Determinare gli asintoti delle seguenti funzioni

1. $f(x) = xe^{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}}$
2. $f(x) = (\sqrt{x^2+x} - x)^{\sqrt{2}}$
3. $f(x) = \dfrac{\log(2x-1)}{\log(x^2+1)} + \dfrac{2x^4-1}{x^3}$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-2)^3 \log(x^2-4)}$
5. $f(x) = \sqrt[4]{(\log_{0,4}^2 x - \log_{0,4} |x|)^3} + \dfrac{x}{|x|}$
6. $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x^3-e^x}{e^x-x-1}\right|}$
7. $f(x) = \sqrt{\arctan\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x^3+x}} + 5}$
8. $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}} \tan x$
9. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+x} + x$
10. $f(x) = (\pi)^{\frac{1}{\arcsin\sqrt{3-|x-1|}}}$

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso A) A.A. 2010/2011

Calcolare, se esistono i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\cos^2 \sin x - 1}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x} \right|^x$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1 + |\sin x|} - 1\right)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{2x}}}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{(2^{x^2-2} - 2)\arctan\left(\frac{x^2+2}{5}\right)}{\arctan(x - \sqrt{3})}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^5 \log(5x^2) + x^5} - \log(x+1)}{\log\left(\log(x^3+1) + \log(x^3+e)\right)}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} 5^{\frac{1}{\arcsin(x-1)}} \arcsin(x^6 - 2x^3 + 1)$

7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 5}\right)^{\sqrt{x^5 - 3x^4} - x^{5/2}}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{4}\right)^{\log^4 |x| - 5\log x^4}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\sqrt{\tan^2 x - 3} - \tan x\right)\tan x$

10. $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{\operatorname{segn}(x - \sqrt{3})}{\sqrt{2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6}} \arctan x \arctan(x^2 - 3)$

    dove $\displaystyle\operatorname{segn}(x) := \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ (funzione segno)

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \arcsin \frac{\sin\frac{1}{x}}{1 + \sin^2\frac{1}{x}} \arcsin \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to \log_2 3} \frac{1 - \cos^2(1 - \cos(2^x - 3))}{4^x - 2^x - 2^{x+2} + 6}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\log_2(2^x+1)^3 - \log_2(2^{3x}+1)\right)\log_2(2^x+1)}{1 + 2x - \sqrt{4x^2+1}}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)} - \sqrt[3]{\arcsin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)}}$

15. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^3}+2\sin^\lambda\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^4-3x^2}{x^2+x+5}$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$

16. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\log(1+\arctan x)}{\sqrt{x^3+\tan^\lambda x}}$ al variare di $\lambda\geq 0$

17. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{4}{x}}}{\arctan x^\lambda}$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$

18. $\lim_{x\to 1}\frac{\log_2(\sqrt{2+x^2-2x}-x+1)}{|x-1|^\lambda}$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$

Problema 1 *Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ la successione di numeri reali definita ponendo*

$$\begin{aligned}&a_0:=1,\ a_1:=1\\&a_{n+1}:=a_n+a_{n-1}^2\qquad(n\geq 2).\end{aligned}$$

Dimostrare che

1. $(a_n)_{n\geq 0}$ *è crescente,*
2. $a_n\geq 1\quad(n\geq 0)$,
3. $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

Problema 2 *Siano $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua , $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ due successioni di numeri reali tali che*

(i) $a_n:=\frac{n^2+5n}{n^4+1}\sin\sin n^2+1\quad(n\geq 1)$;

(ii) $a_n>b_n\quad(n=3,4,7)$;

(iii) $|a_n-b_n|\leq\frac{1}{n}\quad(n\geq 9)$.

Calcolare

1. $\lim_{n\to+\infty}b_n$;
2. $\lim_{n\to+\infty}f(a_n)-f(b_n)$;
3. $\lim_{n\to+\infty}f(e^{a_n})-e^{f(b_n)}$.

Problema 3 *Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali monotòna.*

Stabilire se i seguenti limiti esistono

$$\lim_{n\to+\infty}\sin a_n,\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{\sqrt{1+a_n^2}},\quad\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}}.$$

Problema 4 *Sia* $(a_n)_{n\geq 0}$ *una successione di numeri reali positivi. Posto, per ogni* $n \geq 0$

$$s_n := a_0 + a_1 + ... + a_n$$

si dimostri che esiste $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

Problema 5 *Sia* $(a_n)_{n\geq 0}$ *una successione di numeri reali tale che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

1. *Calcolare, se esiste,* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\arctan(1+a_n)} - \sqrt{\arctan(a_n)}}$.
2. *Dimostrare che esiste* $n_0 \geq 1$ *tale che, per ogni* $n \geq n_0$

$$a_n \arctan \frac{1}{a_n} > \frac{1}{2}.$$

Problema 6 *Dimostrare che la successione* $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geq 1}$ *è monotòna e limitata.*

Inoltre, posto $a_n := \dfrac{n!}{n^n}$ $(n \geq 1)$, *dimostrare che*

1. $a_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n a_n \quad (n \geq 1)$;
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

(*Si ricordi che* $0! = 1$ *e* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, *per ogni* $n \geq 1$).

POLITECNICO di BARI - I Facoltà di INGEGNERIA
Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA (Corso A) A.A. 2010/2011

Problema 1 *Date le funzioni*

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (\textit{seno iperbolico})$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\textit{coseno iperbolico})$$

dimostrare che:

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
2. $(\sinh)' = \cosh$ *e* $(\cosh)' = \sinh$,
3. $\sinh$ *è invertibile e* $(\sinh)^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2 *Stabilire se la seguente funzione è derivabile*

$$f(x) := \begin{cases} \arctan \log \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right| & \textit{se } x \in]-1, 0] \\ \dfrac{\pi}{2} & \textit{se } x = -1. \end{cases}$$

Problema 3 *Stabilire per quali valori di a e b la seguente funzione è derivabile*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(e^x - 1)}{\log x} & \textit{se } x \in]0, 1[\\ ax + b + \sin x & \textit{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Problema 4 *Date le funzioni*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{se } x \in [0, 1] \\ \arcsin x - 1 & \textit{se } x \in]-1, 0[\end{cases} \qquad e \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \textit{se } x > -1 \\ x + 1 & \textit{se } x \leq -1 \end{cases}$$

1. *stabilire, senza calcolarne l'espressione analitica, se la funzione composta* $g \circ f$ *è monotòna, limitata, ingettiva;*
2. *calcolare* $g \circ f$ *e* $g \circ \left(f + \dfrac{\pi}{2}\right)$*;*
3. *calcolare* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.

Problema 5 *Dimostrare, utilizzando il teorema degli zeri, che l'equazione*

$$e^{e^x - \sin x + x} = e^x$$

ha infinite soluzioni tutte negative.

Problema 6 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e tale che:*

(i) $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(1) = 1$.

Dimostrare che $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Problema 7 *Sia* $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ *una funzione continua e tale che* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$, *sia inoltre*

$$g(x) := \frac{1}{\log|1+f(x)|} \quad (x \in X)$$

dove $X := \{x \in]0,1[\mid f(x) \neq -2, 0\}$.

1. f *è limitata?*
2. g *è limitata?*

Problema 8 *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^3}+x} - e^{-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{2}} & \text{se } x \in]0,1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \left(\dfrac{\sin ex}{x}\right)^{\frac{\sin x - x}{\sin^2 x}} & \text{se } x \in [-1,0[\end{cases}$$

stabilire se f *soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass e se le funzioni* f, $\log f(x)$ $(x \neq 0)$ *ed* $e^{f(x)}$ *sono limitate.*

Problema 9 *Stabilire per quali valori di* a *e* b *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log_2(1+5x^2)}{(2-x)^a} & \text{se } x \in [1,2[\\ b & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{1}{2^x} & \text{se } x \in [-2,-1] \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

Problema 10 *Dimostrare che, se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione pari e derivabile, allora* $f'(0) = 0$.

Problema 11 *Dimostrare che, se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2 \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R},$$

allora f *è costante.*

(Suggerimento: f *è derivabile, perchè ...)*

Problema 12 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile e tale che ogni* $x \in \mathbb{R}$ *sia punto di massimo relativo per* f. *Dimostare che* f *è costante.*

Problema 13 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile tale che* $f(0) = 0$. *Stabilire se la funzione*

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ f'(x) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua.

Problema 14 *Dimostrare, utilizzando il teorema di Lagrange, che*

$$|\cos x - \cos y| \leq |x-y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$