

## ESERCIZI - Teoria dei Giochi

1. Si consideri l'interazione tra due giocatori descritta nella seguente *forma normale*:

1\2	<i>s</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	10,10	3,9
<i>b</i>	9,3	6,6

- a) Cosa succede nel gioco precedente se i giocatori scelgono simultaneamente?  
b) Qual è il risultato del gioco se il giocatore 2 può scegliere di "impegnarsi credibilmente" (*to commit*) ad adottare una certa strategia? Si tratta di un esito Pareto efficiente?

### *SOLUZIONE*

- a) Ci sono due equilibri di Nash:  $(a,s)$  e  $(b,d)$ ;  
b)  $(a,s)$ , che risulta anche Pareto efficiente.
2. Si consideri il gioco seguente in *forma normale* tra due giocatori:

1\2	<i>s</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	2,3	0,0
<i>b</i>	0,0	3,2

Lo si descriva ora come un gioco in *forma estesa* in cui il giocatore 2, quando è il suo turno di scegliere, sa cosa ha scelto il giocatore 1. Si determinino: a) il numero e la tipologia delle strategie a disposizione dei due giocatori; b) le combinazioni strategiche che costituiscono un equilibrio di Nash; c) le combinazioni strategiche che costituiscono un equilibrio di Nash perfetto rispetto ai sottogiochi.

### *SOLUZIONE*

Nel gioco in forma estesa il giocatore 1 dispone di due strategie (*a* e *b*) e il giocatore 2 delle 4 strategie ottenibili come combinazioni delle sue mosse *s* e *d* dopo la scelta di 1 (indicabili con  $(ss)$ ,  $(sd)$ ,  $(ds)$  e  $(dd)$ ). Gli equilibri di Nash risultano:  $\{(a,ss), (b,dd), (b,sd)\}$ . L'unico equilibrio perfetto rispetto ai sottogiochi è  $(b,sd)$ .

3. Si consideri il gioco seguente in *forma normale* tra due giocatori:

1\2	s	d
a	9,9	1,8
b	8,1	7,7

Si determinino: a) le combinazioni strategiche Pareto efficienti; b) le combinazioni strategiche che costituiscono un equilibrio di Nash in strategie pure; c) le combinazioni strategiche che costituiscono un equilibrio di Nash in strategie miste.

*SOLUZIONE*

- a)  $(a,s)$ ;
- b)  $\{(a,s), (b,d)\}$ ;
- c)  $(\text{prob}(a) = 6/7, \text{prob}(s) = 6/7)$ .

4. Si consideri il gioco seguente in *forma normale* tra due giocatori:

1\2	s	d
a	3,1	2,3
b	4,1	1,2

- a) Qual è il risultato del gioco precedente se i giocatori scelgono simultaneamente? Si tratta di un esito Pareto efficiente?
- b) Qual è il risultato del gioco se il giocatore 2 sceglie per primo e il giocatore 1 osserva la sua mossa prima di scegliere? Si tratta di un esito Pareto efficiente?

*SOLUZIONE*

- a) L'equilibrio del gioco in scelte simultanee è  $(a,d)$ , e l'esito è Pareto efficiente (l'altra combinazione strategica Pareto efficiente è  $(b,s)$ ).
- b) L'esito è il medesimo se il giocatore 2 sceglie per primo (cioè  $(2,3)$  è il payoff nell'equilibrio perfetto rispetto ai sottogiochi del corrispondente gioco in forma estesa).

5. Si consideri l'interazione tra due giocatori descritta nella seguente *forma normale*:

1\2	<i>s</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	9,9	7,10
<i>b</i>	10,7	3,3

- a) Cosa succede nel gioco precedente se i giocatori scelgono simultaneamente?
- b) Qual è il risultato del gioco se il giocatore 2 può scegliere di "impegnarsi credibilmente" (*to commit*) ad adottare una certa strategia? Si tratta di un esito Pareto efficiente?

*SOLUZIONE*

- a) Ci sono due equilibri di Nash: (*a,d*) e (*b,s*).
- b) Il giocatore 2 sceglierebbe naturalmente la strategia *d*, il che condurrebbe all'esito Pareto efficiente (*a,d*).

6. Si consideri il gioco seguente in *forma normale* tra due giocatori:

1\2	<i>s</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	2,1	0,0
<i>b</i>	3,-1	1,0

- Qual è il risultato del gioco precedente se i giocatori scelgono simultaneamente? Si tratta di un esito Pareto efficiente?
- Qual è il risultato del gioco se il giocatore 1 può scegliere di "impegnarsi credibilmente" (*to commit*) ad adottare una certa strategia? Si tratta di un esito Pareto efficiente?

*SOLUZIONE*

L'unico equilibrio di Nash del gioco in scelte simultanee (strategie pure) è  $(b,d)$  (la strategia  $b$  è in tal caso strategicamente dominante per il giocatore 1), il che dà luogo ad una situazione Pareto inefficiente.

Se il giocatore 1 potesse impegnarsi credibilmente sceglierebbe ovviamente la strategia  $a$  che condurrebbe al risultato Pareto efficiente  $(2,1)$ , corrispondente all'unico equilibrio di Nash perfetto rispetto ai sottogiochi  $(a,(s,d))$  della versione sequenziale del gioco precedente.

7. Si consideri l'interazione tra due giocatori descritta nella seguente *forma normale*:

1\2	$s$	$d$
$a$	3,0	1,1
$b$	4,0	2,1

- Qual è il risultato del gioco precedente se i giocatori scelgono simultaneamente? Si tratta di un esito Pareto efficiente?
- Qual è il risultato del gioco se il giocatore 1 può scegliere di "impegnarsi credibilmente" (*to commit*) ad adottare una certa strategia? Si tratta di un esito Pareto efficiente?

### *SOLUZIONE*

L'unico equilibrio di Nash del gioco in scelte simultanee (strategie pure) è  $(b,d)$  (la strategia  $b$  è strategicamente dominante per il giocatore 1, così come la strategia  $d$  è strategicamente dominante per il giocatore 2), il che dà luogo ad una delle 3 situazioni Pareto efficienti.

Se il giocatore 1 potesse impegnarsi credibilmente sceglierebbe in questo caso ancora la medesima strategia  $b$  (poiché il giocatore 2 ha una strategia dominante non c'è modo per il giocatore 1 di influenzare le sue scelte e il potere di *commitment* di quest'ultimo non gli fornisce alcun vantaggio), il che condurrebbe nuovamente al risultato  $(2,1)$  precedente.

8. Considerate il gioco descritto dalla seguente tabella:

		Impresa Alpha	
		<i>Introdurre un nuovo prodotto</i>	<i>Non introdurre un nuovo prodotto</i>
Impresa Omega	<i>Introdurre un nuovo prodotto</i>	$\Pi_{\Omega} = 40$ $\Pi_{\Alpha} = 200$	$\Pi_{\Omega} = x$ $\Pi_{\Alpha} = 60$
	<i>Non introdurre un nuovo prodotto</i>	$\Pi_{\Omega} = 30$ $\Pi_{\Alpha} = 0$	$\Pi_{\Omega} = 80$ $\Pi_{\Alpha} = 40$

- (a) Indicate quale valore deve assumere  $x$  affinché per l'impresa Omega "introdurre un nuovo prodotto" sia una strategia dominante. Motivate la vostra risposta.
- (b) Supponete ora che  $x$  assuma il valore 60, quali sarebbero in questo caso gli equilibri di Nash del gioco? Motivate la risposta.

#### SOLUZIONE

a) Una **strategia dominante** è la scelta ottima che permette a un giocatore di ottenere sempre il payoff maggiore, qualunque sia la scelta dell'altro giocatore.

Quindi se Alpha introduce un nuovo prodotto anche Omega introduce un nuovo prodotto ( $40 > 30$ ).

Se Alpha non introduce un nuovo prodotto, affinché "introdurre un nuovo prodotto" sia una strategia dominante per l'impresa Omega è necessario che  $x > 80$ .

b) Un **equilibrio di Nash** è una situazione nella quale soggetti economici interagiscono reciprocamente in modo da scegliere la propria strategia ottimale, date le strategie scelte dagli altri soggetti. E' quindi una situazione non migliorabile con atti individuali da parte dei giocatori.

Se  $x=60$ , la nuova tabella è:

		Impresa Alpha	
		<i>Introdurre un nuovo prodotto</i>	<i>Non introdurre un nuovo prodotto</i>
Impresa Omega	<i>Introdurre un nuovo prodotto</i>	$\Pi_{\Omega} = 40$ $\Pi_{\Alpha} = 200$	$\Pi_{\Omega} = 60$ $\Pi_{\Alpha} = 60$
	<i>Non introdurre un nuovo prodotto</i>	$\Pi_{\Omega} = 30$ $\Pi_{\Alpha} = 0$	$\Pi_{\Omega} = 80$ $\Pi_{\Alpha} = 40$

Gli equilibri di Nash sono:

-) (Introdurre un nuovo prodotto; Introdurre un nuovo prodotto) perchè se Omega sceglie di introdurre un nuovo prodotto anche Alpha avrà interesse a farlo ( $200 > 60$ ); e se Alpha sceglie questa strategia anche Omega avrà convenienza a introdurre un nuovo prodotto ( $40 > 30$ )

-) (Non introdurre un nuovo prodotto; non introdurre un nuovo prodotto) perchè se Omega sceglie di non introdurre un nuovo prodotto anche Alpha avrà interesse a farlo ( $40 > 0$ ); allo stesso modo se Alpha sceglie di non introdurre un nuovo prodotto la scelta ottima per Omega sarà ancora "non introdurre un nuovo prodotto" ( $80 > 30$ )

9. Due compagnie aeree possono decidere di mettere pochi o molti voli su una certa tratta. Se le compagnie non si accordano e mettono entrambe molti voli i profitti di ciascuna sono 1 milione di euro; se si accordano per tenere il prezzo elevato e mettono pochi voli i profitti di ciascuna salgono a 1,5 milioni di euro. Se una delle compagnie mette molti voli e l'altra pochi, la compagnia con più voli avrà profitti per 1,8 milioni di euro, mentre la compagnia con meno voli avrà profitti per 0,8 milioni di euro.

- Rappresentate la matrice dei guadagni del gioco sopra descritto (quando le imprese scelgono simultaneamente quanti voli mettere).
- Trovate l'equilibrio di Nash del gioco (e spiegate il ragionamento svolto per trovare l'equilibrio).
- Dite se l'equilibrio trovato è un equilibrio efficiente, motivando la

risposta.

### SOLUZIONE

a) La matrice dei payoff è la seguente:

		Air-one	
		<i>Molti voli</i>	<i>Pochi voli</i>
Alitalia	<i>Molti voli</i>	1; 1	1,8; 0,8
	<i>Pochi voli</i>	0,8; 1,8	1,5; 1,5

b) Un **equilibrio di Nash** è una situazione nella quale soggetti economici interagiscono reciprocamente in modo da scegliere la propria strategia ottimale, date le strategie scelte dagli altri soggetti.

Nel nostro caso l'equilibrio di Nash è rappresentato dall'introduzione di molti voli per entrambe le compagnie (*Molti voli; Molti voli*).

Infatti se Alitalia sceglie "Molti voli" anche Air-one avrà interesse a scegliere questa strategia (1>0,8). Allo stesso modo, se Air-one sceglie "Molti voli" anche Alitalia sceglierà "Molti voli" (1>0,8).

c) L'equilibrio trovato non è un equilibrio efficiente perchè accordandosi le due compagnie potrebbero aumentare i loro guadagni mettendo pochi voli.