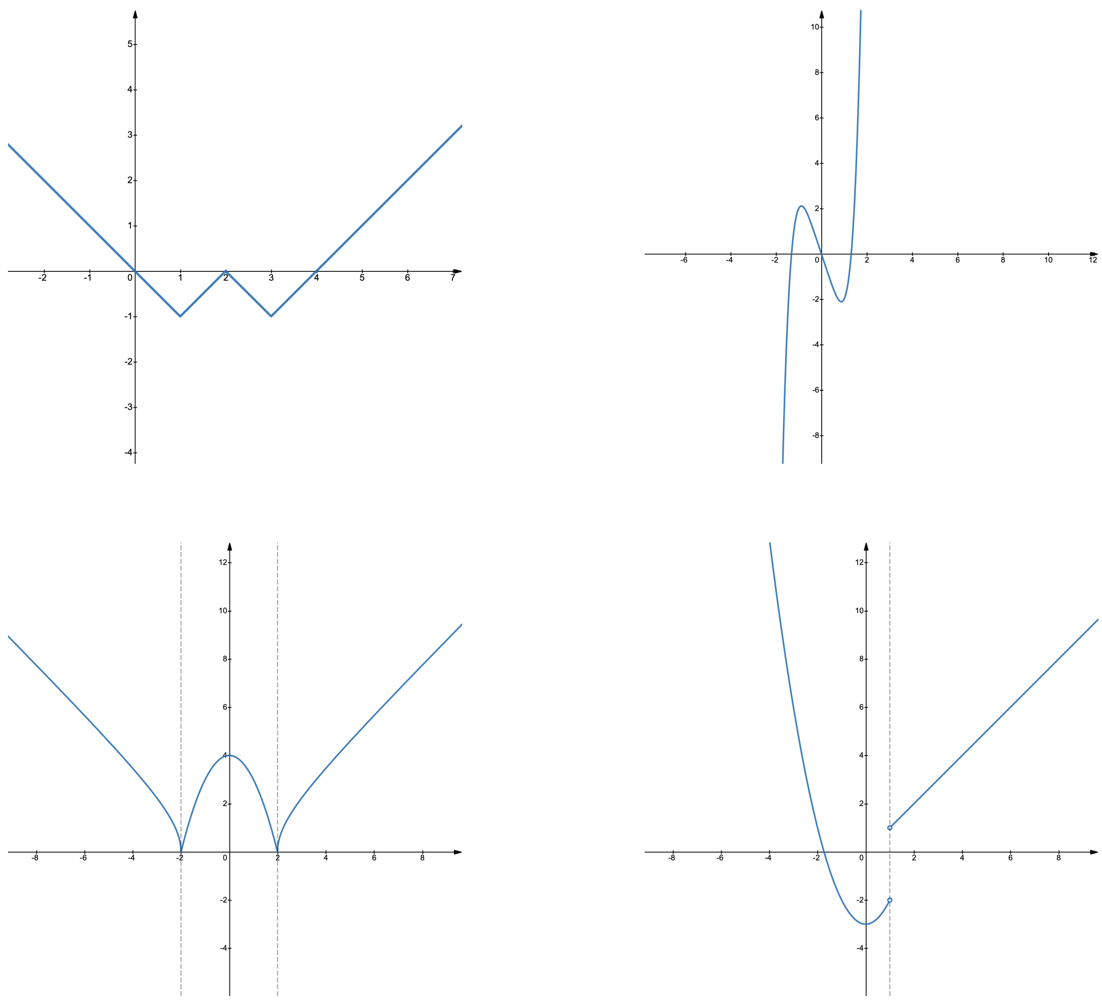
Funzioni derivabili

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti grafici rappresentano funzioni derivabili



Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni

a) $f(x) = \sqrt[4]{x} \qquad \text{in } \overline{x} = 4$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 3x \qquad \text{in } \overline{x} = -2$

c) $f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{in } \overline{x} = 4$

d) $f(x) = \log(1 + \log x) \qquad \text{in } \overline{x} = 1$

Esercizio 3. (Funzione logistica)
Supponendo che l'evoluzione di una popolazione nel tempo t, misurato in giorni, sia modellata dalla funzione
$$N(t) = \frac{1600}{1 + 99e^{-0,4t}}$$
calcolare il tasso di crescita medio nei primi 5 giorni.

Esercizio 4. Determinare, se esistono, il massimo assoluto ed il minimo assoluto delle seguenti funzioni

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \qquad \text{su } [-2, 3]$

b) $f(x) = \arctan(2x^3 - 3x^2 - 12x + 1) \qquad \text{su } [-2, 3]$

c) $f(x) = (1 + x^2)^{10}$

d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{su } [-1, \sqrt{8}]$

e) $f(x) = e^x + 1$

Esercizio 5. Stabilire se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle e, in tal caso, determinare i punti che verificano la tesi.

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 6 \qquad \text{su } [1, 5]$

b) $f(x) = |x + 2| + 2 \qquad \text{su } [-4, 0]$

c) $f(x) = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x \qquad \text{su } [1, 4]$

Esercizio 6. Stabilire se è possibile applicare il teorema di Lagrange alle seguenti funzioni

a) $f(x) = 4x^4 - 5x^2 \qquad \text{su } [0, 1]$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{3 - x^2} \qquad \text{su } [2, 4]$

c) $f(x) = \arcsin x \qquad \text{su } [-1, 1]$

d) $f(x) = \sqrt{x - 3} \qquad \text{su } [3, 7]$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x - 3} \qquad \text{su } [2, 7]$

Esercizio 7. Dimostrare, utilizzando la definizione, che la funzione $f(x) = x^2|x|$ è derivabile in $\overline{x} = 0$.

Esercizio 8. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dimostrare che $\overline{x} = 0$ è un punto critico della funzione composta $f(x) = g(x^2)$.

(**Suggerimento:** derivabilità delle funzioni composte...)

Esercizio 9. Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Dimostrare che, se a è un punto critico di h allora a è un punto critico della funzione composta $f(x) = g(h(x))$.

Esercizio 10. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ è una funzione derivabile e crescente, allora anche la funzione f^2 è crescente.
Cambia qualcosa se f assume anche valori negativi?

(**Suggerimento:** conseguenze del Teorema di Lagrange...)

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che

i) $f(0) = 1$;

ii) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

Dimostrare che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \geq 0$.