3\left(1 + 4e^{-\frac{1}{3}} - (3+x)\, e^{\frac{1-x}{3}}\right) & x \geq 2 \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} F(1,x) = \lim_{x \to 0^+} (-2 + 2\sqrt{x}) = -2$$

quindi la funzione integrale è prolungabile anche nello 0. Per sapere se è prolungabile anche a sinistra dello 0, conviene calcolare:

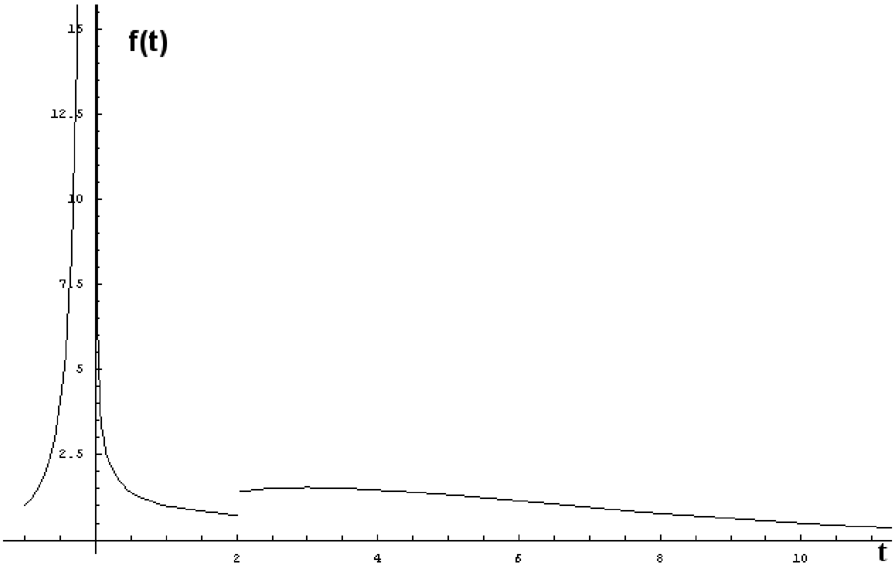
$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2} dt = -1 - \frac{1}{x}$$

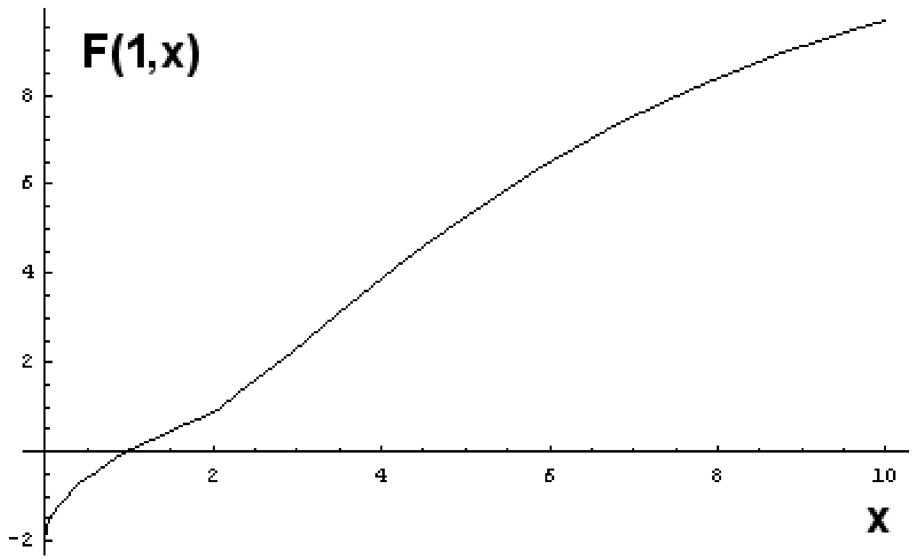
Per cui:

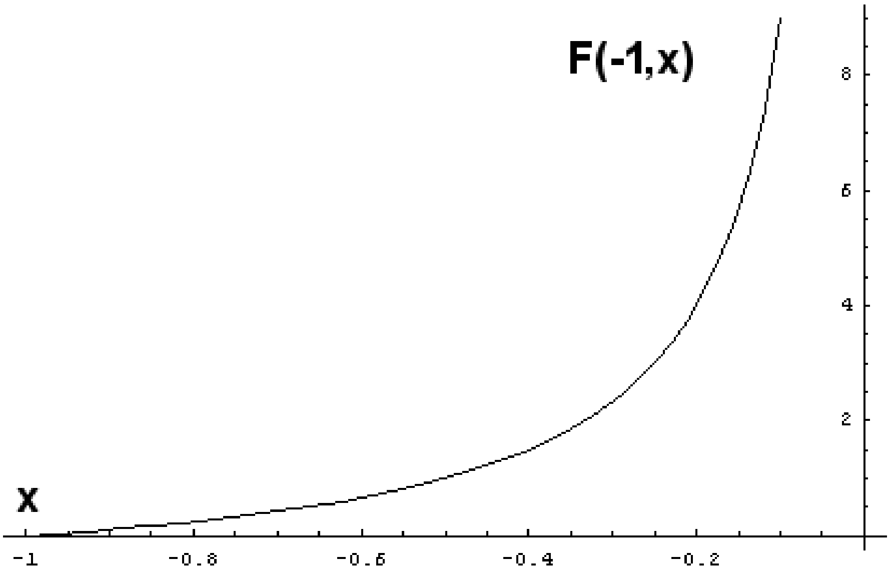
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\int_{-1}^{x}\frac{1}{t^2}dt\right)=+\infty$$

Di conseguenza la funzione non è prolungabile a sinistra di 0 e , se volessimo calcolare una funzione integrale con punto iniziale a sinistra di 0, per esempio -1, essa esisterebbe solo nell'intervallo $[-1,0)$.

Riportiamo i diagrammi della funzione integranda e delle funzioni integrali con punto iniziale rispettivamente in 1 e in -1:







Ricordiamo, infine, le modalità con cui sono stati calcolati alcuni integrali indefiniti che si sono utilizzati in questo esercizio.

$$\int e^{\frac{1-t}{3}} dt$$

Poniamo:

$$\frac{1-t}{3} = z \Rightarrow t = 1 - 3z \Rightarrow dt = -3dz$$

Quindi:

$$\int e^{\frac{1-t}{3}} dt = -3 \int e^z dz = -3e^z + c = -3e^{\frac{1-t}{3}} + c$$

Per calcolare:

$$\int te^{\frac{1-t}{3}} dt$$

integriamo per parti:

$$\int te^{\frac{1-t}{3}} dt = -3 \int t \;\; d\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1-t}{3}}\right) = -3\left(t\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1-t}{3}}\right) - \int \left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1-t}{3}}\right) dt\right)$$

Di qui si procede ricordando il primo integrale proposto.

Seconda parte

Prima di affrontare gli ultimi due esercizi conviene ricordare l'andamento di alcune funzioni elementari. Qui di seguito è rappresentato un diagramma schematico delle funzioni:

e^x	magenta
$\ln\lvert x\rvert$	rosso
x	azzurro
$-x$	verde

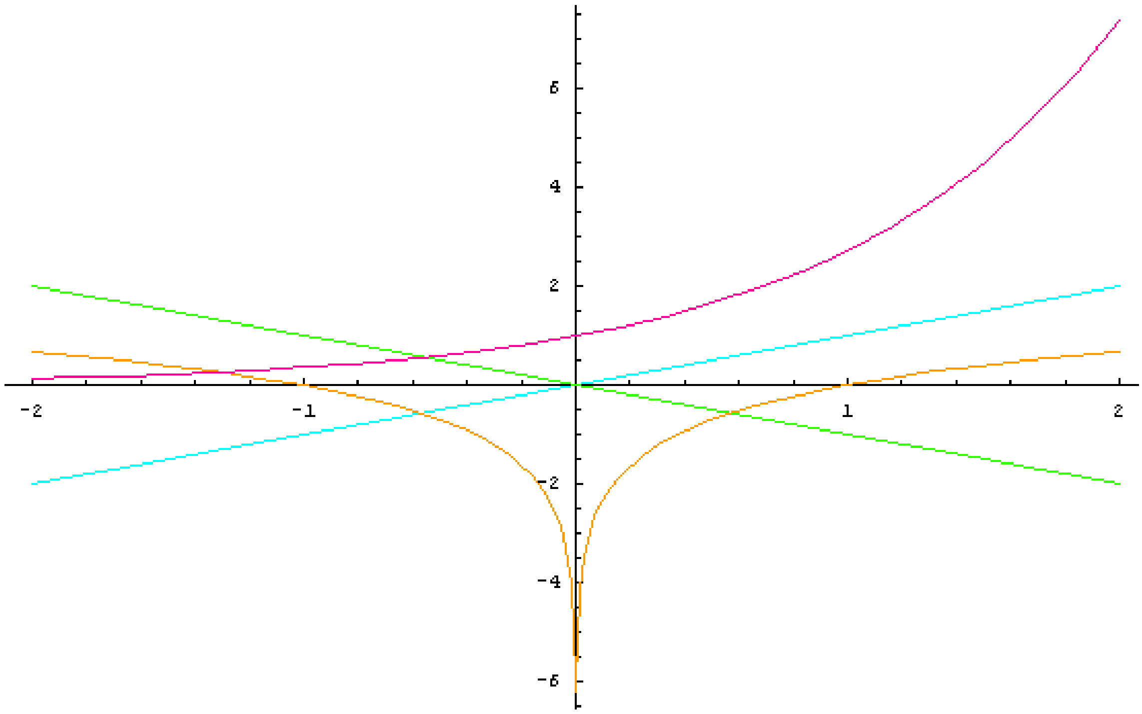


Figure 1: Funzioni elementari

Esercizio 4 (funzione integranda dell'Esercizio 2 del secondo plico)

Studiare la funzione:

$$f(t) = \frac{1}{|t|^{sign(1-|t|)^+}} \cdot \ln\left(|\ln|t||\right) \qquad \text{in} \qquad (-\infty, +\infty)$$

Risoluzione:

Occorre giustificare l'andamento della funzione integranda nell'intervallo (0,1), in quanto ciò era stato omesso nel secondo plico.

Per $t \in (0,1)$

$$f(t) = \frac{1}{t} \ln|\ln(t)| = \frac{1}{t} \ln(-\ln(t))$$

Per cui:

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \left(\frac{1}{\ln(t)} - \ln(-\ln(t)) \right)$$

Per stabilire il segno di questa derivata basta osservare che esso coincide con quello di:

$$\frac{1}{\ln(t)} - \ln(-\ln(t))$$

Quest'ultima espressione può essere riscritta, tendendo conto delle proprietà dei logaritmi, come:

$$\frac{1}{\ln(t)} + \ln\left(-\frac{1}{\ln(t)}\right) = \frac{1}{\ln(t)} + \ln\left|\frac{1}{\ln(t)}\right|$$

Se ora poniamo:

$$\frac{1}{\ln(t)} = x$$

Visto che $t \in (0,1)$, risulta $x < 0$ e imporre che $f'(t) > 0$ equivale a pretendere che:

$$x + \ln|x| > 0 \text{ con } x < 0$$

ovvero:

$$\ln|x| > -x \text{ per } x < 0$$

e ciò è impossibile. (Vedasi la figura 1)

Scegliamo come punto inziale per lo studio della funzione integrale $x_0 = \frac{1}{2}$. Essa risulta:

$$F(\frac{1}{2}, x) = \ln(2)\left(\ln(\ln(2)) - 1\right) + \ln(x)\left(\ln(-\ln(x)) - 1\right) \text{ per } x \in (0,1)$$

(Per il calcolo dell'integrale, ricordiamo che :

$$\int \frac{1}{t} \ln|ln(t)|\, dt = \int \ln|ln(t)| \quad d(\ln(t))$$

e che:

$$\int \ln|t|\, dt = t\ln|t| - t + c$$

Vediamo se tale funzione integrale è prolungabile in 0 e in 1. A tale scopo calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0^+} F(\frac{1}{2}, x) = -\infty$$

E quindi la risposta alla prima parte del quesito è negativa. Calcoliamo ora il limite:

$$\lim_{x\to 1^-} F(\frac{1}{2}, x) = \lim_{x\to 1^-} \ln(2)\left(\ln\left(\ln\left(2\right)\right) - 1\right) + \ln\left(x\right)\left(\ln\left(-\ln\left(x\right)\right) - 1\right)$$

Osserviamo che $\ln(2)\left(\ln\left(\ln\left(2\right)\right) - 1\right)$ è una costante. Inoltre:

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left(x\right)\left(\ln\left(-\ln\left(x\right)\right) - 1\right) = \lim_{x\to 1^-} -\ln\left(x\right) + \lim_{x\to 1^-} \ln\left(x\right)\ln\left(-\ln\left(x\right)\right)$$

Il primo addendo vale 0 ed il seondo addendo si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. È però facile osservare che, ponendo $\ln(x) = z$, esso diventa:

$$\lim_{z\to 0^-} z\ln|z| = 0$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 1^-} F(\frac{1}{2}, x) = \ln(2)\left(\ln\left(\ln\left(2\right)\right) - 1\right)$$

e quindi la funzione integrale è prolungabile fino ad 1.

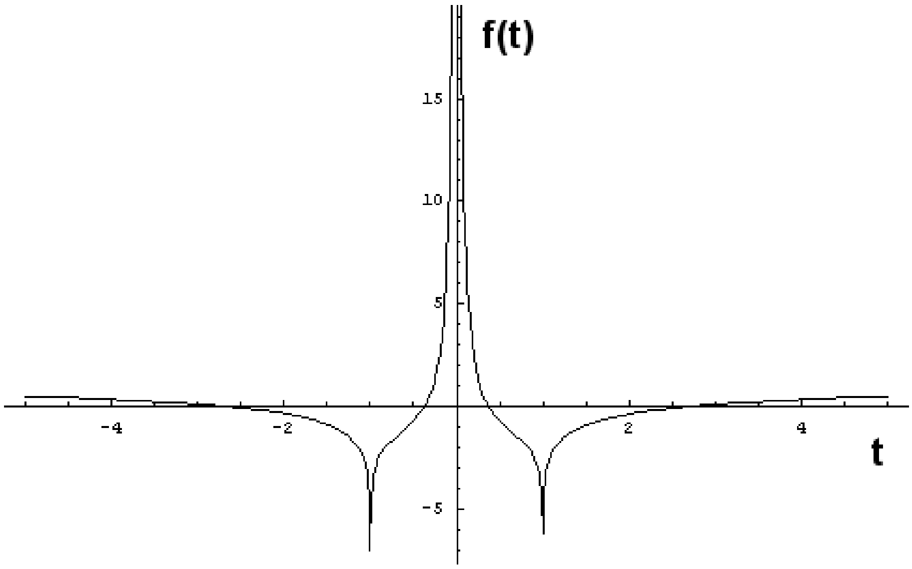
A questo punto, per sapere se possiamo prolungarla a destra di 1, consideriamo un'altra funzione integrale con punto iniziale a destra di 1, per esempio 2, ovvero, per $x \in (1, 2)$:

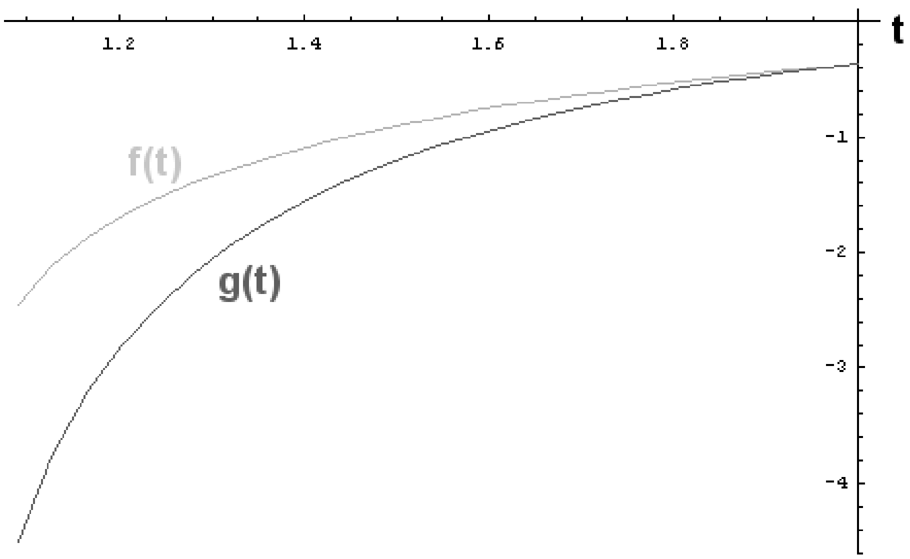
$$F(2, x) = \int_2^x \ln(\ln(t))dt$$

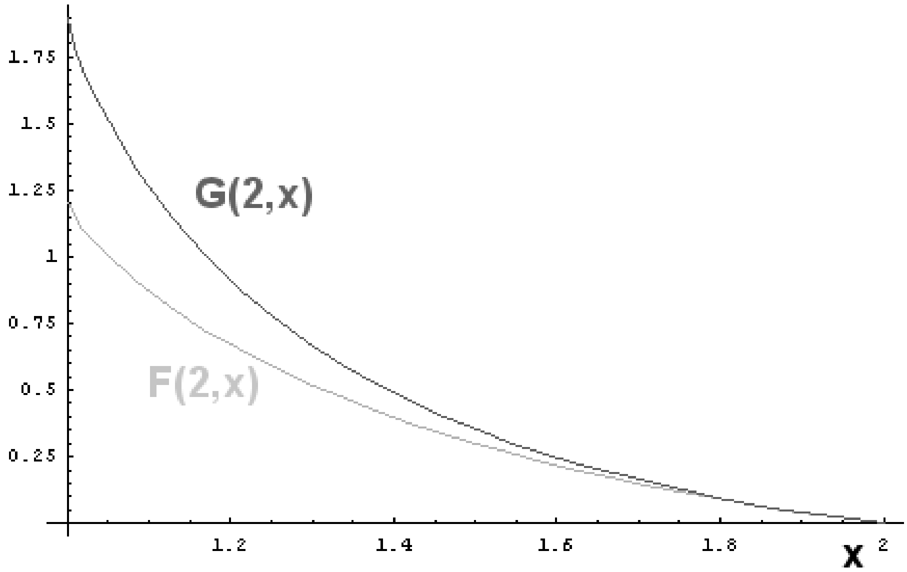
Notiamo che non è possibile esprimere in forma chiusa questa funzione integrale, in quanto non disponiamo di una primitiva in forma chiusa dell'integranda.

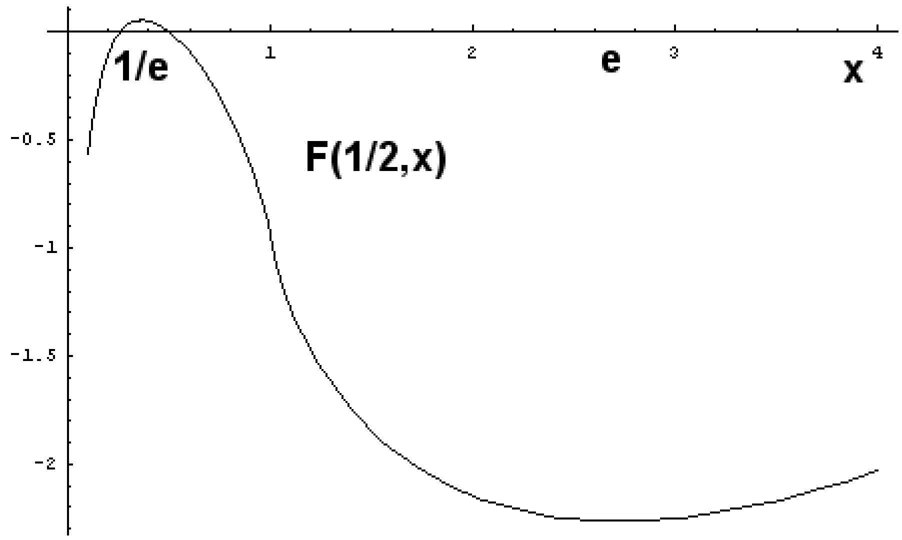
(Il fatto non disporre di una primitiva in forma chiusa non vuol dire che non ci sono primitive. Infatti, la funzione integranda è continua nell'intervallo (1,2) e di conseguenza $F(2,x)$ è una sua primitiva.)

Questo rende il problema di stabilire la prolungabilità di $F(2,x)$ in 1 un po' al di fuori del solito schema affrontato negli esercizi. Tuttavia il problema è facilmente risolvibile. Qui di seguito sono rappresentate nell'intervallo $(1,2]$ le funzioni $f(t) = \ln(\ln(t))$ e $g(t) = \frac{2}{t}\ln(\ln(t))$ e le rispettive funzioni integrali $F(2,x)$ e $G(2,x) = \int_2^x g(t)dt$. Si vede subito che $g(t) > f(t)$ e $F(2,x) < G(2,x)$ e queste ultime sono entrambe decrescenti. Visto che $G(2,x)$ è prolungabile in 1 (si veda il modo con cui abbiamo stabilito la prolungabilità in 1 di $F(\frac{1}{2},x)$) la $F(2,x)$ non potrà divergere. Di conseguenza sarà anch'essa prolungabile in 1.









Esercizio 5 (funzione integranda dell'Esercizio 4 del secondo plico)

Studiare la funzione:

$$f(t) = \Big(1 + (t-1)^+\Big)\ e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^{-1+3sign(t-1)^+}} \qquad \text{in} \quad (-1, +\infty)$$

Risoluzione:

Scegliamo come punto iniziale $x_0 = 1$. La funzione integrale, per $x > 1$ è:

$$F(1, x) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} - e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

Per $x \in (0, 1]$ non esiste una forma chiusa per questa funzione integrale, tuttavia essa è senz'altro prolungabile fino a 0 perchè:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$$

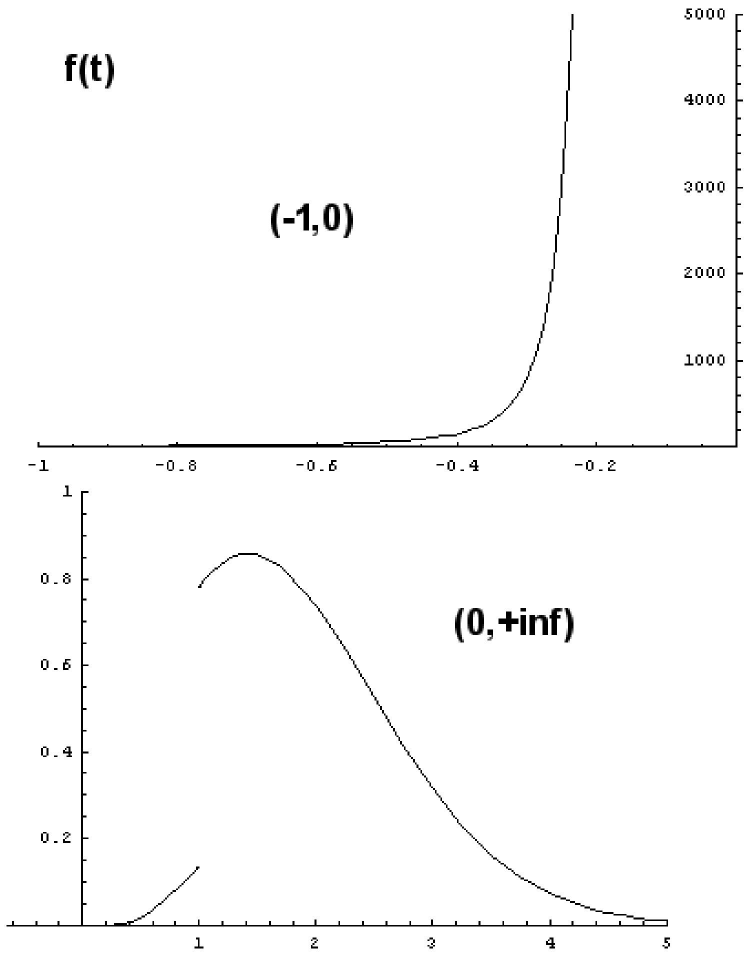
Inoltre $f(t)$ nell'intervallo $(0, 1]$ è positiva e crescente, quindi è possibile disegnare il diagramma della funzione $F(1, x)$ in tale intervallo.

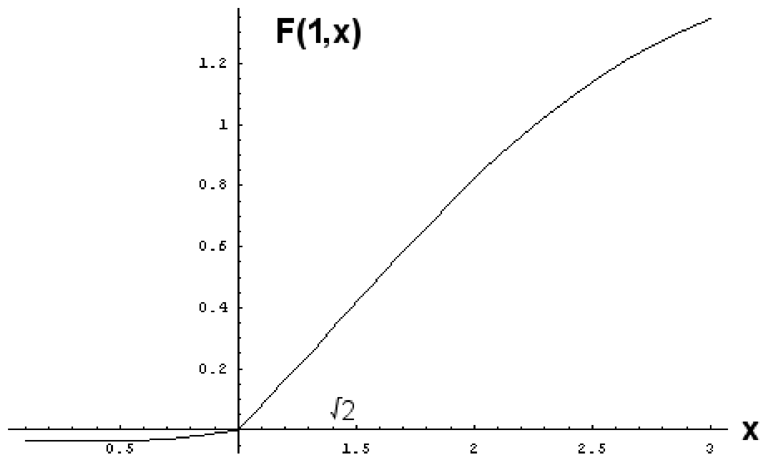
L'unico problema rimasto è di stabilire se tale funzione integrale sia prolungabile a sinistra di 0. Questo problema è un po' al di là delle modalità con cui vengono risolti questi esercizi. Tuttavia è agevole verificare che $F(1, x)$ non è prolungabile a sinistra di 0. Infatti dalla figura 1 risulta che $e^x > x \ \forall x$ e quindi $e^{-\frac{2}{t}} > -\frac{2}{t}$ per $t \neq 0$. Se prendiamo $x_0 = -1$ e un punto x compreso tra $(-1, 0)$, risulta subito:

$$\int_{-1}^{x} e^{-\frac{2}{t}} dt > \int_{-1}^{x} -\frac{2}{t} dt = -2 \ln |x|$$

e quindi:

$$\lim_{x \to 0^-} \int_{-1}^{x} e^{-\frac{2}{t}} dt = +\infty$$


f(t)
(-1,0)
5000
4000
3000
2000
1000
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
(0,+inf)
1
2
3
4
5


F(1,x)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
√2
0.5
1.5
2
2.5
3
x