Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad [\text{equiv. } \sin x \backsim x \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \big[\text{equiv. } \cos x \backsim 1-x^2/2 \text{ per } x\to 0\big]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad [\text{equiv. } \tan x \backsim x \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad [\text{equiv. } \arcsin x \backsim x \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \qquad [\text{equiv. } \arctan x \backsim x \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \qquad [\text{equiv. } \log_a(1+x) \backsim x\log_a e \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \qquad [\text{equiv. } a^x \backsim 1+x\log a \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad \forall\alpha>0 \qquad [\text{equiv. } (1+x)^\alpha \backsim 1+\alpha x \text{ per } x\to 0]$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=+\infty \qquad \forall p\in\mathbb{R}, a>1$$

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^p a^x=0 \qquad \forall p\in\mathbb{R}, a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0 \qquad \forall p>0, a>1$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^p\log_a x=0 \qquad \forall p>0, a>1$$

Se $h(x)\to 0$ per $x\to\overline{x}$ si ottiene

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{\sin h(x)}{h(x)}=1 \qquad [\text{equiv. } \sin h(x) \backsim h(x) \text{ per } x\to\overline{x}]$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{1-\cos h(x)}{h(x)^2}=\frac{1}{2} \qquad \left[\text{equiv. } \cos h(x) \backsim 1-\frac{h(x)^2}{2} \text{ per } x\to\overline{x}\right]$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{\tan h(x)}{h(x)}=1 \qquad [\text{equiv. } \tan h(x) \backsim h(x) \text{ per } x\to\overline{x}]$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{\arcsin h(x)}{h(x)}=1 \qquad [\text{equiv. } \arcsin h(x) \backsim h(x) \text{ per } x\to\overline{x}]$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{\arctan h(x)}{h(x)}=1 \qquad [\text{equiv. } \arctan h(x) \backsim h(x) \text{ per } x\to\overline{x}]$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{\log_a(1+h(x))}{h(x)}=\log_a e \qquad [\text{equiv. } \log_a(1+h(x)) \backsim h(x)\log_a e \text{ per } x\to\overline{x}]$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}\frac{a^{h(x)}-1}{h(x)}=\log a \qquad \big[\text{equiv. } a^{h(x)} \backsim 1+h(x)\log a \text{ per } x\to\overline{x}\big]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+h(x))^\alpha-1}{h(x)}=\alpha \quad \forall\alpha>0 \qquad [\text{equiv. } (1+h(x))^\alpha \backsim 1+\alpha h(x) \text{ per } x\to\overline{x}]$$

Derivate delle funzioni elementari *

$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$f'(x) = a^x \log a$
$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} \log_a e$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccot} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
$f(x) = \|x\|$	$f'(x) = \operatorname{sign} x = \dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{\|x\|}{x}$

(*) Ogni funzione è da intendersi definita sul proprio dominio naturale.

Sviluppi di MacLaurin di alcune funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + ... + \frac{(x \log a)^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + ... + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cosh = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + o(x^7)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Integrali indefiniti elementari

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot\tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

Conseguentemente, se f è una funzione derivabile,

$$\int (f(x))^{\alpha} f'(x) dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int (\sin f(x)) f'(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int (\cos f(x)) f'(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot\tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan f(x) + c$$

Formula di decomposizione di Hermite

Se P e Q sono due polinomi tali che

i) il grado di P è strettamente minore del grado di Q

ii) $Q(x) = (x-x_1)^{h_1} \cdot ... \cdot (x-x_r)^{h_r} \cdot (a_1x^2+b_1x+c_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (a_sx^2+b_sx+c_s)^{k_s}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
dove $x_i \in \mathbb{R}$, $h_i \in \mathbb{N}^*$ $(i = 1, ..., r)$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ e $\Delta_i = b_i^2 - 4a_ic_i < 0$ $(i = 1, ..., s)$

allora la funzione razionale fratta $\frac{P}{Q}$ si può decomporre nel seguente modo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_1}{x-x_r} + \frac{B_1x+C_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + ... + \frac{B_sx+C_s}{a_sx^2+b_sx+c_s}$$
$$+ \frac{d}{dx} \frac{T(x)}{(x-x_1)^{h_1-1} \cdot ... \cdot (x-x_r)^{h_r-1}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{k_1-1} \cdot ... \cdot (a_sx^2+b_sx+c_s)^{k_s-1}} \leftarrow S(x)$$

dove $A_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., r), B_i, C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., s)$ è T è un generico polinomio di grado pari al grado del denominatore S diminuito di 1.

Conseguentemente

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x-x_1} dx + ... + \int \frac{A_1}{x-x_r} dx + \int \frac{B_1x+C_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} dx + ... + \int \frac{B_sx+C_s}{a_sx^2+b_sx+c_s} dx$$
$$+ \frac{T(x)}{(x-x_1)^{h_1-1} \cdot ... \cdot (x-x_r)^{h_r-1}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{k_1-1} \cdot ... \cdot (a_sx^2+b_sx+c_s)^{k_s-1}}$$

Alcune sostituzioni

1. Per integrali del tipo

$$\int f\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \qquad (m_1, ..., m_k, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N})$$

si pone $x = t^d$ dove $d := m.c.m.(n_1, ..., n_k)$. In particolare, per

$$\int f\left(x, \sqrt{x}\right) dx$$

si pone $t = x^2$.

2. Per integrali del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

si pone $t = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

3. Per integrali del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ se $b^2-4ac > 0$ ed x_1 è una radice di ax^2+bx+c,
si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ se $b^2-4ac < 0$ ed $a > 0$,
si scrive $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-x_1|$ se $b^2-4ac = 0$ ed $a > 0$.

4. Per integrali del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$$

si pone $x = a \sin t$.

5. Per integrali del tipo

$$\int f\left(\sin x, \cos x\right) dx$$

si pone

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

dove $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

6. Per integrali del tipo

$$\int \sin^n x \cos^m x dx$$

se n ed m sono pari, si utilizzano le formule di bisezione

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

se $n \geq 3$ èd è dispari, basta scrivere $\sin^n x = \left(1 - \cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \sin x$,

se $m \geq 3$ èd è dispari, basta scrivere $\cos^m x = \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos x$.

7. Per integrali del tipo

$$\int \sin mx \sin nx dx, \int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx,$$

si utilizzano le formule di Werner e si scrive

$$\begin{aligned}
\sin mx \sin nx &= \frac{\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)}{2} \\
\sin mx \cos nx &= \frac{\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)}{2} \\
\cos mx \cos nx &= \frac{\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)}{2}
\end{aligned}$$