POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso B) A.A. 2011/2012

1) Dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(n+1) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^*$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^*$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^*$

(e) $3^n n! \geq n^n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$

2) Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi, limitati, illimitati. Determinarne, inoltre, estremo superiore ed estremo inferiore, specificando se sono massimo e minimo.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |\log x| = \log x\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |\log x| = \log x\}$

(c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x + 2 - \sqrt{9x^2 - 3x - 2}} + 9x^2 \geq 0\right\}$

(d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \arctan\arcsin\left|\frac{2x - x^2}{x^2 - 1}\right| > \arctan(-x^2)\right\}$

(e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} + \left(\frac{x}{|x|}\right)^{\sqrt{x}} > 0\right\}$

(f) $F = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[$

(g) $G = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-e^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{1}{n}}\right[$

3) Stabilire se i seguenti insiemi sono separati, contigui e, se esistono, trovare gli elementi di separazione

(a) $A = \left\{\frac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad B = \left\{\frac{2n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(b) $A = \left\{\arctan e^{\frac{1}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad B = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

(c) $A = \left\{(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad B = \left\{(-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(d) $A = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin^2 x - \sin x < 0\}$ $\quad B = \{x \in [0, 2\pi] \mid |2\cos x| > \sqrt{3}\}$

4) Determinare i punti di accumulazione (in $\widetilde{\mathbb{R}}$) ed i punti isolati per i seguenti insiemi

(a) $A = \left\{ \dfrac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

(b) $A = \left\{ \dfrac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup]1, 2]$

(c) $A = \left\{ \dfrac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cap \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$

(d) $A = \left\{ \dfrac{1+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

(e) $A = \left\{ \sqrt{n + \sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}+1} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(f) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3^{\frac{2x-x^3}{x^2-1}} - 1 > 0 \right\}$

Problema 1 *Dimostrare che, per ogni $a, b, c > 0$, $a \neq 1$*

$$b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$$

Problema 2 *Dimostrare che, per ogni $a, b, > 0$*

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3^{\log a}}{3^{\log b}} \right) = -\log \frac{a}{b}$$

Problema 3 *Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$*

$$(|a| + |b|)^2 \geq a^2 + b^2$$

Problema 4 *Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\arctan |a| \leq \arctan \sqrt{a^2 + b^2}$$

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso B) A.A. 2011/2012

1) Stabilire se le seguenti successioni sono monotone

$$\left(\frac{(-1)^n}{\arctan n}\right)_{n\geq 1} \qquad \left(\log_\pi(1+\pi^{\frac{1}{n^2}})\right)_{n\geq 1} \qquad \left(\sqrt{\sin\left(\frac{n!}{(5n)!}\right)}\right)_{n\geq 1}$$

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}(n+1)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)_{n\geq 0} \qquad (\sin n\pi+\cos n\pi)_{n\geq 0} \qquad (|\sin n\pi+\cos n\pi|)_{n\geq 0}$$

2) Dimostrare che, esiste $\nu \geq 1$ tale che

(a) $\sqrt[n]{n} \geq \dfrac{1}{2}$ per ogni $n \geq \nu$

(b) $\dfrac{n^2+1}{2n+3}\arcsin\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) < 1$ per ogni $n \geq \nu$

(c) $ne^{-\frac{n^3+1}{n^2+1}} \leq \dfrac{1}{10}$ per ogni $n \geq \nu$

(d) $\dfrac{\cos^2 n}{n(1+n\cos n)} + \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n > 2$ per ogni $n \geq \nu$

3) Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ la successione di numeri reali definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4) Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ la successione di numeri reali definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\sin n}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pi^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

5) Siano $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ due successioni di numeri reali tali che

$$a_n = \sqrt{9n^4+2n}-3n^2 \quad \text{per ogni } n \geq 0$$

$$b_n = \begin{cases} n & \text{se } n = 0,1,2,3,4 \\ \dfrac{1}{3n} & \text{se } n \geq 5. \end{cases}$$

Dimostrare che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$.

Problema 1 *Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali convergente. Dimostrare che la successione $(a_n^2+3a_n)_{n\geq 0}$ è limitata.*

Problema 2 *Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali divergente positivamente. Dimostrare che la successione $(e^{-a_n})_{n\geq 0}$ è limitata.*

Problema 3 *Sia* $(a_n)_{n\geq 0}$ *una successione di numeri reali definita, per ricorrenza, ponendo*

$$a_{n+1} = a_n + \log(1 + |a_n|) \quad \textit{per ogni } n \geq 0.$$

Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Problema 4 *Sia* $(a_n)_{n\geq 0}$ *una successione di numeri reali tale che* $a_n \geq n$, *per ogni* $n \geq 10$. *Calcolare, se esiste,* $\lim_{n\to+\infty} \arcsin\left(\dfrac{1}{1+a_n^2}\right)$

Problema 5 *Siano* $(a_n)_{n\geq 0}$ *e* $(b_n)_{n\geq 0}$ *due successioni di numeri reali tali che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 2$.

Dimostrare che $a_n \leq b_n$ *definitivamente.*

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso B) A.A. 2011/2012

1) Determinare dominio, asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, punti di massimo/minimo relativo, punti di flesso delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f(x) = x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(x^2-3x) \qquad f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$$

Inoltre
a) disegnare un grafico approssimativo di f;
b) dedurre un grafico approssimativo delle funzioni:

$$g_1(x) = \arctan f(x) \qquad g_2(x) = e^{f(x)} \qquad g_3(x) = \log_{\frac{1}{2}}(|f(x)|+1)$$

$$g_3(x) = f(x+1) \qquad g_4(x) = (f(|x|)) \qquad g_5 = e^{g_1(x)}$$

2) Determinare dominio, asintoti ed intervalli di monotonia delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2x-1}} \qquad f(x) = \frac{\log^2 x - \log x}{\log^2 x + 1} \qquad f(x) = \arctan\frac{x^3}{1+x^3}$$

$$f(x) = (x-1)^2 + |x-4| \qquad f(x) = \log_{\sqrt{2}}(1+\arctan x^2) \qquad f(x) = \sqrt{x\arcsin x}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2+4x-5|}} \qquad f(x) = \arccos\frac{1}{1+e^{2x}} \qquad f(x) = \left(\arcsin\frac{x^2-4}{|x-2|}\right)^{\pi}$$

$$f(x) = 2^{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}} \qquad f(x) = \pi^{x+\sin x} \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{5} + \sqrt[5]{1-x^2}$$

Inoltre
a) disegnare un grafico approssimativo di f;
b) determinare $\sup f$ ed $\inf f$, specificando se sono rispettivamente massimo e minimo di f;
c) determinare gli intervalli di invertibilità;
d) dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) > 0\}$, determinarne i punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$ e stabilire se tali insiemi sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi, limitati, illimitati.

3) Studiare l'invertibilità delle seguenti funzioni e calcolare, dove possibile, l'inversa:

$$f(x) = \arcsin\log(1+x^3) \qquad f(x) = \sqrt[3]{|\arctan x|} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x^5+1 & x \le 0 \\ \dfrac{x-1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

Problema 1 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente e convessa. Dimostrare che la funzione composta $g \circ f$ è convessa.*

Problema 2 *Dimostrare che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$*

$$e^{\frac{(x+y)^2}{4}} \le \frac{e^{x^2}+e^{y^2}}{2}.$$

Problema 3 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione periodica e tale che* $f(1) = 3$. *Quante soluzioni ha l'equazione* $(f(x))^3 - 3(f(x))^2 + f(x) = 3$?

Problema 4 *Siano* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *crescente e* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *decrescente. Dimostrare che*

$$\pi^{f(0)+g(1)} \leq \pi^{f(1)+g(0)}.$$

Problema 5 *Determinare il numero di soluzioni dell'equazione*

$$28x + 24x^2 + 8x^3 + x^4 + 10 = 0$$

Problema 6 *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *limitata e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $|g(x)| \leq f(x)$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. *La funzione* g *è limitata?*

Problema 7 *Dimostrare che, se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione limitata inferiormente, allora* $g(x) := e^{-\sqrt[3]{f(x)}}$ $(x \in \mathbb{R})$ *è una funzione limitata.*

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso B) A.A. 2011/2012

1) Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la continuità delle seguenti funzioni

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\lambda(2^{x+1}-2)}{2^{x^2}+2^x-2} & \text{se } x>0 \\ 2 & \text{se } x=0 \end{cases}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x+1)^{2\lambda}}\left(2+\sin\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\right)}{2+\sin|x+1|} & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x=-1 \end{cases}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} \left(\log(\tan^2 x+\tan x)+\log\dfrac{1}{\tan x}\right)\log x & \text{se } x \in \left]0,\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \sin\lambda & \text{se } x=0 \end{cases}$;

(d) $f(x) = \begin{cases} \log_2(\cos(4-x^2))\,(\arcsin(x-2))^{\log_{\frac{1}{2}} x} & \text{se } 0<x<2 \\ \lambda^2x^3+3\lambda x^2+1 & \text{se } x=2 \end{cases}$.

2) Stabilire se le seguenti funzioni sono prolungabili con continuità

(a) $f(x) = \text{sign}(x^2-\sqrt{2}x)(x-\sqrt{2})$ in $x=0$ e $x=\sqrt{2}$;

(b) $f(x) = \dfrac{\log x}{\log 2x}+\log x-\log 2x$ in $x=0$;

(c) $f(x) = \dfrac{\log\sqrt{1+x}}{\arctan(1-(1-x)^2)}$ in $x=0$ e $x=2$.

3) Stabilire, utilizzando il teorema di Weierstrass e le sue conseguenze, se le seguenti funzioni sono limitate

(a) $f(x) = \dfrac{\sin^2(x-1)\sin^2(x+1)}{x^4-2x^2+1}$;

(b) $f(x) = \left(\dfrac{x^3-1}{x^3-3x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(2x+1)+\tan^2 x}{x^3+\sqrt{x}+x^\pi} & \text{se } x \in]0,1] \\ 1 & \text{se } x=0 \\ \left(\dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{e^x}-1\right)\dfrac{1}{\sqrt{-x}-x} & \text{se } x \in [-1,0[\end{cases}$.

Problema 1 *Dimostrare che una funzione* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continua che ammette un asintoto orizzontale è limitata.*
Cambia qualcosa se f *non è continua?*

Problema 2 *Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Dimostrare che*

(a) *l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < f(x) < 2\}$ è aperto;*

(b) *l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 2\}$ è aperto;*

(c) *l'insieme $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq g(x)\}$ è chiuso.*

Problema 3 *Dimostrare che l'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \arctan x > \dfrac{x^3}{x^2+1}\right\}$ è aperto.*

Problema 4 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Provare che l'equazione $f(x) = 3x^5 - 2$ ammette almeno una soluzione.*

Problema 5 *Siano $f, g : [1, 3] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e tali che*

(i) *$f(1) < g(1)$ e $f(3) > g(3)$,*

(ii) *f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente.*

Dimostrare che l'equazione $\arctan f(x) = \arctan g(x)$ ammette una sola soluzione.
Cambia qualcosa se una delle due funzioni non è continua?

Problema 6 *Dimostrare che l'equazione $3^{3x^5+3+\arcsin x} = 1$ ammette una sola soluzione negativa.*

Problema 7 *Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq x$ in un intorno di $x = 0$. Provare che f è continua in 0.*

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso B) A.A. 2011/2012

Integrazione secondo Riemann e funzioni integrali

Problema 1 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in [a, b]$. Se la funzione g è integrabile secondo Riemann, lo è anche f?*

Problema 2 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]\backslash\{c_1, ..., c_n\}$. Se la funzione g è integrabile secondo Riemann, lo è anche f?*

Problema 3 *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \log(t^2+2)e^t dt}{x},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{2x^2+3} \log(t^2+2)e^t dt}{\arcsin(2^x - 1) + 2x^2}.$$

Problema 4 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ una funzione continua e si consideri la funzione integrale*

$$F(x) := \int_1^x f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dimostrare che esiste un solo punto $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(c) = 0$.

Problema 5 *Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[a, b] \subset [1, +\infty[$ e si consideri la successione di numeri reali $(a_n)_{n \geq 1}$ definita ponendo*

$$a_n := \int_1^n f(t)dt \quad (n \geq 1).$$

(1) Esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n$?

(2) Cambia qualcosa se f è continua?

(3) Cambia qualcosa se f è positiva?

Problema 6 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ e tale che $f(x) \geq x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt, \quad \lim_{x \to -\infty} \int_0^x f(t)dt.$$

Problema 7 *Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e si consideri la funzione*

$$g(x) := f(x) - e^x \quad (x \in [-1, 1]).$$

Se g è crescente, allora la funzione f è integrabile secondo Riemann?

Problema 8 *Stabilire se una funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continua su $[0, 1[$ e decrescente su $]1, 2[$ è integrabile secondo Riemann.*

Problema 9 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e T-periodica. Dimostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^a f(x)dx = \int_T^{T+a} f(x)dx,$$
$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx.$$

Problema 10 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che, se f è pari (risp. dispari), allora anche $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è pari (risp. dispari).*

Problema 11 *Data*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x\sin x - \frac{\pi}{2} + 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

determinare l'espressione analitica della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Problema 12 *Scrivere il polinomio di MacLaurin della funzione $F(x) = \int_0^x 2^{\cos t}dt$.*

Problema 13 *Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\left(\sin \frac{e^{-\frac{1}{x^3}}}{x^3}\right)^{-1} = 1.$$

Dimostrare che la funzione $F(x) = \int_3^x f(t)dt$ è limitata.

Problema 14 *Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione*

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2}dt = \lambda.$$

Integrali impropri

1) Stabilire se i seguenti integrali esistono e sono finiti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4 + x\log^2 x}dx \qquad \int_0^1 \frac{\log x \arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{|x-1|}\arccos x}dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)\sin x}{\sqrt{x^5}}dx \qquad \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}\sqrt[3]{\sin(x-2)}}dx$$

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\log_2(x^2+2x)\sin(x+1)}{(x+1)^\alpha}dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{|x|}}{\arctan\left(\left|2^{|x|+1}-2\right|^\alpha\right)}dx \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbb{R}$$

2) Stabilire se i seguenti integrali esistono e, in caso affermativo, calcolarli:

$$\int_{-\infty}^{1} e^x \log(1+e^x+e^{2x})dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{3x+2\sqrt{x}}$$

$$\int_1^2 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \qquad \int_{-6}^{1} \left|\frac{x+5}{x^2+1}\right| dx$$

<u>Calcolo di aree</u>

Calcolare l'area delle seguenti parti di piano:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin^2 x\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 5x + 4 < 0,\ x^2 \le y \le \sqrt{x+1}\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{e} \le e^x \le e^5,\ -x^3 \le y \le \log x\}$$

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso B) A.A. 2011/2012

Curve

1. Data la curva
$$\gamma(t) = (t\cos 3t, \sin^3 t, \cos^3 t)$$
determinare il vettore tangente in $t = \dfrac{\pi}{3}$.

2. Determinare la lunghezza della curva
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \log\cos t) \quad \text{con } t \in [0, \frac{5}{6}\pi].$$

3. Riscrivere in coordinate polari l'equazione della curva
$$\sqrt{(x^2+y^2)^3} = 4xy.$$

4. Calcolare l'integrale di
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
lungo la curva $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$ con $t \in [0, \sqrt{3}]$.

5. Calcolare
$$\int_\gamma xyds$$
lungo il triangolo di vertici $(2,0)$, $(-2,0)$, $(1,1)$.

Forme differenziali e campi vettoriali

1. Dimostrare che il campo vettoriale
$$F(x,y) = \left(e^x y - \frac{e^x}{e^{2x}+1}, e^x + e^y\sqrt{e^y+1}\right)$$
è conservativo e determinare un suo potenziale.

Calcolare, inoltre, il lavoro del campo di forze F lungo il segmento di estremi $(0,0)$ a $(1,0)$.

2. Stabilire se il campo
$$F(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2+2xy+1}\mathbf{i} + \frac{1}{1+(x+y)^2}\mathbf{j}$$
è irrotazionale.

Calcolare, inoltre, il lavoro del campo di forze F lungo la circonferenza di centro (2,0) e raggio 5.

3. Data la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{2\sqrt{y^2-2x}-1}{\sqrt{y^2-2x}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-2x}}dy,$$
stabilire se è esatta ed, in caso affermativo, calcolare una sua primitiva.

4. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = 2|x| \log xy dx + \frac{x^2}{y} dy,$$

determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ in cui ω è esatta.

5. Stabilire se il campo

$$F(x,y) = \left(1 - \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}, -\frac{y}{(1+x)^2+y^2}\right)$$

è conservativo.

6. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove

$$\omega(x,y,z) = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz,$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \text{ con } t \in [1,3].$$

7. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove

$$\omega(x,y,z) = (1+e^z)dx + dy + (xe^z)dz,$$

e γ è la curva che si ottiene intersecando $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 2\}$ con il piano π di equazione $z = 1$.

8. Siano A un aperto di $\mathbb{R}^N$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Dimostrare che

$$\nabla \times (\nabla f) = 0.$$

9. Dimostrare che la somma di due campi di forze conservativi è ancora un campo conservativo.

10. Siano F e G due campi conservativi con potenziale f e g, rispettivamente. Dimostrare che la funzione $f+g$ è un potenziale del campo somma $F+G$.