Esercizi

Legenda

Utili proprietà delle matrici elementari

$$D_r^{-1}(\alpha) = D_r^{-1}(\tfrac{1}{\alpha}) \ \ ,\alpha \neq 0$$

$$T_{r,c}^{-1}(\alpha) = T_{r,c}^{-1}(-\alpha) \ \ ,r \neq c$$

$$S_{r,c}^{-1} = S_{r,c}$$

Definizioni relative ai sottospazi

$span(A)$: Insieme di tutte le combinazioni lineari, fatte con coefficienti reali, delle colonne della matrice A.

$$span(A) = \{\underline{x} : \underline{x} \in \Re^m, \ \underline{x} = A\underline{k}, \ \underline{k} \in \Re^n\}$$

$ns(A)$: Insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$.

Una base di $span(A)$ é costituita da un numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A pari alla caratteristica di A ovvero $r(A)$.

Esercizi non risolti

Es 1

Su di una matrice A_{4x5} sono stati compiuti tre passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_3. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4 \in ns(A_3)$
- $\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 2\underline{e}_5$ é soluzione del sistema:

$$A_3\underline{x} = (k^2 - 1)\underline{e}_4$$

- nel primo passo si é scambiata la prima con la terza colonna ed é intervenuta la matrice $D_1(\frac{1}{5})$

- nel secondo passo si é scambiata la seconda con la quarta riga e il pivot era 3
- la terza colonna di Q_3 é $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_3$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Es 2

Su di una matrice A_{3x3} si sono compiuti due passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_2. Sapendo che:

- la terza colonna di A_2 é $\underline{e}_1 - \cos(k)\underline{e}_3$
- nel primo passo si é scambiata la prima con la terza colonna e sono intervenute le matrici D_1(-$\frac{1}{2}$) e $T_{2,1}$(-1)
- la terza colonna di Q_2 é $2\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 + \underline{e}_3$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Es 3

Su di una matrice A_{3x3} sié effettuato un passo di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_1. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 \in ns(A)$
- la terza colonna di A_1 é $\underline{e}_1 - \cos(k)\underline{e}_3$
- al primo passo si é scambiata la prima con la seconda colonna ed é intervenuta anche la matrice $T_{3,1}(-2)$
- il determinante della matrice Q_1 é 5

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Es 4

Su di una matrice A_{4x4} si sono compiuti due passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_2. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 - \underline{e}_3 \in ns(A)$
- $2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - \underline{e}_4$ é soluzione del sistema:
$$A_2\underline{x} = (e^k - 2)\underline{e}_4$$
- al primo passo si é scambiata la prima con la quarta colonna ed é intervenuta la matrice $D_1(-3)$
- al secondo passo si é scambiata la seconda riga con la quarta riga e la seconda colonna con la quarta colonna ed é intervenuta solo la matrice $T_{3,2}(-5)$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Es 5

Su di una matrice A_{4x5} si sono compiuti tre passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_3. Sapendo che:

- nei primi due passi sono intervenute sulle righe di A le matrici:
$$S_{2,3} \ , \ D_1(-1) \ , \ T_{4,1}(5) \ , \ T_{4,2}(-1) \ , \ D_2(\frac{1}{2}) \ , \ T_{3,1}(-2) \ , \ T_{1,2}(5)$$
- il complemento algebrico di posto (4,4) della matrice Q_3 é uguale a -4 e nel terzo passo l'unica matrice di tipo T che é intervenuta é $T_{2,3}(-1)$
- nel primo passo si é scambiata la prima colonna con la quarta e nessuno scambio di righe é stato effettuato nel terzo passo.
- $\underline{e}_1 - 3\underline{e}_5 \in ns(A_3)$
- $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 3\underline{e}_4 - \underline{e}_5 \in ns(A)$

trovare la matrice A, stabilirne la caratteristica e trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Esercizi risolti

Esercizio 1

Su di una matrice A_{3x4} sono stati compiuti due passi di pivotizzazione senza effettuare scambi di colonne, pervenendo ad una matrice A_2. Sapendo che:

- la quarta colonna di A_2 é $\underline{e}_1 + k\underline{e}_3$
- $\underline{e}_2 - \underline{e}_3 \in ns(A_2)$
- durante i due passi sono intervenute le matrici:

$$D_2(-3)\ \ ,\ S_{1,2}\ \ ,\ T_{2,1}(-2)\ \ ,\ T_{3,1}(1)\ \ ,\ D_1(\frac{1}{2})\ \ ,\ T_{3,2}(-1)$$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Avendo compiuto due passi di pivotizzazione, le prime due colonne della matrice A_2 sono, rispettivamente, i primi due vettori della base canonica di $\Re^3$. La quarta colonna viene fornita dal testo. Inoltre dire che $\underline{e}_2 - \underline{e}_3 \in ns(A_2)$ implica che $A_2 \cdot (\underline{e}_2 - \underline{e}_3) = \underline{0}$ ovvero $A_2 \cdot \underline{e}_2 = A_2 \cdot \underline{e}_3$. Questo significa che la seconda e la terza colonna di A_2 sono uguali. In conclusione la matrice A_2 é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Osserviamo subito che $r(A)$ vale 3 se $k \neq 0$ e 2 altrimenti. Per risalire alla matrice A possiamo per esempio procedere eseguendo a ritroso due passi. Per fare questo occorre individuare quali delle matrici elencate nel testo sono intervenute al primo e al secondo. Osservando bene gli indici possiamo stabilire che:

- $S_{1,2}$, $D_1(\frac{1}{2})$, $T_{2,1}(-2)$ e $T_{3,1}(1)$ riguardano il primo passo
- $D_2(-3)$ e $T_{3,2}(-1)$ riguardano il secondo.

Quindi risulta:

$$A_2 = T_{3,2}(-1) \cdot D_2(-3) \cdot A_1$$

e:

$$A_1 = T_{2,1}(-2) \cdot T_{3,1}(1) \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot S_{1,2} \cdot A$$

Dalla prima eguaglianza ricaviamo:

$$A_1 = D_2^{-1}(-3) \cdot T_{3,2}^{-1}(-1) \cdot A_2$$

Dalla seconda:

$$A = S_{1,2}^{-1} \cdot D_1^{-1}(\frac{1}{2}) \cdot T_{3,1}^{-1}(1) \cdot T_{2,1}^{-1}(-2) \cdot A_1$$

ovvero, ricordando come si effettua l'inversione delle matrici elementari :

$$A_1 = D_2(-\frac{1}{3}) \cdot T_{3,2}(+1) \cdot A_2$$

$$A = S_{1,2} \cdot D_1(2) \cdot T_{3,1}(-1) \cdot T_{2,1}(2) \cdot A_1$$

Da cui:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1+k \end{bmatrix}$$

Per $k = 0$ la caratteristica di A é minima e vale 2. Quindi una base per $span(A)$ é costituita da due colonne della matrice A. Siccome non vi sono stati scambi di colonne durante la pivotizzazione, questa operazione ha coinvolto solo le prime 2. Pertanto una base per $span(A)$ può essere la matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Non essendoci stato alcuno scambio di colonne $ns(A) = ns(A_2)$ per trovarlo basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Esplicitando rispetto a x_1 e a x_2 e aggiungendo le equazioni fittizie:

$$\begin{aligned} x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{aligned}$$

possiamo stabilire che una generica soluzione del sistema omogeneo é:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} -t_2 \\ -t_1 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In conclusione:

$$ns(A) = span \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conviene notare che questa matrice rappresenta una base per $ns(A)$. L'indipendenza delle sue colonne discende dal fatto che essa contiene una sottomatrice quadrata di ordine 2 non singolare, per esempio quella costituita dalle prime 2 righe.

Esercizio 2

Su di una matrice A_{3x3} sono stati compiuti due passi di pivotizzazione, pervenendo ad una matrice A_2. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3$ é soluzione del sistema $A_2\underline{x} = \underline{e}_1 + k\underline{e}_3$
- durante il primo passo si é scambiata la prima con la terza colonna e sono intervenute le matrici: $D_1(\frac{1}{2})$, $T_{3,1}(-5)$
- la seconda colonna della matrice Q_2 é $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Avendo compiuto due passi di pivotizzazione, le prime due colonne della matrice A_2 sono, rispettivamente, i primi due vettori della base canonica di $\Re^3$. La terza colonna si ricava osservando che:

$$A_2\left(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3\right) = \underline{e}_1 + k\underline{e}_3$$

ovvero:

$$\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + A_2\underline{e}_3 = \underline{e}_1 + k\underline{e}_3$$

e quindi:

$$A_2\underline{e}_1 = 2\underline{e}_2 + k\underline{e}_3$$

La matrice A_2 é quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

La caratteristica di A ovvero $r(A)$ sarà dunque 2 se $k = 0$ e 3 altrimenti. Per individuare le matrici elementari che sono intervenute nel secondo passo, osserviamo che:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(2)$$

(Abbiamo moltiplicato e diviso per 2 la seconda colonna).
Di qui risulta che:

$$A_2 = T_{1,2}(\frac{1}{2}) \cdot T_{3,2}(-\frac{1}{2}) \cdot D_2(2)A_1$$

Per cui:

$$A_1 = D_2(\frac{1}{2}) \cdot T_{3,2}(\frac{1}{2}) \cdot T_{1,2}(-\frac{1}{2}) \cdot A_2$$

Pertanto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & k+1 \end{bmatrix}$$

Per risalire alla matrice A ricordiamo che:

$$A_1 = T_{3,1}(-5) \cdot D_1(\frac{1}{2}) \cdot A \cdot S_{1,3}$$

e quindi:

$$A = D_1(2) \cdot T_{3,1}(5) \cdot A_1 \cdot S_{1,3}$$

Si ottiene così:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ k-4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Per $k = 0$, $r(A)$ vale 2, quindi la caratteristica é minima. Una base dello $span(A)$ deve essere costituita da 2 colonne della matrice A linearmente indipendenti. Per essere sicuri di avere questa lineare indipendenza si possono scegliere quelle coinvolte dalla pivotizzazione che, in questo caso sono la terza e la seconda. Dunque una base di $span(A)$ é la matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & \text{-}1 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & \text{-}2 \end{bmatrix}$$

Per trovare il $ns(A)$ basta risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che nella pivotizzazione é stata scambiata la prima con la terza colonna. Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_1 = t$$

La generica soluzione del sistema é:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} t \\ \text{-}2t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-}2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ossia:

$$ns(A) = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \text{-}2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Poiché il vettore:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{-}2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ha caratteristica 1, esso rappresenta una base del $ns(A)$.

Esercizio3

Su di una matrice A_{4x3} si é compiuto un passo di pivotizzazione, ottenendo una matrice A_1. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 \in ns(A)$
- $2\underline{e}_1 + \underline{e}_3$ é soluzione del sistema:

$$A_1 \cdot \underline{x} = (k-1)\,\underline{e}_3 + \left(k^2 - 1\right)\underline{e}_4$$

- la terza colonna di Q_1 é $3\underline{e}_1 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4$

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Avendo compiuto un passo di pivotizzazione, la prima colonna della matrice A_1 é il primo vettore della base canonica di $\Re^4$. La seconda e la terza colonna si ricavano tenendo conto che:

$$A_1\underline{e}_1 + A_1\underline{e}_2 - A_1\underline{e}_3 = \underline{0}$$

(Non avendo fatto scambi di colonne $ns(A) = ns(A_1)$)

$$2A_1\underline{e}_1 + A_1\underline{e}_3 = (k-1)\,\underline{e}_3 + \left(k^2 - 1\right)\underline{e}_4$$

Dall'ultima equazione discende:

$$A_1\underline{e}_3 = -2A_1\underline{e}_1 + (k-1)\,\underline{e}_3 + \left(k^2 - 1\right)\underline{e}_4$$

Dalla prima:

$$A_1\underline{e}_2 = A_1\underline{e}_3 - A_1\underline{e}_1$$

Quindi la matrice A_1 é:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \text{-}3 & \text{-}2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k\text{-}1 & k\text{-}1 \\ 0 & k^2\text{-}1 & k^2\text{-}1 \end{bmatrix}$$

Se $k = 1$ la caratteristica di A é 1, altrimenti $r(A) = 2$.

Nella matrice Q_1 la colonna che non é un elemento della base canonica é la terza, mentre dovrebbe essere la prima. Ciò significa che nel primo passo si é scambiata la prima con la terza riga.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(3) \cdot S_{1,3}$$

Da cui:

$$Q_1 = T_{2,1}(0) \cdot T_{3,1}(-\frac{1}{3}) \cdot T_{4,1}(\frac{1}{3}) \cdot D_1(3) \cdot S_{1,3}$$

Risulta dunque:

$$A = Q_1^{-1} \cdot A_1 = S_{1,3} \cdot D_1(\frac{1}{3}) \cdot T_{4,1}(-\frac{1}{3}) \cdot T_{3,1}(\frac{1}{3}) \cdot A_1$$

E quindi:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & k\text{-}2 & k\text{-}\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \text{-1} & \text{-}\frac{2}{3} \\ \text{-}\frac{1}{3} & k^2 & k^2\text{-}\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Per $k = 1$ $r(A) = 1$ ed é minima. Una base dello $span(A)$ é costituita da una colonna della suddetta matrice. Siccome é stata pivotizzata la prima colonna possiamo asserire che:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \text{-}\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

é una base di $span(A)$. Per trovare $ns(A)$ basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo le equazioni fittizie:

$$\begin{aligned} x_2 &= t_1 \\ x_3 &= t_2 \end{aligned}$$

una generica soluzione del sistema é:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 3t_1 + 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In conclusione:

$$ns(A) = span\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Le colonne di questa matrice sono linearmente indipendenti in quanto essa contiene una sottomatrice quadrata di ordine 2 non singolare, ad esempio quella costituita dalle ultime due righe.

Esercizio 4

Su di una matrice A_{4x4} si sono compiuti 3 passi di pivotizzazione, ottenendo una matrice A_3. Sapendo che:

- Al primo passo si é scambiata la prima con la terza colonna e sono intervenute le matrici: $D_1(-2)$ e $T_{4,1}(-1)$
- Al secondo passo si sono scambiate la seconda con la quarta colonna e il pivot é risultato $-\frac{1}{4}$
- Al terzo passo si é scambiata la terza con la quarta colonna e la terza colonna di Q_3 é $\underline{e}_1 - k\underline{e}_3$
- $det(Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3) = 12$
- $\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4 \in ns(A)$

trovare la caratteristica di A e una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Avendo compiuto 3 passi di pivotizzazione, le prime 3 colonne della matrice A_3 sono i primi 3 vettori della base canonica di $\Re^4$. La quarta colonna si ricava tenendo conto che:

$$\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4 \in ns(A)$$

Ciò equivale a dire che:

$$A \cdot (\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 - \underline{e}_4) = \underline{0}$$

Noi non siamo interessati ad A bensì ad A_3, per cui conviene tener conto degli scambi di colonne che si sono effettuati.

Se noi indichiamo con:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

la posizione delle colonne, dopo un passo essa diventa:

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 4$$

al secondo passo diventa:

$$3 \quad 4 \quad 1 \quad 2$$

ed al terzo:

$$3 \quad 4 \quad 2 \quad 1$$

Pertanto, riordinando le componenti del vettore $\underline{x}$ in basi agli scambi effettuati sulle colonne, l'eguaglianza diventa:

$$A_3 \cdot (\underline{e}_4 - \underline{e}_3 + 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2) = \underline{0}$$

Concludendo:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La caratteristica di A vale 3.

Per risalire ad A calcoliamo inizialmente A_2.
Ricordando che per la regola di Binet:

$$det(Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3) = det(Q_1) \cdot det(Q_2) \cdot det(Q_3)$$

Inoltre:

$$det(Q_1) = det(D_1(-2)) \cdot det(T_{3,1}(-1)) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$det(Q_2) = det(D_2(-4)) = -4$$

$$det(Q_3) = -k$$

(Q_3 infatti é una matrice triangolare)
Quindi:

$$-2 \cdot -4 \cdot \text{-}k = 12$$

ovvero:

$$k = -\frac{3}{2}$$

Pertanto:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_3(\frac{3}{2}) = T_{1,3}(\frac{2}{3}) \cdot D_3(\frac{3}{2})$$

Allora:

$$A_3 = T_{1,3}(\frac{2}{3}) \cdot D_3(\frac{3}{2}) \cdot A_2 \cdot S_{3,4}$$

E quindi:

$$A_2 = D_3(\frac{2}{3}) \cdot T_{1,3}(-\frac{2}{3}) \cdot A_3 \cdot S_{3,4}$$

Per cui:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{-}\frac{8}{3} & \text{-}\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A_2, visto che il pivot é -$\frac{1}{4}$, é:

$$A_2 = D_2(-4) \cdot A_1 \cdot S_{2,4} \Rightarrow A_1 = D_2(-\frac{1}{4}) \cdot A_2 \cdot S_{2,4}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = T_{4,1}(-1) \cdot D_1(-2) \cdot A \cdot S_{1,3} \Rightarrow A = D_1(-\frac{1}{2}) \cdot T_{4,1}(1) \cdot A_1 \cdot S_{1,3}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base dello $span(A)$ é costituita da tre colonna della suddetta matrice. Siccome sono state pivotizzate la terza, la quarta e la seconda colonna, conviene prendere come base la matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare $ns(A)$ basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_1 = 0 \\ x_4 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l'equazione fittizia:

$$x_1 = t$$

una generica soluzione del sistema é:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} t \\ \text{-}t \\ 2t \\ \text{-}t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-}1 \\ 2 \\ \text{-}1 \end{bmatrix}$$

In conclusione:

$$ns(A) = span \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \text{-}1 \\ 2 \\ \text{-}1 \end{bmatrix} \right)$$

Esercizio 5

Dopo un passo di pivotizzazione su una matrice $A_{4,2}$ si é ottenuta una matrice A_1. Sapendo che:

- $\underline{e}_1 + \underline{e}_2$ é soluzione del sistema $A_1\underline{x} = k\underline{e}_4$
- la seconda colonna di Q_1 é: $h\underline{e}_1 + \underline{e}_3$
- il complemento algebrico di posto (2,1) é uguale a 2

trovare la matrice A, discuterne la caratteristica al variare di k e, in un caso in cui essa sia minima, trovare una base per $span(A)$ e $ns(A)$.

Risoluzione:

Avendo compiuto un passo di pivotizzazione, la prima colonna della matrice A_1 é il primo vettore della base canonica di $\Re^4$. Sapendo che:

$$A_1 \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = k\underline{e}_4$$

si ricava che :

$$A_1\underline{e}_2 = k\underline{e}_4 - \underline{e}_1$$

Quindi:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Dunque $r(A) = 1$ se $k = 0$, altrimenti $r(A) = 2$.
Per risalire alla matrice A, ricordiamo che:

$$A_1 = Q_1 \cdot A$$

Nella matrice Q_1 la colonna che non é un elemento della base canonica é la seconda, mentre dovrebbe essere la prima. Ciò significa che nel primo passo si é scambiata la prima con la seconda riga. Inoltre, visto che il complemento algebrico di posto (2,1) é:

$$-det \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -h$$

Pertanto:

$$h = -2$$

Allora:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & \text{-}2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(-2) \cdot S_{1,2}$$

Da cui:

$$Q_1 = T_{3,1}(\text{-}\frac{1}{2}) \cdot D_1(-2) \cdot S_{1,2}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$A = S_{1,2} \cdot D_1(-\frac{1}{2}) \cdot T_{3,1}(\frac{1}{2}) \cdot A_1$$

ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Per $k = 0$ la caratteristica di A vale 1 e dunque una base per $span(A)$ é costituita da una colonna di A. In questo caso per esempio va bene la prima. Per trovare il $ns(A)$, sempre per $k = 0$ si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo l' equazione fittizia:

$$x_2 = t$$

una generica soluzione del sistema é:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$