Primo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(1,x) = \int_1^x \left((t+1)^+ (t-2)^- + 2\right) dt \qquad \text{in } [-2 \quad 3]$$

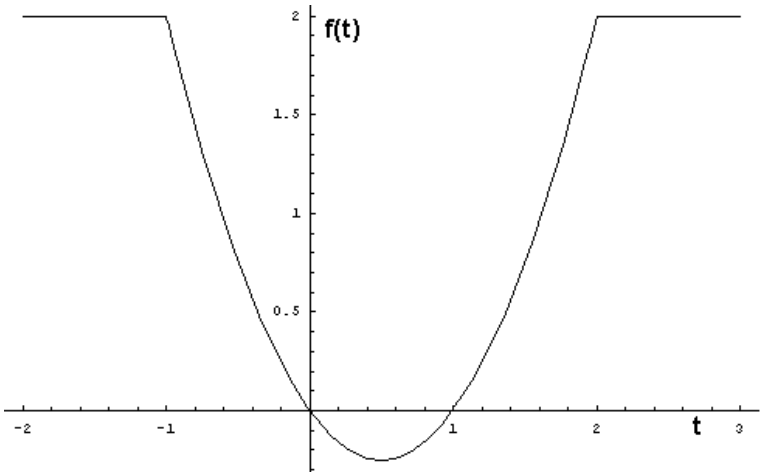
e calcolare: $F(1,3)$

Risoluzione:

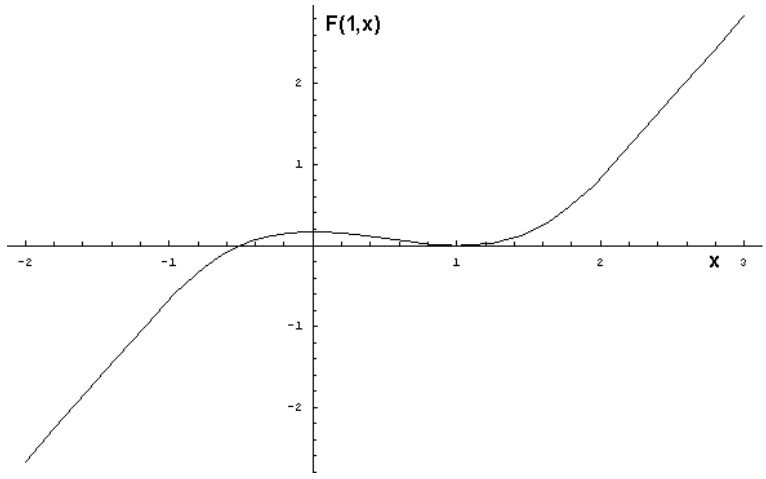
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & -2 \leq t \leq -1 \\ t^2 - t & -1 \leq t \leq 2 \\ 2 & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

Per cui i diagrammi di $f(t)$ e $F(1,x)$ sono rispettivamente:



e la funzione integrale, di conseguenza:



Calcoliamo ora $F(1,3)$. Si ha:

$$F(1,3) = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^2 (t^2 - t)\, dt + \int_2^3 2dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 + [2t]_2^3 = \frac{17}{6}$$

Secondo Esercizio

Studiare la funzione:

$$F(0,x) = \int_0^x \left(\ln\left|\frac{(t)^- - 1}{2t-2}\right|\right) dt$$

in tutto il campo di esistenza.

Risoluzione:

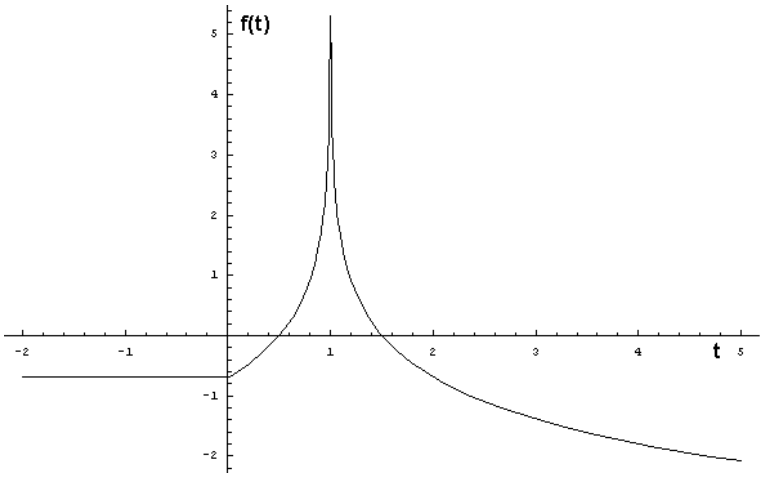
Risulta:

$$f(t) = \begin{cases} \ln\left(\left|\frac{t-1}{2(t-1)}\right|\right) & t \leq 0 \\ \ln\left(\left|\frac{-1}{2(t-1)}\right|\right) & t \geq 0, t \neq 1 \end{cases}$$

ovvero:

$$f(t) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) & t \leq 0 \\ -\ln|t-1| - \ln(2) & t \geq 0, t \neq 1 \end{cases}$$

Di qui, ricordando anche il diagramma di $\ln|t|$, si desume che la funzione $f(t)$ ha il seguente grafico:



Prima di passare al diagramma della funzione integrale dobbiamo stabilire se essa è prolungabile nel punto 1 e eventualmente a destra di 1. A tale scopo occorre calcolare $\lim_{x\to 1^-} F(0,x)$. Risulta:

$$\lim_{x\to 1^-} F(0,x) = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x (-\ln(2) - \ln|t-1|) =$$

$$\lim_{x\to 1^-} ([-\ln(2)]_0^x - [(t-1)\ln|t-1| - t]_0^x) =$$

$$\lim_{x\to 1^-} (-\ln(2)\,x - (x-1)\ln|x-1| + x) = -\ln(2) + 1$$

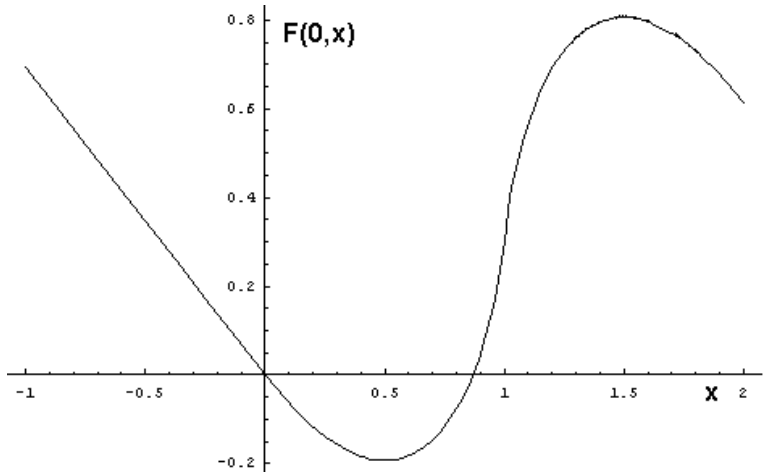
Ricordiamo che:

- $\int (\ln|z|)\,dz = z\ln(z) - z + k$
- $\lim_{z\to 0} (z\ln|z|) = 0$

Essendo questo limite finito la funzione integrale è prolungabile in 1. Per la simmetria della funzione integranda, anche

$$\lim_{z\to 1^+} \int_z^x f(t)dt \quad (x > 1)$$

è finito. Pertanto la funzione integrale è prolungabile anche a destra di 1. Il diagramma ha la forma seguente:



Terzo Esercizio

Su di una matrice A_{4x3} si sono compiuti due passi di pivotizzazione pervenendo ad una matrice A_2. Sapendo che:

- Nel primo passo si sono scambiate la prima con la terza colonna, non si sono fatti scambi di righe, non sono intervenute matrici T e il primo pivot è 2.
- Nel secondo passo si sono scambiate la seconda con la terza colonna.
- La seconda colonna della matrice Q_2 è: $\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$
- $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - 5\underline{e}_3 \in ns(A)$

trovare la matrice A e la sua caratteristica.

Risoluzione:

Poichè sono già stati fatti due passi di pivotizzazione, la matrice A_2 ha la seguente forma:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \underline{a} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Siccome:

$$\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - 5\underline{e}_3 \in ns(A)$$

e

$$A_2 = Q_2 \cdot Q_1 \cdot A \cdot S_1 \cdot S_2$$

ovvero:

$$A_2 = Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdot A \cdot S_2 \cdot S_1$$

ossia:

$$A = Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdot A_2 \cdot S_{2,3} \cdot S_{1,3}$$

deve risultare:

$$A_2 \cdot S_{2,3} \cdot S_{1,3} \cdot (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - 5\underline{e}_3) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow A_2 \cdot S_{2,3} \cdot (\underline{e}_3 + 2\underline{e}_2 - 5\underline{e}_1) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow A_2 \cdot (\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 - 5\underline{e}_1) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (\underline{e}_2 + 2\underline{a} - 5\underline{e}_1) = \underline{0} \Rightarrow \underline{a} = \tfrac{5}{2}\underline{e}_1 - \tfrac{1}{2}\underline{e}_2$$

La matrice A_2 ha quindi la seguente forma:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e pertanto la caratteristica di A è 2.
Ora:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{1,2}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot D_2\,(3)$$

Di conseguenza:

$$A_2 = T_{1,2}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot D_2\left(3\right) \cdot A_1 \cdot S_{2,3}$$

Ossia:

$$A_1 = D_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot T_{1,2}\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot A_2 \cdot S_{2,3}$$

Di qui discende:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$Q_1 = D_1\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A = D_1\left(2\right) \cdot A_1 \cdot S_{1,3}$$

In conclusione:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{16}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$