STUDIO DI FUNZIONE CON DERIVE 5 PER WINDOWS
F.Petrossi
Come separare metodo di soluzione da calcolo impiegando Derive 5
(http://www.derive.com)

Considerata la seguente funzione:

User:

#1: $f(x) := \dfrac{(x - 1)^2}{x \cdot (x + 1)}$

Se ne analizzi il segno

User:

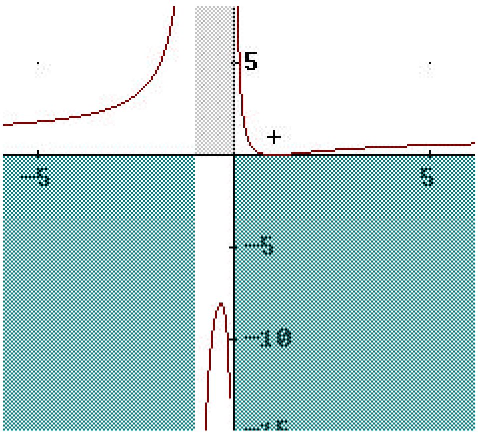
#2: $\dfrac{(x - 1)^2}{x \cdot (x + 1)} \ge 0$

User:
#3: SOLVE(f(x) ≥ 0, x, Real)

Simp(#3):
#4: $x < -1 \vee x > 0$

L'identificazione delle zone in cui non vi sono punti della funzione a causa del segno prima individuato è un po' complessa, le mostreremo assieme al grafico della funzione effettuato automaticamente:

User:
#5: $((x < -1 \vee x > 0) \wedge y < 0) \vee (\neg (x < -1 \vee x > 0) \wedge y > 0)$



Consideriamo la derivata prima della funzione:

User:

#6: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

Simp(#6):

#7:
$$\frac{(x - 1)\cdot(3\cdot x + 1)}{x^2\cdot(x + 1)^2}$$

e studiamone il segno:

User:

#8: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{d}{dx} f(x) \ge 0,\ x\right)$

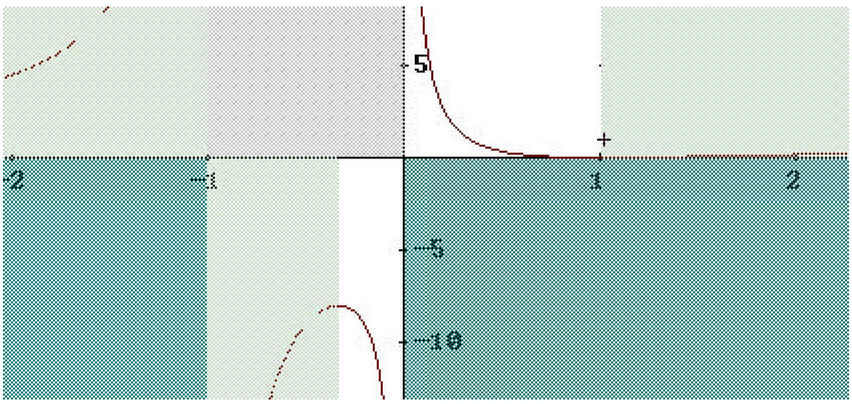
Simp(#8):

#9:
$$\left(x \ne -1 \wedge x \le -\frac{1}{3}\right) \vee x \ge 1$$

Introduciamo questa informazione nel grafico, sempre analizzando le zone con derivata positiva per essere corretti potremmo dare il comando #9 ∧ ¬#5 che ci porterà alla seguente espressione (#9 dignifica l'espressione per cui la derivata è positiva, mentre ¬#5 indica le area in cui possono esistere, per via del segno, valori della funzione)

User:

#10: $\left(\left(x \ne -1 \wedge x \le -\frac{1}{3}\right) \vee x \ge 1\right) \wedge \neg\,(((x < -1 \vee x > 0) \wedge y < 0) \vee (\neg (x < -1 \vee x > 0) \wedge y > 0))$



I valori di y in −1/3 e 1 andranno calcolati

User:
#11: f(1)

Simp(User0):
#12: 0

User:

#13: $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

Simp(User2):
#14: -8

Trovando due punti interessanti della curva

User:
#15: $[1, 0]$

User:
#16: $\left[-\frac{1}{3}, -8\right]$

per −1 calcoleremo il limite

User:
#17: $\lim_{x \to -1} f(x)$

Simp(Lim(User,x)):
#18: $\pm\infty$

quindi x=−1 sarà asintoto verticale

User:
#19: $x = -1$

Calcoliamo anche i limiti per x tendente a +∞ (e −∞)

User:
#20: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Simp(User9):
#21: 1

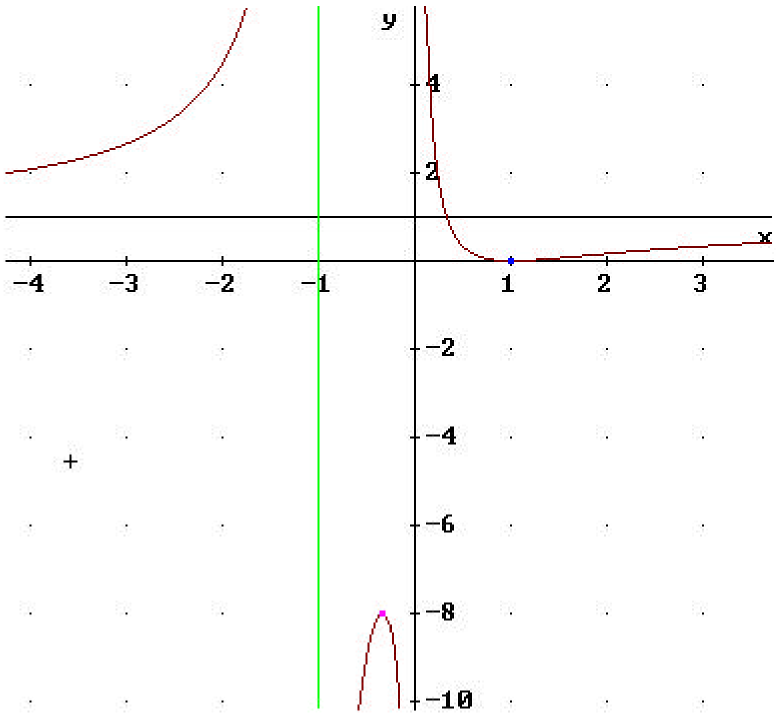
Come si poteva vedere anche analizzando lo sviluppo di y(x) dividendo numeratore per denominatore

Expd(User):
#22: $$-\frac{4}{x + 1} + \frac{1}{x} + 1$$

L'asintoto orizzontale sarà perciò y=1

User:
#23: 1

In complesso si perverrà al grafico:



Che potrà essere completato studiando la derivata seconda (in particolare i punti in cui essa si annulla)

Fine

User:

#24: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = 0$

Simp(#24):

#25: $\text{SOLVE}\left(-\frac{2\cdot(3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x - 1)}{x^3\cdot(x + 1)^3} = 0,\ x,\ \text{Real}\right)$

Solve(#25,x):

#26: $x = \pm\infty \vee x = \frac{2\cdot 2^{1/3}}{3} + \frac{2^{2/3}}{3} + \frac{1}{3}$

Originale l'espressione x = ±∞ : cosa starà a significare?... Accontentiamoci del valore approssimato della seconda espressione:

Simp(Solve(User,x)):

#27: $x = 1.702414383$

Volendo si potrebbe calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto (probabile) di flesso. Iniziamo solamente:

User:

#28: **InputMode := Word**

User:

#29: $x0 := \frac{2\cdot 2^{1/3}}{3} + \frac{2^{2/3}}{3} + \frac{1}{3}$

User:

#30: $\frac{d}{dx} f(x)$

Simp(#30):

#31: $$\frac{(x - 1)\cdot(3\cdot x + 1)}{x^2\cdot(x + 1)^2}$$

Sostituiamo x0

Sub(#31):

#32: $\frac{(x0 - 1)\cdot(3\cdot x0 + 1)}{x0^2\cdot(x0 + 1)^2}$

E calcoliamo

User:

#33: $m := \frac{(x0 - 1)\cdot(3\cdot x0 + 1)}{x0^2\cdot(x0 + 1)^2}$

Simp(#33):

#34: $$\frac{6\cdot 2^{1/3} + 3\cdot 2^{2/3} + 3}{16\cdot 2^{2/3} + 20\cdot 2^{1/3} + 25}$$

Che si approssima a

Approx(User):
#35: $$0.2026768565$$

L'equazione della retta è allora

User:
#36: $y - f(x0) = m\cdot(x - x0)$

Che risolta in y fornisce

Solve(#36,y):
#37: SOLVE(y − f(x0) = m·(x − x0), y, Real)

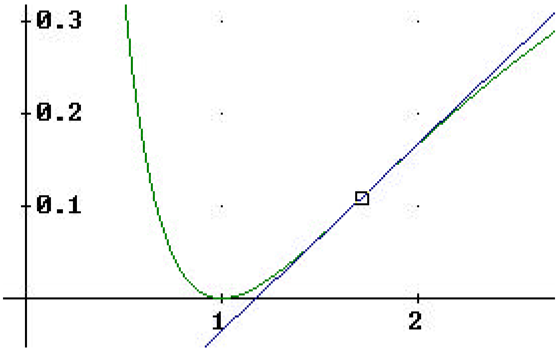
Simp(Solve(#36,y)):

#38: $y = \frac{3\cdot(3\cdot x\cdot(4\cdot 2^{1/3} + 3\cdot 2^{2/3} + 5) - 14\cdot 2^{1/3} - 11\cdot 2^{2/3} - 17)}{(2\cdot 2^{2/3} + 2\cdot 2^{1/3} + 3)\cdot(16\cdot 2^{2/3} + 20\cdot 2^{1/3} + 25)}$

Avremmo potuto subito semplificare in

Approx(User):
#39: $y = 0.2026768565\cdot x - 0.237796844$

La conferma grafica fa sempre piacere...



Usando Derive 5 si può puntare sull'aspetto metodologico. La correttezza dei calcoli sarà così un problema separato.

Simp(#11):
#40: 0