REAL OPTIONS
CAPITOLO 1 : CAPITAL BUDGETING

Chiara D'Alpaos, Michele Moretto e Sergio Vergalli
Università di Padova

Questa versione Settembre 2008

Contents

1 Richiami di Matematica Finanziaria

- **Se due capitali sono disponibili in momenti temporali diversi, occorre spostarli nel tempo: un capitale spostato nel futuro viene definito "montante" (M), spostato nel passato, invece, viene chiamato "valore scontato" o "valore attuale" (VA). Per far ciò ci si basa principalmente sul calcolo del saggio di interesse (o tasso), definito come l'interesse maturato dall'unità di moneta nell'unità di tempo: generalmente l'unità di moneta considerata è l'euro mentre l'unità di tempo è l'anno.**

1.0.1 L'interesse composto

Gli interessi maturati da un capitale in un determinato periodo di tempo maturano a loro volta altri interessi. In pratica, accade che alla fine di ciascuno dei periodi prefissati, l'interesse maturato nel periodo anziché essere pagato al creditore viene aggiunto al capitale: in questo modo l'interesse non è più distinguibile dal capitale iniziale e perciò si dice che "**si capitalizza**". Questa trasformazione comporta conseguentemente un aumento dell'ammontare del capitale, in quanto l'interesse del periodo successivo non viene calcolato sul capitale di partenza, ma sul montante riferito al termine del periodo precedente.

Per l'interesse composto, occorre definire la regola di capitalizzazione: occorre cioè stabilire ogni quanto tempo gli interessi maturati si trasformano in capitale. Sulla base della lunghezza del periodo si distingue:

1. **Interesse composto discontinuo annuo**: gli interessi vengono aggiunti al capitale che li ha prodotti una volta l'anno. E' la forma più usata;

2. **Interesse composto convertibile**. gli interessi maturati da un capitale si mutano a loro volta in capitale più volte nell'arco di un anno;

3. **Interesse composto continuo o matematico**: gli interessi si convertono in capitale in ogni istante. Seppur teoricamente concepibile, non trova nessuna applicazione pratica.

In generale, quando si parla di interesse composto si fa riferimento al discontinuo annuo. L'interesse viene aggiunto al capitale una volta l'anno e l'anno successivo l'interesse viene calcolato sul montante del periodo precedente. Se R_0 è il capitale iniziale, si ha dunque la seguente sequenza di interessi e montanti:

- fine del primo anno:

$$\begin{aligned} \text{Interesse} &: \ INT_1 = R_0 \cdot i \cdot 1 \\ \text{Montante} &: \ R_1 = R_0 + INT_1 = R_0 \cdot (1 + i \cdot 1) \end{aligned}$$

- fine del secondo anno:

$$\begin{aligned} \text{Interesse} &: \ INT_2 = R_1 \cdot i \cdot 1 \\ \text{Montante} &: \ R_2 = R_1 + INT_2 = R_1 \cdot (1 + i) = R_0 \cdot (1 + i)^2 \end{aligned}$$

L'interesse composto viene usato generalmente per operazioni a scadenza superiore o uguale all'anno. Dunque, per calcoli inerenti le prestazioni finanziare aventi periodo superiore all'anno, si hanno le seguenti formule:

- fine del primo anno:

$$\begin{aligned} \text{Interesse} &: \ INT_1 = R_0 \cdot i \cdot 1 \\ \text{Montante} &: \ R_1 = R_0 + INT_1 = R_0 \cdot (1 + i \cdot 1) \end{aligned}$$

- fine dell't-esimo anno:

$$\begin{aligned} \text{Interesse} &: \ INT_t = R_0 \cdot (q^t - 1) \\ \text{Montante} &: \ R_t = R_0 \cdot (q)^t \quad \text{in cui } q = 1 + i \end{aligned}$$

Lo spostamento dei capitali nel tempo avviene attraverso i coefficienti di anticipazione e di posticipazione. Il coefficiente di posticipazione consente di calcolare il valore che la somma attuale R_0 assumerà tra un certo periodo di tempo. Se tale periodo di tempo è inferiore all'anno si useranno le formule dell'interesse semplice, se invece è superiore all'anno si useranno le formule dell'interesse composto. In pratica, tale coefficiente consente di vedere come aumenta il capitale nel tempo, considerando che esso matura degli interessi.

Il coefficiente di anticipazione consente invece di calcolare il valore attuale di una somma futura. In pratica, si calcola il valore della somma al netto di tutti gli interessi che si perdono per il fatto che invece di acquisirla al momento attuale sarà acquisita trascorso un certo periodo t.

Per periodi inferiori o uguali all'anno si ha: coefficiente di posticipazione: $(1 + i \cdot t)$, coefficiente di anticipazione: $1/(1 + i \cdot t)$.

Per periodi superiori all'anno si ha: coefficiente di posticipazione: q^t, coefficiente di anticipazione: $1/q^t$.

1.0.2 Capitalizzazione continua

Si consideri un capitale A, investito per n anni ad un tasso annuo pari a r. Se gli interessi vengono capitalizzati una volta l'anno, il montante dell'investimento è:

$$A\,(1 + r)^n$$

Se gli interessi vengono capitalizzati m volte l'anno, il montante dell'investimento è

$$A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} \tag{1}$$

Si supponga che sia $A = \$100$, $r = 10$ per cento annuo (0,1) ed $n = 1$, cosicchè la durata dell'investimento è di 1 anno. Se gli interessi vengono capitalizzati una volta l'anno ($m = 1$), questa formula mostra che i \$100 diventano

$$\$100x1,1 = \$110$$

Se gli interessi vengono capitalizzati due volte l'anno ($m = 2$), la formula mostra che i \$100 diventano

$$\$100x1,05x1,05 = \$110,25$$

Se gli interessi vengono capitalizzati quattro volte l'anno ($m = 4$), la formula mostra che i \$100 diventano

$$\$100x1,025^4 = \$110,38$$

La seguente tabella mostra quale sia l'effetto di un ulteriore aumento della frequenza della capitalizzazione (cioè l'aumento di m).

Frequenza di capitalizzazione	Valore di \$100 dopo 1 anno
Annuale (m=1)	110,00
Semestrale (m=2)	110,25
Trimestrale (m=4)	110,38
Mensile (m=12)	110,47
Settimanale (m=52)	110,51
Giornaliera (m=365)	110,52

Al limite, per m che tende ad infinito, si ha la capitalizzazione continua (*continuous compounding*). Con la capitalizzazione continua, un capitale A investito per n anni al tasso r diventa

$$Ae^{rn} \tag{2}$$

dove e è la costante matematica $2,71828$. Nell'esempio della tabella, $A =$ \$100, $n = 1$ ed $r = 0,1$, per cui il valore finale di A in base alla capitalizzazione continua risulta pari a

$$\$100e^{0,1} = \$110,52$$

Questo valore è uguale (fino al secondo decimale) a quello che si ottiene con la capitalizzazione giornaliera. Per la maggior dei fini pratici, la capitalizzazione continua si può ritenere equivalente alla capitalizzazione giornaliera Investire per n anni un certo capitale ad un tasso r composto continuamente equivale a moltiplicarlo per e^{rn}. Attualizzarlo per n anni ad un tasso r composto continuamente equivale a moltiplicarlo per e^{-rn}.

La frequenza di capitalizzazione degli interessi definisce l'unità di misura dei tassi di interesse. I tassi espressi con una certa frequenza di capitalizzazione possono essere convertiti nei tassi equivalenti espressi con una diversa frequenza di capitalizzazione. Ad esempio, nella tavola si vede che il $10,25$ per cento composto annualmente equivale al 10 per cento composto semestralmente.

Sia r_c un tasso di interesse composto continuamente e r_m il tasso equivalente composto m volte l'anno. In base alle equazioni (2) e (1) si ha

$$Ae^{r_c n} = A\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mn}$$

ossia

$$e^{r_c n} = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mn}$$

Pertanto

$$r_c = m \ln \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)$$

e

$$r_m = m \left(e^{r_c/m} - 1\right)$$

Queste equazioni possono essere utilizzate per convertire un tasso composto m volte l'anno in un tasso composto continuamente e viceversa. La funzione ln è la funzione del logaritmo naturale. E' definita in modo tale che se $y = ln(x)$ allora $x = e^y$.

1.0.3 Tassi di interesse nominali e reali

L'inflazione può influenzare in maniera significativa il potere d'acquisto di una certa somma di denaro. Se in t_0 si possiedono 10 euro, con essi possiamo acquistare un certo insieme di beni, per esempio 6 pizzette dal costo di un euro ciascuna e 2 panini dal costo di 2 euro ciascuno. Se nell'arco di un anno il prezzo dei panini dovesse aumentare, fino a 3 euro cadauno e se il prezzo delle pizzette dovesse rimanere stabile, in t_1 i nostri 10 euro iniziali non ci permetterebbero di acquistare il medesimo insieme di beni (paniere) dell'anno t_0 (potremmo acquistare solo 4 pizzette e due panini, per esempio). Ciò implica che il nostro potere d'acquisto si è ridotto a causa dell'incremento dei prezzi, cioè a causa dell'inflazione.

Si può seguire il medesimo ragionamento focalizzando la nostra attenzione sugli investimenti: se si investono oggi 1.000 euro in un deposito bancario ad un tasso di interesse del 10%, significa che trascorso un anno otteremo 1.100 Euro. Quale paniere di beni si potrà riuscire a comperare con quei 1.100 euro dipende fortemente dal tasso di inflazione. Se i prezzi di beni e servizi sono aumentati nel corso dell'anno più del 10%, significa che si è perso in termini di potere d'acquisto.

Per rappresentare l'andamento dei livelli dei prezzi al consumo possono essere utilizzati diversi indici. Il più conosciuto ed utilizzato in Italia è l'Indice dei Prezzi al Consumo che fornisce una misura del costo sostenuto dalla "famiglia tipo" per acquisire un determinato paniere di beni. Le variazioni di tale indice rappresentano il tasso di inflazione.

Mentre il flusso di cassa corrente o nominale non tiene conto del tasso di inflazione, il flusso di cassa costante o reale è minore del flusso di cassa nominale e si ottiene a partire da quest'ultimo:

$$\text{flusso di cassa reale} = \frac{\text{flusso di cassa corrente}}{(1+\pi)^t}$$

in cui π è il tasso di inflazione e t è il periodo.

Nell'esempio precedentemente esposto, se in un anno il prezzo dei beni aumenta del 6%, la moneta potrà acquistare un numero ed una quantità inferiore di beni rispetto ad oggi. Trascorso un anno, infatti, con 1.100 euro sarà possibile acquistare una quantità di beni pari a quella acquistabile oggi con $1.037,74$ Euro:

$$\frac{1.100}{1.06} = 1037,74$$

Si consideri un ulteriore esempio. Si ipotizzi di investire una somma di 1.000 euro per 20 anni al tasso del 10% annuo. Il flusso di cassa nominale futuro sarà pari a $1.000 \cdot 1,1^{20} = 6.725,50$ Euro, ma ipotizzando un tasso di inflazione del 6%, il flusso di cassa reale sarebbe $6.725,50/1,06^{20} = 2.097,67$ euro. Ciò implica che anche se l'ammontare di moneta è circa 7 volte maggiore, è possibile acquistare solo una quantità all'incirca doppia di beni.

Il tasso offerto dalle banche è un tasso nominale e non tiene conto di alcuna correzione derivante dagli effetti dell'inflazione.

Il tasso di interesse reale, invece è il saggio di interesse nominale, depurato dagli effetti dell'inflazione. Se si definisce i il tasso nominale e r è il tasso reale, allora la relazione esistente fra tasso di interesse nominale, tasso di interesse reale e inflazione è data dalla seguente formula:

$$1 + i = (1 + r)(1 + \pi)$$

1.1 Il valore attuale

- **Il valore attuale VA di un ricavo futuro R_t è la somma che investita oggi ad un tasso di sconto fissato, r, garantirà di ottenere il valore del ricavo futuro.**

- **Per calcolare il valore attuale, i cash flow positivi futuri, R_t, vanno scontati tramite il tasso r. Il tasso di rendimento è il premio che gli investitori richiedono per accettare la posticipazione di un ricavo.**

- **Il tasso di rendimento è spesso chiamato tasso di attualizzazione (di sconto), o costo opportunità del capitale, in quanto rappresenta la remunerazione a cui si rinuncia investendo ad esempio in un progetto piuttosto che in titoli finanziari.**

- Il valore attuale può essere ottenuto moltiplicando il ricavo di domani per un fattore di sconto FA minore di 1:

$$VA = R_t \cdot (FA)$$

- Il fattore di sconto è espresso come il reciproco di 1 sommato ad un tasso di rendimento $r : FA = \frac{1}{1+r} < 1$ quindi:

$$VA = \frac{R_t}{1+r}$$

- Se a fronte di un ricavo futuro R_1 ci sono dei costi iniziali per dare avvio al progetto che indichiamo con I[1], possiamo calcolare il **valore attuale netto** del progetto:

$$VAN = VA - I = \frac{R_1}{1+r} - I \qquad (3)$$

- **Il progetto può valere più di quello che costa se (3) $>$ 0. Il** VAN **dipende unicamente dai flussi di cassa attesi del progetto e dal costo opportunità del capitale** (rappresenta un'alternativa alla quale si rinuncia per intraprendere il particolare progetto d'investimento analizzato).

- Se consideriamo un periodo di T anni e oltre al costo iniziale I, il progetto richiede anche dei costi operativi C_t, il valore attuale netto risulta:

$$VAN = \sum_{t=1}^{T} \frac{R_t - C_t}{(1+r)^t} - I \qquad (4)$$

  in cui R_t è il ricavo all'anno t, C_t è il costo operativo (variabile e/o fisso) in t, I è il costo dell'investimento e r è il costo opportunità del capitale specifico di quell'investimento, supposto costante per t anni.

[1] Molte volte I si indica con R_0 ed è negativo.

- Nel continuo, la (4) diventa:

$$VAN = \int_0^t (R_s - C_s)e^{-rs}ds - I \tag{5}$$

- Qualora il tasso di sconto vari al variare del periodo la (4) e la (5) diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} VAN &= \frac{R_1 - C_1}{(1+r_1)} + \frac{R_2 - C_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + ...\frac{R_n - C_n}{(1+r_1)(1+r_2)....(1+r_n)} - I \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t - C_t}{\prod_{j=1}^{t}(1+r_j)} - I \end{aligned}$$

- Oppure se il tasso varia all'interno di un solo periodo:

$$\begin{aligned} VAN &= \frac{R_1 - C_1}{(1+r_1)} + \frac{R_2 - C_2}{(1+r_2)^2} + ...\frac{R_n - C_n}{(1+r_n)^n} - I \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t - C_t}{(1+r_t)^t} - I \end{aligned}$$

e nel continuo:

$$VAN = \int_0^t (R_s - C_s)e^{-\int_0^s r(x)dx}ds$$

1.2 Come valutare una rendita perpetua a rendimento crescente

- Si supponga che un benefattore voglia garantire una rendita perpetua a rendimento crescente e pari mediamente ad un tasso g, e sia R_1, la rendita del periodo t_1:

$$\begin{aligned} VA &= \frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \frac{R_3}{(1+r)^3} + ... \\ &= \frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_1(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{R_1(1+g)^2}{(1+r)^3} + ... \end{aligned} \tag{6}$$

- Se $r > g$, la somma della serie geometrica (6) è:

$$\begin{aligned} VA &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{R_1(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} \equiv \frac{R_1}{1+g} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t} \\ &\equiv \frac{R_1}{1+g}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t - 1\right] \equiv \frac{R_1}{1+g}\left[\frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} - 1\right] \\ &\equiv \frac{R_1}{1+g}\left[\frac{1+r}{r-g} - 1\right] \equiv \frac{R_1}{r-g}. \end{aligned} \tag{7}$$

- E' da notare che la somma della serie geometrica inizia da $t = 1$. Cioè la rendita perpetua fornisce il primo flusso al periodo uno. Se assumessimo che anche al periodo corrente ci fosse un flusso di cassa, la formula si ridurrebbe nel seguente modo.

$$\begin{aligned} VA &= R_0 + \frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \frac{R_3}{(1+r)^3} + ... \\ &= R_0 + \frac{R_0(1+g)}{(1+r)} + \frac{R_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{R_0(1+g)^3}{(1+r)^3} + ... \end{aligned}$$

che nel caso di $g = 0$ si riduce a:

$$VA = R_0 \frac{1+r}{r}$$

- In tempo continuo la (6) diventa:

$$VA = \int_0^{\infty} R_t e^{-rt} dt \tag{8}$$

dove i flussi di cassa sono descritti dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dR_t}{R_t} = g dt \tag{9}$$

- Poichè dalla (9) si ottiene $R_t = R_0 e^{gt}$, sostituita nel VA rende questo uguale a (7):

$$VA = \int_0^{\infty} R_0 e^{gt} e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} R_0 e^{-(r-g)t} dt = \frac{R_0}{r-g} \tag{10}$$

1.2.1 Come valutare una rendita annua

- Una rendita annua è un'attività che corrisponde ogni anno una somma fissa R per un numero finito di anni t. Un esempio di rendita annua è un mutuo ipotecario da restituire a rate costanti oppure una vendita rateale. Il valore attuale risulta[2]:

$$VA = R[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t}] \tag{11}$$

- Si nota che se $t \to \infty$, il secondo termine tende a zero e la rendita diventa perpetua:

$$VA = \frac{R}{r}$$

  che risulta uguale a (7) e (10) nel caso di $g = 0$.

2 I CRITERI DI SCELTA DEGLI INVESTIMENTI

2.1 IL CAPITAL BUDGETING

Per operare un'impresa ha bisogno di una varietà di *attività reali.* Molte di tali attività sono tangibili, ad esempio gli impianti, gli stabilimenti ecc., altre sono intangibili quali la tecnologia, i marchi e i brevetti.

Per ottenere le risorse monetarie necessarie un'impresa vende *attività finanziarie* o titoli di credito, i quali hanno valore perchè conferiscono dei diritti sulle attività reali dell'impresa.

Una buona decisione di investimento o di *capital budgeting* porta all'acquisto di una attività reale che contribuisce all'incremento del valore dell'impresa.

Le decisioni di capital budgeting sono prese sulla base di due principali criteri di scelta:

la regola del VAN

[2] C'è un semplice trucco per ottenere la (11). Si calcola la rendita perpetua che inizia da $t = 1$ e si sottrae la rendita perpetua che inizia dal tempo $t + 1$. Da (7) la rendita perpetua che iniza a $t = 1$ è $\frac{R}{r}$, mentre la rendita perpetua che inizia al tempo $t + 1$ è la stessa scontata di $t + 1$ periodi, cioè $\frac{1}{(1+r)^t}\frac{R}{r}$.

la regola del tasso interno di rendimento (TIR)

Ad esse si aggiunge anche le regole del rendimento medio contabile e del tempo di recupero che non vengono prese in considerazione in questa trattazione[3].

2.2 La regola del VAN

- Si supponga di dover analizzare una proposta di investimento di 1.000.000 di Euro relativa alla realizzazione di una grande infrastruttura (il progetto A).
  - In primo luogo è necessario prevedere i flussi di cassa generati da A durante la sua vita economica.
  - In secondo luogo va calcolato il costo opportunità del capitale che possiamo indicare con $\hat{\alpha}$, che dovrebbe riflettere sia il valore temporale del denaro sia la rischiosità dell'investimento. In generale $\hat{\alpha} > r_f$, dove con r_f indichiamo il tasso di interesse privo di rischio.
  - Vanno poi scontati i flussi di cassa futuri utilizzando il costo opportunità, in modo così da ottenere il valore attuale VA del progetto.
  - Infine, si deve calcolare il VAN sottraendo al VA il costo dell'investimento di 1.000.000 di Euro.
  - Il progetto A viene realizzato solo se il suo VAN è positivo.
- E' opportuno investire fino al punto in cui il VAN è massimo. Tra due progetti aventi VAN positivo è preferibile realizzare il progetto avente VAN maggiore.
- **Il VAN dipende unicamente dai flussi di cassa attesi del progetto e dal costo opportunità del capitale**.
- Se si devono analizzare due progetti di investimento A e B, il VAN del progetto congiunto è pari alla somma dei VAN dei singoli progetti:

$$VAN(A+B) = VAN(A) + VAN(B)$$

[3]Si rimanda a tal proposito a Brealey, Meyers e Sandri (1996), Capital Budgeting, McGraw-Hill, Milano.

Questo non implica che se il VAN del progetto A è negativo mentre quello del progetto B è positivo con un valore $VAN(A+B)$ positivo si debba investire su entrambi i progetti.

2.2.1 Il valore attuale netto in condizioni di certezza

- Se l'investitore è certo dei flussi di cassa $R_t - C_t$ il progetto che si sta considerando è privo di rischio.
- Se il progetto non è rischioso, **il tasso di rendimento (o costo opportunità del capitale) richiesto è quello che si otterrebbe da altre attività non rischiose di pari rendimento. Per esempio il rendimento offerto dai titoli di Stato.**
- Poichè abbiamo indicato con r_f il tasso di rendimento privo di rischio (*risk-free)*, il VAN diventa:

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t - C_t}{(1+r_f)^t} - I \tag{12}$$

2.2.2 Esempio di VAN in condizione di certezza

- Si ipotizzi che un progetto di investimento generi i seguenti flussi di cassa intesi come ricavi meno costi fissi e/o operativi (espressi in migliaia di Euro) e che il tasso di sconto sia pari al 10%:

t=0	t=1	t=2	t=3
0	−100	0	+200

- Il valore attuale netto dell'investimento VAN (espresso in migliaia di Euro) è:

$$VAN = -\frac{100}{1,1} + \frac{200}{1,1^3} = 77,53$$

2.3 La regola del TIR

- **Il tasso interno di rendimento TIR è il tasso che rende nullo il VAN:**

$$VAN = \sum_{t=1}^{T} \frac{R_t - C_t}{(1+TIR)^t} - I = 0 \qquad (13)$$

- Per ricavare il tasso interno di rendimento di un progetto della durata di t anni è necessario, quindi, risolvere la (13).

- **Una volta calcolato il TIR del progetto questo va confrontato con un tasso soglia, ad esempio, con il costo opportunità del capitale $\hat{\alpha}$, e procedere alla realizzazione dell'investimento solo se il TIR risulta maggiore del tasso soglia $\hat{\alpha}$. Se due progetti hanno un TIR superiore al tasso soglia è preferibile il progetto avente TIR maggiore.**

- La regola del VAN e del TIR forniscono le medesime indicazioni su decisioni di investimento nel caso in cui il VAN sia una funzione monotona decrescente del tasso di sconto. Sebbene i due criteri siano equivalenti dal punto di vista formale, la regola del TIR può indurre in errore.

3 RISCHIO E INCERTEZZA

3.1 Il valore attuale netto in condizioni di incertezza

- **In condizioni di certezza l'investitore massimizza il suo profitto scegliendo gli investimenti che posseggono il VAN più alto, calcolato scontando i cash flow futuri al tasso di interesse privo di rischio. In condizioni di certezza il tasso risk-free rappresenta quindi il costo opportunità del capitale per quel investitore.**

- **Lo stesso modo di procedere può essere adottato anche quando gli investimenti sono rischiosi purchè si interpreti il concetto di investimenti comparabili nel senso di investimenti appartenenti alla stessa classe di rischio.**

- **Il costo opportunita del capitale di un particolare progetto in condizioni di incertezza può essere quindi determinato come il tasso di rendimento che l'investitore richiederebbe ad un titolo finanziario (per esempio un'azione o un portafoglio di azioni) che abbia come attività sottostante un'attività simile a quella del progetto in questione**

3.1.1 L'approccio del tasso di sconto aggiustato per il rischio (RADR - Risk Adjusted Discount Rate)

- **I concetti di valore attuale e costo opportunità rimangono ancora validi anche nel caso di investimenti rischiosi, è però necessario ragionare in termini di flussi di cassa attesi e di rendimenti attesi.**

- Se assumiamo che R_t e C_t siano delle varibili stocastiche e indichiamo con $\widehat{\alpha}$ il tasso di sconto aggiustato per il rischio (cioè il costo opportunità del capitale di quel particolare investimento), abbiamo:

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{E_0(R_t - C_t)}{(1+\widehat{\alpha})^t} - I \tag{14}$$

oppure

$$VAN = E_0 \left[\int_0^t (R_s - C_s) e^{-\widehat{\alpha} s} ds \right] - I \tag{15}$$

dove $E_0(.)$ è il valore atteso condizionato delle varibili R e C fatto con le informazioni disponibili al tempo $t = 0$, quando l'investitore deve prendere le decisioni.

3.1.2 Valore attuale, tassi di rendimento e costo opportunità

Esempio 1

- Si ipotizzi di investire in un progetto immobiliare che comporta la realizzazione di un immobile ad uso uffici, di rischiosità pari a quella di un investimento nel mercato finanziario avente un rendimento atteso pari a $\widehat{\alpha} = 12\%$. Il 12% è il costo opportunità del capitale.

- Assumendo che $E(R_1) = 400.000$ Euro sia il flusso di cassa positivo atteso generato dall'investimento immobiliare derivante ad esempio dalla vendita degli immobili realizzati dopo un anno, il valore attuale dell'investimento è:

$$VA = \frac{E(R_1)}{1+\widehat{\alpha}} \equiv \frac{400.000}{1,12} \equiv 357.143 \ Euro$$

- Se, inoltre, $I = 350.000$ Euro è il costo relativo alla realizzazione degli immobili oggi, il valore attuale netto risulta:

$$VAN = 357.143 - 350.000 \equiv 7.143 \ Euro$$

- **Se la previsione relativa al flusso di cassa generato è corretto e il costo opportunità del capitale è effettivamente pari al** 12%**, la proprietà immobiliare all'inizio dei lavori dovrebbe valere** 357.143 **Euro. Se si tentasse di vendere la proprietà ad una cifra superiore, non si troverebbero acquirenti, poiché la proprietà offrirebbe un tasso di rendimento inferiore al** 12% **che è invece il rendimento offerto dal mercato dei titoli finanziari.**

- La costruzione dell'immobile ad uso uffici è, quindi, economicamente vantaggiosa, in quanto ha un valore attuale netto positivo. Il valore attuale del progetto, infatti, è pari al flusso di cassa futuro comandato dal progetto scontato al tasso di rendimento offerto dai titoli finanziari.

- **Il rendimento del capitale investito è il profitto espresso in rapporto alla spesa iniziale:**

$$\textbf{Rendimento} = \frac{profitto}{investimento} \equiv \frac{400.000 - 350.000}{350.000} = 14\% > 12\%$$

- Se il rischio connesso all'investimento immobiliare è analogo al rischio che si affronta investendo nel mercato finanziario, il rendimento a cui si rinuncia è pari al 12%.

- **Poiché il rendimento dell'immobile è pari al** 14% **, è opportuno intraprendere l'investimento.**

Esempio 2

- **Il costo opportunità del capitale di un investimento in un progetto è il tasso di rendimento atteso richiesto dagli investitori per un investimento in titoli finanziari di pari rischiosità.**

- **Il valore attuale che si ottiene scontando i flussi di cassa attesi emessi dal progetto al suo costo opportunità del capitale è l'ammontare che gli investitori sarebbero disposti a pagare per il progetto.**

- Assumiamo ora che un progetto possa generare dei flussi di cassa incerti. In particolare, si ipotizzi di poter scegliere se investire $I = 100.000$ Euro oggi per ricevere, a seconda dell'andamento dell'economia, alla fine dell'anno le seguenti somme:

80.000 in caso di recessione

110.000 in caso normale

140.000 in caso di crescita

- Se i tre stati dell'economia sono egualmente probabili, il ritorno atteso dell'investimento al tempo $t = 1$ sarebbe:

$$E(R_1) = \frac{1}{3}80.000 + \frac{1}{3}110.000 + \frac{1}{3}140.000 = 110.000 \ Euro$$

- Il rendimento atteso:

$$\begin{aligned} \textbf{Rendimento atteso progetto} &= \\ \alpha &= \frac{E(R_1) - I}{I} \equiv \frac{110.000 - 100.000}{100.000} \equiv 10\% \end{aligned}$$

- Si ipotizzi, inoltre, di sapere che il prezzo di un'azione di un'impresa A abbia prospettive incerte con distribuzione di probabilità pari a quella degli stati dell'economia. Il prezzo corrente dell'azione è di $A = 96,95$ Euro e trascorso un anno, a seconda dello stato dell'economia il prezzo potrà variare come segue:

80 in caso di recessione

110 in caso normale

140 in caso di crescita

- Essendo i tre stati dell'economia ugualmente probabili, il valore atteso dell'azione al tempo $t = 1$ è:

$$E_0(A_1) = \frac{80 + 110 + 140}{3} = 110 \ Euro$$

- Investendo quindi nell'acquisto dell'azione vengono spesi 96,95 Euro oggi per avere valore atteso di 110 Euro a fine anno. Il rendimento atteso dell'azione è:

$$\begin{aligned} \textbf{Rendimento atteso azione A} &= \\ \alpha_A &= \frac{E(A_1) - A}{A} \equiv \frac{110 - 96,95}{96,95} \equiv 15\% \end{aligned}$$

- 15% **è il rendimento atteso a cui si rinuncia investendo nel progetto piuttosto che sul mercato azionario ed è, quindi, il costo opportunità del capitale.**

- **Torniamo ora al progetto. Per valutare il progetto è necessario attualizzare i flussi di cassa attesi al costo opportunità del capitale che risulta essere** $\hat{\alpha} \equiv \alpha_A = 15\%$**, cioè quello che si otterrebbe se si investisse nel titolo alternativo A:**

$$VA = \frac{E(R_1)}{1 + \hat{\alpha}} \equiv \frac{110.000}{1,15} \equiv 96.950 \ Euro$$

- **Il valore attuale netto è:**

$$VAN = 96950 - 100.000 = -4.350 \ Euro$$

- **Il VAN è negativo e il progetto di investimento, pertanto, non va intrapreso. Infatti, ricordando che il rendimento atteso del progetto è:**

$$\begin{aligned} \textbf{Rendimento atteso progetto} &= \\ \alpha &= \frac{110.000 - 100.000}{100.000} = 10\% < 15\% \end{aligned}$$

- **Il rendimento atteso del progetto è inferiore al rendimento che gli investitori si attendono investendo nel mercato azionario** $\hat{\alpha}$.

3.1.3 L'approccio dell'Equivalente Certo (EC)

- **Secondo questo approccio i flussi di cassa futuri incerti sono rimpiazzati dagli "equivalenti certi":**

- **L'equivalente certo è l'ammontare che, pagato ad una certa data t, rende indifferente la scelta alla stessa data fra quell'ammontare certo ed il risultato atteso da ricevere per un investimento rischioso. Ciò vuol dire che il valore di un progetto può essere stimato in due modi: prendendo i suoi flussi di cassa disponibili attesi e scontandoli a un costo medio ponderato del capitale aggiustato in funzione del rischio, oppure aggiustare i flussi di cassa rispetto al rischio e scontarli al tasso privo di rischio. Cioè:**

$$VA = \frac{\hat{R}_t - \hat{C}_t}{(1 + r_f)^t} = \frac{E(R_t - C_t)}{(1 + \hat{\alpha})^t} \tag{16}$$

  dove $E(R_t - C_t)$ è il valore atteso dei flussi di cassa futuri e $\hat{\alpha}$ è il costo opportunità del capitale o il tasso di sconto aggiustato per il rischio.

- Dalla (16), il VAN diventa:

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{\hat{R}_t - \hat{C}_t}{(1 + r_f)^t} - I$$

  dove $\hat{R}_t$ e $\hat{C}_t$ sono gli "**equivalenti certi**" e r_f è il tasso privo di rischio..

- **Il premio per il rischio del nostro particolare progetto è definito come la differenza:**

$$p_t = E(R_t - C_t) - (\hat{R}_t - \hat{C}_t) \tag{17}$$

- **Quando usiamo questo metodo ci domandiamo: Qual è il minor risultato certo $\hat{R}_t - \hat{C}_t$ con cui si scambierebbe il flusso di cassa incerto $R_t - C_t$ gravato dal rischio? Dalla (17) abbiamo che per calcolare gli equivalenti certi dobbiamo essere in grado di stimare il premio per il rischio:**

$$(\hat{R}_t - \hat{C}_t) = E(R_t - C_t) - p_t$$

- **Il premio per il rischio importante per l'investitore è quello di mercato, cioè quello dell'investitore medio nel mercato. Il calcolo del premio per il rischio è il tema della sezione 3, tuttavia dalla (16) trascurando il tempo per semplicità possiamo scrivere.**

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} - r_f &= (1 + r_f)\frac{E(R_t - C_t) - (\hat{R}_t - \hat{C}_t)}{(\hat{R}_t - \hat{C}_t)} \\ &= \frac{E(R_t - C_t) - (\hat{R}_t - \hat{C}_t)}{(\hat{R}_t - \hat{C}_t)} + r_f \frac{E(R_t - C_t) - (\hat{R}_t - \hat{C}_t)}{(\hat{R}_t - \hat{C}_t)}\end{aligned}$$

- nell'ipotesi che $r_f \frac{E(R_t - C_t) - (\hat{R}_t - \hat{C}_t)}{(\hat{R}_t - \hat{C}_t)} \simeq 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= r_f + \frac{E(R_t - C_t) - (\hat{R}_t - \hat{C}_t)}{(\hat{R}_t - \hat{C}_t)} \\ &= r_f + \text{Premio per il rischio in } \%\end{aligned} \tag{18}$$

- Indicando con λ il **premio di rischio di mercato**, si può mostrare (vedi più avanti) che:

$$p_t = \lambda cov(R_t - C_t, \tilde{\alpha}_{Mt})$$

dove $\tilde{\alpha}_{Mt}$ il tasso di rendimento di mercato.

3.1.4 Il Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- Si consideri un investitore che possiede al tempo zero una ricchezza iniziale pari a w e che si ponga il problema di come investirla.

- Si assuma che l'investitore abbia a disposizione m titoli rischiosi e un titolo non rischioso. I titoli rischiosi hanno un rendimento stocastico pari a $\tilde{\alpha}_i$ con $i = 1, ...m$ mentre $\tilde{\alpha}_0 = r_f$ indica il rendimento del titolo non rischioso.

- Indicando con x_i la quota della ricchezza investita nel titolo i-esimo, con $\sum_{i=0}^{m} x_i = 1$, al periodo uno l'investitore si trova con una ricchezza complessiva pari a:

$$W = w \sum_{i=0}^{m} x_i (1 + \tilde{\alpha}_i) \tag{19}$$

- Il problema dell'investitore al tempo zero può essere riassunto quindi nel seguente modo:

$$\max_{x_i} E[u(W)] \tag{20}$$

dove $u(.)$ rappresenta la funzione di utilità di Von Neumann-Morgenstern con le usuali proprietà che $u' > 0$ e $u'' < 0$.

- La (20) può essere riscritta in una forma più semplice facendo uso del vincolo di bilancio sul portafoglio di titoli. Il vincolo di bilancio in questo caso è:

$$x_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \tag{21}$$

in modo tale che $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} x_{i.}$ Sostituendo questa espressione in (19) e raccogliendo opportunamente i termini si ottiene:

$$\begin{aligned} W &= w\left[x_0(1+r_f) + \sum_{i=1}^{m} x_i(1+\tilde{\alpha}_i)\right] \qquad (22) \\ &= w\left[(1 - \sum_{i=1}^{m} x_i)(1+r_f) + \sum_{i=1}^{m} x_i(1+\tilde{\alpha}_i)\right] \\ &= w\left[(1+r_f) + \sum_{i=1}^{m} x_i(\tilde{\alpha}_i - r_f)\right] \end{aligned}$$

- Avendo riscritto il vincolo di bilancio secondo la (22), si deve ora risolvere un problema di massimizzazione non vincolata per le variabili $x_1, x_2, ...x_m$:

$$\max_{x_1,...x_m} Eu\left(w\left[(1+r_f) + \sum_{i=0}^{m} x_i(\tilde{\alpha}_i - r_f)\right]\right)$$

- Differenziando rispetto a x_i si ottiene la condizione del primo ordine:

$$E[u'(W)(\tilde{\alpha}_i - r_f)] = 0 \qquad \text{per } i = 1, ...m \tag{23}$$

la quale può essere riscritta come

$$E[u'(W)\tilde{\alpha}_i] = r_f E[u'(W)] \tag{24}$$

Poichè la covarinaza fra due variabili stocastiche può essere scritta come $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ e quindi $E(XY) = cov(X,Y) + E(X)E(Y)$, la (24) diventa:

$$cov[u'(W), \tilde{\alpha}_i]) + E(\tilde{\alpha}_i)E[u'(W)] = r_f E[u'(W)]$$

che, con le opportune sostituzioni, diventa:

$$E(\tilde{\alpha}_i) = r_f - \frac{1}{E[u'(W)]} cov[u'(W), \tilde{\alpha}_i] \tag{25}$$

- L'espressione (25) evidenzia che il rendimento atteso di un qualunque *asset* è la somma di due componenti: il tasso di rendimento privo di rischio e il premio di rischio. Il premio di rischio dipende dalla covarianza tra l'utilità marginale del portafoglio W (**ricchezza complessiva)** e il rendimento dell'*asset* stesso. Si consideri per esempio un *asset* il cui rendimento è **positivamente** correlato con W. Dall'ipotesi di avversione al rischio secondo cui l'utilità marginale è decrescente**,** $u'' < 0$, ne discende che la correlazione tra l'*asset* e l'utilità marginale della ricchezza totale è negativa, $cov[u'(W), \tilde{\alpha}_i] < 0$. Pertanto, tale *asset*, per **compensare** la sua *rischiosità,* deve avere un rendimento atteso che è maggiore del tasso di rendimento privo di rischio. Al contrario se l'*asset* è **negativamente** correlato con il portafoglio W, ha un rendimento atteso che è inferiore al tasso di rendimento privo di rischio.

- La relazione di equilibrio (25) vale, ovviamente, quale che sia il titolo che stiamo considerando, in particolare quindi vale anche per un titolo composito (portafoglio) di mercato che chiamiamo M purchè questo sia tra gli m che compongono il portafoglio W

$$E(\tilde{\alpha}_i) - r_f = \frac{cov(u', \tilde{\alpha}_i)}{E(u')}$$

e:

$$E(\tilde{\alpha}_M) - r_f = \frac{cov(u', \tilde{\alpha}_M)}{E(u')}$$

- Dividendo il primo per il secondo otteniamo:

$$\frac{E(\tilde{\alpha}_i) - r_f}{E(\tilde{\alpha}_M) - r_f} = \frac{cov(u', \tilde{\alpha}_i)}{cov(u', \tilde{\alpha}_M)} \tag{26}$$

- Se ora assumiamo che la distribuzione di equilibrio x_i sia la stessa distribuzione di equilibrio di mercato che compone il titolo composito M, allora risulta che il rendimento marginale che ottengo dal portafoglio W coincide con il rendimento di mercato $\tilde{\alpha}_M$, cioè:

$$u'(W) = \tilde{\alpha}_M \tag{27}$$

- Pertanto sostituendo la (26) in (27), si ha:

$$\frac{E(\tilde{\alpha}_i) - r_f}{E(\tilde{\alpha}_M) - r_f} = \frac{cov(\tilde{\alpha}_M, \tilde{\alpha}_i)}{var(\tilde{\alpha}_M)}$$

- Posto $\beta_i = \frac{cov(\tilde{\alpha}_M, \tilde{\alpha}_i)}{var(\tilde{\alpha}_M)}$ si ottiene la formula del **Capital Asset Pricing Model (CAPM)** :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &\equiv E(\tilde{\alpha}_i) = r_f + \beta_i(E(\tilde{\alpha}_M) - r_f) \\ &= r_f + \lambda cov(\tilde{\alpha}_M, \tilde{\alpha}_i) \end{aligned} \tag{28}$$

  dove $\lambda \equiv \frac{(E(\tilde{\alpha}_M) - r_f)}{var(\tilde{\alpha}_M)}$ rappresenta il prezzo di mercato del rischio (o il rapporto fra il profitto di mercato sul livello di variabilità dello stesso) per unità di periodo, che indica il premio/extra rendimento per unità di rischio nel mercato.

- β_i **è la misura del rischio di un titolo.**
  - **La (28) rappresenta la relazione che descrive il rendimento che possiamo attendere da un titolo (o portafoglio) rischioso una volta noti il rischio di mercato e quello del titolo stesso.**
  - **Se** $\beta_i = 1$ **significa che il titolo ha un rendimento che si muove di concerto con il mercato. Il suo rendimento, quindi, sarà uguale a quello del portafoglio di mercato e la (28) diventa:**
    $$E(\tilde{\alpha}_i) = E(r_M)$$
  - **Se** $\beta_i > 1$ **significa che il titolo è più rischioso del mercato e quindi deve essere remunerato di più per essere detenuto dall'investitore.**

- **Se $\beta_i < 1$, vale il contrario**

- **Alcune considerazioni conclusive sul CAPM:**
  - **Se un investitore ha un portafoglio ben diversificato la misura del rischio del suo portafoglio è data semplicemente dal β.**
  - **Il rischio non sistematico, ovvero idiosincratico, proprio di un titolo va a zero in seguito alla diversificazione del portafoglio.**
  - **Resta, quindi, il rischio sistematico, chiamato anche sociale o globale che la diversificazione non elimina, questo è misurato dal β.**
  - **Se il portafoglio è formato da tanti titoli, con x_i la quota della ricchezza investita nel titolo i-esimo, e $\sum_{i=0}^{m} x_i = 1$, il beta del portafoglio risulta:**

$$\beta = \sum_{i=0}^{m} x_i \beta_i$$

  - **Il mercato non paga il premio per il rischio che può essere diversificato ma solo quello non diversificabile che è contenuto in un titolo e individuato dal suo beta.**
  - **Il CAPM è un modello di equilibrio con una sola chiara prescrizione: detenere il portafoglio di mercato.**
  - **Per essere calcolato ho bisogno di avere delle stime delle varianze dei rendimenti che non sono semplici da ottenere un modo alternativo per prezzare un titolo finanziario è quello proposto da Black-Scholes per le opzioni che non ha bisogno delle condizioni restrittive del CAPM.**
  - Una volta che si ha una stima del β dell'attività, può essere usato per calcolare il VAN di un nuovo progetto: Il VAN descritto nelle (12) diventa:

$$VAN_{nuovo\ progetto} = \sum_{t=1}^{n} \frac{E(R_t - C_t)}{(1 + r + \beta_i(E(r_M) - r_f))^t} - I \qquad (29)$$

dove β_i è il coefficiente di rischio specifico di quel progetto.

– oppure:

$$VAN_{nuovo\ progetto} = E_0\left[\int_0^t (R_s - C_s)e^{-(r_f+\beta(E(\tilde{\alpha}_M)-r_f))s}ds\right] - I$$

dove β è il coefficiente di rischio specifico di quel progetto.

3.1.5 Equivalenza fra approccio RADR e EC

Dalla (28), il premio per il rischio per il generico titolo i-esimo è definito come:

$$p_i = E(\tilde{\alpha}_i) - r_f \equiv \lambda cov(\tilde{\alpha}_M, \tilde{\alpha}_i)$$

Ne consegue che, dall'equazione (17), per lo specifico progetto e per ogni istante temporale t, il premio per il rischio può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} p_t &= E_0(R_t - C_t) - \hat{R}_t - \hat{C}_t \\ &\equiv \lambda_t cov(\tilde{\alpha}_{Mt}, R_t - C_t) \end{aligned} \tag{30}$$

Indichiamo ora con $V_{t-1} = \frac{\hat{R}_t - \hat{C}_t}{(1+r_f)}$, il valore atteso del progetto al tempo $t-1$. Facendo uso del premio per il rischio (30), il valore atteso al tempo $t-1$ diventa:

$$V_{t-1} = \frac{\hat{R}_t - \hat{C}_t}{(1+r_f)} \equiv \frac{E_0(R_t - C_t) - \lambda_t cov(\tilde{\alpha}_{Mt}, R_t - C_t)}{(1+r_f)}$$

Dalle proprietà delle covarianze noi sappiamo che:

$$cov(\tilde{\alpha}_{Mt}, \tilde{\alpha}_t) = cov(\tilde{\alpha}_{M_t}, \frac{R_t - C_t}{V_{t-1}} - 1) = \frac{cov(\tilde{\alpha}_{M_t}, R_t - C_t)}{V_{t-1}}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} (1+r_f)V_{t-1} &= E_0(R_t - C_t) - \lambda_t cov(\tilde{\alpha}_{Mt}, R_t - C_t) \\ &= E_0(R_t - C_t) - \lambda_t cov(\tilde{\alpha}_{M_t}, \tilde{\alpha}_t)V_{t-1} \end{aligned}$$

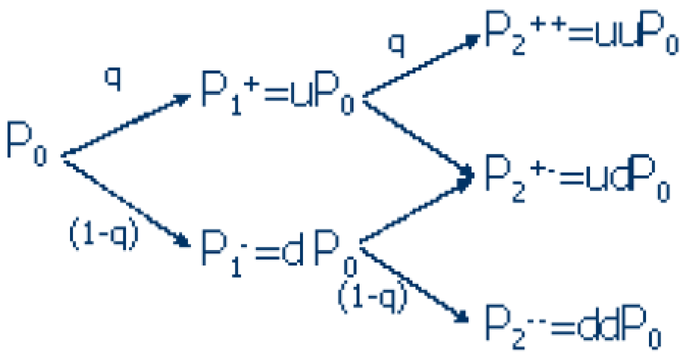
da cui risulta che

$$V_{t-1} = \frac{E_0(R_t - C_t)}{1 + r_f + \lambda_t cov(\tilde{\alpha}_{M_t}, \tilde{\alpha}_t)}$$

che è riconducibile alla (29)

3.2 Un modello in tempo discreto

Assumiamo un proggetto che da un flusso di ricavi aleatori che hanno luogo durante la vita di esercizio del progetto che assumiamo infinita per semplicità. L'aleatorietà del flusso dei ricavi è descritto dal seguente albero binomiale (P_0, u, d, q):



dove $u > 1$ e $d < 1$ rappresentano l'incremento e il decremento che nel futuro possono avere i ricavi rispetto al valore del periodo precedente, e $q, 1-q$ è la distribuzione di probabilità di questi due eventi. Il valore atteso di P_t all'istante $t = 0$ è:

$$E_0(P_t) = [qu + (1-q)d]^t \, P_0 \equiv \alpha^t P_0$$

Il VA atteso dei ricavi è quindi:

$$VA(P_0, q) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E_0(P_t)}{(1+\widehat{\alpha})^t} \equiv \frac{R}{R-\alpha} P_0$$

dove $R \equiv 1 + \widehat{\alpha}$ e $\widehat{\alpha}$ è il tasso aggiustato per il rischio di questo progetto, con $\widehat{\alpha} > \alpha$. Il valore attuale dei costi operativi (supposti costanti nel tempo) è dato da:

$$C = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{c}{(1+\hat{\alpha})^t} = \frac{R}{R-1} c = \frac{1+\widehat{\alpha}}{\widehat{\alpha}} c$$

Infine il valore attuale netto del progetto risulta:

$$\begin{aligned} VAN(P_0, q) &= VA - C - I \\ &\equiv \frac{R}{R-\alpha} P_0 - \frac{R}{R-1} c - I \end{aligned} \tag{31}$$

dove con I indichiamo il costo di *start-up* del progetto.

La regola di investimento risulta: investi se e solo se:

$$\frac{R}{R-\alpha}P_0 - \frac{R}{R-1}c - I > 0$$

oppure

$$P_0 > P^* \equiv \frac{R-\alpha}{R-1}c + \frac{R-\alpha}{R}I = \frac{1+\delta}{\widehat{\alpha}}c + \frac{\delta}{1+\widehat{\alpha}}I \tag{32}$$

dove $\delta = \hat{\alpha} - \alpha > 0$.

3.3 Un modello in tempo continuo

Assumiamo che l'aleatorietà del flusso dei ricavi sia descritto da un processo stocastico Browniano di tipo geometrico:

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dz_t \qquad \text{con } \sigma > 0 \text{ and } P_{t_0} = P_0. \tag{33}$$

in cui P_0 è il valore corrente dei ricavi al tempo zero e dz_t è l'incremento di un processo di Wiener standard che soddisfa le proprietà $E(dz_t) = 0$, e $E(dz_t^2) = dt$ (per cui $E(dP_t) = \alpha P_t dt$, e $E(dP_t^2) = \sigma^2 P_t^2 dt$).

Dalla (33), si ottiene che $E(P_t \mid P_0) = P_0 e^{\alpha t}$, per cui α è il rendimento istantaneo atteso dell'attività sottostante, mentre σ è lo scarto quadratico medio istantaneo (il rischio quotato di mercato).

Consideriamo per primo il VA di questo progetto, poichè questo è funzione di P_t, possiamo scrivere:

$$VA(P_0) = E_0\left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}t} P_t dt\right] \tag{34}$$

dove $\hat{\alpha}$ è al solito il tasso di sconto aggiustato per il rischio. Per risolvere la (34), possiamo seguire diversi procedimenti:

3.3.1 Procedimento probabilistico

Poichè il processo (33) è markoviano[4] possiamo scambiare l'operatore integrale con quello di valore atteso (Teorema di Fubini) e abbiamo:

$$\begin{aligned} VA(P_0) &= E_0\left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}t}P_t dt\right] \equiv \int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}t}E(P_t \mid P_0)dt \\ &\equiv \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\hat{\alpha}-\alpha)t}P_0 dt \equiv \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}P_0 dt \equiv \frac{P_0}{\delta} \end{aligned} \tag{35}$$

dove $\delta = \hat{\alpha} - \alpha > 0$.

3.3.2 Programmazione dinamica

Poichè l'equazione (34) vale per ogni t, indicando con $P_t = P$ il punto iniziale, possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$VA(P_t) = E_t\left[\int_{t}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}(s-t)}P_s ds\right]$$

Considerando un intervallo di tempo molto breve, dt, possiamo scomporre l'integrale nella seguente forma:

$$\begin{aligned} VA(P_t) &\equiv E_t\left[\int_{t}^{t+dt} e^{-\hat{\alpha}(s-t)}P_s ds\right] + E_t\left[\int_{t+dt}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}(s-t)}P_s ds\right] \\ &= P_t dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E_t\left[\int_{t+dt}^{\infty} e^{\hat{\alpha}dt}e^{-\hat{\alpha}(s-t)}P_s ds\right] \\ &= P_t dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E_t\left[\int_{t+dt}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}[s-(t+dt)]}P_s ds\right] \\ &= P_t dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E_t[VA(P_{t+dt})] \end{aligned}$$

l'ultimo passaggio deriva dal fatto che l'integrale $\int_{t+dt}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}[s-(t+dt)]}P_s ds$ ha come momento iniziale proprio $t + dt$. Poichè l'intervallo dt è molto breve il processo $P_{t+dt} = P_t + dP_t$ e quindi:

$$VA(P_t) = P_t dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E_t[VA(P_t + dP_t)] \tag{36}$$

[4] Un processo stocastico markoviano o processo di Markov è un processo stocastico nel quale la probabilità di transizione che determina il passaggio ad uno stato di sistema dipende unicamente dallo stato di sistema immediatamente precedente e non dal come si è giunti (storia) a tale stato.

chiamata anche Equazione di Bellman. L'idea sottostante l' equazione di Bellman è formalmente definita nel "Principio di Ottimalità di Bellman": una scelta di ottimo ha la proprietà che, qualsiasi sia l'azione iniziale, le scelte rimanenti costituiscono una scelta ottima rispetto al sottoproblema definito dall'azione iniziale presa in considerazione. In tal caso, dato che si assume che le scelte rimanenti siano ottimali (il cosiddetto "continuation value"), bisogna scegliere in modo ottimale solo la variabile di controllo. Il primo termine sul lato destro dell'equazione (36) corrisponde al profitto immediato, il secondo termine sul lato destro dell'equazione (36) corrisponde al continuation value e l'azione di ottimo è quella che massimizza la somma delle due componenti. Poichè $e^{-\hat{\alpha}dt} \simeq (1-\hat{\alpha}dt)$, si può notare come la (36) corrisponda ad una condizione di non arbitraggio:

$$\hat{\alpha}E_t[VA(P_t+dP_t)] = P_t + \frac{[E_t[VA(P_t+dP_t)] - VA(P_t)]}{dt}$$

Facendo il limite per $dP_t \to 0$ otteniamo:

$$\hat{\alpha}VA(P_t) = P_t + \frac{1}{dt}E[dVA(P_t)]$$

Quello che mi aspetto di ricevere investendo al tasso $\hat{\alpha}$ nel periodo di tempo dt deve essere uguale ai ricavi P_t correnti più il *capital gain* $\frac{1}{dt}E_t[dVA(P_t)]$.

Ritornando alla (36) ed espandendo la parte destra attorno al punto (P_t) e tenendo conto del Lemma di Ito, cioè eliminando i termini superiori al primo ordine (si veda l'appendice per ulteriori chiarimenti), otteniamo:

$$\begin{aligned}
VA(P_t) &= P_t dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E_t[VA(P_t+dP_t)] \\
&= P_t dt + (1-\hat{\alpha}dt)E_t\begin{bmatrix} VA(P_t)+VA_P(P_t)dP_t \\ +\frac{1}{2}VA_{PP}(P_t)dP_t^2+...... \end{bmatrix} \\
&= P_t dt + (1-\hat{\alpha}dt)\begin{bmatrix} VA(P_t)+VA_P(P_t)E_t(dP_t) \\ +\frac{1}{2}VA_{PP}(P_t)E_t(dP_t^2)+..... \end{bmatrix} \\
&= P_t dt + (1-\hat{\alpha}dt)\begin{bmatrix} VA(P_t)+VA_P(P_t)\alpha P_t dt \\ +\frac{1}{2}VA_{PP}(P_t)\sigma^2 P_t^2 dt+..... \end{bmatrix} \\
&= VA(P_t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}VA_{PP}(P_t)\sigma^2P_t^2+VA_P(P_t)\alpha P_t \\ -\hat{\alpha}VA(P_t)+P_t \end{bmatrix} dt
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione all'interno dell'equazione di Bellman otteniamo la seguente EDP (Equazione Differenziale Parziale):

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2VA_{PP}(P_t) + \alpha PVA_P(P_t) - \hat{\alpha}VA(P_t) + P_t = 0 \tag{37}$$

L'equazione differenziale (37) è di secondo grado non omogenea. Per la parte omogenea proviamo una soluzione del tipo BP^{β} mentre come soluzione particolare prendiamo la (35). Consideriamo prima la parte omogenea, sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 B\beta(\beta-1)P_t^{\beta-2} + \alpha P_t B\beta P_t^{\beta-1} - \hat{\alpha} B P_t^{\beta} &= 0 \\
BP_t^{\beta}\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \hat{\alpha}\right] &= 0
\end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione caratteristica $Q(\beta) \equiv \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \hat{\alpha} = 0$ fornisce due radici: $\beta_2 < 0$ e $\beta_1 > 1$. L'equazione omogenea ha pertanto soluzione:

$$B_1 P_t^{\beta_2} + B_2 P_t^{\beta_1}$$

dove B_1 e B_2 sono due costanti da determinare.

Passiamo a trovare una soluzione particolare per l'equazione non omogenea. Proviamo una soluzione del tipo KP. Sostituendo abbiamo:

$$\begin{aligned}
\alpha PK - \hat{\alpha} KP + P &= 0 \\
P\left[\alpha K - \hat{\alpha} K + 1\right] &= 0
\end{aligned}$$

da cui risulta che:

$$K = \frac{1}{\hat{\alpha} - \alpha} \equiv \frac{1}{\delta}$$

che conferma l'uso di (35) come soluzione particolare. Mettendo assieme la soluzione dell'equazione omogenea più la soluzione particolare abbiamo:

$$VA(P_t) = B_1 P_t^{\beta_2} + B_2 P_t^{\beta_1} + \frac{P_t}{\delta}$$

Per determinare la costante B_1 consideriamo l'effetto di una riduzione dei ricavi. Se $P \to 0$ il termine $B_1 P_t^{\beta_2}$ tende all'infinito. Per eliminare questa bolla speculativa dobbiamo porre $B_1 = 0$. Cioè se $P_t = 0$ anche il valore del progetto deve essere zero $VA(0) = 0$

Consideriamo ora il secondo termine. Questo rappresenta la componente speculativa del valore del progetto quando $P_t \to \infty$. Infatti, indica il maggior valore rispetto al valore fondamentale $\frac{P_t}{\delta}$ che gli investitori si aspettano di ottenere rivendendo il progetto quando P_t sale. Tuttavia, se il mercato dei capitali funziona bene, nessun investitore si aspetta che il progetto possa salire sopra il valore $\frac{P_t}{\delta}$ per periodi molto lunghi anche se P_t sale. L'accresciuta domanda per il progetto spinge verso l'alto il tasso di rendimento dello stesso e verso il basso il suo valore. Questo ci induce a porre anche $B_2 = 0$. Riassumendo abbiamo che il VA (34) risulta essere:

$$VA(P_t) = \frac{P_t}{\delta} \tag{38}$$

Se ora assumiamo che il flusso dei costi operativi sia costante nel tempo abbiamo:

$$C = \int_{t=0}^{\infty} e^{-r_f t} c dt = \frac{c}{r_f}$$

Infine il VAN diventa:

$$VAN = VA(P_t) - C - I = \frac{P_t}{\delta} - \frac{c}{r_f} - I \tag{39}$$

La regola dell'investimento risulta: investi se e solo se:

$$P_t > P_t^* \equiv \frac{\delta}{r_f} c + \delta I \tag{40}$$

A Appendice: Lemma di Ito

Si può comprendere il Lemma di Ito, intendendolo come una espansione in serie di Taylor. Supponiamo che $x(t)$ segua il seguente processo:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{41}$$

dove dz è l'incremento di un processo di Wiener e $a(x,t)$ e $b(x,t)$ sono funzioni note non random. Il drift e la varianza del processo sono funzioni dello stato corrente e del tempo (rispettivamente $a(x,t)$ e $b(x,t)$). Il processo stocastico in tempo continuo mostrato nella (41) viene definito processo di Ito.

Consideriamo la media e la varianza degli incrementi del processo. Poichè $E(dz) = 0$, $E(dx) = a(x,t)dt$, la varianza di dx è uguale a $E[dx^2] - (E[dx]^2)$ che contiene termini in dt, $(dt)^2$ ed in $(dt)(dz)$ che è di ordine $(dt)^{3/2}$. Per dt piccolo in modo infinitesimo, i termini $(dt)^2$ e $(dt)^{3/2}$ possono essere ignorati. La varianza di dx è:

$$V[dx] = b^2(x,t)\,dt \tag{42}$$

Consideriamo ora una funzione $F(x,t)$ che sia almeno due volte differenziabile in x ed una in t. Troviamo il suo differenziale totale, dF. Le ordinarie regole di calcolo definiscono il differenziale totale in termini di cambiamenti di primo ordine in x e t:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{43}$$

Includiamo inoltre i termini di ordine superiore per i cambiamenti di x, cioé:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(dx)^3 + ... \tag{44}$$

Ordinariamente, questi termini di ordine superiore svaniscono al limite. Per vedere se ciò accade anche nella (44), espandiamo il terzo e quarto termine dell'equazione. Dalla (41) calcoliamo:

$$(dx)^2 = a^2(x,t)(dt)^2 + 2a(x,t)(dt)^{3/2} + b^2(x,t)dt \tag{45}$$

I termini $(dt)^{3/2}$ e $(dt)^2$ vanno a zero più velocemente di dt quando quest'ultimo diventa infinitesimalmente piccolo, così possiamo ignorare questi termini e scrivere:

$$(dx)^2 = b^2(x,t)\,dt \tag{46}$$

Seguendo il medesimo procedimento, espandendo $(dx)^3$ del quarto termine dell'equazione (44), si ottengono termini di dt superiori a 1 che, pertanto, tendono a zero più velocemente di dt. Lo stesso accade con $(dx)^4$ e potenze di ordine superiore. Pertanto, dopo aver eliminato le potenze di dt superiori a 1, il differenziale di dF può essere scritto nella seguente maniera:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 \tag{47}$$

Sostituendo la (41) nella (47) possiamo riscrivere l'equazione nella seguente maniera:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t}dt + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt + b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz \tag{48}$$

Comparando la (43) con la (48) si osserva che quest'ultima equazione ha un termine aggiuntivo. Supponiamo che il drift sia uguale a zero ($a(x,t) = 0$) e che $\partial F/\partial t = 0$. Ora $E(dx) = 0$, ma $E(dF) \neq 0$. Quest'ultima è un'applicazione della diseguaglianza di Jensen. $E(dF)$ sarà positivo se F è una funzione convessa di x (cioè $\partial^2 F/\partial x^2 > 0$) e negativo se F è una funzione concava di x (cioè, $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$). Per il processo di Ito, dx si comporta come $(dt)^{1/2}$ e $(dx)^2$ come dt, così che l'effetto della convessità e della concavità è di ordine dt e non può essere ignorato quando si scrive il differenziale di F. Il termine aggiuntivo della (47) cattura proprio tale effetto.

L'espansione in serie di Taylor può essere estesa altresì ad ulteriori processi di Ito. Per esempio, supponiamo che F sia uguale a $F(x_1, ..., x_m, t)$ e che sia quandi funzione del tempo e di m processi di Ito, dove:

$$dx_i = a_i(x_1, ..., x_m, t)\,dt + b_i(x_1, ..., x_m, t)\,dz_i; \qquad i = 1...m \tag{49}$$

con $E(dz_i dz_j) = \rho_{ij}dt$. Allora tramite il Lemma di Ito possiamo calcolare il differenziale dF come:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \tag{50}$$

Di nuovo possiamo sostituire la (49) per dx_i e scrivere la seguente:

$$
\begin{aligned}
dF &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i a_i\left(a_1, ..., t\right)\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_i b_i^2\left(x_1, ..., t\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\rho_{ij} b_i\left(x_1, ..., t\right) b_j\left(x_1, ..., t\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right] dt + \sum_i b_i\left(x_{1,...,t}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i} dz_i
\end{aligned} \tag{51}
$$