Esercizi

Note e legenda

Studiare la funzione significa individuare nell'intervallo indicato

- i punti di esistenza
- gli intervalli di crescenza e decrescenza
- gli intervalli di positività e negatività

Può essere utile alla preparazione anche la costruzione (qui non svolta) di:

- parte positiva
- parte negativa
- valore assoluto
- preimmagine

della funzione.

Legenda:

$[x] = floor(x) = \max(z \in Z | z \leq x)$

$frac(x) = x - [x]$

$(x)^+ =$ parte positiva di $x = \max(x, 0)$

$(x)^- =$ parte negativa di $x = \min(x, 0)$

Nota Nella maggior parte dei testi: $(x)^- = \max(-x, 0)$

Esercizi non risolti

Es 1.

$$f(t) = t^{3+([t]-3)^-}\ e^{(t)^+} \qquad (-1, +\infty)$$

Es 2.

$$f(t) = \frac{1}{t} \log_{10} \left| \frac{1}{\ln |t|} \right| \qquad (-\infty, +\infty)$$

Es 3.

$$f(t) = t^2\ \ln |t| \qquad (-\infty, +\infty)$$

Es 4.

$$f(t) = (\tan (t))^{sign(t))} \qquad (-\pi, \pi)$$

Es 5.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\left|(t)^- + 1\right|}} + \frac{1}{(t)^+ - 1} \qquad (-\infty, +\infty)$$

Esercizi risolti

Esercizio 1

Studiare la funzione:

$$f(t) = t^{1+\left[(t-2)^-\right]+\frac{1}{2}sign\left(\left(t-t^2\right)^+\right)}\ e^{-\frac{1}{3}(t-1)^+} \qquad \text{in} \qquad (-1,+\infty)$$

Risoluzione:

$$f(t) = \begin{cases} t^{-2} & -1 < t < 0 \\ \nexists & t = 0 \\ t^{-\frac{1}{2}} & 0 < t < 1 \\ e^{-\frac{1}{3}(t-1)} & 1 \leq t < 2 \\ te^{-\frac{1}{3}(t-1)} & t \geq 2 \end{cases}$$

Per disegnare il diagramma della funzione nell'intervallo $(-1,2)$ non occorre calcolare derivate. Nell'intervallo $(2,+\infty)$ risulta:

$$f'(t) = e^{-\frac{1}{3}(t-1)} - \frac{1}{3}t\ e^{-\frac{1}{3}(t-1)} = e^{-\frac{1}{3}(t-1)}\left(1-\frac{1}{3}t\right)$$

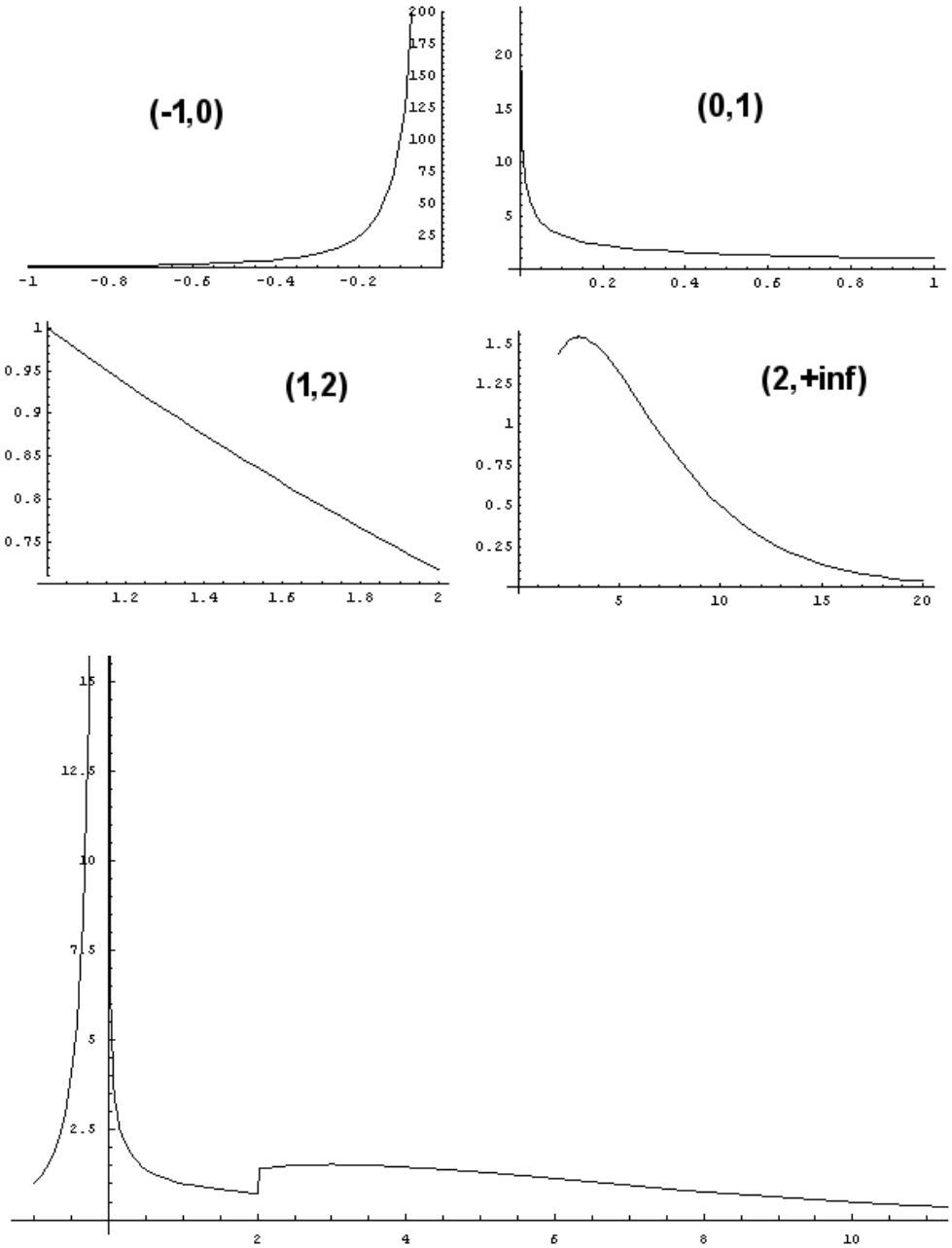
Tale derivata é positiva per $t \in (2,3)$ e negativa per $t > 3$. Quindi la funzione $f(t)$ sarà crescente nel primo intervallo e decrescente nel secondo. Poiché f é continua in 3, essa ha in questo punto un massimo locale. Risulta anche:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} t\ e^{-\frac{1}{3}(t-1)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{\frac{1}{3}(t-1)}} =$$

per la regola di De L'Hospital :

$$= \lim_{t\to+\infty} 3\ e^{-\frac{1}{3}(t-1)} = 0$$

Figure:



Esercizio 2

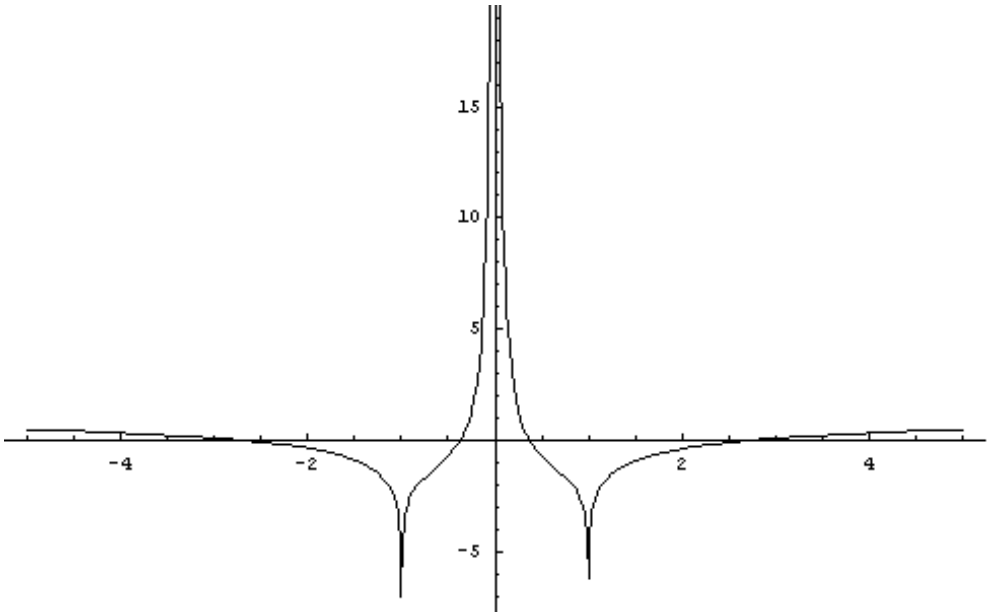
Studiare la funzione:

$$f(t) = \frac{1}{|t|^{sign(1-|t|)^+}} \cdot \ln\left(|\ln|t||\right) \qquad \text{in} \qquad (-\infty, +\infty)$$

Risoluzione:
La funzione $f(t)$ é pari in quanto il suo dominio é simmetrico rispetto all'origine e scambiando t con $-t$ essa non cambia valore. Perciò é sufficiente studiarla nell'intervallo $(0, +\infty)$ e ricavare il diagramma da $(-\infty, 0)$ per simmetria.

$$f(t) = \begin{cases} \nexists & t = 0 \\ \frac{1}{t}\ln\left(-\ln(t)\right) & 0 < t < 1 \\ \nexists & t = 1 \\ \ln\left(\ln(t)\right) & t > 1 \end{cases}$$

Figure:



Esercizio 3

Studiare la funzione:

$$f(t) = \left(frac\left(\frac{t}{10}\right)\right)^{\left[1+\frac{t}{10}\right]} \cdot \log_{10}\left(frac\left(\frac{t}{10}\right)\right) \qquad \text{in} \qquad (0,30)$$

Risoluzione:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{10}\log_{10}\left(\frac{t}{10}\right) & 0 < t < 10 \\ \left(\frac{t}{10}-1\right)^2 \log_{10}\left(\frac{t}{10}-1\right) & 10 \leq t < 20 \\ \left(\frac{t}{10}-2\right)^3 \log_{10}\left(\frac{t}{10}-2\right) & 20 \leq t < 30 \end{cases}$$

Si ricordi che:

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \log_{10}(e)\ \ln(x)$$

e che:

$$\mathcal{D}x^{\alpha}\ln(x) = \alpha x^{\alpha-1}\ln(x) + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}\left(\alpha\ln(x)+1\right)$$

Quindi:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}\log_{10}(e)\left(\ln\left(\frac{t}{10}\right)+1\right) & 0 < t < 10 \\ \frac{1}{10}\log_{10}(e)\left(2\ln\left(\frac{t}{10}-1\right)+1\right) & 10 < t < 20 \\ \frac{1}{10}\log_{10}(e)\left(3\ln\left(\frac{t}{10}-2\right)+1\right) & 20 < t < 30 \end{cases}$$

La derivata f' é dunque positiva rispettivamente negli intervalli:

$$(10\frac{1}{e}, 10); \quad \left(10\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right), 20\right); \quad \left(10\left(2+e^{-\frac{1}{3}}\right), 30\right)$$

e negativa rispettivamente negli intervalli:

$$\left(0, 10\frac{1}{e}\right); \quad \left(10, 10\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)\right); \quad \left(20, 10\left(2+e^{-\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Di conseguenza nei primi tre intervalli la funzione é crescente, nei secondi é decrescente e i 3 punti:

$$10\frac{1}{e}; \qquad 10\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right); \qquad 10\left(2+e^{-\frac{1}{3}}\right)$$

sono punti di minimo locale libero.

Conviene anche calcolare il limite:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{10}\log_{10}\left(\frac{t}{10}\right) =$$

ponendo: $\frac{t}{10} = z$

$$= \lim_{z\to 0^+} z\ \log_{10}(z) = \lim_{z\to 0^+} \frac{\log_{10}(z)}{\frac{1}{z}} =$$

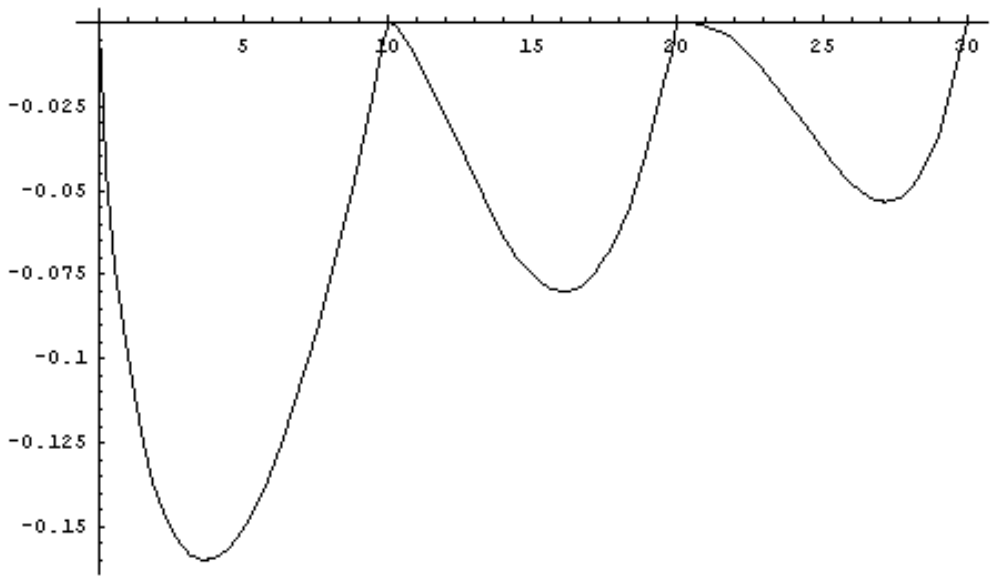
per la regola di De L'Hospital :

$$= \lim_{z\to 0^+} \log_{10}(e)(-z) = 0$$

Analogo ragionamento permette di asserire che:

$$\lim_{t\to 10} f(t) = \lim_{t\to 20} f(t) = 0$$

Figura:



Esercizio 4

Studiare la funzione:

$$f(t) = \left(1 + (t-1)^+\right)\ e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^{-1+3sign(t-1)^+}} \qquad \text{in} \qquad (-1, +\infty)$$

Risoluzione:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{t}} & -1 < t < 0 \\ \nexists & t = 0 \\ e^{-\frac{2}{t}} & 0 < t < 1 \\ t\, e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2} & 1 \leq t < +\infty \end{cases}$$

Conviene calcolare la derivata solo nell'intervallo $(1, +\infty)$. Risulta:

$$f'(t) = e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\ \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)$$

Pertanto tale derivata é :

- positiva nell'intervallo $\left(1, \sqrt{2}\right)$
- negativa nell'intervallo $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Di conseguenza la funzione é crescente nel primo intervallo, decrescente nel secondo e presenta un massimo locale libero nel punto $\sqrt{2}$.

Per quanto riguarda i limiti, risulta che:

$$\lim_{t \to 0^-} f(t) \quad = +\infty$$

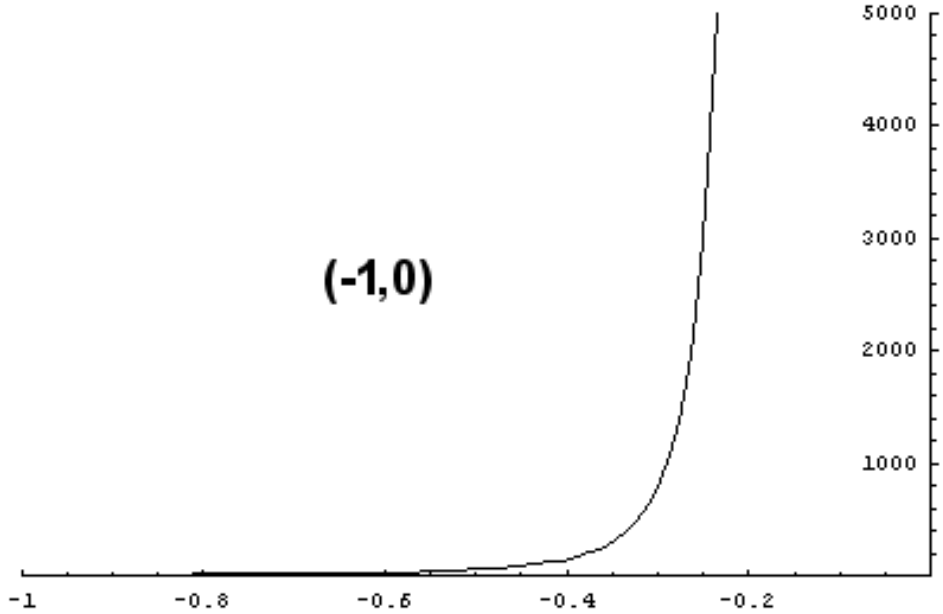
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) \quad = 0$$

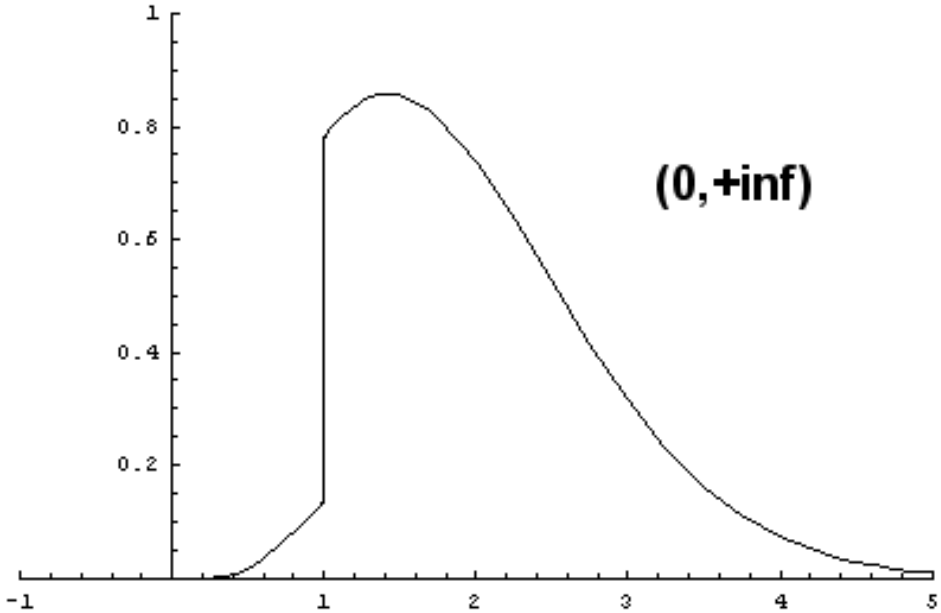
$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2}} =$$

per la regola di De L'Hospital :

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{t\, e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2}} = 0$$

Figure:


(-1,0)
5000
4000
3000
2000
1000
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2


(0,+inf)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1
1
2
3
4
5

Esercizio 5

Studiare la funzione:

$$f(t) = \sin(t)\cos(t)^{sign\left(t^2-\pi^2\right)} \qquad \text{in} \qquad (-2\pi, +2\pi)$$

Risoluzione:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t)\cos(t) & -2\pi < t < -\pi \\ \tan(t) & -\pi \leq t \geq +\pi \\ \sin(t)\cos(t) & +\pi < t < 2\pi \end{cases}$$

In questo esercizio non é necessario il calcolo di derivate. É sufficiente ricordare che :

$$\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

La derivata comunque sarebbe:

$$\mathcal{D}\sin(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

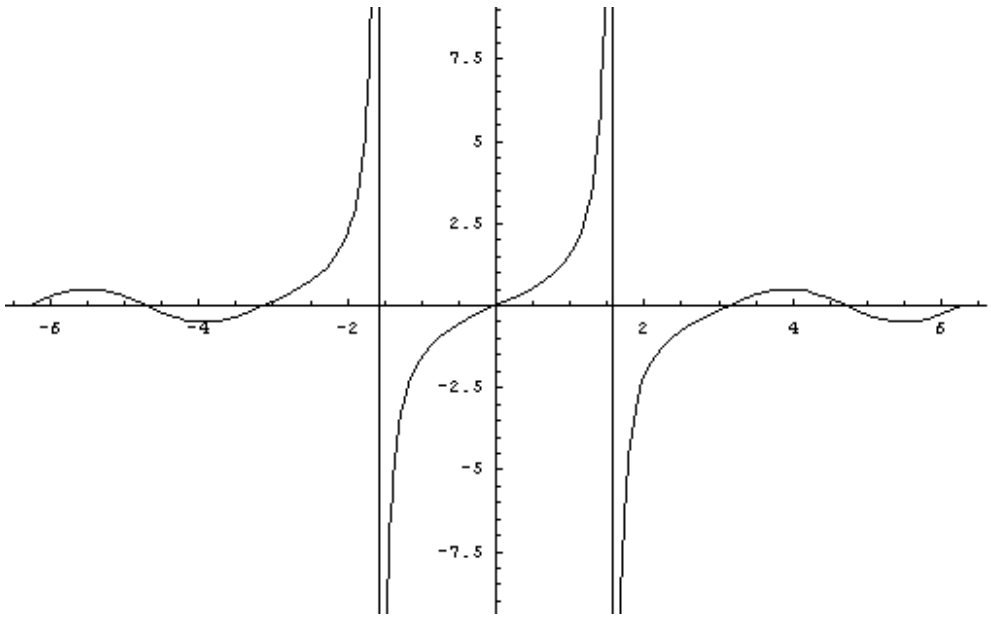



Figura: