

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{4} \right)^{\frac{1}{x}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x+1} \left( \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{x+1}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x+1} \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{x+1}}$
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3^{-\frac{1}{2}} \right)^{\sqrt{1+x^2}-x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{(x-1)^2} \sin(x-1)$
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 7}} + e^{\frac{1}{x}}$
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{3x^3+5}{x^2+3x}}$
9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{12x^4 + 2x}{12x^4 + 4x^3 + 3} \right)^{\frac{x^2+1}{x+2}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \arcsin e^{\frac{1}{x-3}}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x + \log(x+1)}{x^2}$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos 2x}{\sqrt{2x^2 + 3x}}$
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sin x^4 + \frac{1}{x}}{2x + x^{\frac{4}{3}} + x^{-5}}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\log_2^2 |x| - 1} + \log_2 |x|$
15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{1,5} \left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right|$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{x^2+3x^3}{\tan x}}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \log \left( e^{\frac{1}{x}} + e^{-x} \right)$

18.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{x-3}}{2^{\frac{x}{2}} - 2\sqrt{2}}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + x^3 + 4\sqrt{\tan x}}{\sqrt{x} + 4 \tan x}$
20.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{1 - \cos \sin(x - \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2}) \sin \cos(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2x \tan \frac{x}{2} + 2 \tan x^\pi}{x^2 \sin \sqrt{x^4 + \sqrt{x}} + 4x^4}$
22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{\sqrt{x}} - \sin \frac{2}{x} \right) \frac{3x^5 - 2x^2 + 1}{x^3 + 3}$
23.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \left( \frac{2x^3 + \sqrt[7]{x^3}}{2x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{5}{3}}} \right) \sin \left( \frac{2x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{5}{3}}}{2x^3 + \sqrt[7]{x^3}} \right)$
24.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\cos(-x^2)} \log \left( \sin \left( \frac{5\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) \right)$
25.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin 3^{-x^2} \sin 3^{x^2}$
26.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x^2 - 2ex + e^2}}{\arctan |ex - e^2|^3} \left( \frac{x^2}{e^2} - 1 \right)$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{\log_{\sin 1}(1 + \tan^2 x)} - 1}{(2x^2 + x) \sin(2x^2 + x)}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x - 1) \arcsin \left( \frac{1}{x} - 1 \right)}{\arcsin(x^3 - x)^2}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x} \sin(2^x - 1)}{\tan(2^{\sin^2 x} - 1)}$
30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x \tan x}{\sqrt[5]{\sin x + 1} - 1}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\log_2 \sin x - \log_2(\tan x + \sin x)}$

**Problema 1** Stabilire se le seguenti successioni sono monotone

$$\left( \arcsin \frac{n}{n^2 + 3} \right)_{n \geq 2} \quad \left( (\pi)^{\sin \frac{1}{n}} \right)_{n \geq 1} \quad \left( (-1)^n \log \frac{n+1}{n} \right)_{n \geq 1}$$

$$\left( \sqrt{4n^2 + 1} - 2n \right)_{n \geq 0} \quad \left( \frac{2^n}{n!} \right)_{n \geq 1} \quad \left( \arctan \log_{0,1} \left( 0, 1 + \frac{2^n}{n!} \right) \right)_{n \geq 1}$$

(Si ricorda che  $0! := 1$  e  $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  per ogni  $n \geq 1$ ).

**Problema 2** Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [0, 1] \\ \arcsin x - 1 & \text{se } x \in ] -1, 0[ \end{cases} \quad e \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } x > -1 \\ x+1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

1. stabilire, senza calcolarne l'espressione analitica, se la funzione composta  $g \circ f$  è monotona, limitata, iniettiva;
2. calcolare  $g \circ f$  e  $g \circ \left( f + \frac{\pi}{2} \right)$ ;
3. calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \left( f \left( \frac{1}{x^2} \right) \right)$ .

**Problema 3** Dimostrare che le seguenti funzioni

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} + \log x$$

$$g(x) := \begin{cases} e^{\frac{x-9}{\sqrt{x-3}}} & \text{se } x > 9 \\ e^6 & \text{se } x = 9 \\ \log_2 x + e^{x-3} - 3 & \text{se } 0 < x < 9 \end{cases}$$

sono surgettive.

**Problema 4** Dimostrare, utilizzando il teorema degli zeri, che l'equazione

$$e^x - e^{\sin x} = x - \sin x + 1$$

ha almeno una soluzione negativa.

**Problema 5** Dimostrare che l'equazione

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{x}} + \log \left( \frac{1}{2} + \sqrt{x} \right) = 0$$

ha una sola soluzione.

Determinare, inoltre, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{|x|}} + \log \left( \frac{1}{2} + \sqrt{|x|} \right) = 0$$

**Problema 6** Sia  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e tale che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ , sia inoltre

$$g(x) := \frac{1}{\log |1 + f(x)|} \quad (x \in X)$$

dove  $X := \{x \in ]0, 1[ \mid f(x) \neq -2, 0\}$ .

1.  $f$  è limitata?
2.  $g$  è limitata?

**Problema 7** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{2}} & \text{se } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \arccos x + 1 & \text{se } x \in [-1, 0[ \end{cases}$$

stabilire se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass e se le funzioni  $f$  ed  $e^{f(x)}$  sono limitate.

**Problema 8** Stabilire per quali valori di  $a$  e  $b$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log_2(1+5x^2)}{(2-x)^a} & \text{se } x \in [1, 2[ \\ b & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{2^x} & \text{se } x \in [-2, -1] \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

**Problema 9** Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$f(x) = |x|(3^{x+1} - 3) \quad f(x) = \arcsin(x^2 - 1) \quad f(x) = |\sin^5(x - 2) + 2|$$

**Problema 10** Date le funzioni

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{seno iperbolico})$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{coseno iperbolico})$$

dimostrare che:

1.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ,
2.  $(\sinh)' = \cosh$  e  $(\cosh)' = \sinh$ ,
3.  $\sinh$  è invertibile.

**Problema 11** Stabilire se la seguente funzione è derivabile

$$f(x) := \begin{cases} \arctan \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{se } x \in ]-1, 0[ \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

**Problema 12** Stabilire per quali valori di  $a$  e  $b$  la seguente funzione è derivabile

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(e^x - 1)}{\log x} & \text{se } x \in ]0, 1[ \\ ax + b + \sin x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

**Problema 13** Dimostrare, utilizzando il teorema di Lagrange, che

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

$$|\arctan e^x - \arctan e^y| \leq |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$