

## Funzioni continue

**Esercizio 1.** Studiare la continuità delle seguenti funzioni

a)  $f(x) = \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x-8}$   $f(x) = \log(x^2 - 2x - 3)$

b)  $f(x) = e^{\arcsin(7x+1)}$   $f(x) = 6x^3 - 2 + \frac{1}{x}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$   $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$   $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x \in [3, 6] \\ 1 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$   $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(5x^3 - x^2)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 1 - |x^2 - 1| & \text{se } x > 0 \end{cases}$   $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } x \leq -1 \\ 3x + 6 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{3^x - 3}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

**Esercizio 2.** Studiare, al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ , la continuità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x & \text{se } x \geq 0 \\ ax + 2a + 9 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - ax & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a)  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [0, 1]$ ;
- b) l'immagine di  $f$  è un intervallo;
- c) esiste il massimo (assoluto) di  $f$ ;
- d) esiste  $c \in [0, 1]$  tale che  $f(c) = 0$ ;
- e) l'equazione  $f(x) = 0$  ammette almeno una soluzione.

**Esercizio 4.** Sia  $f : [-1, 1] \cup \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione strettamente crescente. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a)  $f$  è continua in  $x = 4$ ;
- b)  $f$  è continua;
- c)  $f$  è limitata.

**Esercizio 5.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, tale che  $f(0) = -2$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$ . Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) Esiste  $c > 0$  tale che  $f(x) = 0$ ;
- b) l'equazione  $f(x) = 1$  ammette almeno una soluzione positiva.

**Esercizio 6.** Dimostrare, utilizzando il teorema degli zeri, che le seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione:

- a)  $x^5 + 2x - 4 = 0$  su  $[1, 2]$ ;
- b)  $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 1 - x$  su  $[0, 1]$ ;
- c)  $100e^{-\frac{x}{100}} - 0,01x^2 = 0$ .

**Esercizio 7.** Stabilire, utilizzando il teorema di Weierstrass, se le seguenti funzioni sono limitate:

- a)  $f(x) = x \log(10 - 3x)$  su  $[-4, 0]$ ;
- b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{x^2 - 2x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

**Domandine.**

- a) Esistono funzioni discontinue in tutti i punti del dominio?
- b) Una funzione monotona è sempre continua?
- c) Le funzioni elementari sono continue?
- d) Il quadrato di una funzione continua è ancora una funzione continua?
- e) Una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua?