

## Primo Esercizio del 9 Gennaio 2007

Studiare la funzione:

$$F(2, x) = \int_2^x \left( \left| 6t^{\operatorname{sgn}(t-4)^-} - 2 \right| - 1 \right) dt \quad \text{in } [1 \quad 5]$$

e calcolare:  $F(2, 5)$

### Risoluzione:

Visto che:

$$\operatorname{sgn}(t-4)^- = \begin{cases} -1 & 1 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

si ha:

$$f(t) = \begin{cases} \left| \frac{6}{t} - 2 \right| - 1 & 1 \leq t < 4 \\ 3 & 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

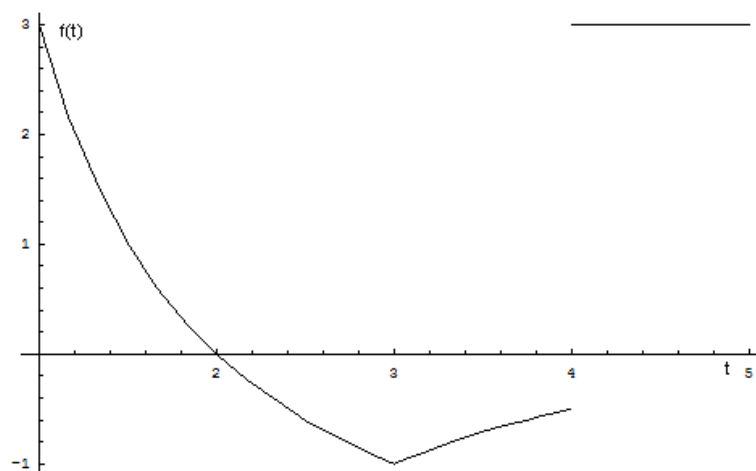
Siccome:

$$\frac{6}{t} - 2 > 0 \Rightarrow t < 3$$

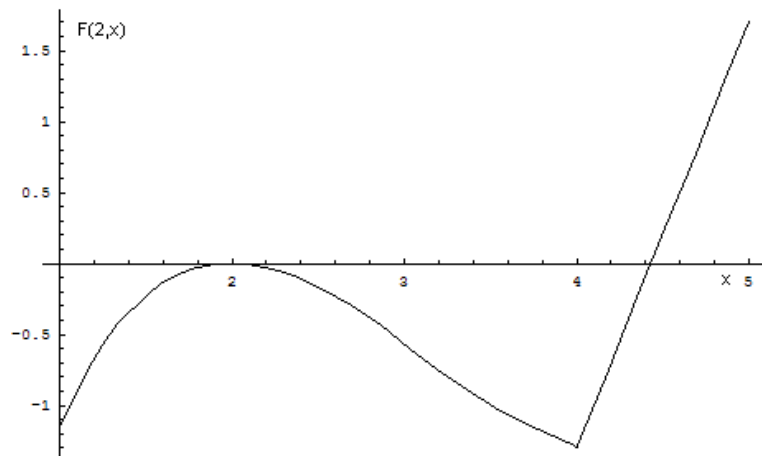
si ha:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{6}{t} - 3 & 1 \leq t \leq 3 \\ 1 - \frac{6}{t} & 3 \leq t < 4 \\ 3 & 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

In conclusione la funzione integranda ha il seguente diagramma:



e la funzione integrale, di conseguenza:



Calcoliamo ora  $F(2, 5)$ . Risulta:

$$\begin{aligned}
 F(2, 5) &= \int_2^3 \left( \frac{6}{t} - 3 \right) dt + \int_3^4 \left( 1 - \frac{6}{t} \right) dt + \int_4^5 (3) dt = \\
 &= [-3t + 6 \ln(t)]_2^3 + [t - 6 \ln(t)]_3^4 + [3t]_4^5 = \\
 &= 1 - 6 \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

## Primo Esercizio del 23 Gennaio 2007

Studiare la funzione:

$$F(1, x) = \int_1^x (|\log_2(t+1) - 1| - 1) dt \quad \text{in } [0, 4]$$

e calcolare:  $F(1, 4)$

### Risoluzione:

Poiché:

$$\log_2(t+1) - 1 \geq 0 \Rightarrow (t+1) \geq 2$$

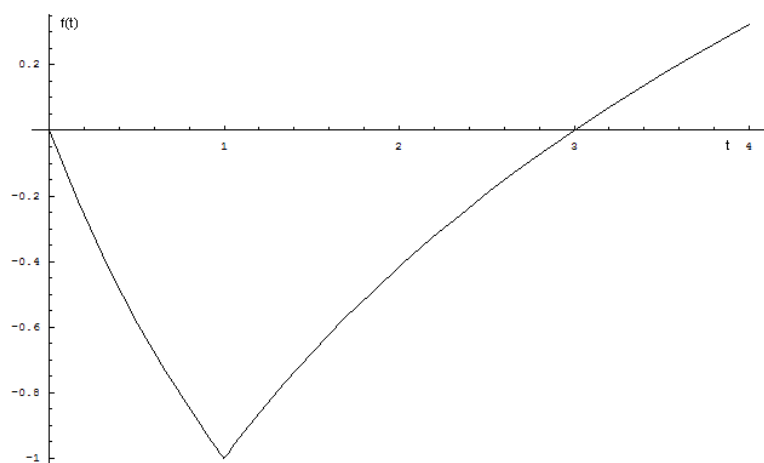
si ha:

$$f(t) = \begin{cases} -\log_2(t+1) & 0 \leq t \leq 1 \\ \log_2(t+1) - 2 & 1 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

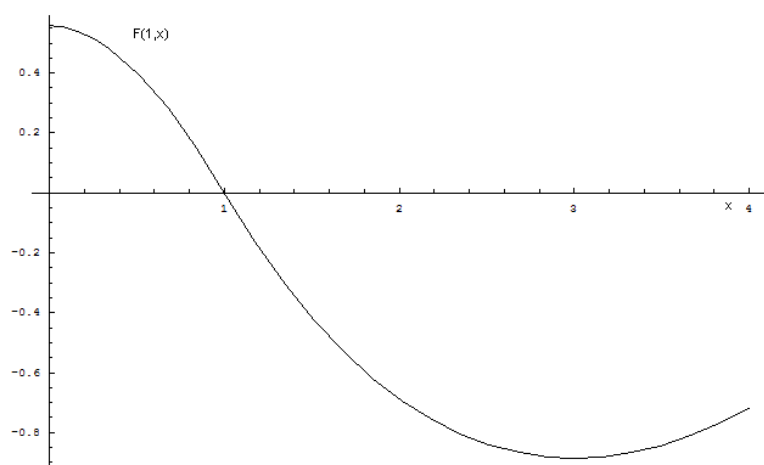
con:

$$\log_2(t+1) - 2 = 0 \text{ per } (t+1) = 4 \text{ ovvero } t = 3$$

La funzione integranda ha quindi la seguente forma:



e la funzione integrale è pertanto:



Calcoliamo ora  $F(1, 4)$ . Risulta:

$$\begin{aligned} F(1, 4) &= \int_1^4 (\log_2(t+1) - 2) dt = \\ &= \frac{1}{\ln(2)} [(t+1) \ln(t+1) - 3t]_1^4 = \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left( -3 + \ln\left(\frac{3125}{256}\right) \right) \end{aligned}$$

## Primo Esercizio del 6 Febbraio 2007

Studiare la funzione:

$$F(1, x) = \int_1^x (|1 - 2^{|t-1|-1}| - 2) dt \quad \text{in } [0 \quad 4]$$

e calcolare:  $F(1, 4)$

## Risoluzione:

Poichè:

$$|t-1|-1 = \begin{cases} -t & 0 \leq t \leq 1 \\ t-2 & 1 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

si ha:

$$f(t) = \begin{cases} |1-2^{-t}|-2 & 0 \leq t \leq 1 \\ |1-2^{t-2}|-2 & 1 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Siccome:

$$2^{t-1} \geq 0 \Rightarrow (t-2) > 0$$

e:

$$2^{-t} \leq 1 \text{ per } t \geq 0$$

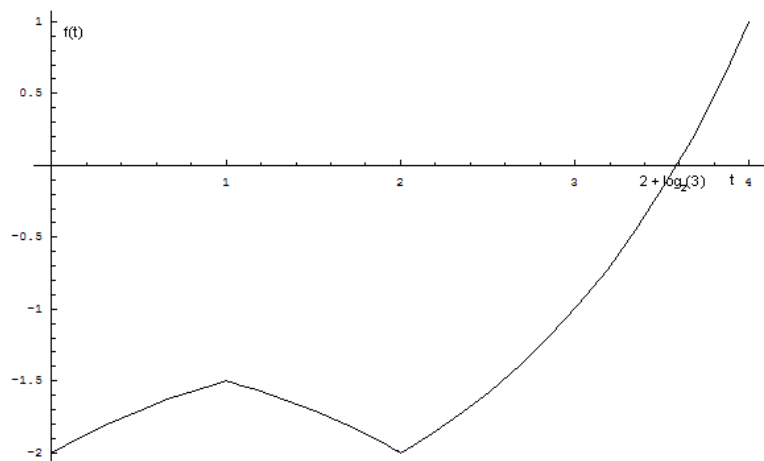
si ha:

$$f(t) = \begin{cases} -1-2^{-t} & 0 \leq t \leq 1 \\ -1-2^{t-2} & 1 \leq t \leq 2 \\ 2^{t-2}-3 & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

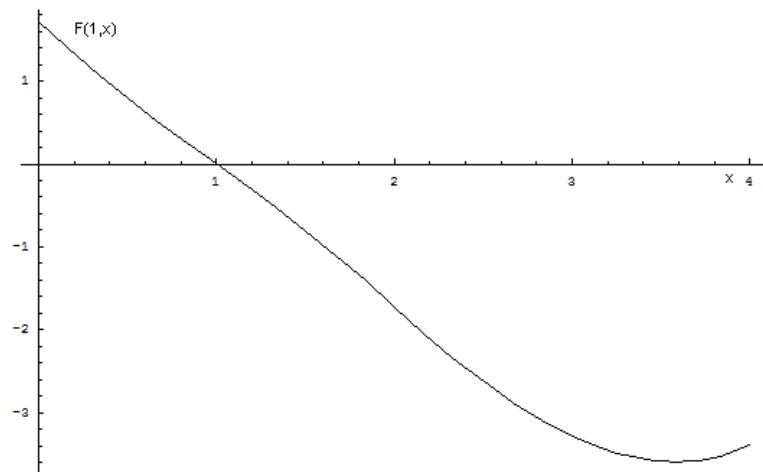
Osserviamo che:

$$2^{t-2}-3=0 \Rightarrow t=2+\log_2(3)$$

Il diagramma della funzione integranda sarà dunque:



E la funzione integrale pertanto avrà la seguente forma:



Calcoliamo infine  $F(1, 4)$ . Risulta:

$$\begin{aligned}
 F(1, 4) &= \int_1^2 (-1 - 2^{t-2}) dt + \int_2^4 (2^{t-2} - 3) dt = \\
 &= \left[ -t - \frac{1}{\ln(2)} 2^{t-2} \right]_1^2 + \left[ -3t + \frac{1}{\ln(2)} 2^{t-2} \right]_2^4 = \\
 &= -7 + \frac{3}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(4)}
 \end{aligned}$$