POLITECNICO di BARI - A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in INGEGNERIA Informatica e dell' Automazione

Problema 1 *Sia* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione continua. La funzione composta* $g(x) = f(\|x\|)$ *è continua?*

Problema 2 *Siano* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ *ed* $f : D \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Dimostrare che l'immagine* $f(D)$ *è un intervallo limitato.*

Problema 3 *Data la funzione*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - \sin x}}{\sqrt{1 - y} + 1}$$

stabilire se l'immagine di f *è un intervallo limitato.*
Vale la stessa cosa per $g(x, y) = \log(f(x, y) + 1)$*?*

Problema 4 *Dimostrare che ogni applicazione lineare* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *è continua.*

Problema 5 *Stabilire se la funzione* $f(x, y) = 2^{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$ *è continua e limitata.*

Problema 6 *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *una funzione vettoriale di componenti*

$$f_1(x, y) = x + 5y + 3 \quad f_2(x, y) = \log_\pi(x^2 y^4 + 1) \quad f_3(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{2^{x+1} - 2} & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

Stabilire se f *è continua.*

Problema 7 *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua e tale che*

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \textit{se } \|x\| = 1 \\ f(x) = -1 & \textit{se } \|x\| = \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

Dimostrare che esistono infinite soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ *su* $B_1(0)$.

Problema 8 *Data una funzione continua* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, stabilire se l'insieme dei punti* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tali che*

$$e^{\arctan(xy + y^2 + 3)} < 5$$

è un insieme aperto.

Problema 9 *Dare un esempio di funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ *continua, definita su un insieme compatto* $D \subset \mathbb{R}^2$*, limitata e non continua.*

Problema 10 *Dimostrare che la funzione* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo, per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$F(x, y, z) = \int_1^{x+y+z} e^{-t^2} dt$$

è continua.

POLITECNICO di BARI - A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell' Automazione

1. Data la funzione $f(x,y) = 2x^2 + xy$, si consideri il campo vettoriale
$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = (x,y) \mapsto \nabla f(x,y).$$
Calcolare la matrice Jacobiana della funzione ∇f nel punto $(2, e)$.

2. Scrivere la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni a valori vettoriali
$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \qquad \text{nel punto } (2,\pi)$$
$$g(x,y) = (x, y+1, x^2+y^2 \quad 2x) \qquad \text{nel punto } (1,0)$$

3. Calcolare il determinante Jacobiano della traformazione in coordinate sferiche
$$T(\rho,\vartheta,\varphi) = (\rho \sin\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \rho\cos\varphi)$$
per ogni $\rho > 0, \varphi \in [0,\pi], \vartheta \in [0, 2\pi[$.

4. Data la funzione
$$f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 \quad 3y \quad 1$$
determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, minimo relativo e di sella.

5. Data la funzione
$$f(x,y) = (x \quad 4)\log(x + 4y^2 \quad 8y)$$
determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, minimo relativo e di sella.

6. Data la funzione
$$f(x,y) = x^2 y e^{\ \ x^2 \ \ y^2}$$
   (a) determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, minimo relativo e di sella;
   (b) calcolare $\|\nabla f(1, \quad 2)\|$.

7. Data la funzione
$$f(x,y) = y^3 \quad 2xy^2 + xy^3 \quad 2x^2y^2$$
   (a) determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, minimo relativo e di sella;
   (b) determinare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$;
   (c) determinare la derivata direzionale di f nel punto $(1,0)$ lungo la direzione $(\quad 1, \sqrt{2})$.
   (d) data la curva $\gamma(t) = (\log t, 3 + t^3)$, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $\gamma(1)$ lungo la direzione $\gamma'(1)$.

8. Data la funzione
$$f(x,y) = 4x^2y^2(2x \quad y \quad 3)(2x \quad y + 3)$$
   (a) determinare i punti di massimo e minimo relativo;
   (b) determinare il massimo ed il minimo assoluto sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(0, \quad 3)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

9. Data la funzione
$$f(x, y) = \arctan\left(|x + 2y|(2y + x)\right)$$
   (a) studiare la differenziabilità;
   (b) determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, minimo relativo e di sella;
   (c) determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, la derivata direzionale di f nel punto $(1, \quad 1)$, lungo la direzione (π, α), è uguale a 3.

10. Data la funzione
$$f(x, y) = \sqrt[3]{(1 \quad x^2 \quad y^2)^5\,(x + y)^5}$$
   (a) determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, minimo relativo e di sella;
   (b) data la curva $\gamma(\vartheta) = (2\cos\vartheta, 2\sin\vartheta)$, calcolare $(f \circ \gamma)'(\vartheta)$, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

11. Data la funzione
$$f(x, y) = 2^{x^2+2y^2 \quad 4y}$$
determinare gli estremi assoluti sull'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$.

12. Data la funzione
$$f(x, y) = e \quad e^{xy}$$
determinare gli estremi assoluti sull'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \quad 1 \le y^2 \le 1\}$.

13. Data la funzione
$$f(x, y) = x^2 \quad y^2$$
determinare il massimo ed il minimo assoluti sull'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + y^2 \le 9\}$.

14. Data la funzione
$$f(x, y) = x^2 + xy + 1$$
determinare il massimo ed il minimo assoluti sull'insieme
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \le 2, y \quad x \le 0, y \ge 0\}.$$

Problema 1 *Siano $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed $\overline{x}$ un punto di massimo relativo per f. Dimostrare che $\overline{x}$ è un punto di minimo relativo per la funzione*

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\arctan f(x)}.$$

Problema 2 *(<u>Ortogonalità del gradiente alle linee di livello</u>) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e $c \in \mathbb{R}$. Si consideri l'insieme*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\right\} \qquad \text{(linea di livello } c\text{)}$$

e si supponga che sia il sostegno di una curva regolare $\gamma = \gamma(t)$. Dimostrare che

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0,$$

ovvero che, in ogni punto, il gradiente è ortogonale alle linee di livello della funzione.
(*Sugg. Valutare* $(f \circ \gamma)'$.)

Problema 3 *Siano X un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 ed $\overline{x}$ un punto di minimo relativo per f tale che $f(\overline{x}) = 1$. Si consideri, inoltre, la funzione*

$$g(x) = (f(x) + 3)^3 .$$

Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(\overline{x}, 1)$.

Problema 4 *Data la funzione $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, dimostrare che, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0. \qquad \text{(Eq. di Laplace)}$$

Problema 5 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed $u(x, y) = f(x + 2y)$. Dimostrare che la funzione u è derivabile e, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfa la relazione*

$$2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Problema 6 *Data la funzione $f(t, x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{\;\frac{x^2}{4t}}$, dimostrare che, per ogni $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x). \qquad \text{(Eq. del calore)}$$

Problema 7 *Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una funzione lineare. La funzione*

$$f(x, y, z, t) = \log(x^2 + y^2 + 1) + L(x, y, z, t)$$

è differenziabile?

Problema 8 *Sia $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ e siano $f, g : B_1(0) \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1. Stabilire se la funzione $h(x) = e^{f(x)+3g(x)}$ è differenziabile.*

Problema 9 *Siano $f, g : B_1(0) \to \mathbb{R}$ differenziabili e tali che*

i) $\nabla f(x) = \nabla g(x)$, *per ogni* $x \in B_1(0)$;

ii) $f(1) = g(1)$.

Dimostrare che $f(x) = g(x)$, per ogni $x \in B_1(0)$.

POLITECNICO di BARI - A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in INGEGNERIA Informatica e dell' Automazione

Integrali definiti/indefiniti quasi immediati

$$\int \left(\sqrt{2x} + 3x + \frac{5}{\sqrt[7]{x}}\right) dx$$

$$\int \frac{5x^3}{(x^4+7)^3} dx$$

$$\int_2^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3x^2} + 5\right)^2 dx$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt[5]{x^4+2x^3+x^2}} dx$$

$$\int \frac{3x \quad \arccos 2x}{\sqrt{1 \quad 4x^2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^3+6x^2+12x+1}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\int \frac{\sin 4x}{\cos^3 x} dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x \quad 1} dx$$

$$\int \frac{\sin x \cos x \quad \sin x \cos^2 x}{1+\sin^4 x} dx$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\log \arctan x}{(1+x^2)\arctan x} dx$$

$$\int \tan(x+3) dx$$

$$\int (\log x + 1) \cot(x \log x) dx$$

$$\int \frac{(1+2\sqrt{x})\cos\left(\sqrt{x}+x\right)}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int \quad \sin^4 x + \sin^3 2x\Big) \, dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 \sqrt{x^3}} dx$$

$$\int_{\pi}^{\pi} \quad \sin^7 x + \arctan x^7\Big) \, dx$$

$$\int_3^3 \left(\sqrt{|x|}|x| + \frac{1}{|x|+1}\right) dt$$

$$\int \tan^2 2x dx$$

$$\int (1+\tan x)^3 dx$$

$$\int \frac{1+3x}{1+9x^2} dx$$

$$\int_{\log_2 3}^{\log_2 5} \frac{2^x}{5+4^x} dx$$

Integrali definiti/indefiniti meno immediati...

$$\int \frac{2x+1}{x^3 \quad 6x^2+11x \quad 6} dx$$

$$\int \frac{x^4+2x^2 \quad 1}{x^2 \quad x \quad 6} dx$$

$$\int \frac{x^3}{3x^2+x+2} dx$$

$$\int_1^3 \frac{5x+9}{(2x \quad 1)^2(x+1)} dx$$

$$\int \frac{dx}{4x^4+1}$$

$$\int \frac{x}{x^5 \quad x^3} dx$$

$$\int \frac{2\sin x\cos x - 3\cos x}{4\sin^2 x - 4\sin x + 1}dx$$

$$\int \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\pi - \sin^2 x^2}}dx$$

$$\int e^{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} + x}dx$$

$$\int \arctan \frac{1}{x+1}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x \sin \log(\sin x)dx$$

$$\int \frac{\arcsin(1 - \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$\int \frac{e^x}{\sin e^x}dx$$

$$\int_1^2 x\cos(x^2 - 1 + |x^2 - 1|)dx$$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{2\log x + 1}{x(25 + \log^2 x)}dx$$

$$\int \frac{3^{3x+2}}{4 \cdot 8^x}dx$$

$$\int \frac{\log(1+\sin x)^{\sin x}}{\tan x}dx$$

$$\int x\log(2x+3)dx$$

$$\int \frac{\sin \log(\arcsin x)}{\sqrt{1 - x^2}}dx$$

$$\int 7^x \cos x dx$$

$$\int \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$$

Integrali impropri

Stabilire se le seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio

$f(x) = \dfrac{\log\cos(x - \sqrt{3})}{(x - \sqrt{3})^\alpha + x - \sqrt{3}}$ su $]\sqrt{3}, 4]$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}$ su $]0, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{1}{x\log^\alpha x}$ su $[2, +\infty[$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}\log x \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ su $[1, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{|\sin^5(x+1)|}}{x^3 + 2x^2 + x}$ su $]-1, 0[$ e su $]0, +\infty[$

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+2x^2+x)^2} \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{\sqrt[7]{4x^2-4x+1}}{(2x-1)^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}-1\right)^3} dx \qquad \int_{-5}^{5} \frac{dx}{x}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3x+2)\sqrt{|x|}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2^x+2^{-x}}$$

Problemi

Problema 1 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente. Stabilire se la funzione $g(x) = f(\arctan e^{\sqrt{x}} + |x|)$ è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[1,3]$.*

Problema 2 *Data la funzione*

$$F(x) = \int_1^x e^{-t^2}(t^2+3)dt$$

dimostrare che

i) l'insieme $F([-1,1])$ è limitato;

ii) l'insieme $F(\mathbb{R})$ è limitato;

iii) l'equazione

$$x^3+3+\int_1^x e^{-t^2}(t^2+3)dt = 0$$

ha almeno una soluzione.

Problema 3 *Studiare la monotonia della funzione*

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2+3t+1}{\log(1+\sin^2 t)+1+\sin^2 t} dt.$$

Problema 4 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e dispari. Dimostare che la funzione integrale*

$$F(x) = \int_0^x (t^2+|t|)f(t)dt$$

è dispari.

Problema 5 *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{t^2+1}dt \quad \sin^2 \pi x}{e^x \quad ex} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2 \arctan t dt}{\displaystyle\int_x^0 t^2 \tan t dt}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{1/x} \frac{e^{t^2}}{2t^4+e^t}dt \qquad\qquad \lim_{x\to 2} \frac{\displaystyle\int_2^{x^2 \quad x} \log(t^2 \quad t \quad 1)dt}{x^3 \quad 6x^2+12x}$$

Problema 6 *Sia* $f : [2,+\infty[\to \mathbb{R}$ *continua e tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = l,$$

dove $l \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Dimostrare che* f *è integrabile in senso improprio su* $[2,+\infty[$.

Problema 7 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *e tale che* $f(1) = 3$ *ed* $f(3) = 1$. *Calcolare la media integrale della derivata prima* f' *sull'intervallo* $[1,3]$.

Problema 8 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua con media integrale nulla. Dimostrare che la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

POLITECNICO di BARI - A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell' Automazione

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = \frac{y^4+1}{y^2+1}$$

$$y' = (e^y+1)\log(x^3+1)$$

$$x(\log^2 x+1)y' = \log x$$

$$y' = \frac{y^2+2y}{y^2+1}\log(x^2+x+1)$$

$$y' = \arctan x \tan y$$

$$(3x^2+9x+27)y' = (x^3+x)\sqrt{y^3}$$

$$y' = \frac{\sin x \log(\sin x)}{y \log y}$$

$$y' = \frac{\cos^2 y}{1+x^2}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$y' = e^{2x} \quad 2y$$

$$y' = xy + \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \cos x}{2}$$

$$y' = \frac{y}{x(\log x \quad 1)} + \frac{\log x}{x}$$

$$y' = \frac{y}{3x} + \sqrt[3]{x}e^x$$

$$y' + \frac{y \cos x}{1+\sin x} = \frac{2x}{1+\sin x}$$

$$y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \arctan x$$

$$y' + 1 = \quad \frac{y+x}{\sin^2 x \cot x} + \cot^2 x$$

Equazioni differenziali di Bernoulli

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 x \log x$$

$$2xy' \quad y \quad 2x^2\sqrt[3]{y} = 0$$

$$y' = 2y \quad y^3$$

$$y' + xy = \frac{x^3}{\sqrt{y}}$$

$$x^2y' + y \quad \sqrt{y} = 0$$

$$x^3y' + (x^2+x)y \quad \sqrt{xy} = 0$$

Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

$y'' + 4y' + 5y = \cos 3x$
$y'' - y' - 2y = e^{-x} + 5x^2 + \cos x$
$y''' + y'' + y' = e^{-x} \cos x$
$y''' - 5y'' + 6y' - 2y = 0$
$y''' - 2y'' + y' - 2y + 1 = x^2 e^x$
$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^x \sin x$
$y^{iv} - 3y''' + 3y'' - y' = x + \sin 2x$
$y^{iv} + y = 2x^2 + 3x$
$y^{v} + 9y = 9x + e^x$
$8y^{v} + 12y^{iv} + 6y''' + y'' = 0$
$3y^{iv} - 3y = \cos 3x$

Problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (4x^3 + 2x)\cos^2 y \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + xy = e^x(x+1) \\ y(-1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy' + 2y = 2y\sqrt{y}\log x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = x|x| + 1 \\ y(1) = 0 \quad y'(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x \sin x \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 1 *Data l'equazione differenziale del primo ordine*

$$y' = \sqrt{x^2 - 3x + 2}\,(|y| + y^2 + 1)$$

determinare l'insieme di definizione dell'equazione differenziale e dimostrare che esistono soluzioni strettamente crescenti.

Problema 2 *Data l'equazione differenziale del primo ordine*

$$y' = (1 + x^2)\sin y$$

dimostrare che
1) *esistono infinite soluzioni costanti;*
2) *esistono infinite soluzioni non costanti e limitate.*

Problema 3 *Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ unafunzione continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzioni continua, periodica, tale che $g(-1) < 0$ e $g(2) > 0$. Data l'equazione differenziale*

$$y' = f(x)g(y),$$

stabilire se
1) *esistono infinite soluzioni costanti;*
2) *tutte le soluzioni sono limitate.*

Problema 4 *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (x \quad 1)(\arctan y)^{\quad 1} \\ y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

1) *dimostrare che esiste una unica soluzione locale e che* $x_0 = 1$ *è un punto di minimo per tale soluzione;*
2) *determinare la soluzione.*

Problema 5 *Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dotata di primitiva* G. *Si considerino le equazioni differenziali del primo ordine*

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y' = f(x, y)g(y) \tag{2}$$

Dimostrare che, se u *è soluzione di* (1) *allora* $v = G \circ y$ *è soluzione di* (2).

Problema 6 *Data l'equazione differenziale lineare*

$$y'' + 2y' = 2x(1 + e^{\quad 2x})$$

determinare l'integrale generale e stabilire se esistono soluzioni integrabili in senso improprio su $\mathbb{R}$.

Problema 7 *Data l'equazione differenziale lineare*

$$y''' \quad 2y'' + y' \quad 2y = 2 \sin x + 2$$

determinare l'integrale generale e stabilire se esistono soluzioni integrabili in senso improprio su $[1, +\infty[$.

Problema 8 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' = 3^{x+y+1}$$

ponendo $z(x) = x + y(x) + 1$.

Problema 9 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' = (2x + y \quad 1)^2 \quad 1$$

ponendo $z(x) = 2x + y(x) \quad 1$.

Problema 10 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

ponendo $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

Problema 11 *Risolvere il seguente problema differenziale*

$$\begin{cases} y'' \quad 2y' = e^{2x} + x^2 \quad 1 \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 3 \end{cases}$$

Problema 12 *Risolvere il seguente problema differenziale*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(x+1)y}{2x} + \dfrac{e^x}{2xy} \\ \lim\limits_{x \to \quad \infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

Problema 13 *Per ogni* $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, *sia* y_n *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' \quad y = e^{\frac{x}{n}} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Calcolare, se esistono, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n(0)$ *e* $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n(1)$.

Problema 14 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *e si consideri l''equazione differenziale*

$$y' = f(y).$$

Dimostrare che

1. *Se* f *ha uno zero, allora l'equazione ammette almeno una soluzione limitata.*
2. *Se* f *non ha zeri, allora tutte le soluzioni sono strettamente monotone.*
3. *Se* $f(1) = f(5) = 0$ *ed* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in]1, 5[$, *allora esistono soluzioni limitate non costanti.*
4. *Se* $f(0) = 0$ *allora non esistono soluzioni di segno variabile.*

Problema 15 *Siano* $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *a continua e b di classe* C^1. *Si consideri l'equazione differenziale*

$$y' = e^{a(y)} b(y).$$

Se esistono due soluzioni u *e* v *tali che* $u(3) = v(3)$, *la funzione* a *può essere di classe* C^1?

POLITECNICO di BARI - A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{3n+2}}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n(e+\sin n)}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt{n}} \quad \sqrt[4]{n}}{n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{n+1}\tan\frac{1}{n}$

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\cos\frac{2}{n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} \quad \sin\frac{1}{n}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^4\left(1 \quad \cos\frac{1}{n^2}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n\cos^4 n}{\pi^n+n}$

9. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{e^{\sin\log n}}{n^2\log n}$

10. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{2^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n\geq 4} \left(\frac{n \quad 3}{n+1}\right)^{n^2}$

12. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^4+3}{n^4+5}\right)^{n^5}$

13. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3n^4+n^2+1}{3^n}\log^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

14. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n!+2)}{n!+2}$

15. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{2^n (2n)!}$

16. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{(n+2)!} e^{\sin \frac{n!}{(2n)!}}$

17. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-n)^n}{(2n+1)^n} \sin \frac{1}{n^2}$

18. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{n^2+n+1}$

19. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right)$

20. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{1}{n - \arctan n}$

21. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(1 - n \sin \frac{1}{n} \right)$

Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche e calcolarne la somma

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\pi^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\arctan 3}{3} \right)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^n$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n - (-3)^n}{5^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

7. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\sqrt[n]{e} - \sqrt[n+1]{e})$

8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n \arctan \frac{1}{n}}$

Studiare la convergenza puntuale e totale delle seguenti serie di funzioni

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(x+3)^n}{(2n+5)3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2x}{2x \quad 1}\right)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x+1}{x \quad 1}\right)^n$

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} (x^2 \quad 1)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \arcsin \frac{2n}{n^2+1} (|x| \quad 1)^n$

<u>**Criterio dell'integrale:**</u> Siano $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie a termini positivi ed $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua, decrescente e tale che $f(n) = a_n$. Allora

$$\sum_n a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Studiare il carattere delle seguenti serie, utilizzando il criterio dell'integrale

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \log^3 n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n\sqrt{\log n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\log_2(n^n + n!)}$

Problema 1 *Dimostrare che, per ogni* $a \in \mathbb{R}$*, la serie* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ *è convergente.*

Problema 2 *Sapendo che* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} = e^a$*, calcolare* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^{n\ \ 1}}{2^n n!}$.

Problema 3 *Determinare le soluzioni, se esistono, dell'equazione*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(\ \ 1)^n x^n}{n!} = 1.$$

Problema 4 *Studiare, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*, il carattere della serie*

$$\sum_{n\geq 0} n^\alpha \arcsin \frac{1}{n+1}.$$

Problema 5 *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali strettamente positivi e tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n a_n$ *converge?*

Problema 6 *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali strettamente positivi, crescente e divergente positivamente. Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n\geq 0} (\ \ 1)^n \left(2^{\arctan \frac{1}{a_n}}\quad 1\right)$$

è convergente.

Problema 7 *Sia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continua. Dimostrare che la serie numerica*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

converge.

Problema 8 *Siano* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *due successioni numeriche tali che*

(i) $|b_n| \leq a_n \leq |b_n|$ *per ogni* $n \geq 2$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ *è assolutamente convergente.*

La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *è convergente? È assolutamente convergente?*

Problema 9 *Sia* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *una serie convergente. Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}\quad 1}{\sin a_n}.$$