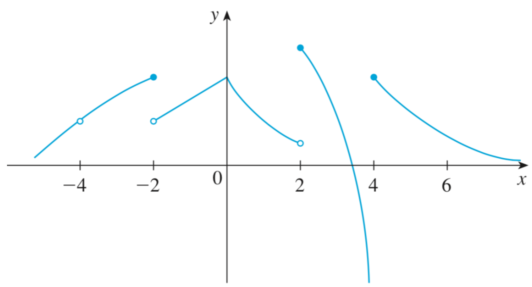
Continuità

Esercizio 1. Determinare i punti di discontinuità di una funzione avente il seguente grafico



Esercizio 2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni

a) $f(x) = \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x-8}$

b) $f(x) = \log(x^2 - 2x - 3)$

c) $f(x) = e^{\arcsin(7x+1)}$

d) $f(x) = 6x^3 - 2 + \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x \in [3,6] \\ 1 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x > \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{se } x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x^3}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 1 - |x^2 - 1| & \text{se } x > 0 \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x & \text{se } x \leq -1 \\ 3x + 6 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{3^x - 3}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Esercizio 3. Studiare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la continuità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{5}\right)^x & \text{se } x \geq 0 \\ ax + 2a + 9 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - ax & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) l'immagine di f è un intervallo;

b) esiste il massimo (assoluto) di f;

c) esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = 0$;

d) l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che $f(0) = -2$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) Esiste $c > 0$ tale che $f(x) = 0$;

b) l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione positiva.

Esercizio 6. Dimostrare, utilizzando il teorema degli zeri, che le seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione:

a) $x^5 + 2x - 4 = 0 \qquad$ su $[1,2]$;

b) $3^{x^2} + 2x = 0 \qquad$ su $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;

c) $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 1 - x \qquad$ su $[0,1]$.

Esercizio 7. Dimostrare, utilizzando il teorema degli zeri, che le seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione positiva:

a) $3x^4 - 2x^3 + 5x = 7$

b) $100e^{-\frac{x}{100}} - 0,01x^2 = 0$.

Esercizio 8. Stabilire, utilizzando il teorema di Weierstrass, se le seguenti funzioni sono limitate:

a) $f(x) = x \log(10 - 3x) \qquad$ su $[-4, 0]$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{x^2 - 2x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt[4]{2x - x^2}$.

Esercizio 9. Dimostrare che la funzione $f(x) = \arctan(e^x + 1)$ è limitata su $[-2, 3]$. Calcolare, se esistono, il massimo ed il minimo di f.

Esercizio 10. Sia $f : [-1,1] \cup \{4\} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) f è continua in $x = 4$;

b) f è continua;

c) f è limitata.

Domandine.

a) Esistono funzioni discontinue in tutti i punti del dominio?

b) Una funzione monotona è continua?

c) Le funzioni elementari sono continue?

d) Il quadrato di una funzione continua è ancora una funzione continua?

e) Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è continua?

f) Una funzione continua è limitata?