

Matematica - 28 Settembre 2022

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Data la funzione

$$f(x) = (x^3 - 3x^2)^3 \quad (13 \text{ punti})$$

- determinare dominio, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
- disegnare un grafico probabile, utilizzando le informazioni ottenute;
- determinare, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $(x^3 - 3x^2)^3 = k$ .

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + e^x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^4 + x^2} \quad (6 \text{ punti})$$

3. Dimostrare, utilizzando il teorema degli zeri, che l'equazione

$$10^x - x^{10} = 0 \quad (5 \text{ punti})$$

ammette almeno una soluzione  $\bar{x} \in [-2, 0]$ .

4. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (6 punti)

- L'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x = 0\}$  è il grafico di una funzione;
- La funzione  $f(x) = |x|$  è derivabile.
- La funzione  $f(x) = |x|$ , con  $x \in ]0, 1[$ , soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

**Per ottenere punteggio pieno è necessario giustificare i risultati ottenuti.**