

**Politecnico di Bari - Laurea triennale in Ingegneria Meccanica, a.a. 2011/2012**

**Programma del Corso di ANALISI MATEMATICA - modulo I (Corso B)**

**Dott.ssa S. Milella**

**Numeri reali.** Cenni di teoria degli insiemi. Numeri naturali, interi e razionali. Assiomi dei numeri reali e conseguenze. Proprietà archimedea dei numeri reali. Densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ . Principio di induzione. Intervalli e loro proprietà. Insiemi separati, insiemi contigui. Maggioranti, minoranti, estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo di un insieme numerico: definizioni e caratterizzazioni. Teorema sull'esistenza dell'estremo superiore\*.

**Lo spazio  $\mathbb{R}^n$ .** Lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ . Norma euclidea e prodotto scalare: significato geometrico e proprietà, disuguaglianza di Cauchy - Schwarz. Distanza euclidea. Intorni di un punto di  $\mathbb{R}^n$  e proprietà. Punti di accumulazione e punti isolati. Punti interni, esterni, di frontiera. Insiemi aperti, insiemi chiusi e proprietà. Insiemi limitati. Insiemi convessi. Insiemi connessi per poligonalità.

**Funzioni reali.** Funzioni reali e proprietà. Funzioni composte, funzioni invertibili, funzioni monotone, funzioni pari, funzioni dispari, funzioni periodiche. Successioni di numeri reali. Funzioni elementari: potenze, radici, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e loro inverse. Valore assoluto di un numero reale e proprietà.

Funzioni limitate superiormente, inferiormente. Estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo di una funzione reale.

**Limiti di funzioni reali.** L'insieme  $\mathbb{R}$  ampliato ed operazioni su tale insieme. Intorni di un punto di  $\mathbb{R}$  ampliato e proprietà. Limite di una funzione reale. Limite di una successione di numeri reali. Limite a destra e limite a sinistra. Unicità del limite\*. Caratterizzazione sequenziale dei limiti\*. Operazioni sui limiti, forme indeterminate, limiti notevoli. Limiti delle funzioni composte\*. Infiniti, infinitesimi e loro confronto. Limiti delle funzioni monotone. Teoremi del confronto\*. Teorema della permanenza del segno\*. Teorema di passaggio al limite\*. Asintoti di un grafico.

**Funzioni continue.** (in questa sezione le dimostrazioni sono state date per funzioni di una variabile reale) Funzioni continue e proprietà. Continuità delle funzioni elementari. Continuità delle funzioni composte\*. Teorema di permanenza del segno. Caratterizzazione sequenziale delle funzioni continue. Funzioni prolungabili per continuità. Discontinuità. Teorema di Weierstrass\*. Teorema degli zeri\*. Teorema dei valori intermedi\*. Criterio di continuità per le funzioni monotone\*. Teorema di continuità della funzione inversa\*.

**Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale.** Definizione di funzione derivabile, derivabile a destra, derivabile a sinistra. Interpretazione geometrica della derivata. Retta tangente ad un grafico. Continuità delle funzioni derivabili\*. Regole di derivazione\*. Derivate delle funzioni elementari. Derivazione di una funzione composta. Derivazione della funzione inversa\*. Massimo e minimo relativo di una funzione reale. Punti critici. Teorema di Fermat\*. Teorema di Rolle\*. Teorema di Lagrange\*. Conseguenze del teorema di Lagrange\*. Teorema di Cauchy. Teoremi di de L'Hopital. Derivate di ordine superiore. Concavità, convessità, flessi. Regolarità delle funzioni convesse. Criteri di convessità per funzioni derivabili. Studio del grafico di una funzione.

Approssimazione locale di funzioni derivabili. Polinomio di Taylor. Formula di Taylor con il

resto di Peano\*. Condizioni sufficienti per i punti di massimo/minimo relativo e per i punti di flesso a tangente orizzontale\*. Formula di Taylor con il resto di Lagrange.

**Si richiede la dimostrazione dei teoremi contrassegnati con (\*).**

### **TESTI CONSIGLIATI**

C.Pagani, S.Salsa, *Analisi Matematica vol. 1*, Zanichelli.

P. Marcellini, C. Sbordone. *Elementi di Analisi Matematica 1*, Liguori Editore.

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, Vol.1, Liguori Editore.

Politecnico di Bari - Laurea triennale in Ingegneria Meccanica, a.a. 2011/2012

Programma del Corso di ANALISI MATEMATICA - modulo II (Corso B)

Dott.ssa S. Milella

**Calcolo integrale.** Primitive di una funzione e proprietà. Integrale indefinito. Integrale di funzioni elementari. Integrali immediati. Integrale per sostituzione. Integrale di funzioni razionali, formula di Hermite. Integrazione per parti.

Partizioni di un intervallo. Somme superiori e inferiori e loro proprietà. Integrale definito e funzioni integrabili secondo Riemann. Caratterizzazione delle funzioni integrabili. Integrabilità delle funzioni monotone\*. Integrabilità delle funzioni continue e discontinue. Additività dell'integrale rispetto al dominio. Linearità dell'integrale. Confronto tra integrali. Teorema della media integrale\*. Funzione integrale. Teorema di esistenza delle primitive\*. Teorema fondamentale del calcolo integrale\*. Applicazioni: calcolo di aree, lunghezza di un grafico, volume di un solido di rotazione.

Integrali impropri. Criteri di integrabilità.

**Serie numeriche e serie di potenze.** Definizione di serie numerica. Somma di una serie numerica. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Serie geometrica, armonica, armonica generalizzata e di Mengoli. Condizione necessaria per la convergenza\*. Serie a termini positivi. Criteri del confronto. Criterio della radice. Criterio del rapporto. Serie a termini di segno variabile. Assoluta convergenza. Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz.

Cenni sulle serie di funzioni: somma di una serie di funzioni, convergenza puntuale, convergenza totale, rapporto tra convergenza puntuale e totale.

Serie di potenze. Raggio di convergenza e teoremi sul raggio di convergenza. Continuità della somma. Derivabilità termine a termine. Integrabilità termine a termine. Regolarità di una serie di potenze.

Serie di Taylor. Definizione di sviluppabilità in serie di Taylor. Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor\*.

**Equazioni differenziali.** Equazioni differenziali ordinarie: soluzioni e integrale generale. Problema di Cauchy.

Equazioni differenziali lineari. Teorema di esistenza ed unicità della soluzione per il problema di Cauchy. Funzioni linearmente indipendenti. Matrice Wronskiana. Teorema sul Wronskiano. Esistenza di  $n$  soluzioni linearmente indipendenti\*. Integrale generale di una equazione differenziale lineare di ordine  $n$ \*. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari omogenee e non omogenee del primo ordine e del secondo ordine. Metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Equazioni lineari omogenee e non omogenee di ordine  $n$  a coefficienti costanti. Metodo delle funzioni simili. Equazioni di Bernoulli.

**Curve in  $\mathbb{R}^n$ .** Curve continue. Sostegno di una curva. Curve grafico. Curve derivabili e vettore tangente ad una curva derivabile. Curve regolari. Curve equivalenti. Lunghezza di un arco di curva. Teorema di rettificabilità di un arco di curva  $C^1$ . Calcolo di lunghezze di curve regolari. Integrale curvilineo di una funzione continua a più variabili lungo una curva. Proprietà dell'integrale curvilineo. Baricentro di una curva. Calcolo di integrali curvilinei.

**Funzioni di più variabili.** Grafici e insiemi di livello. Limiti di funzioni di più variabili. Continuità per funzioni di più variabili. Funzioni vettoriali di più variabili. Limiti di funzioni vettoriali. Continuità per funzioni vettoriali.

**Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.** Derivate direzionali. Derivate parziali. Gradiente. Piano e iperpiano tangente. Differenziabilità. Differenziale di una funzione. Continuità delle funzioni differenziabili\*. Proprietà delle funzioni differenziabili. Condizione necessaria per la differenziabilità\*. Teorema del differenziale totale. Regole di derivazione. Differenziabilità delle funzioni composte\*. Teorema di Lagrange\* . Punti critici. Teorema di Fermat\*. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Matrice Hessiana. Formula di Taylor con resto di Peano. Condizione sufficiente del secondo ordine per punti di massimo e minimo relativo e per punti di sella. Differenziale di funzioni vettoriali. Matrice Iacobiana. Teorema di invertibilità locale. Alcune trasformazioni di coordinate.

**Forme differenziali lineari e campi vettoriali.** Forme differenziali lineari. Forme differenziali esatte e primitive. Integrale curvilineo di una forma differenziale. Caratterizzazione delle forme differenziali esatte. Forme differenziali chiuse. Insiemi semplicemente connessi. Relazione tra forme differenziali esatte e forme differenziali chiuse. Interpretazione meccanica: lavoro, campi conservativi e potenziale, campi irrotazionali.

**Integrali doppi su domini normali.** Domini normali, definizione e loro misura. Proprietà dei domini normali. Partizioni. Somme superiori e inferiori e loro proprietà. Integrale di Riemann e funzioni integrabili secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue. Additività dell'integrale. Linearità dell'integrale. Confronto tra integrali. Formula di riduzione. Determinante jacobiano. Formula di cambiamento di variabili. Formule di Gauss-Green.

**Superfici.** Superfici regolari. Piano tangente e versore normale. Area di una superficie regolare. Superfici grafico. Superfici di rotazione. Integrali di superficie. Integrali tripli su domini normali. Formula di Stokes. Teorema della divergenza. Flusso di un campo vettoriale.

**Si richiede la dimostrazione dei teoremi contrassegnati con (\*).**

### TESTI CONSIGLIATI

C. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica vol. 2*, Zanichelli.

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. *Elementi di Analisi Matematica 2*, Liguori Editore.

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, Vol.2, Liguori Editore.