Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (Esonero I modulo) - 16 Febbraio 2011

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Matricola ______________________

Traccia A

(1) Data la funzione

$$f(x) = (x^3+1)\log(x^3+1) - x^3 - \frac{x^6}{2}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, asintoti ed intervalli di monotonia.
ii) determinare i punti di massimo e minimo assoluto di $|f|$ su $[0,1]$.
iii) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{\lambda f(x)}.$$

(2) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x|x|)}{\sqrt{\sin x^2 + \sin^2\sqrt{|x|}}} \left(\frac{\sin|x|}{x} + 2x^2\right). \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Dati gli insiemi

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2(x^2 + 2x\sqrt{x} + x + 1) \geq 0\}, \qquad \text{(7 punti)}$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(e^{|x|} - e^x) \leq 2\},$$

stabilire se $A \cap B$ è un insieme aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, pari e tale che $f(-1) = f(0) = 0$. Dimostrare che f ammette almeno due punti critici. (4 punti)

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (Esonero I modulo) - 16 Febbraio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola ______________________

Traccia B

(1) Data la funzione

$$f(x) = (2x^3+1)\log(2x^3+1) - 2x^3 - 2x^6, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, asintoti ed intervalli di monotonia.
ii) determinare i punti di massimo e minimo assoluto di $|f|$ su $[0,1]$.
iii) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\lambda f(x)}.$$

(2) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin x^2} + \sin^2\sqrt{|x|}}{\sin|x|}\left(\frac{\sin|x|}{x} + 2x^2\right). \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Dati gli insiemi

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x\sqrt{x} + x + 1) \le 0\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(2^{|x|} - 2^x) \le e\},$$

stabilire se $A \cap B$ è un insieme aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, dispari e tale che $f(-1) = f(0) = 0$. Dimostrare che f ammette almeno due punti critici. (4 punti)

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (Esonero I modulo) - 16 Febbraio 2011

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Matricola ______________________

Traccia C

(1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \frac{x+4}{2}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, asintoti ed intervalli di monotonia.
ii) determinare i punti di massimo e minimo assoluto di $|f|$ su $[0, 4]$.
iii) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \log^{\lambda}_{\frac{1}{e}} f(x).$$

(2) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\log\left(e^{\frac{1}{\arctan(x-2)}} + 1\right)}{\log\log(x-1)} \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Stabilire se l'insieme

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2arc\cos^2 x - \pi arc\cos x} + \sqrt[4]{x} \geq 0\right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

è aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(-1) = f(3)$. Dimostrare che $g(x) = e^{f(x)} + e^2$ ammette almeno un punto critico. (4 punti)

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (Esonero I modulo) - 16 Febbraio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola _____________________

Traccia D

(1) Data la funzione
$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} - \frac{x+5}{2}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, asintoti ed intervalli di monotonia.
ii) determinare i punti di massimo e minimo assoluto di $|f|$ su $[-1, 3]$.
iii) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to +\infty} \log^{\lambda} f(x).$$

(2) Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\log \log(x-1)}{\log\left(e^{\frac{1}{\arctan(x-2)}} + 1\right)}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Dati gli insiemi
$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2arc\cos^2 x - \pi arc\cos x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \geq 0 \right\} \qquad \text{(7 punti)}$$

stabilire se $A \cap B$ è un insieme aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(-1) = f(3)$. Dimostrare che $g(x) = e^{-f(x)} - e^2$ ammette almeno un punto critico. (4 punti)

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 28 Febbraio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola ______________________

Traccia A

(1) Data la funzione

$$f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^3}{3} - 2x, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se f è invertibile;
iii) stabilire se la funzione $g(x) := f(x^2+3)$ è invertibile.
iv) verificare che l'equazione,

$$\sqrt[3]{f(x)+1} = 1$$

ammette una sola soluzione.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x^3-1) + (\sqrt{x}-1)^\lambda}{\log(2x-1) - \log(3x-2) + \log(x^4-2x^2+2)}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Stabilire se l'insieme

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt[4]{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{2x^4 - 6x^2 + 8} \geq 0 \right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

è aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Siano $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni derivabili e tali che

i) $f(0) < g(0)$,

ii) $f'(x) < g'(x)$ per ogni $x \in [1, +\infty[$.

Dimostrare che $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in [1, +\infty[$. (4 punti)

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 28 Febbraio 2011

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Matricola ______________________

Traccia B

(1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - x \arctan x + \frac{1}{2} \log(1 + x^2), \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se f è invertibile;
iii) stabilire se la funzione $g(x) := f(-x)$ è invertibile.
iv) verificare che l'equazione,

$$\sqrt[3]{f(x) + 1} = 1$$

ammette una sola soluzione.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\log(2x - 1) - \log(3x - 2) + \log(x^4 - 2x^2 + 2)}{\sin(x^3 - 1) + (\sqrt{x} - 1)^\lambda}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Stabilire se l'insieme

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x^4 - 6x^2 + 8}{\sqrt[4]{\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2}} \geq 0 \right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

è aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Siano $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili e tali che

i) $f(0) < g(0) + 1$,

ii) $f'(x) < g'(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Dimostrare che $f(x) < g(x) + 1$ per ogni $x \in [0, 1]$. (4 punti)

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 28 Febbraio 2011

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Matricola ______________________

Traccia C

(1) Data la funzione

$$f(x) = 2^{e^x + x + \cos x}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se f è invertibile;
iii) stabilire se la funzione $g(x) := \dfrac{f(x)}{2^{e^x+x}}$ è limitata;
iv) verificare che l'equazione,

$$f^2(x) = 1$$

ammette una sola soluzione.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log \cos \dfrac{1}{x} + \cos \log \dfrac{1}{x}}{\arctan\left(\dfrac{1}{x^\lambda} + \dfrac{1}{x^2}\right)}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Stabilire se l'insieme

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\log^2\left(|e^{2x} - e^x| - 2\right)}{\log(|x|^3 + |x| + 1)} \geq 0 \right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

è aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Dimostrare che, per ogni $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin x^2 + \arccos x^2 = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(4 punti)}$$

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 28 Febbraio 2011

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ______________

Traccia D

(1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(e^x + x + \cos x)^5}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se f è invertibile;
iii) stabilire se la funzione $g(x) := \dfrac{f(x)}{e^x + x}$ è limitata;
iv) verificare che l'equazione,

$$f(x) = 0$$

ammette una sola soluzione.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan\left(\dfrac{1}{x^\lambda} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{\log\cos\dfrac{1}{x} + \cos\log\dfrac{1}{x} + 2}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Stabilire se l'insieme

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x|^3 + |x|}{\log^2\left(|e^{2x} - e^x| - 2\right) + 1} > 0 \right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

è aperto, chiuso, limitato superiormente, limitato inferiormente.

(4) Dimostrare che, per ogni $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin(-x) + \arccos(-x) = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(4 punti)}$$

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 4 Maggio 2011

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Matricola ______________________

Traccia A

(1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{|4x^2 - 4| \left(2x - \frac{1}{2}\right)}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se f è invertibile;
iii) determinare eventuali punti angolosi o cuspidali.
iv) determinare l'immagine di f.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 + x + 3}{3x^2 + 1} \right)^{x^\lambda}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Dato l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{e^{\arctan(x+1)} - e^{\arctan 2x}}{(x^5 - x)} > 0 \right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$

determinare i punti $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A e per gli insiemi $\mathbb{R} \setminus A$ e $A \cup \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

(4) Stabilire, utilizzando la definizione, se la seguente funzione è continua

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 2 & \text{se } x = 2. \end{cases} \qquad \text{(4 punti)}$$

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 4 Maggio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola _____________________

Traccia B

(1) Data la funzione
$$f(x) = \sqrt{|x^2-4|\left(x-\frac{1}{2}\right)}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se f è invertibile;
iii) determinare eventuali punti angolosi o cuspidali.
iv) determinare l'immagine di f.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2+x}\right)^{x^\lambda}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Dato l'insieme
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{e^{\arctan(x+1)} - e^{\arctan 2x}}{(x^5-x)} \le 0\right\}, \qquad \text{(7 punti)}$$
determinare i punti $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A e per gli insiemi $\mathbb{R}\backslash A$ e $A \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$.

(4) Stabilire, utilizzando la definizione, se la seguente funzione è continua
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ 5 & \text{se } x = 5. \end{cases} \qquad \text{(4 punti)}$$

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 8 Luglio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola _____________________

Traccia A

(1) Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{|x^2-x|}\right) - x, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 2$;
iii) stabilire se esistono punti a tangente verticale;
iv) dimostrare che l'equazione $\arcsin\left(\frac{x-1}{|x^2-x|}\right) - x = e^x - 3$ ha una soluzione maggiore di 1.

(2) Stabilire per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$, la seguente funzione è continua

$$f(x) := \begin{cases} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2}+3}} - e^{\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{5}{x-1}}}\right)\sin e^{\frac{\sqrt{2}}{x-1}} & x < 1, \\ \lambda & x = 1. \end{cases} \qquad \text{(7 punti)}$$

(3)Siano $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ed A_n l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+3} - \sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}}}{x^n - 1} < \sin 2n\pi. \qquad \text{(7 punti)}$$

Determinare i punti $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A_n.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 1$. Dimostrare che

$$\arctan\left(f(x) + \arctan f(x)\right) \geq 0 \qquad \text{(4 punti)}$$

in un intorno di $x = 0$.

Cambia qualcosa se $f(0) = 0$?

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 8 Luglio 2011

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Matricola ______________________

Traccia B

(1) Data la funzione

$$f(x) = x - \arcsin\left(\frac{x-1}{|x^2-x|}\right), \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 2$;
iii) stabilire se esistono punti a tangente verticale;
iv) dimostrare che l'equazione $x - \arcsin\left(\frac{x-1}{|x^2-x|}\right) = e^{-x} + 2$ ha una soluzione maggiore di 1.

(2) Stabilire per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$, la seguente funzione è continua

$$f(x) := \begin{cases} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}} - e^{\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}}}\right)\sin e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} & x < 0, \\ \lambda & x = 0. \end{cases} \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Siano $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ed A_n l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+3} - \sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}}}{x^n - 1} > \sin 2n\pi. \qquad \text{(7 punti)}$$

Determinare i punti $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A_n.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[3]{f(x) + \sqrt[3]{f(x)}} \geq 0 \qquad \text{(4 punti)}$$

in un intorno di $x = 0$.

Cambia qualcosa se $f(0) = 0$?

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 21 Luglio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola ______________________

Traccia A

(1) Data la funzione

$$f(x) = (\log x)^{\log x}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se la funzione $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^x}$ è limitata;
iii) stabilire se l'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ è aperto, chiuso, limitato, illimitato.
iv) determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $(\log x)^{\log x} = \lambda$.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\log\cos x)^2 + \tan^2 x}{\tan(\log(x^2+|x|) - \log|x|)} + |\tan x|^{\lambda}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \log_4\left(\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + 1 + \sqrt[4]{\arcsin\frac{x+2}{x-2} - \frac{\pi}{4}}\right). \qquad \text{(7 punti)}$$

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(1) = 0$. Posto

$$g(x) = f(x)|f(x)|, \qquad \text{(4 punti)}$$

stabilire se

i) g è continua;

ii) g è derivabile in 1.

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 21 Luglio 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola _____________________

Traccia B

(1) Data la funzione

$$f(x) = (\log 2x)^{\log 2x}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;

ii) stabilire se la funzione $g(x) = \dfrac{f(x)}{(2x)^{2x}}$ è limitata;

iii) stabilire se l'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ è aperto, chiuso, limitato, illimitato.

iv) determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $(\log 2x)^{\log 2x} = \lambda$.

(2) Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\log \cos x)^2 + \sin^2 x}{\sin(\log(x^2 + |x|) - \log |x|)} + |\sin x|^{\lambda}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(3) Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\left|\frac{x+4}{x-4}\right| + \sqrt{\arcsin \frac{x+4}{x-4} - \frac{\pi}{4}}}. \qquad \text{(7 punti)}$$

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(1) = 0$. Posto

$$g(x) = (f(x))^2 |f(x)|, \qquad \text{(4 punti)}$$

stabilire se

i) g è continua;

ii) g è derivabile in 1.

Politecnico di Bari - I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Corso A) a.a. 2010/2011
Esame di ANALISI MATEMATICA (I modulo) - 5 Settembre 2011

Cognome ____________________________ Nome ____________________________

Matricola _____________________

(1) Data la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{x}, \qquad \text{(12 punti)}$$

i) determinare dominio, eventuali asintoti ed intervalli di monotonia;
ii) stabilire se la funzione $g(x) = xf(x)$ è limitata;
iii) stabilire se l'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \frac{\pi}{24}\}$ è aperto, chiuso, limitato, illimitato;
iv) calcolare $\sup f$ ed $\inf f$, specificando se sono rispettivamente $\max f$ e $\min f$.

(2) Stabilire se la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2^x - 4}{\log(2^x - 3)} & x \in]2, 5] \\ \log 2 & x = 2 \\ 2^{\frac{1}{\log(2^x-3)}} + \log 2 & x \in \left[\dfrac{7}{4}, 2\right[\end{cases}, \qquad \text{(7 punti)}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

(3) Determinare i punti di flesso della seguente funzione

$$f(x) = \sin x - \cos x - \log\left(3 + \sqrt[3]{(\arctan \sin x + \operatorname{arccot} \sin x)^4}\right). \qquad \text{(7 punti)}$$

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari, derivabile e tale che

i) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$;

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$;

iii) $f'(x) \geq 0$ se $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ o se $|x| \geq 2$.

Disegnarne il grafico approssimativo e stabilire, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \lambda. \qquad \text{(4 punti)}$$