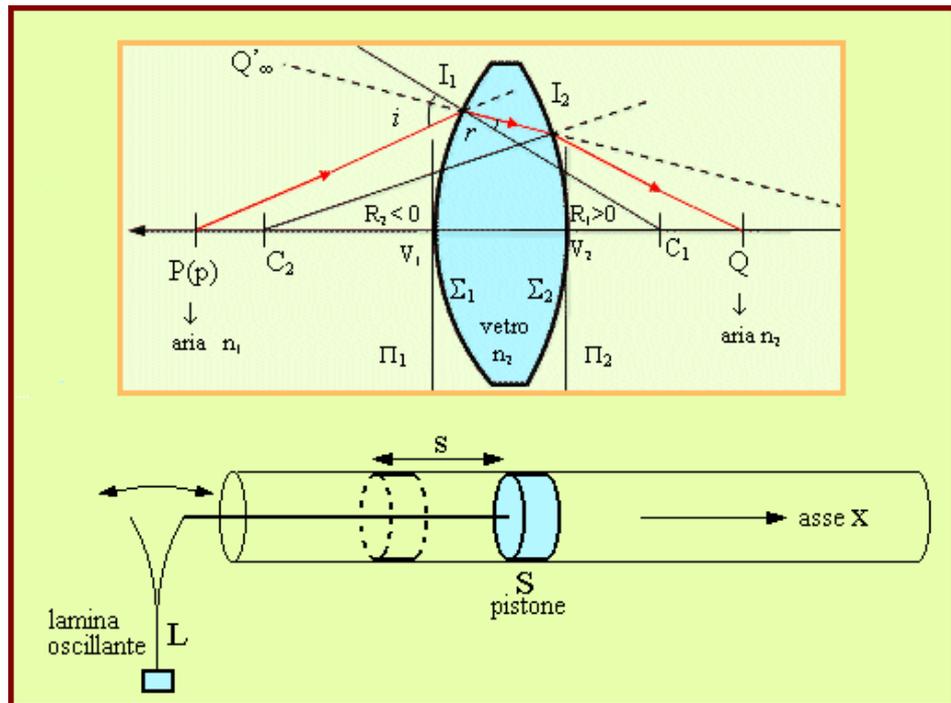


Nazario Magnarelli

MOTI ONDOSI E OTTICA



*Ringrazio il grafico Gianluca Ercoli,
mio stimato collaboratore, che ha curato
la scrittura del testo e l'esecuzione delle figure.*

*A mia figlia Flora che mi ha
sempre incoraggiato ad ordinare
e raccogliere questi argomenti
di Fisica.*

PREFAZIONE

In questo lavoro abbiamo voluto esporre alcuni argomenti di Ottica, quali i diottri e le lenti, che non sempre sono bene approfonditi nei testi di Fisica.

Lo studio dei fenomeni ottici ci ha portati ad affrontare i fenomeni di interferenza e di diffrazione delle onde luminose e gli analoghi fenomeni che si producono, in particolari condizioni, nella propagazione delle onde meccaniche in un liquido.

Le appendici che figurano alla fine del testo servono a proporre una breve dimostrazione delle leggi dei principali fenomeni oscillatori.

Latina, Ottobre 2002

Nazario Magnarelli

BIBLIOGRAFIA

- 1) E. Perucca, Fisica generale vol. I, UTET.
- 2) G. Bernardini, Fisica sperimentale vol. I, Veschi - Roma.
- 3) C. Mencuccini – V. Silvestrini, Fisica I, Liguori Editore - Napoli.
- 4) D. Sette, Lezioni di Fisica vol. I, Veschi – Roma.
- 5) E. Persico, Ottica, Casa editrice Zanichelli – Bologna.
- 6) B. Rossi, Ottica, Casa editrice Masson – Milano.
- 7) F. W. Sears, Ottica, Casa editrice Ambrosiana – Milano.
- 8) A. Rostagni, Fisica generale, Vol. II parte 1^a – UTET.
- 9) I.F. Quercia - B. Rispoli, Problemi di Fisica, vol. I, Veschi - Roma.
- 10) A. Caforio – A. Ferilli, Physica vol. II, Le Monnier.
- 11) P. Silva – L. Montalbetti, Fisica elementare vol. II, Paravia.

INDICE

MOTI PERIODICI	5
N. 1 – Equazioni del moto circolare uniforme e del moto armonico...	5
N. 2 – Velocità del moto armonico.....	7
N. 3 – Accelerazione del moto armonico.....	9
N. 4 – Composizione di due moti armonici aventi lo stesso centro, uguale periodo e traiettorie non sovrapposte.	11
N. 5 – Particolari moti armonici coerenti e sovrapposti.	13
N. 6 – Composizione di due generici moti armonici aventi lo stesso centro, uguale periodo T e traiettorie sovrapposte (costruzione di Fresnel).	17
N. 7 – Ancora sulla composizione di due moti armonici.....	20
PROPAGAZIONE DI PERTURBAZIONI.....	22
N. 1 – Moti ondosi nei mezzi materiali.....	22
N. 2 – Relazioni fra le variazioni dei parametri di stato.	24
N. 3 – Relazione tra i moduli di compressione isoterma e adiabatica.	27
N. 4 – Onde piane in un fluido. Equazione di d'Alembert.	29
N. 5– Principio di sovrapposizione (Bernoulli).	36
N. 6 – Propagazione delle onde in una corda.....	37
N. 7 – Periodo di oscillazione di un'onda.....	40
N. 8 – Lunghezza d'onda di una oscillazione.	42
N. 9 – Energia di un punto di una corda vibrante e intensità di vibrazione.....	44
N. 10 – Interferenza di due onde trasversali emesse da due sorgenti coerenti.....	48
N. 11 – Interferenza di due onde coerenti e intensità di vibrazione dell'onda risultante.....	52
N. 12 – Onde liquide.	55
N. 13 – Rifrazione delle onde.	57
N. 14 – Diffrazione delle onde attraverso una piccola fenditura.	60
N. 15 – Diffrazione della luce.....	62
N. 16 – Interferenza della luce.....	63
N. 17 – Riflessione sulle esperienze di Young e di Fresnel.....	65

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DELLA LUCE	68
N. 1 – Ottica geometrica.	68
N. 2 –Riflessione della luce.	70
N. 3 –Specchi.	71
N. 4 –Sorgenti luminose e loro immagini.	71
N. 5 –Immagine di uno specchio piano.	72
N. 6 –Specchi sferici concavi.....	73
N. 7 –Distanza focale di uno specchio.....	75
N. 8 –Specchio concavo parabolico.....	76
N. 9 –Punti coniugati di uno specchio sferico e formula dei punti coniugati.....	79
N. 10 –Leva ottica.....	79
N. 11 –Specchio ruotante di Foucault.....	81
N. 12 –Rifrazione.....	84
N. 13 –Leggi della rifrazione.....	86
N. 14 –Costruzione grafica del raggio rifratto.....	90
N. 15 –Angolo limite.....	91
N. 16 –Riflessione totale.....	92
DIOTTRI E LENTI	94
N. 1 – Riflessione e rifrazione su superfici sferiche.....	94
N. 2 – Sistema ottico.....	94
N. 3 – Diottro sferico.....	96
N. 4 – Formula dei punti coniugati per il diottro sferico.....	97
N. 5 – Costruzione grafica degli elementi di un diottro.....	101
N. 6 – Cammini ottici equivalenti nel diottro.....	101
N. 7 – Lente semplice; elementi di una lente.....	106
N. 8 – Equazione dei punti coniugati di una lente.....	108
N. 9 –Centro ottico di una lente.....	113
N. 10 –Costruzione di Dowell del raggio rifratto da un diottro.....	115
N. 11 –Specchi piani di Fresnel: teoria ondulatoria della luce e lunghezza d’onda di una radiazione.....	117
N. 12 –Approfondimenti sull’esperienza degli specchi di Fresnel.....	123
N. 13 – Condizioni per l’interferenza di due treni d’onda emessi da due sorgenti luminose.....	124
APPENDICI	128
N. 1 - Pendolo semplice.....	128
N. 2 - Ancora sul pendolo semplice.....	134
N. 3 - Studio del moto libero senza attrito di un liquido in un tubo ad U.....	136
N. 4 - Moto di un punto sottoposto ad una forza di tipo elastico.....	140
N. 5 – Moto oscillatorio smorzato	141

N. 6 - Complementi sul moto armonico smorzato	146
N. 7 - Oscillazioni forzate	149
GLI INTEGRALI ELLITTICI.....	157
N. 8 - Periodo di oscillazione di un pendolo semplice	158
N. 9 – Periodo di oscillazione di un pendolo semplice (altra versione).	170
N.-10 Problema di geometria piana	176

PARTE PRIMA

OSCILLAZIONI E MOTI ONDOSI

CAPITOLO PRIMO

MOTI PERIODICI

N. 1 – Equazioni del moto circolare uniforme e del moto armonico.

Iniziamo questo capitolo con alcuni richiami di cinematica. Consideriamo un punto P che si muove di moto uniforme su una circonferenza di centro O e di raggio R (fig. 1-1).

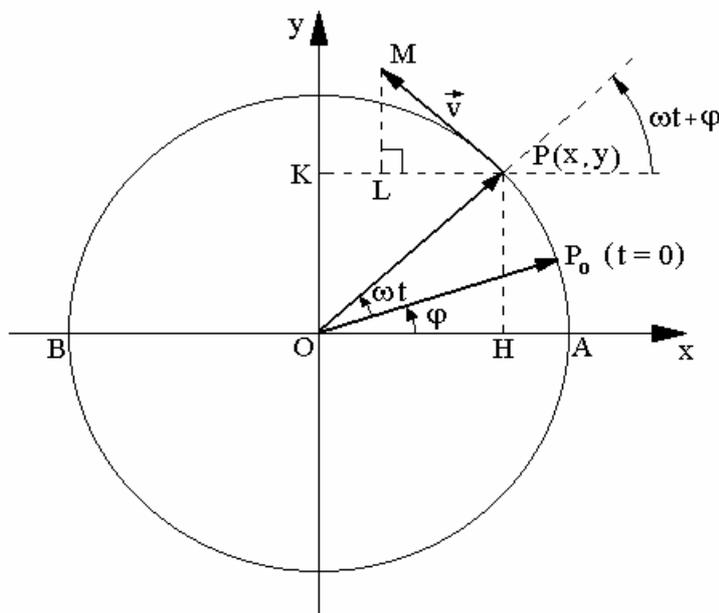


FIGURA 1-1

Assumiamo il punto O come origine di un riferimento cartesiano e siano H e K le proiezioni del punto P rispettivamente sugli assi x e y . Mentre il punto P si muove sulla circonferenza di moto circolare uniforme, la sua proiezione H oscilla sull'asse x movendosi di moto armonico; altrettanto accade per la proiezione K . Inoltre, mentre il punto P descrive sulla circonferenza archi uguali in tempi uguali, la sua proiezione H percorre in tempi uguali spazi di lunghezza diversa. Ne segue che il moto armonico non è un moto uniforme, ma è un moto vario. Sia P_0 la posizione sulla circonferenza del punto mobile all'istante $t=0$ e φ l'angolo che il raggio

vettore \overline{OP} forma con l'asse x in questo istante (misurato positivamente in verso antiorario).

Sia ω la velocità angolare del punto P , cioè l'angolo descritto dal raggio vettore \overline{OP} nell'unità di tempo, allora l'angolo che il raggio descrive nel tempo t sarà ωt , mentre l'angolo che il raggio stesso forma con l'asse x in questo istante sarà:

$$\alpha = \omega t + \varphi$$

Ne segue che le equazioni del moto con cui i punti H e K oscillano sugli assi x e y sono rispettivamente:

$$1) \quad \begin{cases} x = R \cos (\omega t + \varphi) \\ y = R \sin (\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Le (1) ci danno le equazioni parametriche del moto circolare uniforme. Infatti innalzandole al quadrato e sommandole si ha:

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 (\omega t + \varphi) + R^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

da cui
$$x^2 + y^2 = R^2,$$

che è l'equazione cartesiana di una circonferenza.

E' importante osservare che il procedimento seguito ci permette di descrivere un moto armonico per mezzo di un vettore rotante.

- Il punto O si dice centro del moto armonico;
- R si dice ampiezza del moto armonico;
- l'elongazione $AB = 2R$ si dice oscillazione semplice;
- $AB - BA$ si dice oscillazione completa;
- l'angolo φ si dice fase iniziale;
- l'angolo $\alpha = \omega t + \varphi$ si dice fase attuale;
- l'ascissa $x = R \cos (\omega t + \varphi)$ si dice elongazione del punto H all'istante t o spostamento; idem per l'ordinata y ;
- si dice periodo del moto armonico il tempo T che il punto H impiega a compiere una oscillazione completa. Evidentemente il periodo del

moto armonico è uguale al periodo del moto circolare uniforme che lo genera;

- $\frac{1}{T} = f$ si dice frequenza del moto armonico;
- infine, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ si dice pulsazione del moto armonico.

N. 2 – Velocità del moto armonico.

Sia ora $\vec{v} = \overline{PM}$ il vettore velocità del moto circolare uniforme all'istante t ; ricordiamo che esso è tangente alla circonferenza nel punto P (fig. 1).

Si dice velocità del moto armonico all'istante t la grandezza scalare \overline{PL} (o \overline{LM}) che rappresenta la componente del vettore \vec{v} secondo l'asse x (o y). Si ottiene quindi:

$$v_x = \overline{PL} = \overline{PM} \cos \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

cioè (1) $v_x = -v \sin(\omega t + \varphi)$

Analogamente $v_y = \overline{LM} = \overline{PM} \sin \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$

cioè (2) $v_y = v \cos(\omega t + \varphi)$

Ricordando che la velocità periferica del moto circolare uniforme è $v = \omega R$, le (1), (2) si possono scrivere nel modo:

$$(3) \quad \begin{cases} v_x = -\omega \cdot R \sin(\omega t + \varphi) \\ v_y = \omega \cdot R \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Ricordando le (1) del paragrafo precedente si ha:

$$(4) \quad v_x = -\omega y \quad v_y = \omega x .$$

Le (4) ci danno anche le componenti del vettore velocità \vec{v} del moto circolare uniforme. Ricordando la rappresentazione cartesiana di un vettore nel piano ($\vec{v} = v_x \vec{c}_1 + v_y \vec{c}_2$), possiamo indicare il vettore velocità \vec{v} del moto circolare uniforme nel modo seguente:

$$(5) \quad \vec{v} = -\omega y \vec{c}_1 + \omega x \vec{c}_2 .$$

Le (4)₁ ci dicono che:

- a) nel 1° e 2° quadrante si ha $y > 0$, quindi $v_x < 0$;
- b) nel 3° e 4° quadrante si ha $y < 0$, quindi $v_x > 0$;

Analogamente le (4)₂ ci dicono che:

- c) nel 1° e 4° quadrante si ha $x > 0$, quindi $v_y > 0$;
- d) nel 2° e 3° quadrante si ha $x < 0$, quindi $v_y < 0$.

Notare che le componenti v_x e v_y del moto armonico sono le derivate, rispetto al tempo, delle equazioni del moto circolare uniforme.

Infatti dalle (1), (2) del paragrafo precedente si ha:

$$\dot{x}(t) = dx/dt = -R \cdot \omega \text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega y ;$$

$$\dot{y}(t) = dy/dt = R \cdot \omega \text{cos}(\omega t + \varphi) = \omega x .$$

Ricordando la (4) si vede che:

$$\dot{x}(t) = v_x \quad \dot{y}(t) = v_y .$$

N. 3 – Accelerazione del moto armonico.

Si dice accelerazione del moto armonico la componente dell'accelerazione del moto circolare uniforme secondo l'asse x o y (fig. 1-2).

Sia $\vec{a} = \overline{PN}$ il vettore accelerazione del moto circolare uniforme.

Come sappiamo il suo modulo è costante e si ha:

$$(1) \quad a = \frac{v^2}{R} \quad \text{da cui} \quad a = \frac{v^2}{R^2} \cdot R \rightarrow a = \omega^2 \cdot R .$$

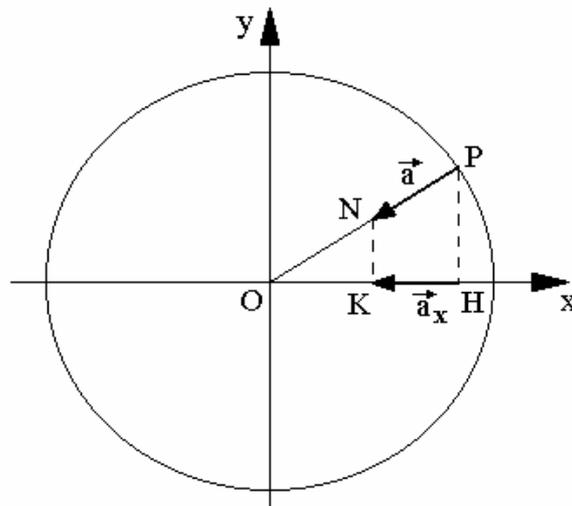


Figura 1-2

In forma vettoriale, ricordando che \vec{a} è sempre diretta verso il centro della circonferenza, possiamo scrivere:

$$\vec{a} = -\omega^2 \overline{OP} \quad \text{o anche} \quad \vec{a} = \omega^2 \overline{PO} .$$

Se ora ricordiamo la rappresentazione cartesiana del vettore \overline{OP} nel piano $x y$ si ottiene:

$$(2) \quad \vec{a} = -\omega^2 (x\vec{c}_1 + y\vec{c}_2) .$$

La componente del vettore \vec{a} secondo l'asse x o y ci dà l'accelerazione del moto armonico; si ottiene pertanto:

$$a_x = -\omega^2 x \quad \text{e} \quad a_y = -\omega^2 y .$$

Possiamo vedere subito che a_x e a_y non sono altro che le derivate seconde delle equazioni del moto armonico.

Infatti, tenendo presente che:

$$\dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad \ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

si ha
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x = a_x .$$

Analogamente

$$\dot{y}(t) = -R\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \ddot{y}(t) = -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

quindi
$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y = a_y .$$

In forma vettoriale, prendendo non le componenti ma i componenti del vettore \vec{a} , si ottiene:

$$(4) \quad \vec{a}_x = -\omega^2 x \vec{c}_1 \quad \text{e} \quad \vec{a}_y = -\omega^2 y \vec{c}_2 ;$$

o più semplicemente

$$(5) \quad \vec{a}_x = -\omega^2 \vec{x} \quad \text{e} \quad \vec{a}_y = -\omega^2 \vec{y} .$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che mentre lo spostamento $\vec{OH} = \vec{x}$ è diretto in un verso, il vettore \vec{a}_x è diretto in verso opposto.

Dalle (4) o (5) si ricava una notevole proprietà:

“La caratteristica di un moto armonico è che in ogni istante l’accelerazione è proporzionale allo spostamento ed ha verso contrario “.

N. 4 – Composizione di due moti armonici aventi lo stesso centro, uguale periodo e traiettorie non sovrapposte.

Vogliamo dimostrare che il moto composto di due moti armonici aventi lo stesso centro O , uguale periodo $T = 2\pi/\omega$ e traiettorie non sovrapposte è un moto centrale che ha per traiettoria un'ellisse. (In casi particolari una circonferenza o un segmento di retta).

Siano x e y le rette, generalmente oblique, alle quali appartengono le traiettorie dei due moti armonici componenti. Le coordinate del punto P che descrive il moto risultante sono:

$$(1) \quad x = a \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = b \cos(\omega t + \varphi_2),$$

con $a > 0$, $b > 0$ mentre φ_1 e φ_2 sono le fasi iniziali dei due moti armonici.

Dalle (1) segue $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\ddot{y} = -\omega^2 y$.

Ricordando che $\vec{a} = \ddot{x} \vec{c}_1 + \ddot{y} \vec{c}_2$ si ottiene

$$\vec{a} = -\omega^2 x \vec{c}_1 - \omega^2 y \vec{c}_2 = -\omega^2 (x \vec{c}_1 + y \vec{c}_2),$$

cioè (2) $\vec{a} = -\omega^2 \vec{OP}$.

Ciò implica che il moto del punto P è centrale ed ha il punto O come centro. Determiniamo la traiettoria del punto P . Dalle (1) si ha:

$$x/a = \cos(\omega t + \varphi_1) \quad y/b = \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1 = x/a \\ \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2 = y/b \end{cases}$$

Possiamo pensare di avere un sistema di due equazioni lineari nelle incognite $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$; risolvendo con la regola di Cramer si ha:

$$\cos \omega t = \frac{\begin{vmatrix} x/a & -\text{sen}\varphi_1 \\ y/b & -\text{sen}\varphi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & -\text{sen}\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & -\text{sen}\varphi_2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{y}{b} \text{sen}\varphi_1 - \frac{x}{a} \text{sen}\varphi_2}{\text{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \text{sen}\varphi_2}$$

Si ottiene $\cos \omega t \cdot \text{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{y}{b} \text{sen}\varphi_1 - \frac{x}{a} \text{sen}\varphi_2$

Analogamente $\text{sen}\omega t \cdot \text{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{y}{b} \cos\varphi_1 - \frac{x}{a} \cos\varphi_2$.

Posto $\varphi_1 - \varphi_2 = \delta$, quadrando ambo i membri di ogni equazione e sommando si ottiene:

$$\text{sen}^2 \delta = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{xy}{ab} (\text{sen}\varphi_1 \text{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2) ,$$

cioè (4) $\text{sen}^2 \delta = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cos \delta$.

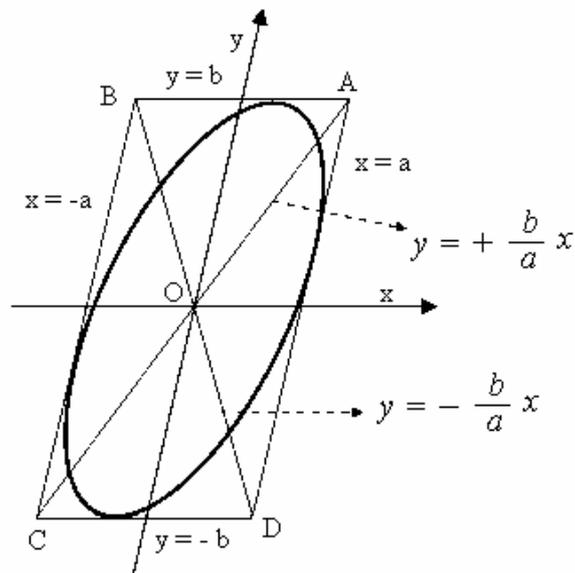


Figura 1-3

La (4) ci dice che la traiettoria del punto P è un'ellisse di centro O (fig. 1-3).

In particolare, se $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = k\pi$, la (4) si riduce a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \mp \frac{2xy}{ab} = 0 \quad \text{da cui} \quad \left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} \right)^2 = 0 ,$$

e quindi,

$$(5) \quad \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b} \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq a \quad , \quad 0 \leq y \leq b .$$

La (5) dice che la traiettoria del punto P si riduce a un segmento di retta di equazione $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Se poi $a = b$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$ la traiettoria del punto P si riduce a d una circonferenza di centro O .

N. 5 – Particolari moti armonici coerenti e sovrapposti.

Consideriamo due moti armonici coerenti, cioè aventi lo stesso periodo T , e quindi la stessa pulsazione $\omega = 2\pi/T$, e differenza di fase costante; supponiamo anche che essi abbiano lo stesso centro O e traiettorie sovrapposte su una stessa retta, per es. l'asse x . Le equazioni dei due moti sono quindi:

$$(1) \quad x_1 = a \cdot \cos (\omega t + \varphi_1) \quad \quad x_2 = b \cdot \cos (\omega t + \varphi_2)$$

,

ove φ_1 e φ_2 sono le fasi iniziali, cioè corrispondenti all'istante $t = 0$. Il moto composto dai due moti armonici è dato dall'equazione ;

$$(2) \quad x = a \cdot \cos (\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos (\omega t + \varphi_2) .$$

La differenza di fase $\Delta\varphi$ dei due moti armonici non dipende dal tempo; infatti si ha:

$$\Delta\varphi = \omega t + \varphi_2 - \omega t - \varphi_1 \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 .$$

Diamo alcune definizioni.

Se la differenza di fase è 2π o $2k\pi$ i due moti armonici si dicono in fase; se invece la differenza è π o $(2k+1)\pi$ i due moti si dicono in opposizione di fase; se poi la differenza di fase è $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ i due moti si dicono in quadratura.

Discutiamo questi tre casi particolari.

I caso.

Supponiamo che i due moti armonici siano in fase; quindi $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$,
cioè $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$.

L'equazione del moto risultante dei due moti armonici è:

$$x = x_1 + x_2 = a \cdot \cos (\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos (\omega t + \varphi_1 + 2k\pi) ,$$

$$(3) \quad x = x_1 + x_2 = (a + b) \cos (\omega t + \varphi_1) \quad x = A \cos (\omega t + \varphi_1) .$$

Il moto risultante è ancora un moto armonico e la sua ampiezza è uguale alla somma delle ampiezze dei due moti armonici e l'oscillazione del moto risultante è rinforzata; si dice che si ha interferenza costruttiva dei due moti. In particolare se $a = b$, l'equazione del moto armonico risultante sarà:

$$x = 2a \cos (\omega t + \varphi_1) .$$

Cambiando l'origine dei tempi possiamo sempre supporre che la fase iniziale del 1° moto armonico sia $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$.

Riportando gli argomenti delle funzioni goniometriche in ascissa e le elongazioni dei moti armonici in ordinate, possiamo rappresentare il fenomeno come è indicato in (fig. 1-4).

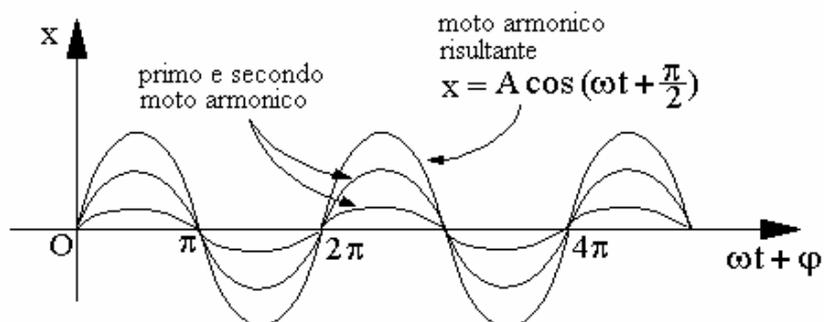


Figura 1-4

II caso.

Supponiamo che i due moti armonici siano in opposizione di fase, quindi $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi + \pi$. L'equazione risultante dei due moti armonici è:

$$x = x_1 + x_2 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi + 2k\pi),$$

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) - b \cdot \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$(4) \quad x = (a - b)\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x = A \cos(\omega t + \varphi_1),$$

cioè il moto risultante è ancora un moto armonico, ma la sua ampiezza è uguale alla differenza delle ampiezze dei due moti armonici. L'oscillazione del moto risultante è smorzata e si dice che si ha interferenza distruttiva. In particolare, se $a = b$ si ottiene $x = 0$, cioè le due oscillazioni si annullano a vicenda.

Cambiando l'origine dei tempi possiamo sempre supporre che la fase iniziale del 1° moto armonico sia $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Riportando gli argomenti delle funzioni goniometriche sulle ascisse e le elongazioni dei moti armonici in ordinate, possiamo rappresentare il fenomeno come è indicato in (fig. 1-5) nella pagina seguente.

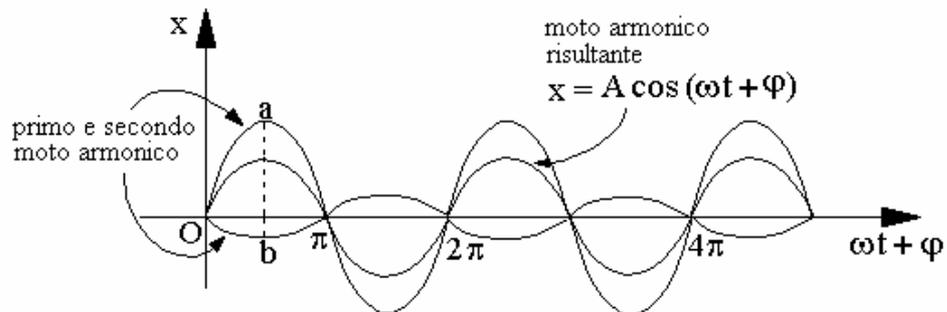


Figura 1-5

III caso.

Consideriamo ora un solo moto armonico con fase iniziale $\varphi \neq 0$;
l'equazione del moto è:

$$(5) \quad x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi) ;$$

ne segue $x = a \cdot \cos \omega t \cdot \cos \varphi - a \cdot \text{sen} \omega t \cdot \text{sen} \varphi$.

Ponendo $a \cdot \cos \varphi = m$ $a \cdot \text{sen} \varphi = n$ si ha:

$$(6) \quad x = m \cdot \cos \omega t - n \cdot \text{sen} \omega t$$
 .

Ma $-\text{sen} \omega t = +\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$;

sostituendo nell'equazione precedente si ha:

$$(7) \quad x = m \cdot \cos \omega t + n \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
 .

La (7) ci dice che un qualsiasi moto armonico con fase iniziale $\varphi \neq 0$ si può sempre considerare come somma dei due moti armonici aventi lo stesso periodo, in quadratura e di ampiezze opportune.

N. 6 – Composizione di due generici moti armonici aventi lo stesso centro, uguale periodo T e traiettorie sovrapposte (costruzione di Fresnel).

Consideriamo due generi di moti armonici aventi lo stesso centro O , uguale periodo T e quindi uguale pulsazione $\omega = 2\pi/T$ e traiettorie sovrapposte su una stessa retta, per es. l'asse x . Le equazioni dei due moti sono quindi:

$$(1) \quad x_1 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) .$$

Vogliamo dimostrare che il moto composto dei due moti armonici è ancora un moto armonico di periodo T uguale a quello dei moti componenti e di ampiezza A e fase iniziale Φ che possiamo determinare facilmente, cioè:

$$(2) \quad a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cdot \cos(\omega t + \Phi) .$$

Possiamo dare due dimostrazioni. Cominciamo con quella data dalla costruzione vettoriale di Fresnel (fig. 1-6).

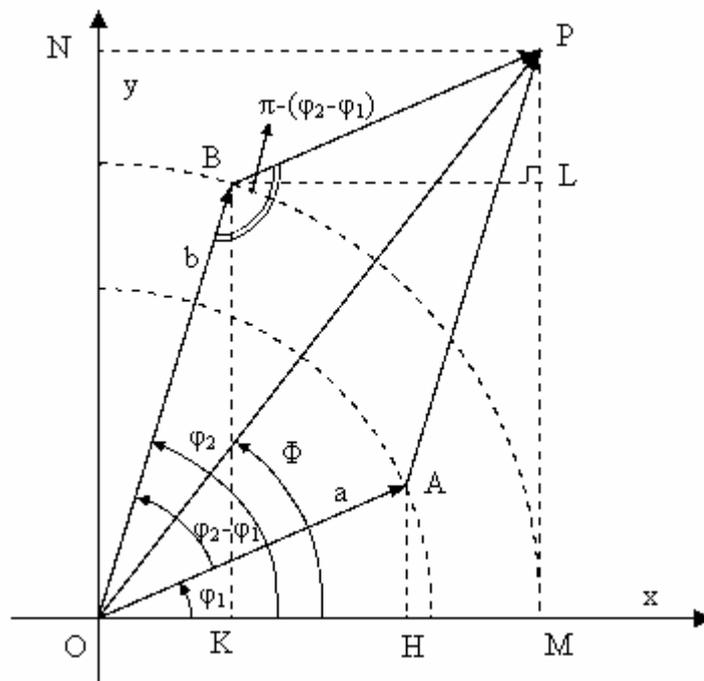


Figura 1-6

Siano \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} i vettori rotanti che descrivono i due moti armonici e consideriamo questi due vettori all'istante iniziale $t = 0$. Gli angoli φ_1 e φ_2 che essi formano con il semiasse positivo x sono le fasi iniziali dei due moti (misurate positivamente in verso antiorario). Consideriamo il parallelogramma costruito sui due vettori e sia OP la sua diagonale; il vettore \overrightarrow{OP} è il risultante dei due vettori che descrivono i due moti armonici, quindi:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} .$$

Al variare del tempo t il quadrilatero $OAPB$ ruota rigidamente attorno al punto O , anche il vettore \overrightarrow{OP} ruota con la stessa velocità angolare dei due vettori \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . È la proiezione ortogonale M del punto P sull'asse x che descrive il moto armonico composto dei due moti dati. L'ampiezza A del moto risultante è uguale al modulo del vettore \overrightarrow{OP} , quindi $A = \overline{OP}$. Naturalmente anche la proiezione ortogonale del punto P sull'asse y descrive un moto armonico. Le equazioni del moto armonico risultante sugli assi x e y sono quindi date dalle relazioni:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \Phi) \quad y = A \cdot \sin(\omega t + \Phi) .$$

Rimane da determinare l'ampiezza A del moto armonico risultante e la sua fase iniziale Φ . A tale scopo, se consideriamo il parallelogramma $OAPB$ si ha:

$$\hat{O} + \hat{B} = \pi ; \quad \text{poiché} \quad \hat{O} = \varphi_2 - \varphi_1 ,$$

si ricava
$$\hat{B} = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Applicando al triangolo OPB il teorema di Carnot si ha:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BP}^2 - 2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{BP} \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] ,$$

$$A^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) ,$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} .$$

Rimane da determinare la fase iniziale Φ .

Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{OM} = \overline{OP} \cdot \cos \Phi, \quad \text{cioè} \quad \cos \Phi = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OK} + \overline{KM}}{\overline{OP}},$$

da cui
$$\cos \Phi = \frac{a \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos \varphi_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Per il primo teorema sui triangoli rettangoli si ha inoltre:

$$\overline{MP} = \overline{OP} \cdot \sin \Phi, \quad \text{cioè} \quad \sin \Phi = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{KB} + \overline{LP}}{\overline{OP}},$$

da cui
$$\sin \Phi = \frac{a \cdot \sin \varphi_1 + b \cdot \sin \varphi_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Dalla fase Φ possiamo quindi conoscere seno e coseno e quindi essa risulta perfettamente determinabile.

Naturalmente si ha
$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{a \cdot \sin \varphi_1 + b \cdot \sin \varphi_2}{a \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos \varphi_2}.$$

Dobbiamo osservare che questa relazione non determina univocamente Φ , ma lo determina a meno di π rad.

In particolare se $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, cioè se i due moti armonici componenti sono in fase, l'ampiezza A del moto armonico risultante sarà:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 2k\pi} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{(a+b)^2},$$

infine $A = a + b$, cioè l'oscillazione risultante è rinforzata, come già sappiamo, e si avrà:

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 + 2k\pi),$$

da cui
$$x = (a + b) \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Se invece $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, cioè se i due moti armonici componenti sono in opposizione di fase si avrà $A = |a - b| = b - a$, cioè l'ampiezza del moto armonico risultante diminuisce e l'equazione del moto sarà:

$$x = (b - a)\cos(\omega t - \varphi_1) .$$

N. 7 – Ancora sulla composizione di due moti armonici.

Consideriamo due generici moti armonici aventi lo stesso centro O , uguale periodo T e quindi uguale pulsazione $\omega = 2\pi/T$ e traiettorie sovrapposte su una stessa retta, per es. l'asse x .

Le equazioni dei due moti sono quindi:

$$(1) \quad x_1 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Vogliamo dare un'altra dimostrazione che il moto risultante dei due moti armonici è ancora un moto armonico di periodo T uguale a quello dei moti componenti e di ampiezza A e fase iniziale Φ che possiamo determinare, cioè:

$$(2) \quad a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cdot \cos(\omega t + \Phi) .$$

Infatti dalla (2), con successivi passaggi, si ricava:

$$a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) - A \cdot \cos(\omega t + \Phi) = 0 ,$$

$$\cos \omega t \cdot \cos \varphi_1 - a \cdot \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 + b \cdot \cos \omega t \cdot \cos \varphi_2 - b \cdot \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 + \\ - A \cdot \cos \omega t \cdot \cos \Phi + A \cdot \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \Phi = 0 ,$$

$$\text{e quindi} \quad \cos \omega t (a \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos \varphi_2 - A \cdot \cos \Phi) - \\ - \operatorname{sen} \omega t (a \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 + b \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 - A \cdot \operatorname{sen} \Phi) = 0 .$$

Affinché questa equazione sia un'identità, cioè sia verificata per qualsiasi valore della variabile t , è necessario e sufficiente che i coefficienti di

$\cos \omega t$ e di $\sin \omega t$ siano nulli. Si hanno quindi le due equazioni seguenti, che formano un sistema:

$$(3), (4) \quad \begin{cases} a \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos \varphi_2 = A \cdot \cos \Phi \\ a \cdot \sin \varphi_1 + b \cdot \sin \varphi_2 = A \cdot \sin \Phi \end{cases} .$$

Quadrando e sommando si ha:

$$\begin{cases} a^2 \cdot \cos^2 \varphi_1 + b^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + 2ab \cdot \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = A^2 \cos^2 \Phi \\ a^2 \cdot \sin^2 \varphi_1 + b^2 \cdot \sin^2 \varphi_2 + 2ab \cdot \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = A^2 \sin^2 \Phi \end{cases}$$

da cui $a^2 + b^2 + 2ab \cdot (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1) = A^2$.

Si ottiene così:

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos (\varphi_2 - \varphi_1) ,$$

e quindi $A \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}$.

L'ampiezza A del moto armonico risultante è pertanto perfettamente determinata.

Determinata A , dalle equazioni (3), (4) del sistema si ricava:

$$\cos \Phi = \frac{a \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos \varphi_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}} ,$$

$$\sin \Phi = \frac{a \cdot \sin \varphi_1 + b \cdot \sin \varphi_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}} .$$

Della fase iniziale Φ conosciamo seno e coseno e quindi essa risulta univocamente determinata.

CAPITOLO SECONDO

PROPAGAZIONE DI PERTURBAZIONI

N. 1 – Moti ondosi nei mezzi materiali.

Per l'argomento si veda Gilberto Bernardini, Fisica I, pgg. 454-460 Casa Ed. Veschi-Roma.

Se in un mezzo materiale dotato di proprietà elastiche si producono deformazioni, si generano delle onde che si propagano nel mezzo stesso. Affinché le onde si propagano non è necessario che il mezzo considerato sia propriamente elastico, perché tutti i mezzi continui, in misura più o meno sensibile, sono elastici.

Infatti, supponiamo che un corpo subisca una deformazione. Se questa non è permanente, il corpo, lasciato libero, tende a riprendere la sua conformazione di equilibrio eliminando la deformazione; ma la struttura continua del mezzo fa sì che il movimento delle sue particelle, in una certa regione, si trasmetta alle particelle vicine e interagenti con le precedenti e così di seguito. In tal modo la deformazione si “propaga” attraverso il corpo fino a raggiungere tutte le particelle, in un tempo e con una ampiezza più o meno grandi. Va osservato che le particelle seguono la sollecitazione con un certo ritardo a causa della loro massa inerziale e la ritrasmettono con un ritardo maggiore e ciò spiega perché la velocità di propagazione sia finita.

Le vibrazioni di un mezzo sono *longitudinali* se esse avvengono nella direzione di propagazione, sono *trasversali* se esse avvengono in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione. Le onde corrispondenti si dicono *onde longitudinali* e *onde trasversali*. Le più comuni onde longitudinali sono le onde sonore: esse si propagano per successive compressioni e rarefazioni del mezzo in cui avvengono. Esempi di onde trasversali sono le onde che si propagano lungo una corda “pizzicata” in un punto, o che si propagano sulla superficie di un liquido o le onde elettromagnetiche (che includono anche le onde luminose).

La propagazione per onde si esprime matematicamente attraverso equazioni differenziali che per fenomeni diversi differiscono tra loro solo per il diverso significato fisico che si può attribuire alle grandezze che compaiono

nelle equazioni stesse. Infatti l'equazione associata alla propagazione delle onde acustiche è uguale a quella che caratterizza la propagazione delle onde elastiche in un mezzo materiale o che caratterizza la propagazione delle onde elettromagnetiche.
Facciamo due esempi.

- 1) Consideriamo una corda tesa lungo l'asse x e che oscilla nel piano xy ; sia μ la densità lineare della corda e τ la tensione ad essa applicata. L'equazione delle onde è:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{ove} \quad v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

Il suo integrale generale, cioè la più generale funzione $y(x,t)$ che soddisfa l'equazione è:

$$y(x, t) = f_1(x - v t) + f_2(x + v t) .$$

Se la corda non è tesa ma è sospesa a tanti fili elastici e agitiamo l'estremità O della corda per mezzo di un diapason, nel piano xy si producono delle onde trasversali di equazione:

$$y = A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (V t - x) + \varphi \right] = A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) + \varphi \right] ;$$

ove V è la velocità di propagazione dell'onda. Ricordiamo che

$\lambda = TV$ è la lunghezza d'onda dell'oscillazione;

T il periodo di oscillazione; esso è uguale al tempo che l'onda impiega a spostarsi di un tratto di lunghezza λ ,

$f = 1/T$ è la frequenza di oscillazione;

$\omega = 2\pi f$ è la pulsazione del moto oscillatorio.

- 2) Consideriamo un tubo aperto alle due estremità e avente l'asse coincidente con l'asse x di un riferimento cartesiano. Un pistoncino oscilla alle estremità del tubo e trasmette le sue oscillazioni all'aeriforme contenuto del tubo. Sia ρ la densità del fluido, p la

pressione e $\gamma = C_p/C_v$ il rapporto tra le capacità termiche molari; sia inoltre K il modulo di compressibilità adiabatica ed $s(x,t)$ lo spostamento all'istante t rispetto alla posizione di equilibrio subito da uno straterello di fluido di ascissa x .
 Nel tubo si producono onde elastiche longitudinali e l'equazione differenziale delle onde è:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{ove} \quad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} .$$

Infine ricordiamo che due sorgenti si dicono coerenti se esse emettono onde di uguale periodo; anche le onde emesse dalle due sorgenti si dicono coerenti.

Naturalmente se consideriamo le equazioni di due onde coerenti, la differenza dei loro argomenti in un punto fisso dello spazio, detta *differenza di fase*, è costante o nulla al variare del tempo.

N. 2 – Relazioni fra le variazioni dei parametri di stato.

Vogliamo trovare alcune variazioni fra i parametri di stato di un fluido termodinamico nelle quali figurano alcuni coefficienti che ci permettono di esprimere la velocità con cui le onde elastiche o meccaniche si propagano nel fluido stesso.

Questi stessi coefficienti si possono definire anche per un corpo rigido e massiccio che venga compresso a temperatura costante e senza scambi di calore con l'esterno.

Consideriamo quindi l'equazione di stato di un fluido,

$$(1) \quad f(p, V, T) = 0 ;$$

essa permette di esprimere ciascuno dei tre parametri in funzione degli altri due e si ha:

$$(2) \quad p = p(V, T) , \quad V = V(p, T) , \quad T = T(p, V) .$$

Vediamo alcuni casi :

1) Riscaldiamo un gas a pressione costante; poiché l'aumento di volume ΔV è proporzionale al volume iniziale V del gas e all'aumento di temperatura ΔT possiamo scrivere:

$$(3) \quad \Delta V = \alpha V \Delta T .$$

Sotto forma di derivata parziale possiamo scrivere:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{p=\text{cost}} = \alpha V ;$$

α è detto coefficiente di dilatazione cubica.

2) Comprimiamo un gas a temperatura costante; poiché all'aumento Δp di pressione corrisponde una diminuzione di volume ΔV , proporzionale al volume iniziale V del gas, si ha:

$$\Delta V = -cV \cdot \Delta p \quad \text{o se si vuole} \quad (4) \quad \Delta V = -\frac{1}{\varepsilon} V \cdot \Delta p .$$

In forma di derivata parziale possiamo scrivere:

$$(4') \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{t=\text{cost}} = -cV = -\frac{1}{\varepsilon} V .$$

Si ottiene la (4) anche se comprimiamo isotermicamente un pezzo di metallo solido e massiccio per mezzo di un piezometro .

La costante c si dice coefficiente di compressibilità isoterma.

Per $\Delta V = -V$ dalla (4)₂ si ricava:

$$-V = -\frac{1}{\varepsilon} V \cdot \Delta p \quad \text{da cui} \quad \varepsilon = \Delta p ;$$

e quindi ε esprime l'aumento di pressione che ridurrebbe a zero il volume del sistema considerato (ipotesi ovviamente assurda).

3) Comprimiamo il gas (o il corpo rigido) adiabaticamente, cioè senza scambi di calore con l'esterno, quindi $dQ = 0$.
 Rispetto al caso della compressione isoterma varia solo il coefficiente c e quindi possiamo scrivere:

$$(5) \quad \Delta V = -c'V \cdot \Delta p \quad \text{o se si vuole} \quad \Delta V = -\frac{1}{\varepsilon'}V \cdot \Delta p \quad .$$

In forma di derivata parziale possiamo scrivere:

$$(5') \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{dQ=0} = -c'V = -\frac{1}{\varepsilon'}V \quad .$$

La costante c' si dice coefficiente di compressibilità adiabatica e il suo reciproco $\varepsilon' = \frac{1}{c'}$ si dice modulo di compressione adiabatica.

I coefficienti di compressione sono sempre molto piccoli e ordinariamente i valori di questi coefficienti si riferiscono alla compressione isoterma.

A temperatura ordinaria si ha:

$$\left. \begin{array}{l} \text{per il rame} \quad c = 0,8 \cdot 10^{-7} \\ \text{per il ferro} \quad c = 0,64 \cdot 10^{-7} \\ \text{per l'ottone} \quad c = 1 \cdot 10^{-7} \\ \text{per il vetro} \quad c = 2 \cdot 10^{-7} \end{array} \right\} \frac{cm^2}{Newton}$$

Ciò significa che un volume di rame si riduce di 0,8 decimilionesimi sotto un aumento di pressione di 1 Newton al cm^2 .

Diamo ora i valori dei coefficienti di compressione di alcuni liquidi a temperatura ordinaria; naturalmente i liquidi hanno un coefficiente di compressione maggiore dei solidi.

$$\left. \begin{array}{l} \text{per l'acqua} \quad c = 0,46 \cdot 10^{-5} \\ \text{per il mercurio} \quad c = 0,035 \cdot 10^{-5} \\ \text{per l'alcool etilico} \quad c = 0,88 \cdot 10^{-5} \end{array} \right\} \frac{\text{cm}^2}{\text{Newton}}$$

Questa tabella ci dice che sotto la pressione di 1 Newton al cm^2 un litro di mercurio subisce una diminuzione di volume ΔV pari a:

$$\Delta V = 0,035 \cdot 10^{-5} \text{ dm}^3 = 0,035 \cdot 10 \text{ mm}^3 = 0,35 \text{ mm}^3 .$$

Si tenga presente che per ottenere una uguale contrazione di volume basta un raffreddamento di soli $0,002 \text{ }^\circ\text{C}$.

N. 3 – Relazione tra i moduli di compressione isoterma e adiabatica.

Nel caso di una gas perfetto le leggi della termodinamica ci permettono di ricavare le equazioni (4), (5) del paragrafo precedente con un altro procedimento che ci consente di capire meglio il significato dei coefficienti ε ed ε' e di trovare una relazione che intercorre tra essi.

Infatti, consideriamo dapprima una trasformazione isoterma di un gas perfetto; per la legge di Boyle si ha:

$$(1) \quad PV = K .$$

Differenziando ambo i membri si ha:

$$p dV + V dp = 0 \quad dV = -\frac{1}{p} V dp ,$$

e per una trasformazione finita si ha:

$$(2) \quad \Delta V = -\frac{1}{p} V \cdot \Delta p .$$

La (2) deve coincidere con la formula (4) del N. 2 , cioè con

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon} V \cdot \Delta p \quad ,$$

trovata nel paragrafo precedente; confrontando si ottiene:

$$(3) \quad \varepsilon = p \quad .$$

Consideriamo una trasformazione adiabatica di un gas perfetto; per la legge di Poisson si ha:

$$(4) \quad PV^\gamma = \text{cost} \quad .$$

Calcolando il differenziale totale si ottiene in successione:

$$V^\gamma dp + p dV^\gamma = 0 \quad , \quad V^\gamma dp + p\gamma V^{\gamma-1} dV = 0 \quad ,$$

$$V dp + p\gamma dV = 0 \quad \quad dV = -\frac{1}{p\gamma} V dp \quad ;$$

per una trasformazione finita si ha:

$$(5) \quad \Delta V = -\frac{1}{p\gamma} V \cdot \Delta p \quad .$$

La (5) deve coincidere con la formula:

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon'} V \cdot \Delta p \quad ,$$

trovata nel paragrafo precedente. Confrontando si ottiene:

$$(6) \quad \varepsilon' = p\gamma \quad \text{o} \quad \text{anche} \quad \varepsilon' = \varepsilon\gamma \quad .$$

Ricordiamo che γ è legata ai calori molari C_p e C_v di un gas perfetto dalla relazione:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad .$$

N. 4 – Onde piane in un fluido. Equazione di d'Alembert.

Vogliamo dimostrare che se in un fluido è immersa una sorgente oscillante, le oscillazioni si propagano nel fluido per mezzo di onde longitudinali. Per semplicità riferiamoci alla propagazione in una sola direzione. Consideriamo quindi un tubo pieno di aria, o di altro gas, aperto alle due estremità, e supponiamo che in una di esse ci sia un pistoncino scorrevole S , collegato ad una lamina elastica oscillante L (fig. 2-1).

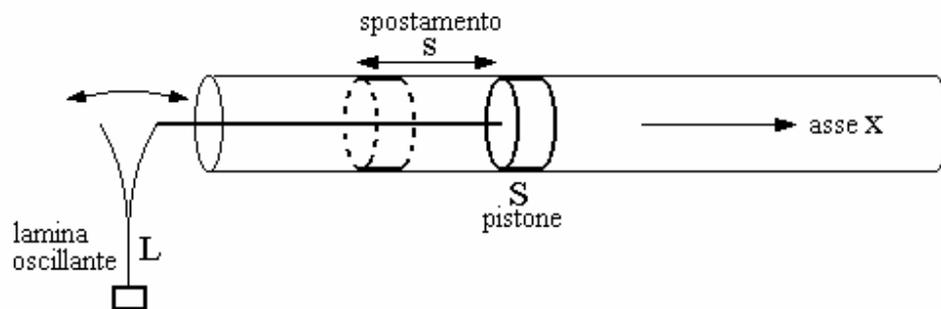


Figura 2-1

Quando il pistoncino entra nel tubo si ha una compressione dello strato d'aria a contatto con esso; questo strato reagisce dilatandosi a causa dell'elasticità dell'aria e comprime lo strato d'aria seguente e così di seguito. Si ha quindi un'onda di compressione che si propaga nel tubo. In un istante successivo il pistoncino S torna indietro producendo una dilatazione dello strato d'aria a immediato contatto con esso. Questa rarefazione si propaga allo strato d'aria seguente, che per elasticità si espande occupando uno spazio che ha minore densità di materia e così via. Si ha quindi un'onda di dilatazione che si propaga nel condotto e che segue quella di compressione che si era formata in precedenza.

In tal modo ogni strato d'aria del condotto subisce alternativamente una compressione e una dilatazione, le quali fanno variare armonicamente il volume ΔV dello strato e fanno oscillare le molecole nella direzione del tubo.

Passiamo ora alla trattazione matematica del fenomeno allo scopo di ricavare le leggi di propagazione delle onde (vedi A. Rostagni, Fisica Generale, vol. II, parte prima, pag. 416; UTET).

Fissiamo sull'asse del tubo un sistema di ascisse x , aventi origine sulla superficie S del pistoncino nella posizione di riposo; lo spostamento s di

un generico strato d'aria dalla sua posizione di riposo sarà funzione della sua ascissa x e del tempo t e quindi possiamo scrivere $s = s(x, t)$. In altre parole uno straterello d'aria di ascissa x , al variare del tempo t oscilla lungo l'asse x attorno ad un punto e compie uno spostamento che ha le limitazioni

$-a \leq s(x, t) \leq a$, dove a è l'ampiezza di oscillazione dello straterello.

Consideriamo un volume di gas $dV_0 = S dx$ nelle condizioni iniziali di riposo e sia p_0 la sua pressione; supponiamo che questo volume di gas sia compreso fra le sezioni AB e CD del tubo (fig. 2-2).

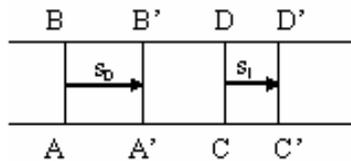


Fig. 2-2

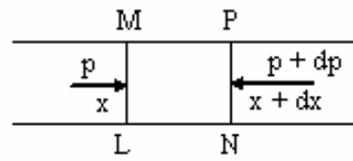


Fig. 2-3

In seguito agli spostamenti delle molecole di gas prodotti dall'oscillazione del pistoncino S , il gas verrà ad occupare un volume dV_1 compreso fra le sezioni $A'B'$ e $C'D'$.

Se indichiamo con s_0 lo spostamento delle molecole che si trovano sulla sezione AB e con s_1 lo spostamento delle molecole che si trovano, nello stesso istante, sulla sezione CD si ha la relazione:

$$(1) \quad s_1 = s_0 + \frac{\partial s}{\partial x} dx,$$

ove abbiamo introdotto i simboli di derivata parziale per tenere presente che lo spostamento s è funzione anche del tempo $s = s(x, t)$.

La variazione del volume dV_0 di aria è:

$$(2) \quad \Delta(dV_0) = dV_1 - dV_0 = S(s_1 - s_0) = S \frac{\partial s}{\partial x} dx = \frac{\partial s}{\partial x} dV_0.$$

questa variazione di volume del gas è praticamente una trasformazione adiabatica perché le compressioni e successive rarefazioni dell'aria si susseguono con tale rapidità da non permettere sensibili scambi di calore fra due strati successivi del gas. A questa variazione di volume $\Delta(dV_0)$ corrisponde per lo straterello d'aria, una variazione di pressione $p - p_0$.

Queste variazioni sono legate dalla (5) del paragrafo N. 2 e quindi possiamo scrivere:

$$\Delta(dV_0) = -\frac{1}{\varepsilon'} dV_0 \cdot (p - p_0) \quad ,$$

ossia (3)
$$dV_1 - dV_0 = -\frac{1}{\varepsilon'} dV_0 \cdot (p - p_0) \quad ,$$

ove ε' è il modulo di compressione (o espansione) adiabatica. Il suo inverso, $c' = \frac{1}{\varepsilon'}$ si dice coefficiente di compressibilità adiabatica.

Dalla (3) si ha:

$$p - p_0 = -\varepsilon' \frac{dV_1 - dV_0}{dV_0} \quad .$$

Ricordando la (2) si ottiene:

$$p - p_0 = -\varepsilon' \frac{1}{dV_0} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} dV_0 \quad ,$$

e quindi la pressione connessa con lo spostamento dx è:

$$(4) \quad p = p_0 - \varepsilon' \frac{\partial s}{\partial x} \quad .$$

Ne segue che p è maggiore di p_0 se $\frac{\partial s}{\partial x} < 0$, ossia se lo spostamento s

è associato a una compressione; invece p è minore di p_0 se $\frac{\partial s}{\partial x} > 0$,

ossia se allo spostamento s corrisponde una dilatazione.

Ora la pressione, che come abbiamo visto varia nei diversi elementi di volume, si può considerare come una funzione di x . Se indichiamo con p la pressione all'ascissa x con p' la pressione all'ascissa $x + dx$ (fig. 2-3), si avrà:

$$(5) \quad p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \rightarrow \quad p - p' = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \quad .$$

La propagazione degli spostamenti molecolari è dovuta proprio a questa variabilità della pressione. Infatti siano p e p' le pressioni agenti sulle basi del cilindro LMNP, compreso fra le ascisse x e $x + dx$; esse danno luogo ad una forza $df = S(p-p')$ agente sul cilindro, la quale a sua volta ne determina l'accelerazione (derivata seconda dello spostamento s , calcolata rispetto a t , per x costante). Tenendo presente che $df = m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ e che $m = \rho S dx$, ricordando la (5), si ha:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{m} df = \frac{S(p-p')}{\rho S dx} = -\frac{1}{\rho dx} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dx = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

quindi
$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

da cui (6)
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad .$$

Dalla (4) possiamo ricavare a parte la derivata $\frac{\partial p}{\partial x}$, in modo da esprimerla in funzione di s ; tenendo presente che p_0 è una costante si ha:

$$(7) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad .$$

Eguagliando membro a membro le (6), (7) si ha:

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \varepsilon' \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\varepsilon'} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad ,$$

infine (8)
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{ove} \quad \frac{1}{v^2} = \frac{\rho}{\varepsilon'} \quad .$$

La formula $v = \sqrt{\varepsilon'/\rho}$ fornisce la velocità con cui le onde longitudinali si propagano nel tubo.

Ricordando che $\varepsilon' = p\gamma$ (formula 6 del paragrafo N. 3), per la velocità di propagazione delle onde si ottiene la formula:

$$(9) \quad v = \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} .$$

La soluzione più generale dell'equazione differenziale (8) è la funzione:

$$s = s_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + s_2\left(t + \frac{x}{v}\right) ;$$

una soluzione particolare è la funzione:

$$(10) \quad s = s\left(t - \frac{x}{v}\right) .$$

Essa ci dice che gli spostamenti di aria che si producono sulla superficie S del pistoncino oscillante si propagano da uno straterello all'altro nel verso positivo dell'asse x e da una estremità all'altra del tubo, senza che si abbia un trasporto di materia. La (10) ci dice anche che ogni strato d'aria ripete l'oscillazione del primo strato con un ritardo di tempo che è direttamente proporzionale alla distanza x dall'origine delle ascisse e inversamente proporzionale alla velocità v con cui si muovono le onde. Il fatto che l'equazione (10) non contenga le coordinate y e z ci dice che, ad un dato istante t, lo spostamento s degli elementi dello straterello abbia lo stesso valore in tutti i punti di un piano perpendicolare all'asse x, almeno fin dove si estende il mezzo considerato. Si esprime questo fatto dicendo che la propagazione della perturbazione avviene per onde piane perpendicolari alla direzione di propagazione. Per questo motivo la (8) è detta equazione differenziale delle onde piane. Essa è detta anche equazione di D'Alembert, ed è una delle più importanti della fisica matematica.

La (8) è perfettamente analoga all'equazione differenziale che fornisce la propagazione delle onde trasversali, polarizzate in un piano, lungo una corda flessibile, di massa μ per unità di lunghezza, quando essa è sottoposta a una tensione longitudinale τ . L'equazione assume allora la forma:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{ove} \quad \frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{\tau} .$$

La (11) è detta equazione delle corde vibranti.

La formula $v = \sqrt{\tau/\mu}$ fornisce la velocità con cui le onde trasversali si propagano lungo la corda.

L'equazione (11) si deduce applicando i principi della meccanica al moto degli elementi della corda, nell'ipotesi semplificativa che gli spostamenti siano piccoli, cioè che l'ampiezza di oscillazione sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ .

Senza questa restrizione si avrebbe una equazione differenziale non lineare di difficile soluzione.

Per completare l'argomento, facciamo un piccolo esempio per chiarire la formula (9), che dà la velocità di propagazione delle onde in un fluido (vedi G. Bernardini, Fisica Sperimentale I, pag. 469, Casa Ed. Veschi, Roma).

Nel caso dell'aria si ha $\gamma = C_p/C_v = 1,4$ e in condizioni normali per la densità si ha $\rho = 1,293 \text{ Kg/m}^3$ e per la pressione $p = 101.325 \text{ N/m}^2$. Sostituendo questi valori nella formula che dà la velocità di propagazione delle onde,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} ;$$

si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 101.325}{1,293}} = \sqrt{109.709,98} \approx 331 \text{ m/s} .$$

Questo valore è in ottimo accordo con i dati forniti dall'esperienza.

Osserviamo infine che, una volta trovata la funzione degli spostamenti (10) siamo in condizione di conoscere istante per istante l'andamento della pressione in un dato punto del tubo. Infatti la formula già trovata:

$$(4) \quad \Delta p = p - p_0 - \epsilon' \frac{\partial s}{\partial x} ,$$

permette di calcolare Δp con una semplice derivazione della funzione $s = s(x, t)$. infatti supponiamo che l'onda di spostamento abbia l'equazione:

$$(12) \quad s(x, t) = a \cdot \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] ;$$

allora
$$\frac{\partial s}{\partial x} = -a \cdot \text{sen} \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] ;$$

ossia
$$\frac{\partial s}{\partial x} = + \frac{2\pi a}{\lambda} \text{sen} \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] .$$

Sostituendo nella (4) si ha:

$$p - p_0 = - \frac{2\pi a \varepsilon'}{\lambda} \text{sen} \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] ;$$

ossia (13)
$$p - p_0 = - \frac{2\pi a \varepsilon'}{\lambda} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right] ,$$

ove p_0 è nota perché è la pressione dell'aria prima che produciamo oscillazioni .

La (13) ci dà l'equazione di un'onda di pressione, costituita da successive compressioni e rarefazioni. Come si vede essa ha lo stesso periodo dell'onda di spostamento (12), ma è in anticipo di fase di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a questa, cioè è in quadratura.

Chiudiamo l'argomento con una informazione.

Come sappiamo, nei solidi si possono propagare sia onde longitudinali che trasversali; le prime, però, hanno in generale una velocità maggiore delle altre. Nel caso dei metalli la velocità delle onde longitudinali è il doppio di quella delle onde trasversali.

N. 5– Principio di sovrapposizione (Bernoulli).

La propagazione delle onde in un mezzo gode del principio di sovrapposizione di Bernoulli, che possiamo illustrare nel caso di onde trasversali che si propagano lungo una corda. Come sappiamo l'equazione differenziale delle onde è una equazione lineare che ben conosciamo:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} .$$

Ne segue che se $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ sono due funzioni che soddisfano la (1), anche la loro somma $y = y_1 + y_2$ è una funzione che soddisfa l'equazione stessa.

Dal punto di vista pratico ciò indica un fatto ben preciso.

Cioè supponiamo che agitando l'estremità O di una corda si produca un'onda progressiva di un certo tipo, e che agitandola in un altro modo si produca un'onda progressiva di un altro tipo. Agitiamo poi l'estremità della corda con una legge tale che lo spostamento di questa estremità sia, istante per istante, la somma vettoriale degli spostamenti che competono al punto O nei due moti precedenti.

Allora lungo la corda si ha un'onda progressiva i cui spostamenti si ottengono sommando vettorialmente, punto per punto, gli spostamenti delle prime due onde.

N. 6 – Propagazione delle onde in una corda.

Consideriamo una corda elastica, indefinita, sospesa a tanti fili anch'essi elastici (fig. 2-4) (vedi E. Perucca, Fisica Generale, vol. 1° pag. 502 UTET).

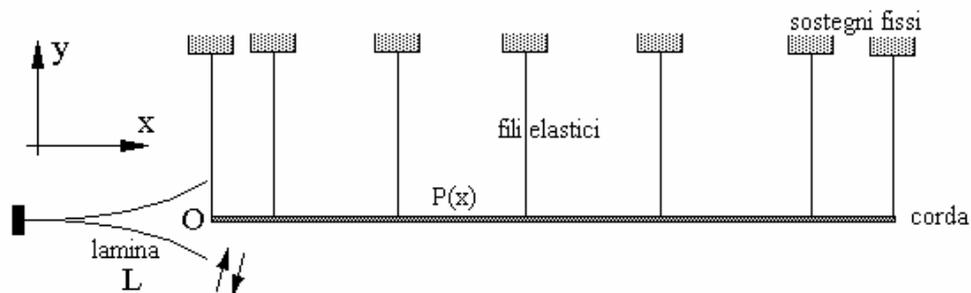


Figura 2-4

Se agiamo l'estremità O della corda per mezzo di una lamina vibrante L si producono delle onde che si propagano rigidamente lungo la corda stessa, cioè le oscillazioni prodotte nel punto O non rimangono localizzate ma si propagano da un capo all'altro con un ritardo di tempo dovuto all'inerzia delle masse che costituiscono la corda. Precisamente ogni punto P della corda ripete l'oscillazione del punto O con un certo ritardo di tempo t direttamente proporzionale alla distanza $\overline{OP} = x$ e inversamente proporzionale alla velocità V con cui l'onda si propaga sulla corda, quindi si ha:

$$t = \frac{\overline{OP}}{V} = \frac{x}{V} .$$

Queste onde si dicono onde trasversali perché la corda oscilla perpendicolarmente alla direzione di propagazione delle onde. Le oscillazioni del punto O si dicono invece longitudinali se O vibra nella direzione di propagazione. In tal caso, per osservare il fenomeno possiamo usare una lunga molla ad elica di sottile filo di acciaio.

Possiamo produrre onde trasversali anche in una corda metallica tesa alle due estremità. In tal caso l'elasticità della corda è dovuta al suo stato di tensione (fig. 2-5).

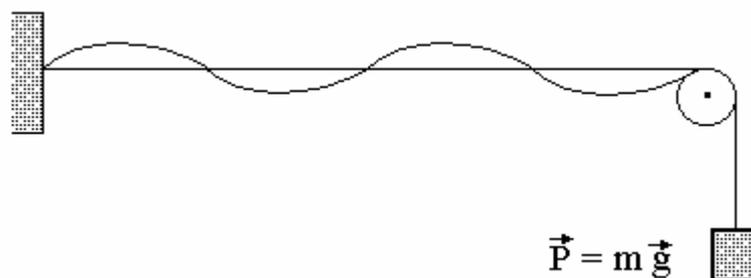


Figura 2-5

Ma torniamo ad una corda elastica indefinita e supponiamo per semplicità che l'estremo O della corda sia costretto a eseguire delle oscillazioni armoniche lungo l'asse y perpendicolare alla direzione della corda. In tal caso la corda oscilla in un piano α ben determinato passante per l'asse y e per l'asse x (che è la posizione di riposo della corda) detto piano di vibrazione (fig. 2-6).

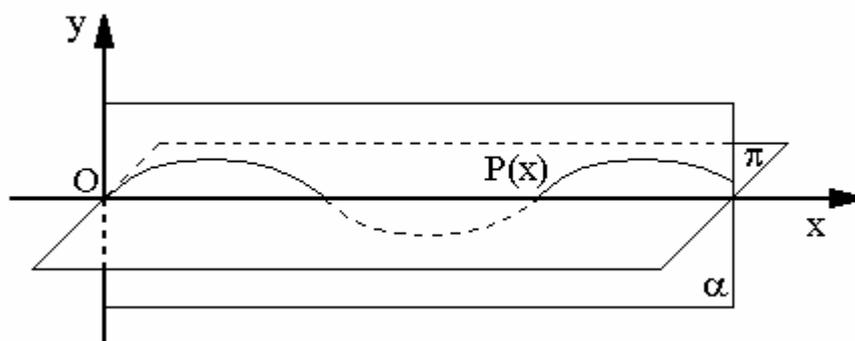


Figura 2-6

Il piano π ad esso perpendicolare e passante per la posizione di riposo della corda si dice piano di polarizzazione delle onde; per questo motivo le onde si dicono anche onde polarizzate.

In altre parole un'onda si dice polarizzata in un piano π quando vibra in un piano α perpendicolare a π . Noi studieremo sempre onde polarizzate. Queste onde sono ovviamente trasversali perché la corda oscilla perpendicolarmente alla direzione di propagazione.

Per l'equazione del moto del punto O della corda sull'asse y possiamo scrivere:

$$y_0(t) = a \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) ,$$

o anche (1) $y_0(t) = a \cdot \text{sen}(\omega t) ;$

infatti possiamo sempre scegliere l'origine dei tempi in modo che la fase iniziale φ del moto armonico sia nulla.

Già sappiamo che ogni punto P della corda a distanza $\overline{OP} = x$ ripete l'oscillazione del punto O con un ritardo di tempo $t = x/V$; ne segue che il moto del punto P è dato dalla legge:

$$y(x, t) = a \cdot \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) + \varphi \right] ,$$

o più semplicemente

$$(2) \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} \omega \left(t - \frac{x}{V} \right) .$$

Poiché $\omega = 2\pi/T$ possiamo scrivere:

$$(3) \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \quad \text{ossia} \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{VT} \right) .$$

Come si vede l'elongazione y di un punto della corda dalla sua posizione di equilibrio è funzione delle due variabili x, t . Le (2), (3) ci danno l'equazione d'onda dell'oscillazione.

Esaminiamo un poco la formula (2), o la (3).

- 1) Se t è un istante determinato otteniamo una sinusoide che per ogni ascissa x ci dà l'elongazione del punto della corda dalla sua posizione di riposo: $y_t = a \cdot \text{sen}(Kx + \alpha)$.
- 2) Se invece è costante x , cioè se prendiamo un punto determinato della corda, la (2) ci dà la configurazione di ogni punto al variare del tempo. Cioè la (2) ci dice al variare del tempo ogni punto della corda oscilla armonicamente attorno alla sua posizione di equilibrio. In altre parole le oscillazioni di ogni punto x della corda sono date da un moto armonico di equazione $y_x = a \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha)$.

- 3) Combinando i due effetti possiamo dire che se osserviamo tutta la corda al variare del tempo, vedremo che l'onda prodotta dall'oscillazione dell'estremo O si sposta rigidamente lungo la corda stessa (fig. 2-7). Infatti se si fotografa la corda ad un certo istante t , vediamo che essa ha la forma di una sinusoide; se la fotografiamo all'istante $t + \Delta t$ vediamo che la sinusoide si è un po' spostata. Al variare del tempo vediamo che la sinusoide, cioè l'onda si muove lungo la corda con velocità V .

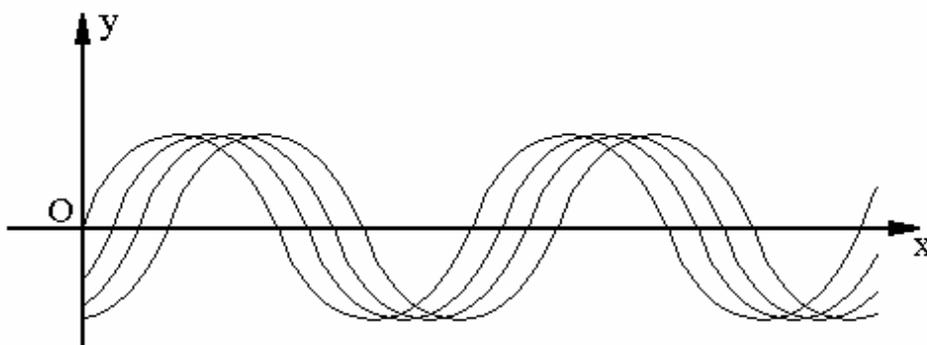


Figura 2-7

Riassumendo, se facciamo oscillare l'estremità di una corda, si ha una propagazione di onde trasversali e si nota quanto segue:

- 1) In un dato istante il profilo della corda è una sinusoide.
- 2) Se osserviamo un punto della corda attraverso una fessura vediamo che al variare del tempo esso si muove armonicamente attorno alla sua posizione di riposo.
- 3) Al variare del tempo la sinusoide si sposta rigidamente lungo la corda.

N. 7 – Periodo di oscillazione di un'onda.

Consideriamo l'equazione di un'onda trasversale sinusoidale che si propaga su una corda. Indicando con xy il piano di oscillazione si ha:

$$(i) \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] .$$

Vogliamo trovare il periodo della funzione. Se diamo al tempo t un incremento $T = 2\pi/\omega$ si ha:

$$a \cdot \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{2\pi}{\omega} - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] = a \cdot \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi + 2\pi \right] .$$

Quindi per l'incremento di tempo $T = 2\pi/\omega$ l'argomento della funzione seno aumenta di 2π , la funzione riprende lo stesso valore e comincia a descrivere una oscillazione in fase con quella che l'ha preceduta. Ne segue che il periodo della funzione è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{da cui} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} ;$$

esso è detto anche periodo dell'onda.

N. 8 – Lunghezza d’onda di una oscillazione.

Consideriamo una corda vibrante nel piano $x y$ (fig. 2-8) e supponiamo per semplicità che l’equazione d’onda della vibrazione sia data da una funzione sinusoidale.

L’argomento, come già sappiamo, è proporzionale a $t - x/V$, cioè:

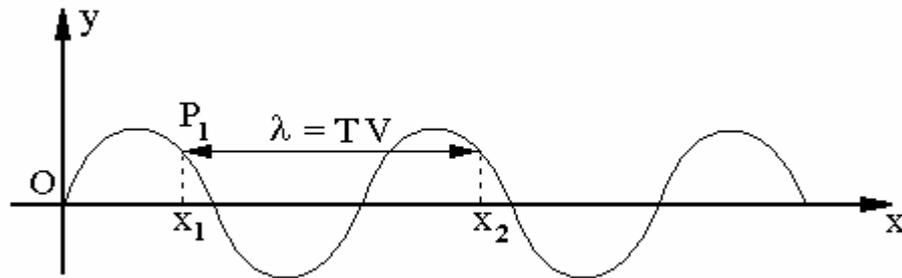


Figura 2-8

$$(1) \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} \omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

quindi

$$y(x, t) = a \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right),$$

$$(2) \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{TV} \right).$$

Essa fornisce il profilo, cioè la configurazione della corda, ad un dato istante t (fig. 2-7).

Vogliamo ora trovare due punti P_1 e P_2 della corda, di ascisse rispettive x_1 e x_2 che nell’istante t hanno la stessa elongazione ed eseguono vibrazioni concordi. Dovrà essere $y_1 = y_2$ e inoltre la differenza fra i valori dei due argomenti della funzione deve essere un multiplo intero di 2π ; ossia:

$$(3) \quad 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{TV} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{TV} \right) = 2\pi \cdot n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ne segue
$$\frac{t}{T} - \frac{x_1}{TV} - \frac{t}{T} + \frac{x_2}{TV} = n ,$$

cioè
$$x_2 - x_1 = nTV .$$

Per $n = 1$ $x_2 - x_1$ è la distanza λ fra i punti della corda più vicini fra loro che hanno la stessa elongazione e che eseguono vibrazioni concordi. Si ottiene così:

$$(4) \quad \lambda = TV .$$

λ si dice lunghezza d'onda dell'oscillazione e rappresenta lo spazio percorso dall'onda in un intervallo di tempo T pari al periodo.

Ponendo $TV = \lambda$ nell'equazione (2) si ottiene:

$$y(x, t) = a \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = a \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{Vt}{TV} - \frac{x}{\lambda} \right) ,$$

e quindi (5)
$$y(x, t) = a \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (V \cdot t - x) .$$

Ricordiamo anche la formula

$$(1) \quad y(x, t) = a \cdot \text{sen} \omega \left(t - \frac{x}{V} \right) .$$

Le formule (1) e (5) sono le più comuni equazioni d'onda.

N. 9 – Energia di un punto di una corda vibrante e intensità di vibrazione.

a) Abbiamo visto che le oscillazioni prodotte all'estremità di una corda non rimangono localizzate, ma si propagano lungo la stessa (fig. 2-9).

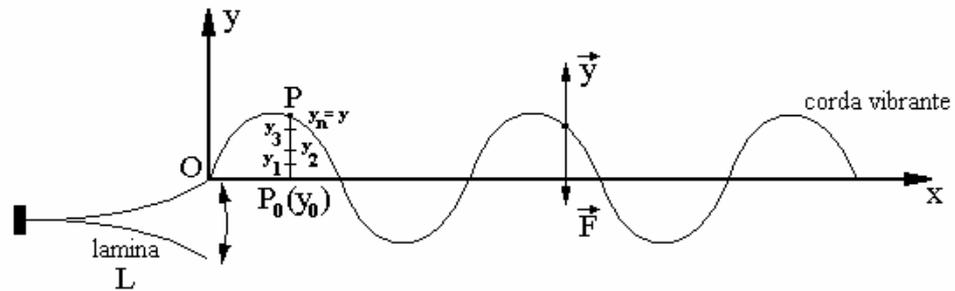


Figura 2-9

Ciò si deve al fatto che ogni elemento della corda pone in vibrazione il successivo comunicandogli un'energia meccanica uguale al lavoro compiuto dall'esterno per mettere in moto l'estremo della corda (principio di conservazione dell'energia). Quindi la propagazione dell'onda è accompagnata da una trasmissione dell'energia, ma evidentemente questa propagazione di energia non è accompagnata da una propagazione di materia. Se la corda è elastica non si ha nessuno spreco dell'energia meccanica impiegata per agitare l'estremità della corda, mentre se è di canapa o di altro materiale una parte dell'energia di vibrazione si trasforma in calore ma non va perduta.

Vogliamo ora trovare l'energia che possiede un generico punto della corda e l'intensità di vibrazione, cioè l'energia trasportata dall'onda in un secondo attraverso una sezione qualsiasi della corda. Come sappiamo esso si muove di moto armonico dato dall'equazione:

$$(1) \quad y = a \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad ,$$

e quindi il punto è soggetto alla forza

$$(2) \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{ove} \quad \vec{a} = -\omega^2 y \vec{e}_2 \quad ,$$

ne segue (3) $F = -m \cdot \omega^2 y \vec{e}_2$ [vedi la (4) del N. 3].

Quando il punto P si allontana dalla sua posizione di equilibrio P_0 , questa forza si oppone allo spostamento del punto e tende a riportarlo alla sua posizione P_0 compiendo un lavoro negativo dato dall'integrale:

$$L_{P_0P} = \int_{P_0}^P \vec{F} \times d\vec{y} = - \int_0^y m\omega^2 y \, dy = -\frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \quad ;$$

quindi (4)
$$L_{P_0P} = -\frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad .$$

Questo lavoro cambiato di segno e immagazzinato nel punto P sotto forma di energia potenziale E_P viene restituito quando la forza elastica di richiamo riporta il punto P nella sua posizione di equilibrio. Possiamo quindi scrivere:

(5)
$$E_P = -L_{P_0P} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad .$$

Ricordiamo che l'energia potenziale di un punto P in un campo di forze \vec{F} conservativo ($\vec{F} = -\text{grad } U$) è data dalla formula:

(6)
$$U(x, y, z) = U_0(x_0, y_0, z_0) - \int_{P_0}^P \vec{F} \times d\vec{s} \quad .$$

L'integrale non dipende dalla particolare traiettoria γ che unisce i punti estremi $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$ e per questo nell'integrale stesso abbiamo ommesso di scrivere γ .

Nel caso della nostra corda abbiamo posto $U_0 = 0$, cioè abbiamo considerato nullo il valore dell'energia potenziale dal punto della corda nella sua posizione di equilibrio.

Ora l'energia totale del punto P è uguale alla somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, cioè :

(7)
$$E_T = E_P + E_C \quad .$$

Ma $E_C = \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot V_y^2$ e ricordando le formule delle componenti delle velocità del moto armonico si ha :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) .$$

Ne segue $E_T = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] ,$

quindi (8) $E_T = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 .$

Come si vede dalla formula (8) , l'energia totale del punto mobile è costante rispetto al tempo; ma durante le oscillazioni si ha una continua trasformazione di energia cinetica in energia potenziale e viceversa. Se ora ci riferiamo a un elemento di corda di lunghezza $\Delta \ell$ e massa m e indichiamo con μ la densità lineare della corda, cioè la massa dell'unità di lunghezza, otteniamo

$$\mu = \frac{m}{\Delta \ell} \quad \text{da cui (9)} \quad m = \mu \cdot \Delta \ell .$$

Sostituendo l'espressione di m nella (8) si ha:

$$(10) \quad E_T = \frac{1}{2} \mu \cdot \Delta \ell \cdot \omega^2 a^2 \text{ Joule} .$$

Questa formula ci dà l'energia totale di un tratto oscillante di corda di lunghezza $\Delta \ell$; per l'unità di misura dell'energia ci siamo riferiti al sistema MKS.

b) Intensità di vibrazione di una corda.

Se indichiamo con V la velocità con cui l'onda si propaga in una corda oscillante, l'energia che attraversa una sezione qualsiasi di corda in un secondo sarà quella contenuta in un tratto di corda di lunghezza $\Delta \ell = V$. Questa energia, che indicheremo con la lettera I , si dice intensità di vibrazione e nel sistema MKS si misura in Joule/s , cioè in Watt.

Per ottenere l'espressione di I basta sostituire Δl con V nella formula (10); si ottiene quindi:

$$(11) \quad I = \frac{1}{2} \mu \cdot V \cdot \omega^2 a^2 \frac{\text{Joule}}{\text{s}} .$$

Nota.

Vogliamo calcolare con metodi elementari il lavoro compiuto dalla forza elastica applicata ad un punto materiale della corda vibrante.

Supponiamo che il punto P si allontani dalla sua posizione di equilibrio P_0 ;

in valore e segno lo spostamento del punto è $s = \overline{P_0P} = y$. La forza \vec{F} è contraria allo spostamento e la sua componente scalare sull'asse delle ordinate è $F = -m\omega^2 y$.

Il lavoro compiuto dalla forza è negativo e si potrebbe pensare che esso sia dato dalla formula

$$L_{P_0P} = \vec{F} \times \vec{s} = -m\omega^2 y \cdot y .$$

Questa formula, però, non è esatta perché durante lo spostamento il valore della forza non rimane costante. Dividiamo allora lo spostamento y in tanti spostamenti elementari tali che in ognuno di essi il valore della forza rimanga praticamente costante; per ogni tratto assumiamo come valore medio F^* di tale forza la media aritmetica dei valori che essa assume nei punti estremi del tratto considerato. Poniamo per semplicità $m\omega^2 = K$ e calcoliamo la forza media F_2^* relativa al secondo intervallo (y_1, y_2) ; si ha:

$$F_2^* = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{-Ky_1 - Ky_2}{2} = -\frac{K}{2}(y_2 + y_1) .$$

Il lavoro compiuto dalla forza per spostare il suo punto di applicazione è:

$$L_2 = F_2^* \cdot s_2 = F_2^* (y_2 - y_1) = -\frac{K}{2}(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = -\frac{K}{2}(y_2^2 - y_1^2) ,$$

quindi (12)
$$L_2 = -\frac{K}{2}y_2^2 + \frac{K}{2}y_1^2 .$$

Questa formula è ricorrente e quindi, ponendo $n = 4$, si ha:

$$L_1 = -\frac{K}{2}y_1^2 + 0$$

$$L_2 = -\frac{K}{2}y_2^2 + \frac{K}{2}y_1^2$$

$$L_3 = -\frac{K}{2}y_3^2 + \frac{K}{2}y_2^2$$

$$L_n = -\frac{K}{2}y_n^2 + \frac{K}{2}y_{n-1}^2 .$$

Sommando membro a membro si ha:

$$L_{\text{tot}} = -\frac{K}{2}y_n^2 \quad \text{ossia} \quad L_{\text{tot}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 y_n^2 .$$

Tenendo presente che si ha:

$$y_n = y = a \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) ,$$

si ottiene:

$$L_{\text{tot}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) .$$

Si ritrova così la formula (4) ottenuta con il calcolo integrale.

N. 10 – Interferenza di due onde trasversali emesse da due sorgenti coerenti.

Due sorgenti vibranti S_1 e S_2 sono collegate alle estremità di due corde e per mezzo di queste trasmettono le loro oscillazioni ad un punto O di una terza corda, collegata con esse.

Supponiamo che le tre corde giacciono su uno stesso piano π (fig. 2-10) e che le oscillazioni emesse dalle due sorgenti siano trasversali e abbiano lo stesso periodo T e differenza di fase costante (oscillazioni coerenti). Supponiamo anche che esse abbiano lo stesso piano di polarizzazione π e fasi iniziali $\varphi_1 = \varphi_2$. Con un eventuale cambiamento dell'origine dei tempi possiamo sempre supporre che le fasi siano nulle, cioè $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

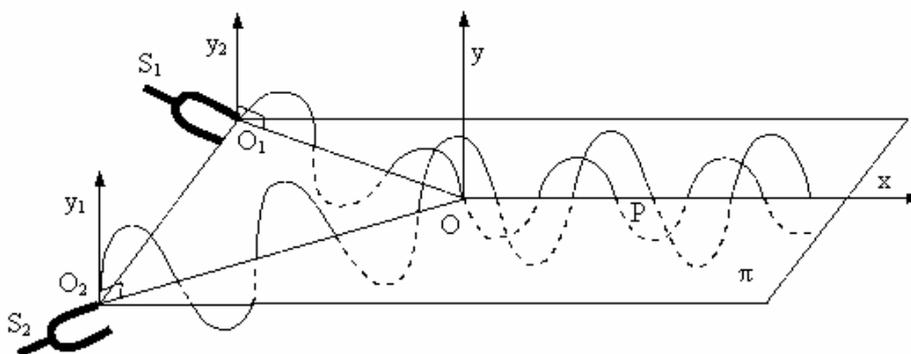


Figura 2-10

Le equazioni del moto con cui gli estremi O_1 e O_2 delle due corde oscillano lungo gli assi y_1 e y_2 (ortogonali al piano π) sono:

$$(1) \quad y_1 = a \cdot \text{sen} \omega t \quad y_2 = b \cdot \text{sen} \omega t .$$

Se indichiamo con l_1 e l_2 i cammini percorsi dalle due corde nel tempo t , le loro equazioni in un generico punto P della corda sono:

$$(2) \quad y_1 = a \cdot \text{sen} \left(\omega t - \frac{l_1}{V} \right) , \quad y_2 = b \cdot \text{sen} \left(\omega t - \frac{l_2}{V} \right) .$$

Infatti se le tre corde hanno la stessa natura e lo stesso spessore, come supponiamo, le onde si propagano su di esse con velocità uguale e quindi si ha: $V_1 = V_2 = V$.

In tal caso la differenza di fase fra le due onde in un generico punto P della corda sarà:

$$\Delta\varphi = \omega t - \frac{\omega l_1}{V} - \omega t + \frac{\omega l_2}{V} .$$

Posto $\ell_2 - \ell_1 = d$ possiamo scrivere:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{V}(\ell_2 - \ell_1) \quad \text{ossia (3)} \quad \Delta\varphi = \frac{\omega}{V}d .$$

Possiamo quindi dire che la differenza di fase fra le due onde è stata realizzata mediante una differenza dei cammini da esse percorsi. Inizialmente, infatti, le onde emesse dalle due sorgenti S_1 e S_2 erano in fase; solo in un secondo momento si è avuto uno sfasamento dovuto esclusivamente al diverso cammino che esse hanno percorso. Scrivendo la (3) in un modo più opportuno si ha:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{TV}d \quad \text{ossia (4)} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d .$$

Possiamo allora distinguere due casi

$$1^\circ \text{ caso} \quad \Delta\varphi = 2k\pi \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

Come già sappiamo le due onde giungono nel punto P della terza corda in concordanza di fase e l'oscillazione che si ottiene risulta rinforzata. In tal caso si ha:

$$\frac{2\pi \cdot d}{\lambda} = k \cdot 2\pi \quad \text{da cui ,}$$

$$d = k \lambda \quad \text{cioè (5)} \quad d = 2k \frac{\lambda}{2} .$$

Essa ci dice: “Quando nel punto P la differenza di cammino percorso dalle due onde è uguale ad un numero pari di mezze lunghezze d'onda, le due oscillazioni si sommano, cioè l'oscillazione che si ottiene risulta rinforzata; si dice che si ha interferenza costruttiva”.

$$2^\circ \text{ caso} \quad \Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

Come sappiamo le due onde giungono nel punto P della corda in opposizione di fase e l'oscillazione che si ottiene risulta smorzata. In tal caso si ha:

$$\frac{2\pi \cdot d}{\lambda} = (2k+1)\pi \quad \text{da cui (6)} \quad d = (2k+1)\frac{\lambda}{2} .$$

Essa ci dice: “Quando nel punto P la differenza di cammino percorso dalle due onde è uguale a d un numero dispari di mezze lunghezze d’onda, l’oscillazione che si ottiene risulta smorzata e le due onde tendono ad annullarsi; si dice che si ha interferenza distruttiva”.

Queste conclusioni valgono anche nel caso delle onde luminose.

Supponiamo infatti di avere due sorgenti luminose che emettono due treni di onde coerenti e aventi lo stesso piano di polarizzazione. L’esperienza degli specchi di Fresnel, che studieremo in Ottica, ci dice che se le onde giungono in un punto P di uno schermo in concordanza di fase (esempio, due creste o due avvallamenti), si ottiene una frangia luminosa.

Se le onde emesse dalle due sorgenti giungono nel punto P in opposizione di fase (una cresta e un avvallamento), si ottiene una frangia oscura.

In modo analogo, ciò può essere verificato anche per le onde acustiche con l’esperienza del tubo di Quincke (fig. 2-11).

Infatti le onde che si propagano nei due rami dello strumento sono coerenti perché sono generate da una stessa sorgente sonora posta alla sua imboccatura.

Indicando con $d = d_2 - d_1$ la differenza di lunghezza dei due rami, sappiamo che:

se $d = 2k \frac{\lambda}{2}$ il suono risulta rinforzato;

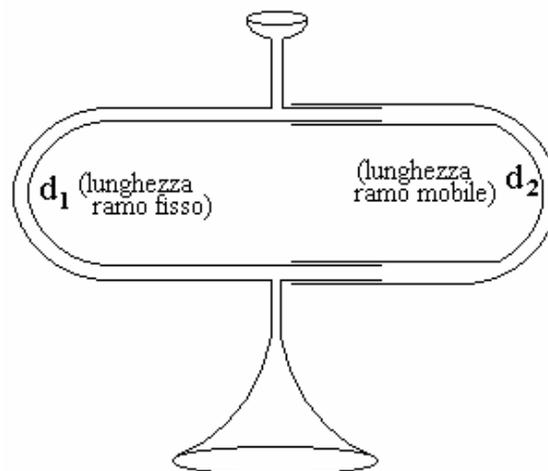


Figura 2-11

se $d = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ il suono si estingue.

N. 11 – Interferenza di due onde coerenti e intensità di vibrazione dell'onda risultante.

Due sorgenti vibranti S_1 e S_2 sono collegate alle estremità di due corde e per mezzo di queste trasmettono le loro oscillazioni ad una terza corda, collegata con esse.

Supponiamo che le tre corde giacciono su uno stesso piano π (si veda ancora fig. 2-10) e che le oscillazioni emesse dalle due sorgenti siano trasversali, abbiano lo stesso periodo T e differenza di fase costante (oscillazioni coerenti) e lo stesso piano di polarizzazione π .

Non è necessario supporre che le onde emesse dalle due sorgenti S_1 e S_2 abbiano la stessa fase iniziale; basta che esse siano coerenti.

Le equazioni del moto delle due onde in un generico punto P della corda sono:

$$(1) \quad y_1 = a \cdot \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{\ell_1}{V} \right) + \alpha_1 \right] \quad y_2 = b \cdot \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{\ell_2}{V} \right) + \alpha_2 \right],$$

ove a e b sono le ampiezze delle due onde ed ℓ_1 ed ℓ_2 sono le distanze da esse percorse.

Teniamo presente che se le tre corde hanno la stessa natura e lo stesso spessore, come supponiamo, le onde si propagano su di esse con velocità uguali e quindi si ha $V_1 = V_2 = V$.

Ora, per un dato punto P della terza corda, ℓ_1 ed ℓ_2 sono costanti e quindi le equazioni delle due onde diventano:

$$y_1 = a \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_1) \quad \text{ove} \quad \varphi_1 = -\omega \frac{\ell_1}{V} + \alpha_1,$$

$$y_2 = b \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_2) \quad \text{ove} \quad \varphi_2 = -\omega \frac{\ell_2}{V} + \alpha_2.$$

In queste considerazioni, il moto risultante a cui è sottoposto il punto P è dato dall'equazione:

$$y = y_1 + y_2 = a \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_2) ,$$

ossia, come già sappiamo (vedi N. 6 e 7, cap. I):

$$(3) \quad y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \Phi) \quad \text{ove} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} .$$

Vogliamo ora calcolare l'intensità di vibrazione della corda, cioè la quantità di energia che attraversa in un secondo una sezione qualsiasi della corda, per esempio quella nel punto P . Se ricordiamo la (11) del parag. N. 9, vediamo subito che questa intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda risultante delle onde date. Si ottiene pertanto:

$$(4) \quad I_R = \frac{1}{2} \mu V \omega^2 A^2 \quad \text{ossia} \quad I_R = \frac{1}{2} \mu V \omega^2 [a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] ,$$

sciogliendo le parentesi quadre si ha:

$$I_R = \frac{1}{2} \mu V \omega^2 a^2 + \frac{1}{2} \mu V \omega^2 b^2 + \mu V \omega^2 ab \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) ,$$

ove μ è la densità lineare delle corde impiegate.

Tenendo presente che $\frac{1}{2} \mu V \omega^2 a^2$ e $\frac{1}{2} \mu V \omega^2 b^2$ sono rispettivamente le intensità di vibrazione I_1 e I_2 delle onde emesse dalle due sorgenti S_1 e S_2 , possiamo scrivere:

$$I_R = I_1 + I_2 + 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sqrt{\frac{V}{2} \mu \omega^2 a^2 \cdot \frac{V}{2} \mu \omega^2 b^2} ,$$

$$\text{ossia} \quad (5) \quad I_R = I_1 + I_2 + 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sqrt{I_1 \cdot I_2} .$$

Se poi $a = b$, le oscillazioni emesse dalle due sorgenti hanno la stessa ampiezza e la stessa intensità di vibrazione I_R e si ottiene:

$$(6) \quad I_R = 2I + 2I \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) ;$$

l'ultimo termine di questa formula è detto termine di interferenza.

Concludiamo dicendo:

“L’intensità di vibrazione di un’onda ottenuta sovrapponendo due onde trasversali aventi lo stesso periodo e lo stesso piano di polarizzazione non è uguale alla somma delle intensità di vibrazione delle singole onde. Essa, invece, differisce dalla somma delle intensità delle due onde componenti per via del termine di interferenza, il quale dipende dalla differenza di fase delle due onde stesse”.

Dalla (6) si ottengono i seguenti casi particolari:

- 1) Se $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, cioè se le due onde componenti sono in quadratura, si ha $I_R = 2I$;
- 2) se $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, cioè se le due onde componenti sono in fase, si ha $I_R = 4I$;
- 3) se $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi$, cioè se le due onde componenti sono in opposizione di fase, si ha $I_R = 0$.

Anche in ottica si hanno casi perfettamente analoghi di distribuzione dell’intensità luminosa prodotta da due sorgenti di luce. Infatti l’esperienza dell’interferometro di Fresnel, che studieremo a suo tempo, ci permette di avere su uno schermo le frange di interferenza prodotte da due sorgenti luminose che emettono onde perfettamente coerenti, in fase e della stessa ampiezza. Con l’aiuto di procedimenti matematici si dimostra che:

- a) l’intensità luminosa delle frange chiare è quattro volte maggiore dell’intensità luminosa di una singola sorgente;
- b) in corrispondenza delle frange oscure le onde luminose emesse dalle due sorgenti giungono in opposizione di fase, si annullano a vicenda e quindi non danno alcuna luminosità.

N. 12 – Onde liquide.

Vogliamo studiare la propagazione delle onde sulla superficie di un liquido, per esempio l'acqua, tenendo presente che essa, se perturbata, si comporta come un mezzo elastico.

Consideriamo una vaschetta rettangolare piena d'acqua, detta ondoscopio, con le pareti laterali ricoperte da uno strato di spugna che ha lo scopo di assorbire le onde che urtano contro le pareti del recipiente, evitando così la formazione di onde riflesse (fig. 2-12).

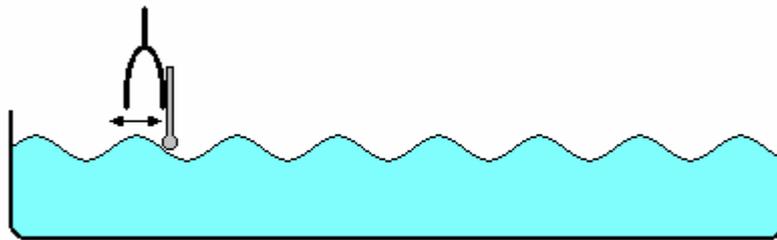


Figura 2-12

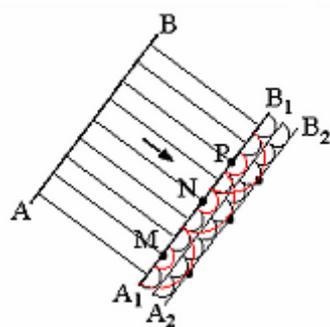
Un'asticella parallela alla superficie liquida vibra periodicamente e produce così delle onde a fronte rettilineo che si propagano da un capo all'altro della vaschetta. Si tratta di onde trasversali, cioè di onde che vibrano perpendicolarmente alla direzione di propagazione. La propagazione dell'onda è accompagnata da una propagazione di energia, ma non di materia. Infatti se poniamo un tappo di sughero nell'acqua, vediamo che al passaggio delle onde esso oscilla verticalmente, ma non viene trascinato.

Sostituiamo l'asticella dell'esperienza considerata con una sferetta S saldata all'estremità di un diapason, in modo che essa vada a sfiorare l'acqua della vaschetta. Se eccitiamo i rebbi, vediamo che dalla sferetta si propagano onde circolari e a grande distanza da S un arco di onda circolare si può assimilare ad un'onda rettilinea.

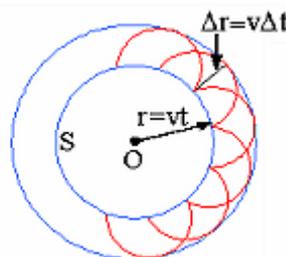
Possiamo ora enunciare il principio di Huyghens-Fresnel.

I punti che vengono raggiunti, ad un certo istante t , dalla superficie di un'onda qualsiasi, che si propaga con velocità v , diventano a loro volta centri di onde sferiche elementari le quali, al tempo $t + dt$, hanno il raggio $dr = v dt$.

L'involuppo di queste onde elementari rappresenta la superficie d'onda al tempo $t + dt$ (figg. 2-13 e 2-14).



Propagazione di un'onda piana secondo il principio di HUYGHENS - FRESNEL

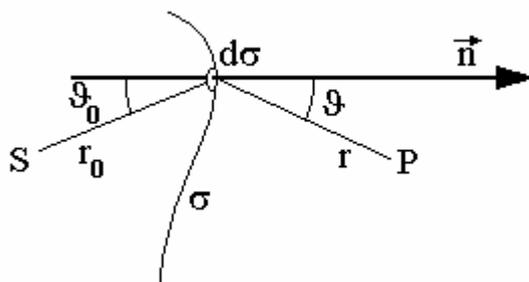


Ogni punto del fronte d'onda S si può considerare come una sorgente secondaria che origina un'onda elementare, rappresentata in figura mediante una semicirconferenza. La curva che involupa la famiglia delle semicirconferenze fornisce il nuovo fronte d'onda.

Figure 2-13 e 2-14

In altre parole, un elemento $d\sigma$ del fronte d'onda emette onde soltanto verso l'esterno e l'onda che esso emette al tempo t è quella che è partita dalla sorgente S al tempo $t - r/v$.

Nello studio delle onde elettromagnetiche questo principio deve essere corretto secondo alcune osservazioni indicate da Kirchhoff. Esse si possono riassumere come segue.



- 1) La superficie σ a cui ci si riferisce può essere una superficie qualsiasi, e non necessariamente un fronte d'onda.
- 2) I punti della superficie σ si comportano come sorgenti puntiformi che emettono radiazioni non solo verso l'esterno, ma anche verso

Figura 2-15

l'interno, sebbene con intensità minore.

- 3) L'ampiezza di una radiazione emessa da una sorgente puntiforme varia con l'angolo ϑ che la direzione di propagazione forma con la normale \vec{n} alla superficie σ nel punto che si considera (fig. 2-15).
(è proporzionale a $\cos \vartheta + \cos \vartheta_0$).
- 4) La fase di questa radiazione ha un anticipo di $T/4$ (1/4 di periodo) sulla fase con cui la radiazione giunge dalla sorgente S su un elemento di superficie $d\sigma$.

N. 13 – Rifrazione delle onde.

Consideriamo una vaschetta piena d'acqua e contenente uno spessore S posto sul fondo del recipiente, e produciamo delle onde rettilinee mediante una tavoletta M immersa in parte nel liquido, parallela allo spigolo di S e che oscilla parallelamente alla superficie dell'acqua (figg. 2-16 e 2-17).



Figura 2-16

Allora possiamo vedere che quando l'onda attraversa lo spessore la lunghezza d'onda e l'ampiezza del moto del modo ondoso diminuiscono, cioè:

$$\lambda' < \lambda \quad , \quad A' < A \quad .$$

Lo stesso fenomeno si produce quando l'onda rettilinea attraversa obliquamente lo spessore: In tal caso vediamo che l'onda si

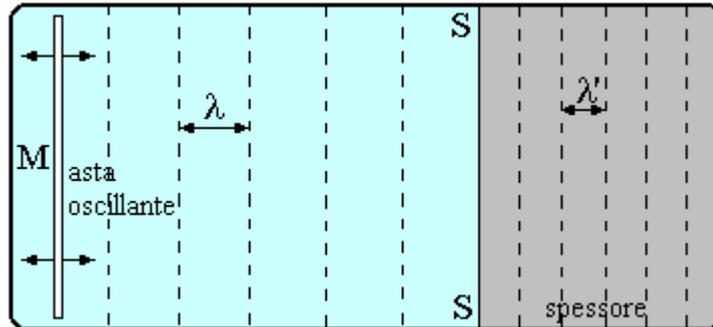


Figura 2-17

rifrange come se fosse trattenuta dal fondo della vaschetta e si ha il fenomeno indicato in figura 2-18.

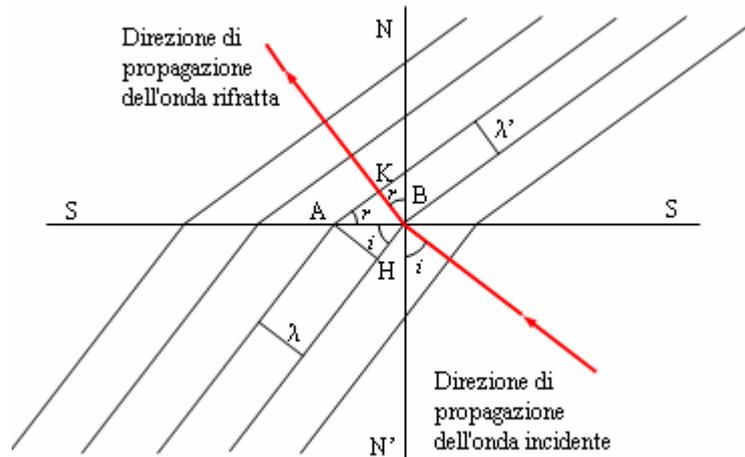


Figura 2-18

Osserviamo le onde che arrivano nei punti A e B dello spessore e le onde rifratte che partono da questi punti. La distanza AH fra le onde che arrivano nei punti A e B è la lunghezza λ delle onde incidenti; analogamente la distanza BK fra le onde che partono dai due punti è la lunghezza λ' delle onde rifratte.

Osserviamo che gli angoli indicati con la lettera i sono uguali perché complementari di uno stesso angolo; per lo stesso motivo sono uguali gli angoli indicati con la lettera r .

Dai triangoli rettangoli ABH e ABK si ha:

$$\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \text{sen } i \quad \text{ossia} \quad (1) \quad \lambda = \overline{AB} \cdot \text{sen } i ,$$

$$\overline{BK} = \overline{AB} \cdot \text{sen } r \quad \text{ossia} \quad (1) \quad \lambda' = \overline{AB} \cdot \text{sen } r .$$

Dividendo membro a membro le (1), (2) si ha:

$$(3) \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

Ma l'onda incidente e l'onda rifratta hanno lo stesso periodo, perché mentre muore una nasce l'altra; se quindi indichiamo con V_1 e V_2 le loro velocità di propagazione nel liquido possiamo scrivere:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{V_1 T}{V_2 T} , \quad \text{quindi} \quad (4) \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{V_1}{V_2} .$$

Poiché $\lambda > \lambda'$ si ricava che $V_1 > V_2$,
cioè nel mezzo più profondo l'onda si propaga con maggiore velocità.

La fig. (2-11) mostra anche che quando l'onda attraversa lo spessore e arriva nelle zone dove l'acqua è meno profonda, il fronte dell'onda rifratta si avvicina alla soglia di profondità, cioè tende ad allinearsi con essa. Ciò spiega perché le onde del mare siano parallele alla riva quando si avvicinano ad essa.

Infine dalla (4) si ricava che se nella propagazione delle onde l'angolo di rifrazione è minore dell'angolo di incidenza, la velocità di propagazione dell'onda diminuisce. Per analogia, la velocità della luce deve essere maggiore nel vuoto che nei mezzi trasparenti; questa previsione è pienamente confermata dalle misure sperimentali della velocità della luce che si ottengono, con il metodo di Foucault, nei vari mezzi trasparenti in cui essa si propaga.

Questi esperimenti contraddicono la teoria corpuscolare della luce di Newton. Infatti secondo questa teoria, quando un raggio di luce passa dal vuoto ad un qualsiasi mezzo trasparente i suoi corpuscoli luminosi vengono attratti dalla materia e quindi la luce si dovrebbe propagare con velocità maggiore di quella che essa ha nel vuoto.

N. 14 – Diffrazione delle onde attraverso una piccola fenditura.

Vogliamo illustrare alcune proprietà delle onde meccaniche che presentano analogie con il comportamento della luce; il modello meccanico, infatti, ha giocato un ruolo importante nello sviluppo storico dell'ottica ondulatoria. Consideriamo, per semplicità, un treno di onde lineari che si propaga in un liquido. In particolari condizioni, che indicheremo, si verifica che se le onde incontrano un ostacolo, o una parete munita di una fenditura, la forma geometrica delle onde viene alterata. Il fenomeno si dice *diffrazione*. Vediamo alcuni esempi (vedi A. Caforio-A. Ferilli, *Physica* vol. 2, pag. 23; Le Monnier). Supponiamo che sulla superficie di un liquido si abbia una propagazione di onde, a fronte rettilineo, che investono una parete in cui è praticata una fenditura F . Si possono allora verificare due casi (figg. 2-19,2-20).

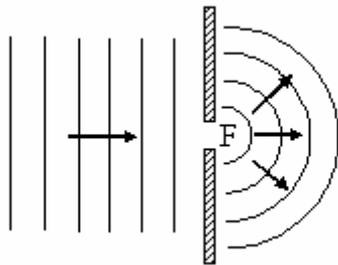


Figura 2-19

- a) Se la larghezza della fenditura F è minore della lunghezza λ delle onde (fig. 2-19), dietro la parete si formano onde a fronte circolare, anche esse di lunghezza λ , che invadono, tutto lo spazio dietro lo schermo. Infatti, per il principio di Huyghens, la fenditura F diventa centro di emissione di onde circolari di altezze via via decrescenti che si propagano con la stessa

velocità v delle onde incidenti. Il fenomeno si dice *diffrazione delle onde*. La situazione non cambia molto se la larghezza di F assume valori confrontabili con la lunghezza d'onda λ . Abbiamo così un altro caratteristico esempio di diffrazione delle onde liquide.

- b) Se la larghezza della fenditura F è grande rispetto alla lunghezza λ delle onde, la perturbazione ondosa prosegue senza mutare la propria direzione di propagazione. Dopo la parete si ha un fascio d'onde a fronte rettilineo con i bordi leggermente

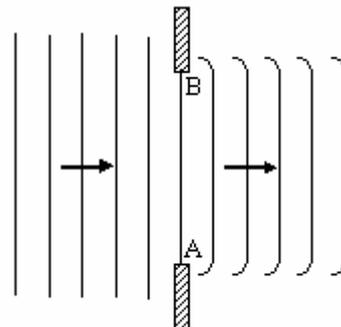


Figura 2-20

incurvati e sfumati e il fenomeno della diffrazione diventa meno visibile (fig. 2-20).

Supponiamo ora che le onde investano un ostacolo. Anche in tal caso si possono verificare due casi.

- 1) $L \gg \lambda$, cioè la larghezza dell'ostacolo è grande rispetto alla lunghezza λ della perturbazione ondosa (fig. 2-21). Per effetto dei fronti delle onde secondarie, la perturbazione dietro l'ostacolo tende a richiudersi e a riformare un solo fronte d'onda rettilineo. Nel complesso dietro l'ostacolo si forma una zona d'ombra di forma triangolare che non è perturbata dalle onde.

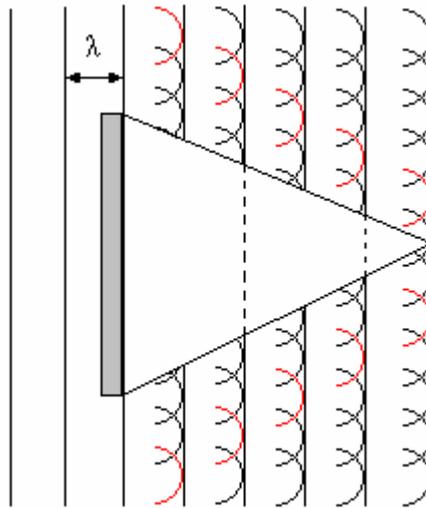


Figura 2-21

- 2) $L \approx \lambda$, cioè le dimensioni dell'ostacolo sono comparabili con la lunghezza λ delle onde. In tal caso le onde aggirano l'ostacolo e riformano subito il profilo della perturbazione ondosa.

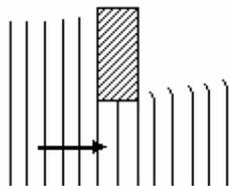


Figura 2-22

Un altro caso che vogliamo illustrare è la diffrazione agli orli che si ha quando un fascio di onde a fronte rettilineo incontra l'orlo di un ostacolo (figg. 2-22 e 2-23).

Anche ora possiamo distinguere due casi:

1) se lo spessore dell'ostacolo è grande rispetto alla lunghezza λ dell'onda, la perturbazione si estende poco nella zona dietro l'ostacolo e forma così una piccola ombra (fig. 2-22).

2) se invece la larghezza dell'ostacolo è piccola rispetto alla lunghezza λ dell'onda, la perturbazione invade tutto lo spazio dietro l'ostacolo, dove il fronte di ogni onda assume la forma di un arco circolare (fig. 2-23) (vedi D. Sette, Fisica vol. I pag. 496 Ed. Veschi).

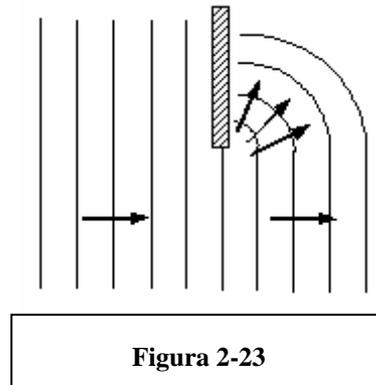


Figura 2-23

N. 15 – Diffrazione della luce.

Esistono alcuni fenomeni luminosi che non si possono spiegare con la legge della propagazione rettilinea della luce; uno di questi è il fenomeno della diffrazione (E. Persico, Ottica, pag. 17 Zanichelli).

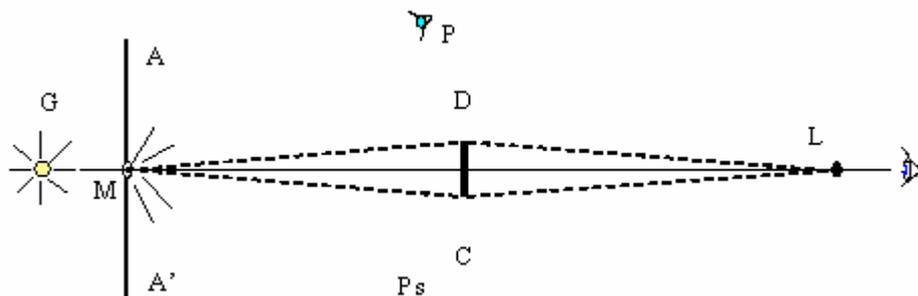


Figura 2-24

In un punto G poniamo una sorgente luminosa puntiforme e abbastanza intensa, per esempio un arco elettrico; a poca distanza dalla sorgente disponiamo un diaframma opaco AA' munito di un forellino M, di qualche mm di diametro, situato sulla perpendicolare condotta dal punto G. In questo modo si dovrebbe isolare un sottile pennello luminoso lungo la retta GM, mentre tutti gli altri punti dietro lo schermo dovrebbero restare al buio. Invece, se si pone l'occhio in un qualunque punto P anche abbastanza

lontano dalla retta GM si vede il fiorellino M brillare di viva luce: il che dimostra che dal punto M la luce si diffonde in tutte le direzioni e non solo nella direzione GM (fig. 2-24). Questa luce è generalmente troppo debole per poter essere vista sopra uno schermo, ma è più che sufficiente per impressionare direttamente l'occhio. Il fenomeno descritto si dice diffrazione della luce. Possiamo arricchire l'esperienza con un elemento introdotto da Fresnel. Se sulla retta GM, dietro il diaframma, si pone un oggetto opaco a contorni ben netti, per esempio una moneta, questa dovrebbe produrre un cono d'ombra con il vertice nel punto M. Invece avviene che un po' di luce penetra nella zona d'ombra, gira leggermente attorno al bordo della moneta e forma una macchiolina luminosa L in un punto della retta GM. Anzi, se mettiamo l'occhio nel punto L si vede che il bordo della moneta è circondato da un orlo di luce brillante. Affinché l'esperienza riesca bene è necessario che il forellino M e il punto P siano abbastanza lontani dalla moneta in modo che i coni MCD ed LCD siano molto sottili. Ciò prova che la deflessione della luce dalla propagazione rettilinea è di piccola entità.

Qualche volta i fotografi traggono profitto da questo fenomeno per ottenere particolari effetti nelle fotografie contro luce.

Come vedremo, i fenomeni di diffrazione si possono spiegare compiutamente solo con la teoria ondulatoria della luce. Anzi l'esperienza della moneta che abbiamo illustrata fu suggerita proprio da *Poisson* nell'intento, suo malgrado, di controbattere tale teoria.

Lo spettro colorato, costituito da tanti raggi disposti a forma di croce, che vediamo quando guardiamo una lampada distante attraverso un tessuto a maglia sottile, come la tela di un ombrello, è un fenomeno di diffrazione. Anche il bordo luminoso che circonda il profilo di una montagna pochi secondi prima che il Sole sorga dietro di essa è dovuto a un fenomeno di diffrazione.

N. 16 –Interferenza della luce.

Sappiamo dall'acustica che se si fa propagare un suono lungo due tubi che poi si ricongiungono, si ottengono due distinte serie di onde acustiche coerenti che, sovrapponendosi, danno un suono che può avere intensità rinforzata o indebolita, a seconda che la differenza dei cammini percorsi sia uguale a un numero pari o a un numero dispari di mezze lunghezze d'onda (tubo di Quincke). Il fenomeno si chiama interferenza dei suoni.

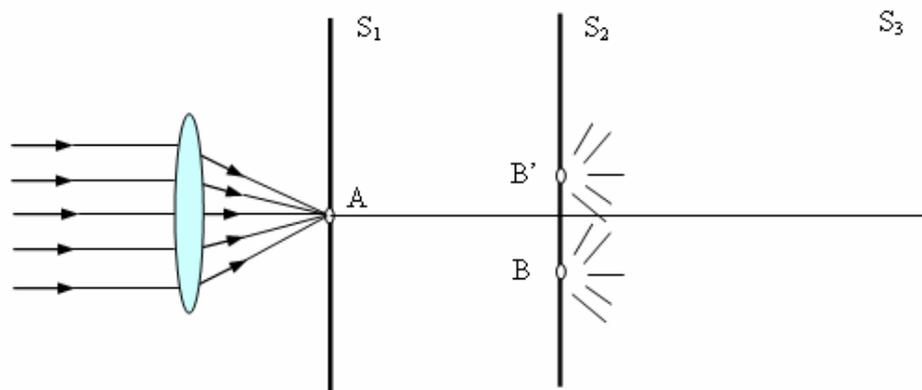


Figura 2-25

Si ha interferenza anche in una corda in cui giungono onde trasversali e coerenti aventi due diversi piani di vibrazione, ma lo stesso piano di polarizzazione delle onde (vedi prf. N.¹ 10, 11).

Facciamo vedere che anche la luce presenta un fenomeno analogo, che prende il nome di *interferenza luminosa*: vedremo che il fenomeno si verifica quando si sovrappongono le onde luminose emesse da due sorgenti coerenti di luce, come nella seguente esperienza di *Young* (vedi Persico, Ottica prf. 17).

Consideriamo tre schermi piani e paralleli S_1 , S_2 , S_3 (fig. 25).

Nello schermo S_1 c'è un forellino A che ha il diametro di un mm circa. Sullo schermo S_2 ci sono due forellini B_1 e B_2 uguali al primo, distanti fra loro alcuni mm e simmetrici rispetto alla perpendicolare abbassata dal punto A sullo schermo S_2 ; in tal modo i due forellini B_1 e B_2 sono equidistanti dal forellino A del primo schermo.

Poniamo dinanzi al forellino A una sorgente puntiforme monocromatica molto intensa; a tale scopo basta che A coincida con il fuoco di una lente convergente. Per il fenomeno della diffrazione la luce emerge dal forellino A in tutte le direzioni e arriva nei forellini B_1 e B_2 che si comporteranno come due sorgenti luminose non solo coerenti, ma anche sincrone essendo esse equidistanti da A .

I due forellini, per diffrazione, emettono luce in tutte le direzioni e questa luce si raccoglie sullo schermo bianco S_3 .

Sarebbe da aspettarsi, allora, che le due luci si sommino rischiarando tutto lo schermo e che diano una illuminazione maggiore di quella che si otterrebbe coprendo uno dei forellini. Vediamo invece che lo schermo presenta zone chiare, in cui l'intensità luminosa è aumentata, e zone oscure. Queste zone si dicono *frange di interferenza*.

Se si copre uno dei due forellini in modo che da esso non passi luce, le frange oscure spariscono lasciando lo schermo uniformemente illuminato. Questa esperienza suggerisce l'ipotesi che la luce sia un fenomeno ondulatorio, come il suono o le onde di una corda che venga agitata ad una estremità. Precisamente il fenomeno si può spiegare pensando che le frange chiare siano originate dalla sovrapposizione di onde luminose coerenti e in concordanza di fase, mentre quelle oscure siano originate da onde luminose coerenti ma in opposizione di fase, e quindi tali da distruggersi a vicenda. L'esperienza degli specchi di Fresnel che si studia in Ottica conferma questa interpretazione.

La luce presenta anche il fenomeno della polarizzazione, che non ha nulla di corrispondente in acustica; non è il caso di soffermarci su di esso. Questo fenomeno, però, ci fa pensare che la luce sia costituita da onde trasversali, perpendicolari alla direzione di propagazione; il suono, invece, è costituito da onde longitudinali che oscillano nella direzione di propagazione.

N. 17 –Riflessione sulle esperienze di Young e di Fresnel.

Le esperienze di Young e di Fresnel, che abbiamo illustrato nei paragrafi N. 15 e 16, mostrano che anche la luce può dare luogo a fenomeni di diffrazione e di interferenza. Ai tempi di Newton, invece, non si conoscevano evidenti fenomeni di questo tipo e ciò induceva lo stesso Newton a rifiutare la teoria ondulatoria della luce. Uno dei più validi argomenti contro tale teoria era il seguente:

come le onde liquide e quelle acustiche riescono a superare un ostacolo e a propagarsi dietro di esso, così la radiazione luminosa, se si propagasse per onde, dovrebbe giungere anche dietro uno schermo opaco, e ciò è in contrasto con la teoria della propagazione rettilinea della luce, che sta a fondamento dell'ottica geometrica.

Le esperienze di Young e di Fresnel, eseguite qualche secolo dopo la scomparsa di Newton, dimostrarono proprio l'esistenza di fenomeni di diffrazione della luce e fenomeni di interferenza di onde luminose coerenti. Si trovò che nei mezzi trasparenti la velocità della luce è minore di quella che si ha nel vuoto.

Questi fatti, inspiegabili nell'ambito della teoria corpuscolare di Newton, portarono all'affermazione della teoria ondulatoria della luce, la quale, se propriamente sviluppata, permette di interpretare tutti i fenomeni ottici.

PARTE SECONDA

OTTICA

CAPITOLO PRIMO

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DELLA LUCE

N. 1 – Ottica geometrica.

L'ottica geometrica studia i fenomeni luminosi sull'ipotesi, puramente geometrica, della propagazione rettilinea della luce. Secondo questa ipotesi se due raggi luminosi si incontrano ognuno di essi prosegue in modo rettilineo per il suo cammino senza subire interferenze.

Diamo alcune prove della propagazione rettilinea della luce.

- 1) Se facciamo un foro F sulla persiana della camera oscura vediamo che la luce si propaga in linea retta. Possiamo vedere la traccia del raggio di luce grazie alle particelle di pulviscolo presenti nell'aria (fig. 3-1).

- 2) Consideriamo poi una scatola di cartone chiusa da una parete di carta oleata. Avviciniamo la fiamma di una candela ad un foro praticato sulla parete opposta. La luce della candela si propaga in linea retta e sulla parete di carta oleata possiamo vedere l'immagine capovolta della fiammella (fig. 3-2).

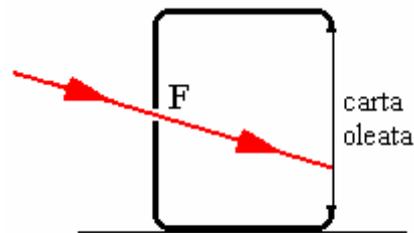


Figura 3-1

- 3) Un'altra prova della propagazione rettilinea della luce è il fenomeno dell'ombra e della penombra prodotta da un corpo opaco sul quale cade il fascio di luce di una sorgente estesa.

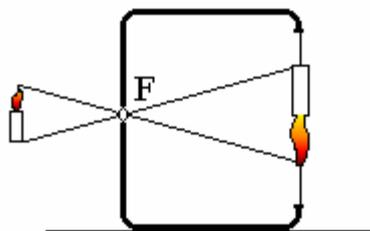


Figura 3-2

Consideriamo una sorgente estesa S e in corpo opaco C interposto fra sorgente e uno schermo S_c (fig 3-3).

Alcuni raggi luminosi emessi dalla sorgente S vengono intercettati dal corpo opaco; altri raggi passano sfiorando la superficie del corpo stesso; altri ancora si

propagano liberamente.

Conclusione: sullo schermo si forma una zona d'ombra circondata da un'altra zona meno oscura, detta penombra. Al di là di questa sullo schermo si ha una zona illuminata molto più ampia.

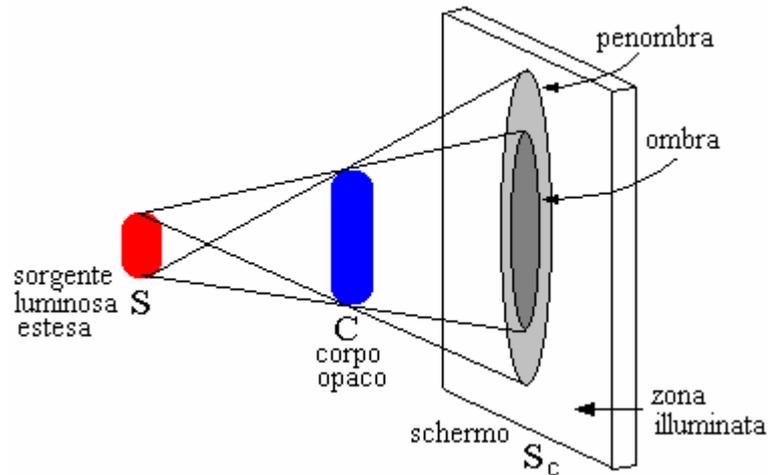


Figura 3-3

Se la sorgente luminosa S fosse puntiforme, sullo schermo avremmo solamente una zona d'ombra, con i contorni netti e precisi, circondata da una zona illuminata.

I fenomeni luminosi più noti sono la riflessione della luce, la rifrazione, la diffusione, l'interferenza e la diffrazione.

I primi tre fenomeni si spiegano perfettamente con la teoria geometrica della propagazione della luce, gli altri due fenomeni si possono spiegare compiutamente solo con una nuova teoria, che è la teoria ondulatoria della luce. Questi due fenomeni, quindi, mettono in crisi la teoria della propagazione rettilinea della luce e ci costringono a formulare una teoria più completa e complessa.

N. 2 –Riflessione della luce.

Si dice **riflessione della luce** la deviazione, secondo leggi particolari, che subiscono i raggi luminosi quando incontrano nella loro propagazione una superficie ben levigata e pulita.

Le leggi della riflessione sono dovute a **Cartesio-Snellius** e si possono verificare facilmente facendo cadere un raggio luminoso su una superficie riflettente piana. Esse dicono (vedi fig. 3-4 e relativa terminologia):

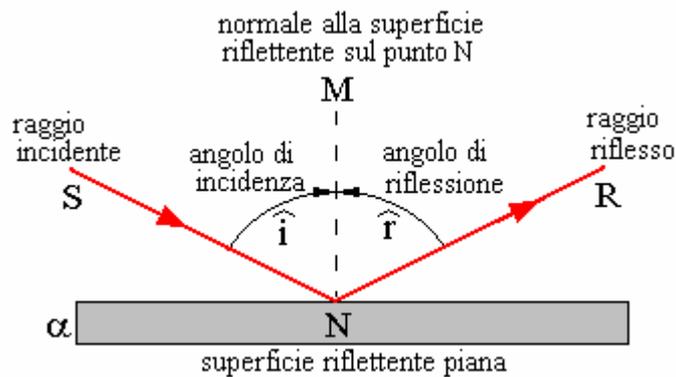


Figura 3-4

- 1) il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie riflettente sul punto di incidenza giacciono su uno stesso piano;
- 2) l'angolo di incidenza \hat{i} è uguale all'angolo di riflessione \hat{r} : $\hat{i} = \hat{r}$.

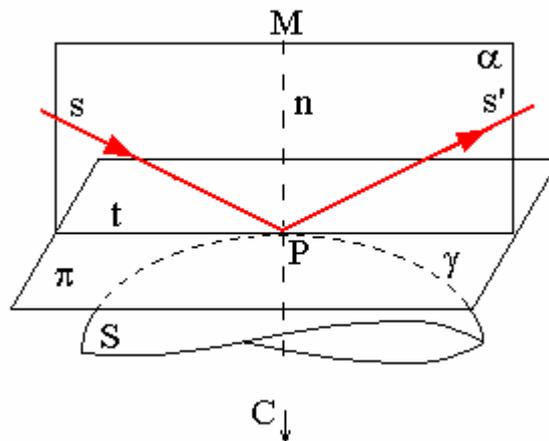


Figura 3-5

Supponiamo ora che la superficie riflettente S sia curva e un raggio s cada in un punto P di essa (fig. 3-5).

Si conduce il piano π tangente a S nel punto P e la normale n al piano π nel punto stesso. Per ogni piano α passante per il raggio incidente s e per la normale n valgono le leggi della riflessione già esposte.

Se γ è la curva secondo cui il piano α interseca la superficie riflettente S , la normale n passa per il centro di curvatura O della curva relativo al punto di tangenza P .

N. 3 –Specchi.

Si dice specchio una superficie che ha una faccia riflettente, ben levigata e pulita, e la faccia opposta ricoperta da uno strato argentato e da uno strato di vernice.

Gli specchi possono essere piani, concavi o convessi (figg. 3-6).

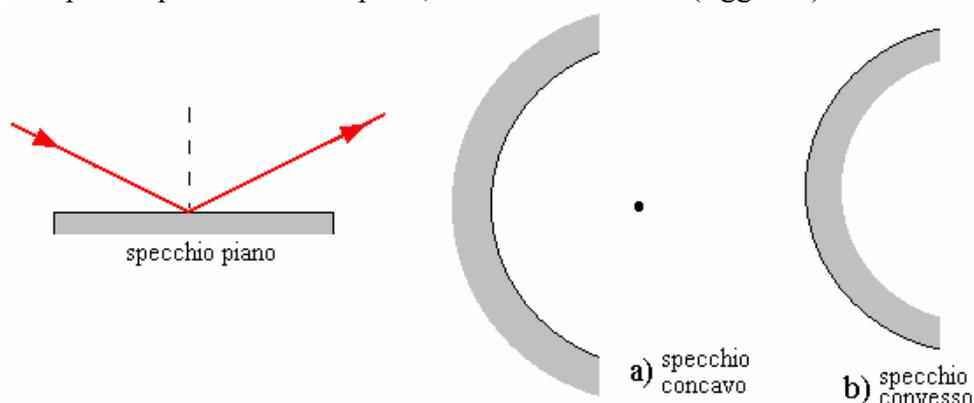


Figura 3-6

La superficie riflettente è quella interna negli specchi concavi (a), quella esterna negli specchi convessi (b).

N. 4 –Sorgenti luminose e loro immagini.

Si dice sorgente luminosa un corpo da cui partono raggi luminosi. Essa può essere **puntiforme** o **estesa**.

Riferiamoci per un momento a una sorgente puntiforme. Se i raggi provenienti da una sorgente puntiforme, dopo aver subito deviazioni e riflessioni, convergono nuovamente in uno stesso punto, si dice che essi formano **un'immagine reale** della sorgente.

Se invece convergono in un punto non i raggi luminosi, ma i loro prolungamenti, il punto si dice **immagine virtuale**, perché ha la capacità (virtus) di apparire esistente al nostro occhio.

Come è noto, gli specchi piani forniscono un'immagine virtuale di un corpo; le lenti convergenti, invece, ne forniscono un'immagine reale. Anche gli specchi concavi di piccola apertura forniscono una immagine reale di una sorgente puntiforme o di un corpo.

L'immagine di un punto, inoltre, si dice **stigmatica** se i raggi rifratti convergono in un solo punto; si dice **astigmatica** se i raggi rifratti convergono in punti diversi.

La stessa definizione si dà per l'immagine di un corpo esteso, essendo questo costituito da infinite sorgenti puntiformi.

N. 5 – Immagine di uno specchio piano.

- a) Consideriamo uno specchio piano L - L e una sorgente puntiforme S (fig. 3-7).

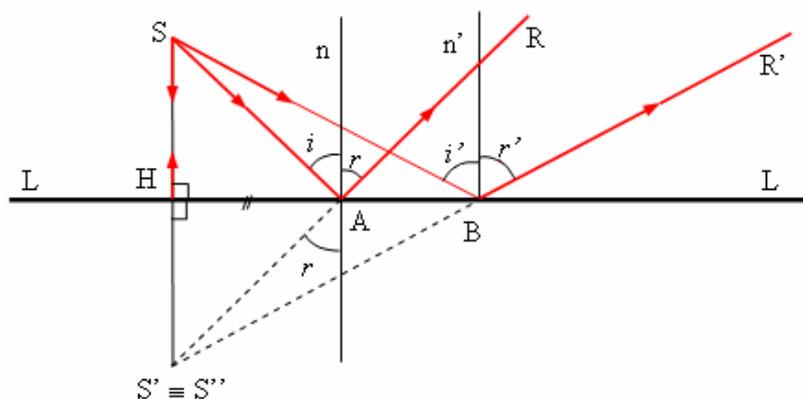


Figura 3-7

Un raggio luminoso cade perpendicolarmente sullo specchio e si riflette su se stesso. Un altro raggio SA cade obliquamente e si riflette nella direzione AR con un angolo di riflessione \hat{r} uguale all'angolo di incidenza \hat{i} . Indichiamo con S' il punto di intersezione dei prolungamenti virtuali dei due raggi e consideriamo i due triangoli SHA ed S'HA. Essi hanno un lato HA in comune e gli angoli adiacenti uguali. Ne segue che, i due triangoli sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza e quindi possiamo scrivere:

$$(1) \quad HS = HS' .$$

Cioè S' è simmetrico di S rispetto al piano dello specchio.

Consideriamo un altro raggio luminoso SB emesso dalla sorgente S e sia BR' il raggio riflesso. Il suo prolungamento apparente interseca la retta SH in un punto S'' . Poiché i due triangoli rettangoli SHB ed $S''HB$ sono uguali (hanno un lato in comune e gli angoli adiacenti uguali), possiamo scrivere:

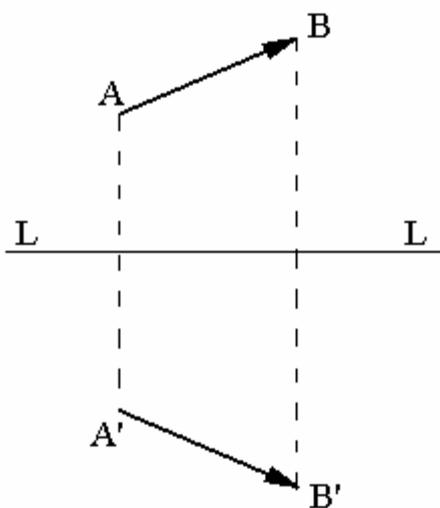
$$(2) \quad HS = HS''$$

Confrontando le (1), (2) si vede che $HS' = HS''$ e quindi i punti S' ed S'' coincidono.

Poiché la stessa proprietà vale per tutti i raggi luminosi riflessi dello

specchio possiamo dire:

“uno specchio piano fornisce di una sorgente puntiforme S un'immagine S' simmetrica rispetto allo specchio e virtuale, cioè ottenuta come intersezione dei prolungamenti dei raggi riflessi”.



b) Sorgente estesa.

Se abbiamo una sorgente estesa AB , per esempio una freccia (fig. 3-8), l'immagine fornita dallo specchio è quella che si ottiene congiungendo le immagini A' e B' di punti estremi.

Anche essa risulta virtuale e simmetrica rispetto allo specchio.

Figura 3-8

N. 6 –Specchi sferici concavi.

Si dice specchio sferico concavo una calotta sferica in cui la superficie interna è riflettente mentre quella esterna, ricoperta da uno strato di vernice, è opaca (fig. 3-9).

Gli elementi di uno specchio sferico concavo sono:

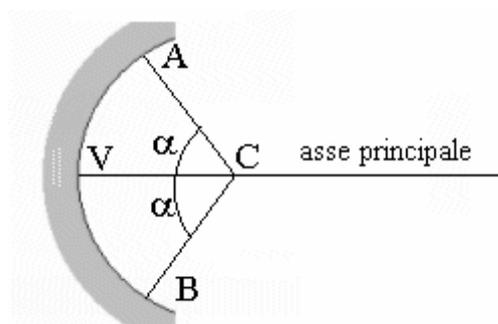


Figura 3-9

- 1) **il centro ottico C**, che è il centro della sfera a cui la calotta appartiene;
- 2) **l'angolo di apertura**, che è l'angolo solido che ha per sezione piana l'angolo $\widehat{ACB} = \alpha$;
- 3) **il vertice dello specchio**, che è il punto medio V dell'arco \widehat{AB} ;
- 4) **il raggio di curvatura** $r = \overline{CV}$, che coincide con il raggio della sfera a cui la calotta appartiene;
- 5) **l'asse ottico principale**, che è dato dalla retta CV;
- 6) **gli assi ottici secondari**, che sono formati da qualsiasi retta uscente da un punto dello specchio e passante per il centro ottico.
- 7) Se lo specchio ha una piccola apertura, i raggi paralleli all'asse principale, come si può dimostrare, si riflettono tutti passando per uno stesso punto F dell'asse ottico CV detto **fuoco principale**.

Con buona approssimazione si ha:

$$\overline{OF} = \overline{VF} = \frac{r}{2} = f .$$

La lunghezza f viene detta **distanza focale** dello specchio.

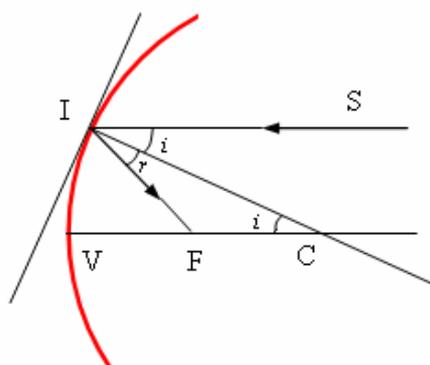
- 8) **Piano focale**: è il piano passante per il fuoco dello specchio e perpendicolare all'asse ottico principale.

Per quanto riguarda gli specchi sferici concavi possiamo ricavare alcune leggi. Queste sono valide solo se sono verificate due condizioni (condizioni di Gauss):

- 1) gli specchi hanno una piccola apertura;
- 2) i raggi incidenti sullo specchio sono poco inclinati rispetto all'asse ottico principale.

N. 7 –Distanza focale di uno specchio.

Consideriamo uno specchio sferico concavo di piccola apertura (fig. 3-10). Sia SI un raggio luminoso parallelo all'asse principale e t il piano



tangente allo specchio nel punto I . La normale IN al piano tangente coincide con il raggio IC perché in una circonferenza il piano tangente in un punto I è perpendicolare al raggio condotto per I . Ne segue che $S\hat{I}C$ è l'angolo di incidenza \hat{i} del raggio luminoso SI .

Detto IC il raggio riflesso si avrà:

Figura 3-10

(1)

$$F\hat{I}C = S\hat{I}C.$$

Se ora consideriamo le rette parallele SI e CV tagliate dalla trasversale IC possiamo dire:

(2) $F\hat{I}C = I\hat{C}F$ come angoli alterni interni.

Per la proprietà transitiva, dalle (1), (2) si ha:

(3) $F\hat{I}C = I\hat{C}F$.

Ne segue che il triangolo (FIC) è isoscele sulla base IC e quindi i lati obliqui sono uguali, cioè:

$$(4) \quad FI = FC .$$

Ma se lo specchio è di piccola apertura con buona approssimazione possiamo dire che FI è praticamente uguale ad FV , cioè:

$$(5) \quad FI \cong FV .$$

Dalle (4), (5) si ricava:

$$FC \cong FV .$$

Cioè F è il punto medio del raggio $VC = r$.

La stessa conclusione si ricava per ogni altro raggio parallelo all'asse principale, perché possiamo ripetere la dimostrazione precedente parola per parola. Possiamo allora dire :

se uno specchio sferico di piccola apertura è colpito da un fascio di raggi luminosi paralleli all'asse principale, essi si riflettono passando tutti per un punto F dell'asse detto fuoco, il quale è il punto medio del raggio VC .

La verifica sperimentale di questa proprietà è immediata; infatti, se mettiamo la capocchia di un fiammifero in questo punto, essa si riscalda e si incendia.

La lunghezza \overline{VC} si dice distanza focale e si indica con la lettera f . Si avrà dunque:

$$f = \frac{r}{2} .$$

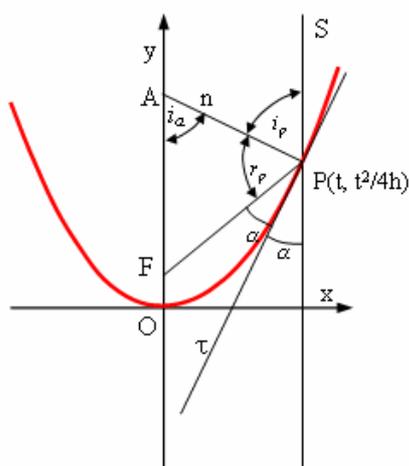
Per il principio di invertibilità del cammino luminoso, se mettiamo una sorgente luminosa nel punto F , i raggi colpiscono lo specchio sferico e si riflettono parallelamente all'asse principale.

N. 8 –Specchio concavo parabolico.

Possiamo immaginare che questo specchio sia generato da una parabola che ruota intorno al suo asse di simmetria, la superficie riflettente è quella interna.

Vogliamo dimostrare che in uno specchio parabolico i raggi paralleli all'asse principale si riflettono passando tutti per il fuoco del paraboloide al quale lo specchio appartiene. Per la dimostrazione basta riferirci alla parabola che, per rotazione, genera lo specchio (vedi i lavori di Fisica del Prof. Carlo Sintini di Latina).

Dato un riferimento cartesiano Oxy, consideriamo una parabola con centro nell'origine e concavità verso l'alto:



$$(1) \quad y = f(x) = \frac{1}{4h} x^2 .$$

Le coordinate del fuoco sono $F(0 ; h)$. Sia $x = t$ una generica retta PS parallela all'asse; essa interseca la parabola nel punto $P(t, t^2/4h)$ (fig. 3-11).

Ricordiamo che l'equazione della tangente alla curva $y = f(x)$ in un generico punto $P_0(x_0, y_0)$ è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0) .$$

Nel nostro caso, essendo $f'(x) = x/2h$, l'equazione della tangente τ è:

$$y - \frac{t^2}{4h} = \frac{t}{2h} (x - t) \quad \text{da cui (2)} \quad y = \frac{t}{2h} x - \frac{t^2}{4h} .$$

La normale n alla tangente nel punto P ha il coefficiente angolare

$$m = -\frac{2h}{t} \quad \text{e la sua equazione è:}$$

$$y - \frac{t^2}{4h} = -\frac{2h}{t} (x - t) \quad \text{da cui (3)} \quad y = -\frac{2h}{t} x + 2h + \frac{t^2}{4h} .$$

La normale alla parabola nel punto P interseca l'asse della conica nel

$$\text{punto, } A \left(0, 2h + \frac{t^2}{4h} \right) .$$

Facciamo ora vedere che il triangolo (APF) è isoscele sulla base AP; basta far vedere che le lunghezze dei lati FA ed FP del triangolo (APF) sono uguali. Infatti, passando ai calcoli si ha:

$$\overline{FA} = y_A - y_F = 2h + \frac{t^2}{4h} - h \quad , \quad \overline{FA} = \frac{4h^2 + t^2}{4h} \quad ;$$

$$\overline{FP}^2 = (t - 0)^2 + \left(\frac{t^2}{4h} - h \right)^2 = t^2 + \frac{(t^2 - 4h^2)^2}{16h^2} = \frac{16h^2t^2 + t^4 - 8h^2t^2 + 16h^4}{16h^2}$$

,

$$\overline{FP}^2 = \frac{(t^2 - 4h^2)^2}{16h^2} \quad \text{quindi} \quad \overline{FP} = \frac{4h^2 + t^2}{4h} \quad .$$

Dal confronto si ricava $\overline{FA} = \overline{FP}$; quindi il triangolo (AFP) è isoscele sulla base AP e possiamo dire:

$$\hat{i}_p = \hat{i}_A \quad \text{come angoli alla base del triangolo isoscele;}$$

$$\hat{i}_A = \hat{i}_p \quad \text{come angoli alterni interni rispetto alle parallele } x = 0 \text{ e } x = t \text{ tagliate dalla trasversale } n \equiv AP.$$

Ne segue che:

$$\hat{i}_p = \hat{i}_p \quad \text{ossia} \quad \hat{S}PA = \hat{A}PF \quad ;$$

ma allora la retta PF forma, con la normale AP al piano tangente τ , un angolo uguale all'angolo di incidenza del raggio luminoso PS e pertanto essa rappresenta il raggio riflesso. Abbiamo così dimostrato che il raggio SP, parallelo all'asse della parabola, si riflette sullo specchio passando per il fuoco.

Poiché possiamo ripetere lo stesso ragionamento per ogni raggio luminoso parallelo all'asse dello specchio parabolico, la proprietà enunciata all'inizio del paragrafo è dimostrata.

Per il principio di invertibilità del cammino ottico, se poniamo una sorgente luminosa sul fuoco di uno specchio parabolico, i raggi emessi dalla sorgente cadono sulla superficie dello specchio e si riflettono parallelamente all'asse dello specchio.

Risulta così dimostrato che gli specchi parabolici hanno la stessa proprietà degli specchi sferici di piccola apertura; questi sono più diffusi solo perché la loro costruzione è meno costosa rispetto a quella degli specchi parabolici.

N. 9 –Punti coniugati di uno specchio sferico e formula dei punti coniugati.

L'argomento è svolto bene sui testi di Fisica e fra essi gli studenti potranno operare la loro scelta.

N. 10 –Leva ottica.

Un raggio luminoso SI cade su uno specchio piano $L - L$ formando un angolo di incidenza $S\hat{I}N = i$ con la normale NI allo specchio; sappiamo già che esso si riflette con un angolo di riflessione $N\hat{I}R = r$, uguale all'angolo di incidenza (fig. 3-12)

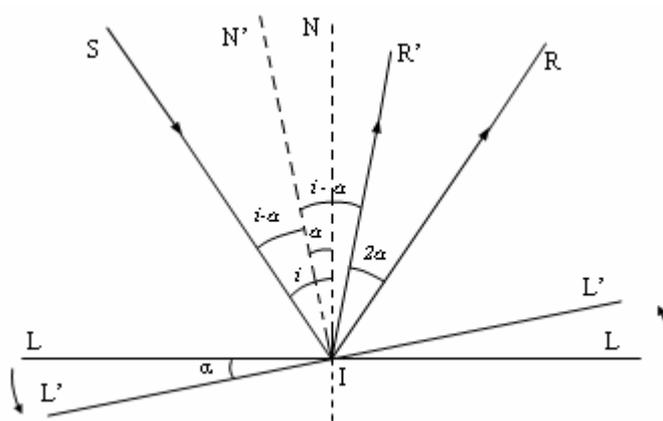


Figura 3-12

Facciamo ora ruotare lo specchio di un piccolo angolo α attorno al punto di incidenza e siano $L'' - L''$ ed $N'I$ le nuove posizioni dello specchio e della normale.

Gli angoli $\widehat{LIL'} = \alpha$ ed $\widehat{NIN'}$ sono uguali perché hanno i lati perpendicolari a due a due e quindi il nuovo angolo di incidenza che il raggio SI forma con la nuova normale IN' sarà:

$$\widehat{SIN'} = i - \alpha .$$

Se indichiamo con IR' il nuovo raggio si avrà:

$\widehat{SIN'} = \widehat{N'IR'}$; ossia anche il nuovo angolo di riflessione è uguale a $i - \alpha$. Facciamo ora vedere che se lo specchio ruota, come abbiamo supposto, di un angolo α , il raggio riflesso ruota di un angolo di 2α . Infatti, se indichiamo con β l'angolo $\widehat{RIR'}$ si avrà:

$$\widehat{SIR} = i + r = 2i$$

$$\text{ma anche} \quad \widehat{SIR} = i - \alpha + i - \alpha + \beta .$$

Eguagliando membro a membro si ottiene:

$$2i - 2\alpha + \beta = 2i ,$$

$$\text{da cui} \quad \beta = 2\alpha \quad \text{ossia} \quad \widehat{RIR'} = 2\alpha .$$

Ciò vuol dire che se lo specchio piano ruota di un angolo α attorno al punto di incidenza I, il raggio riflesso IR ruota di un angolo di ampiezza doppia, cioè lo specchio costituisce una leva ottica.

Il metodo della leva ottica è usato per osservare la deviazione di alcuni equipaggi mobili, come ad esempio una calamita ad ago girevole attorno ad un filo passante per il suo baricentro. Uno specchietto è collegato al filo che sorregge la calamita e su di esso cade un raggio luminoso. Se lo specchietto ruota di un angolo α , il raggio riflesso ruota di un angolo di ampiezza doppia e ciò facilita la misurazione dell'angolo di rotazione. E' questo il cosiddetto metodo di Poggendorff. Vedremo subito una applicazione della leva ottica nella misura della velocità della luce per mezzo dello specchio ruotante di Foucault.

N. 11 –Specchio ruotante di Foucault.

L'apparecchio di Foucault ci permette di trovare la misura della velocità in modo più semplice e preciso della ruota dentata di Fizeau.

Descrizione (fig. 3-13).

Un raggio di luce SI proveniente da una sorgente S cade su uno specchio semiargentato a ; si riflette formando il raggio IO , cade su uno specchio $m \equiv BB'$ formando il raggio OC , cade perpendicolarmente su uno specchio sferico s il cui centro di curvatura cade nel punto O del secondo specchio m , si riflette su se stesso e compie il cammino inverso.

Giunto nel punto I dello specchio a , il raggio in parte si riflette verso la sorgente e in parte attraversa lo specchio semiargentato, prosegue e colpisce lo schermo S_c nel punto E , dove si forma una macchiolina luminosa. Se ora ruotiamo lo specchio $m \equiv BB'$ di un angolo abbastanza grande, il raggio OC passa fuori dello specchio s , esso non può quindi riflettersi su se stesso e non produce nessuna traccia sullo schermo S_c .

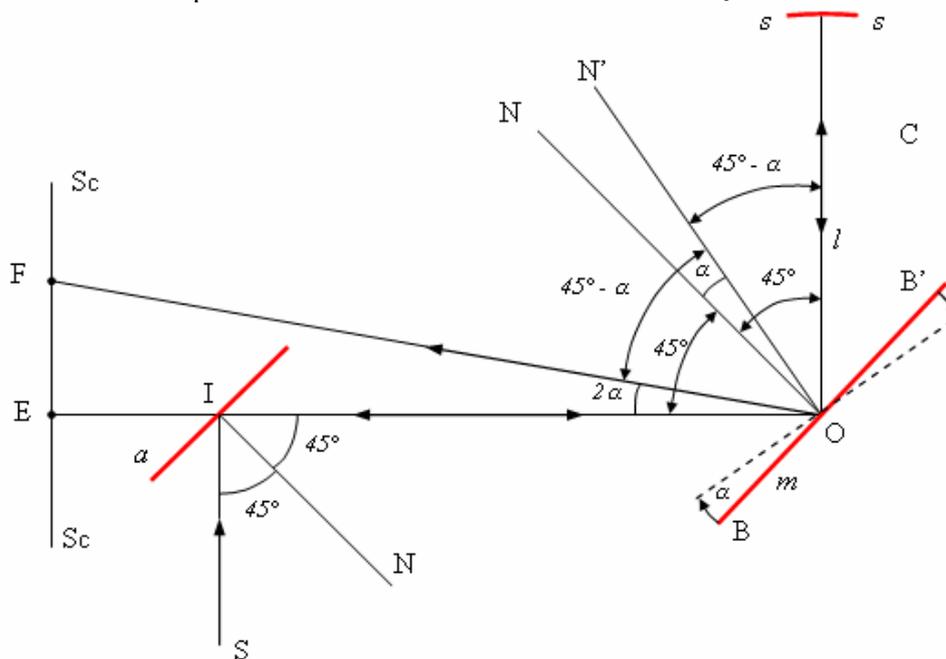


Figura 3-13

Se invece facciamo ruotare rapidamente lo specchio m attorno al punto O con velocità angolare ω , mentre la luce percorre il tratto $OC \rightarrow CO (= 2 \ell)$ lo specchio m ruota di un piccolo angolo α e quindi l'inclinazione del raggio CO sullo specchio m varia da 45° a $45^\circ - \alpha$; pertanto il raggio

CO non si riflette più secondo il raggio OE, ma secondo il raggio OF che va a colpire lo schermo S_c . Per il teorema della leva ottica si avrà:

$$\widehat{OEF} = 2\alpha$$

infatti, $\widehat{OEF} = 90^\circ - 2 \cdot (45^\circ - \alpha)$ quindi, $\widehat{OEF} = 2\alpha$.

In altre parole se lo specchio m ruota, in senso orario, di un piccolo angolo α , il raggio OE ruota nello stesso verso di un angolo 2α .

Naturalmente, ad ogni giro dello specchio la luce cade per un istante nel punto F dello schermo e, per la persistenza delle immagini sulla retina dell'occhio, essa produrrà una macchiolina luminosa.

Dal triangolo EDF, rettangolo in E si avrà:

$$\overline{EF} = \overline{ED} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \quad \text{da cui (1)} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{EO}}.$$

Poiché i segmenti EF ed EO sono misurabili, con una calcolatrice tascabile possiamo trovare facilmente la misura dell'angolo 2α e quindi dell'angolo α .

Se ora indichiamo con ω la velocità angolare dello specchio m , con t il tempo impiegato dalla luce a percorrere il tratto $2\overline{OC} = 2\ell$, con α l'angolo di cui lo specchio m ruota in questo intervallo di tempo t , si avrà:

$$\alpha = \omega \cdot t \quad \text{da cui (2)} \quad t = \frac{\alpha}{\omega}.$$

Pertanto la velocità della luce sarà: $c = 2\ell/t$, ossia:

$$c = 2\ell : \frac{\alpha}{\omega} \quad \text{e quindi (3)} \quad c = 2\ell \cdot \frac{\omega}{\alpha}.$$

Se ora teniamo presente che, se si misurano gli angoli in radianti, per angoli di piccola ampiezza si ha:

$$(4) \quad \operatorname{tg} 2\alpha \cong \frac{\overline{EF}}{\overline{EO}} \quad \text{e quindi} \quad \alpha \cong \frac{\overline{EF}}{2\overline{EO}}.$$

sostituendo nella (3) si ottiene:

$$(5) \quad c = 4\ell \cdot \omega \cdot \frac{\overline{EO}}{EF} .$$

Se indichiamo con f la frequenza di rotazione dello specchio si ha:
 $\omega = 2\pi f$. Sostituendo l'espressione di ω nella (5) si ottiene infine:

$$(6) \quad c = 8\pi \cdot \ell f \cdot \frac{\overline{EO}}{EF} .$$

Poiché le grandezze ℓ , f , EO , EF possono essere misurate facilmente, la formula (6) ci permette di ricavare il valore della velocità della luce. Nel vuoto, e con buona approssimazione nell'aria, si ha:

$$c = 299.780 \text{ Km/s} .$$

Nota.

L'esperimento di Foucault è riproducibile in laboratorio, al contrario dell'esperimento di Fizeau, e dà una misura più attendibile per la velocità della luce. Infatti nell'esperienza della ruota dentata di Fizeau non si può stabilire con esattezza se il fascio luminoso, riflettendosi verso la ruota, passa nel mezzo di una cavità o passa sfiorando un dente. Questa incertezza, ovviamente, altera la misura della velocità della luce.

Ma il metodo di Foucault offre un altro grandissimo vantaggio. Poiché è riproducibile nell'ambito di un laboratorio, esso permette di misurare la velocità della luce nei mezzi trasparenti. Si è potuto così vedere che in questi mezzi, contrariamente a quanto prevede la teoria di Newton, la luce si propaga con una velocità inferiore a quella con cui essa si propaga nel vuoto.

N. 12 –Rifrazione.

In un mezzo trasparente e omogeneo i raggi di luce si propagano sempre in linea retta; quando invece i raggi passano obliquamente da un mezzo trasparente ad un altro di natura diversa o di diversa densità, essi cambiano direzione, cioè si rifrangono.

Possiamo allora dire:

si chiama rifrazione la deviazione che subiscono i raggi luminosi quando passano da un primo ad un secondo mezzo trasparente di diversa natura o di diversa densità.

Il fenomeno si può osservare agevolmente se facciamo cadere un raggio di luce in una vaschetta di vetro contenente acqua (figg. 3-14).

SI è il raggio incidente, IR è il raggio rifratto ed NI è la normale alla superficie rifrangente nel punto di incidenza; l'angolo $\hat{i} = S \hat{I} N$ si dice **angolo di incidenza**, l'angolo $\hat{r} = N \hat{I} R$ si dice **angolo di rifrazione**. Per rendere più vistoso il fenomeno, all'acqua viene aggiunta un po' di fucsina. Nella figura (3-14 b) abbiamo diversi raggi di incidenza con i rispettivi raggi di rifrazione.

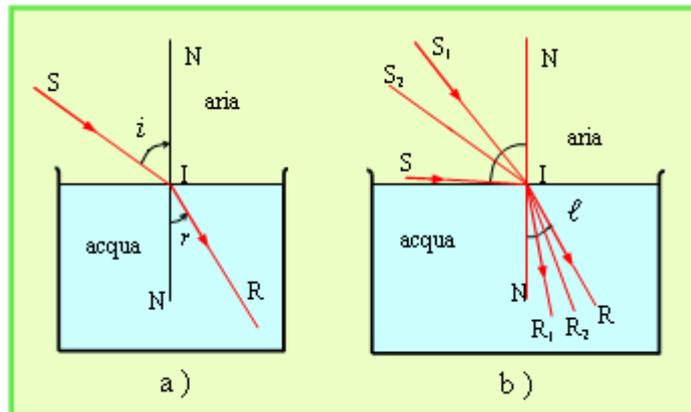


Figura 3-14

Per la rifrazione della luce vale il principio di invertibilità del cammino luminoso, cioè: se il raggio rifratto lo si considera come raggio incidente, quello che era il raggio incidente diventa il raggio rifratto.

Se l'angolo di rifrazione è minore dell'angolo di incidenza, cioè $\hat{r} < \hat{i}$, il secondo mezzo si dice più rifrangente del primo. Generalmente i mezzi più

densi sono più rifrangenti e i mezzi meno densi sono meno rifrangenti, per esempio l'acqua è più rifrangente dell'aria. Ma ciò non è sempre vero poiché esistono varie eccezioni. Infatti, l'alcool, l'olio d'oliva e il petrolio sono meno densi dell'acqua, ma sono più rifrangenti di questa; non si deve quindi confondere la rifrangenza con la densità.

Illustriamo alcuni fenomeni di rifrazione, ad esempio l'esperienza del bastone spezzato e l'esperienza del fondo del recipiente.

Consideriamo un bastone immerso nell'acqua e due raggi luminosi che partono dalla sua estremità B (fig. 3-15). I due raggi, passando dal mezzo più rifrangente al mezzo meno rifrangente si allontanano della normale divergendo fra di loro.

In questo modo l'osservatore vedrà l'estremità del bastone sul prolungamento dei raggi rifratti che giungono al suo occhio e avrà l'impressione che il bastone sia spezzato.

Spieghiamo un altro fenomeno. Consideriamo una moneta posata sul fondo di un recipiente contenente acqua (fig. 3-15 b).

Dalla moneta, colpita dai raggi del sole, escono due raggi luminosi che, passando nell'aria, si rifrangono allontanandosi dalla normale divergendo fra di loro. In tal modo l'osservatore vedrà l'oggetto sul prolungamento dei due raggi luminosi che giungono al suo occhio e avrà, l'impressione che il fondo del recipiente stia più sollevato.

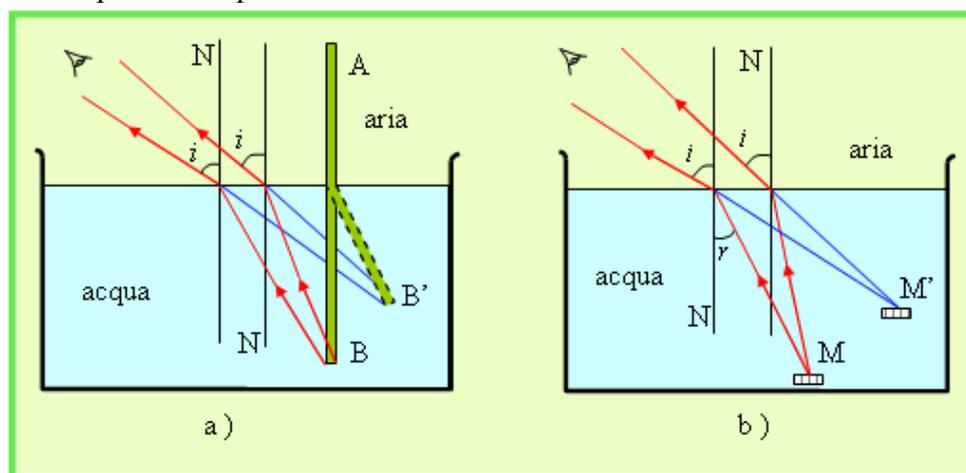


Figura 3-15

N. 13 –Leggi della rifrazione.

Le leggi della rifrazione, dovute a Snellius e a Cartesio, sono facili da verificare sperimentalmente; basta far cadere un raggio luminoso su una vaschetta contenente un liquido o sull'asse di un semicilindro di vetro, plexiglas o di altro materiale trasparente (vedi nota 2).

Esse dicono:

- 1) il raggio incidente, il raggio rifratto e la normale alla superficie rifrangente nel punto di incidenza giacciono sullo stesso piano.
- 2) Per due dati mezzi trasparenti e una data radiazione luminosa, il rapporto fra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante cioè:

$$(1) \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \text{cost} = n_{12} ;$$

n_{12} si dice indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo.

Se il primo mezzo è il vuoto o, con buona approssimazione, l'aria, la costante n_{12} si indica semplicemente con la lettera n e si dice indice di rifrazione assoluto del mezzo considerato.

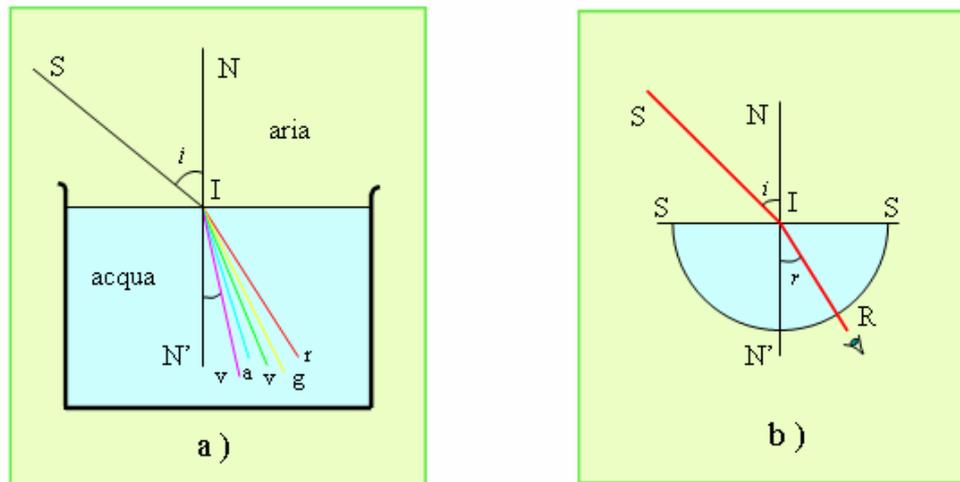


Figura 3-16

L'indice n dipende anche dal colore della luce incidente, cioè dalla sua lunghezza d'onda o dalla sua frequenza; ossia $n = n(\lambda)$.
 Per l'esattezza, le radiazioni di colore azzurro o viola subiscono una rifrazione maggiore di quelle di colore rosso, quindi $n(\lambda_V) > n(\lambda_R)$.
 Nella (fig. 3-16 a) è rappresentato il raggio rifratto di un raggio di luce monocromatico; l'angolo di rifrazione dipende dal colore del raggio di luce incidente.

Se si dimostra sperimentalmente che:

$$(2) \quad n_{12} = \frac{V_1}{V_2} ;$$

cioè l'indice di rifrazione n_{12} è uguale al rapporto fra la velocità V_1 con cui la luce si propaga nel primo mezzo e la velocità V_2 con cui essa si propaga nel secondo mezzo.

Nota 1. Se l'angolo di incidenza è $i = 0$, anche l'angolo di rifrazione è $r = 0$, cioè:

se un raggio di luce cade perpendicolarmente sulla superficie di separazione di due mezzi trasparenti, esso non viene deviato, ossia prosegue nella sua direzione.

Nota 2. Quando il raggio luminoso cade perpendicolarmente sull'asse del semicilindro, il raggio rifratto ha la direzione di un raggio del semicilindro stesso; il raggio rifratto risulta quindi normale alla superficie laterale e fuoriesce senza subire deviazioni.

Torniamo a considerare un raggio luminoso che cade sulla superficie di un mezzo trasparente. Se il primo mezzo è il vuoto allora $V_1 = C$ e la (2) si scrive:

$$(3) \quad n = \frac{c}{V} .$$

Come abbiamo già detto, esso si dice indice di rifrazione assoluto del mezzo considerato.

Ma la velocità con cui la luce si propaga in un mezzo trasparente è:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} .$$

Se il mezzo trasparente è isolante e isotropo $\mu_r = 1$ e la velocità della luce è $V = c/\sqrt{\epsilon_r}$. Sostituendo nella (3) si ottiene un'altra espressione dell'indice di rifrazione assoluto di un dielettrico trasparente, cioè:

$$(4) \quad n = \sqrt{\epsilon_r} ;$$

cioè l'indice di rifrazione assoluto di un mezzo isolante e l'isotropo è uguale alla radice quadrata della sua costante dielettrica relativa ϵ_r .

Consideriamo ora due mezzi trasparenti e i loro indici di rifrazione assoluti;

$$n_1 = \frac{c}{V_1} , \quad n_2 = \frac{c}{V_2} \quad \text{da cui (5)} \quad V_1 = \frac{c}{n_1} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{c}{n_2} .$$

Ricordiamo poi che l'indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo è:

$$(6) \quad n_{12} = \frac{V_1}{V_2} .$$

Sostituendo nella (6) le espressioni di V_1 e V_2 date dalla (5) si ha:

$$n_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{c}{n_1} : \frac{c}{n_2} \quad \text{da cui (7)} \quad n_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} ;$$

la (7) ci dice che: l'indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo è uguale al rapporto fra l'indice di rifrazione assoluto del secondo mezzo e quello del primo.

Supponiamo ora che la luce si propaghi dal secondo mezzo al primo. Per l'indice di rifrazione possiamo allora scrivere:

$$n_{21} = \frac{V_2}{V_1} = 1 : \frac{V_1}{V_2} = 1 : n_{12} ;$$

cioè:
$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}} .$$

Ne segue che i due indici di rifrazione n_{12} ed n_{21} non sono indipendenti fra di loro ma sono l'uno il reciproco dell'altro.

Diamo gli indici di rifrazione assoluti di alcune sostanze. Essi sono calcolati usando la radiazione gialla del sodio (riga spettroscopica $\lambda = 5.890 \text{ \AA}$):

- aria in condizioni normali (0° C e 760 mm Hg) $n = 1,0002926$,
- acqua $n = 1,333$
- vetro crown leggero $n = 1,515$
- vetro flint leggero $n = 1,608$
- vetro crown pesante $n = 1,615$
- vetro flint pesante $n = 1,751$
- diamante $n = 2,417$

Informiamo che il vetro crown è a base di calce e non contiene alcuna traccia di piombo; il vetro flint è a base di ossido di piombo ed è più pesante.

Dalla tabella si rileva pure che tutti i mezzi trasparenti sono sempre più rifrangente del vuoto perché i loro indici di rifrazione assoluti sono maggiori dell'unità.

L'indice di rifrazione dell'aria è molto vicino all'unità; di conseguenza gli indici assoluti delle diverse sostanze sono poco maggiori dei loro indici di rifrazione relativi all'aria. Per questo motivo, quando non è necessaria una grande precisione, essi si possono scambiare fra di loro.

N. 14 –Costruzione grafica del raggio rifratto.

Consideriamo due mezzi trasparenti A e B, aventi gli indici di rifrazione assoluti n_1 e n_2 , separati da una superficie piana S.

Supponiamo che n_1 si riferisca al vuoto, o praticamente all'aria, ed n_2 al vetro flint leggero: quindi $n_1 = 1$, $n_2 = 1,6$.

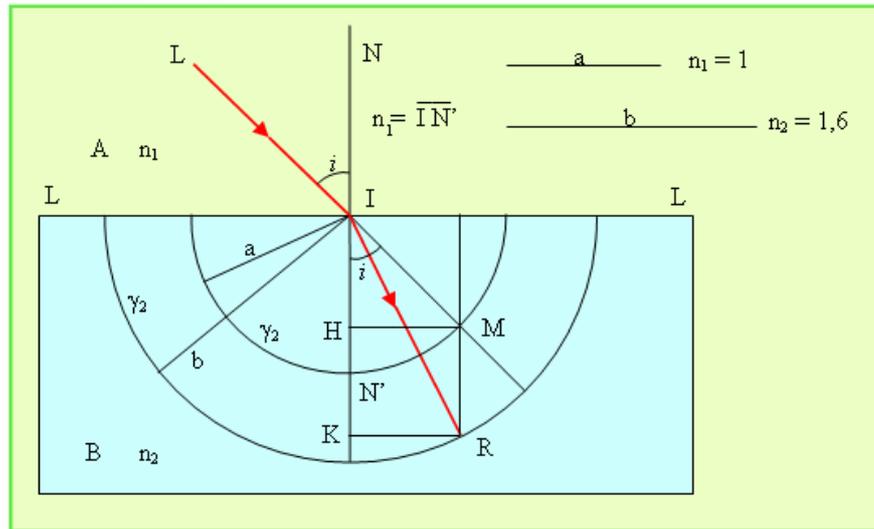


Figura 3-17

Un raggio luminoso LI si propaga dal primo al secondo mezzo e cade sulla superficie rifrangente S con un angolo di incidenza i (fig. 3-17). Vogliamo costruire il raggio rifratto.

Tracciamo due semicirconferenze concentriche γ_1 e γ_2 , giacenti su uno stesso semipiano, e aventi i raggi a , b di lunghezze uguali ai valori di n_1 e n_2 . Sia M il punto di intersezione della semicirconferenza γ_1 con il raggio luminoso LI ed H la proiezione ortogonale del punto M sulla normale n alla superficie rifrangente nel punto I.

Dal punto M si conduca la parallela alla retta n e sia R il punto di intersezione con la semicirconferenza γ_2 e K la proiezione ortogonale del punto R sulla retta n . sia infine r l'angolo $K\hat{I}R$.

Applichiamo ora il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli (HIM) e (KIR). Tenendo conto che $K\hat{I}R = i$ si ha:

$$\overline{HM} = \overline{IM} \cdot \text{sen } i \quad \text{e} \quad \overline{KR} = \overline{IR} \cdot \text{sen } r .$$

Poiché $\overline{HM} = \overline{KR}$, $\overline{IM} = n_1$, $\overline{IR} = n_2$ possiamo scrivere:

$$\overline{HM} = n_1 \cdot \text{sen } i \qquad \overline{HM} = n_2 \cdot \text{sen } r \ .$$

Eguagliando membro a membro si ha:

$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r \qquad \text{da cui} \qquad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \ .$$

Abbiamo così trovato la seconda legge della rifrazione; ciò dimostra che I R è il raggio rifratto del raggio incidente S I.

N. 15 –Angolo limite.

Consideriamo due mezzi trasparenti e supponiamo che un raggio luminoso monocromatico passi dal mezzo meno rifrangente a quello più rifrangente. Se l'angolo di incidenza è di 90° , l'angolo di rifrazione si dice angolo limite e viene indicato con la lettera ℓ (fig. 3-14 b).

Possiamo allora dare la seguente definizione:

si dice angolo limite l'angolo di rifrazione che corrisponde ad un angolo di incidenza di 90° quando il raggio passa da un mezzo meno rifrangente a uno più rifrangente.

Per l'indice di rifrazione n_{12} si ha:

$$n_{12} = \frac{\text{sen } 90^\circ}{\text{sen } \ell} \qquad \text{ossia} \qquad n_{12} = \frac{1}{\text{sen } \ell} \ .$$

Per il principio di invertibilità del cammino luminoso possiamo anche dire: l'angolo limite è l'angolo di incidenza al quale corrisponde un angolo di rifrazione di 90° , quando la luce passa da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente.

In particolare, se il primo mezzo è il vuoto o approssimativamente anche l'aria possiamo scrivere:

$$n = \frac{1}{\text{sen } \ell} \qquad \text{da cui} \qquad \text{sen } \ell = \frac{1}{n} \ .$$

Facciamo tre esempi. Poiché l'indice di rifrazione assoluto dell'acqua è $n \cong 4/3$ si ha:

$$\text{sen } \ell \cong \frac{3}{4} \quad \text{da cui} \quad \ell \cong 48^\circ 35' .$$

Analogamente, poiché l'indice di rifrazione assoluto del vetro crown leggero è $n \cong 3/2$ si ha:

$$\text{sen } \ell \cong \frac{2}{3} \quad \text{da cui} \quad \ell \cong 41^\circ 49' .$$

Il maggior indice di rifrazione assoluto che si conosca è quello del diamante: $n = 2,417$; per l'angolo limite si ha $\ell \cong 24^\circ 37'$.

N. 16 – Riflessione totale.

Un raggio luminoso si può sempre rifrangere quando passa da un mezzo meno rifrangente ad uno più rifrangente. Sappiamo anche che a ogni raggio

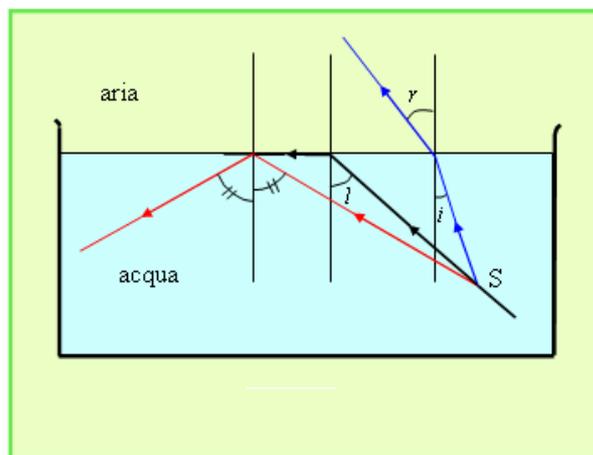


Figura 3-18

di incidenza corrisponde un raggio di rifrazione, e che ad ogni raggio di rifrazione, compreso nell'angolo limite, corrisponde un raggio di incidenza (fig. 3-14 b). Se invece la sorgente luminosa si trova nel mezzo più rifrangente e l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo limite, il raggio luminoso non ha più il corrispondente raggio rifratto e si riflette

totalmente come se la superficie di separazione dei due mezzi fosse una superficie riflettente. In ciò consiste il fenomeno della **riflessione totale** (fig. 3-18).

Concludendo possiamo dire:
un raggio luminoso può sempre rifrangere quando passa da un mezzo meno rifrangente ad uno più rifrangente.
Quando invece la luce passa da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente e l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo limite, essa si riflette totalmente.

CAPITOLO SECONDO.

DIOTTRIE E LENTI

N. 1 – Riflessione e rifrazione su superfici sferiche.

Eccettuati pochi casi, le superfici delle lenti e degli specchi sono sferiche o piane, poiché solo queste superfici si possono ottenere industrialmente con un costo ragionevole.

Quando la superficie di un fronte d'onda, originariamente sferica, attraversa una lente rifrangente o si riflette sulla superficie di uno specchio sferico, essa acquista una forma che non è semplice da studiare matematicamente in termini di superfici d'onda. Per questo motivo è utile schematizzare l'onda con raggi luminosi, perpendicolari al fronte d'onda. Infatti, quando un raggio luminoso si riflette o si rifrange, esso viene deviato di angoli che si possono facilmente calcolare in base alle leggi dell'ottica geometrica, che sono molto semplici. Nella teoria ondulatoria della luce, un raggio luminoso è una retta perpendicolare al fronte d'onda in un suo punto.

N. 2 – Sistema ottico.

Si dice sistema ottico una successione di superfici rifrangenti e riflettenti,

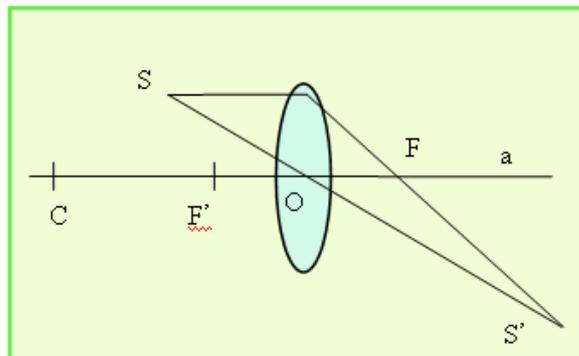


Figura 4-1

che di regola sono sferiche o piane (Figg. 4-1 e 4-2). Se tutti i centri di curvatura di queste superfici cadono su una retta, questa retta è un asse di simmetria di rotazione del sistema e si dice “**asse ottico**” mentre il sistema si dice centrato. Una comune lente da occhiali è un sistema ottico centrato costituito da due superfici sferiche

rifrangenti, che rappresentano le facce della lente. **L'asse ottico** è la retta che passa per i centri di curvatura delle due facce. Il sistema è costituito da tre mezzi (aria, vetro, aria).

Se tutte le superfici del sistema ottico agiscono per rifrangenza (es. lente da occhiali), il sistema si dice **diottrico**; se tutte le superfici ottiche agiscono

per riflessione (es. specchio o periscopio da trincea), il sistema si dice **catottrico**; infine se alcune superfici agiscono per riflessione e altre per rifrazione (binocolo), il sistema si dice **catadiottrico**. Quando un raggio luminoso r cade su un sistema ottico esso si riflette o si rifrange, generando così un raggio emergente r' che è completamente individuato dalle leggi dell'ottica

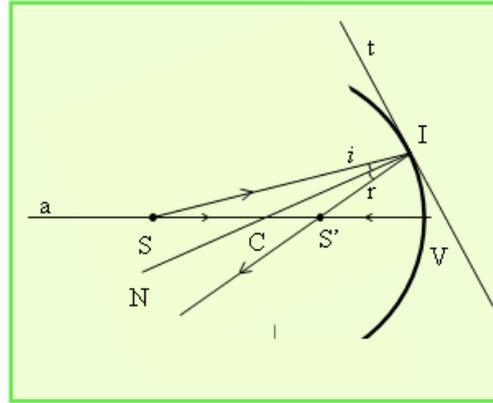


Figura 4-2

geometrica. Se consideriamo il raggio r' come raggio incidente, queste stesse leggi ci fanno trovare il raggio r come raggio emergente. E' questo il principio di **“invertibilità del cammino luminoso”**, che è pienamente confermato dall'esperienza. Il raggio incidente e il raggio rifratto di cui abbiamo parlato si dicono **“coniugati o reciproci”** rispetto al sistema ottico. Un fascio di raggi che passino tutti per un medesimo punto si dice, **“omocentrico”**. Un fascio di raggi paralleli si considera omocentrico con centro all'infinito.

Se due fasci coniugati rispetto a un sistema ottico sono entrambi omocentrici, i rispettivi centri si dicono **“punti coniugati”**.

Il punto S da cui partono i raggi luminosi si dice sorgente reale o punto-oggetto; il punto S' in cui convergono i raggi coniugati si dice punto-immagine.

Il punto S' , poi, si dice immagine reale se in essa convergono realmente i raggi coniugati; si dice immagine virtuale se il fascio coniugato è formato da raggi divergenti e quindi in S' convergono non i raggi reali ma i loro prolungamenti apparenti. Per fare un esempio, uno specchio piano fornisce di una sorgente puntiforme S una immagine S' , simmetrica rispetto allo specchio stesso.

Altro esempio: una lente convergente dà di una sorgente luminosa distante da essa una immagine reale (fig. 4-1); una lente divergente dà invece una immagine virtuale.

I sistemi ottici che a determinati fasci concentrici fanno corrispondere altrettanti fasci concentrici si dicono **“stigmatici”** rispetto ai fasci e spesso si dice anche che i centri S e S' dei due fasci sono stigmatici. Può accadere che un sistema ottico sia stigmatico solo per certe coppie di punti coniugati.

Dati due punti coniugati, si dice che il punto S da cui partono i raggi luminosi appartiene allo spazio-oggetti; si dice invece che il suo punto coniugato S', in cui convergono i raggi emergenti, appartiene allo spazio-immagini.

Naturalmente, se si mette la sorgente luminosa nel punto S', i ruoli e le denominazioni si scambiano grazie al principio di invertibilità dei cammini luminosi. (Per l'argomento, vedi E. Perucca, Fisica Generale vol. II. Pag. 33 U.T.E.T.).

N. 3 – Diottro sferico.

Si dice diottro un sistema ottico costituito da due mezzi trasparenti, omogenei e con diversi indici di rifrazione, separati da una calotta sferica di raggio r; questa calotta sarà ovviamente una superficie rifrangente (Fig. 4-3).

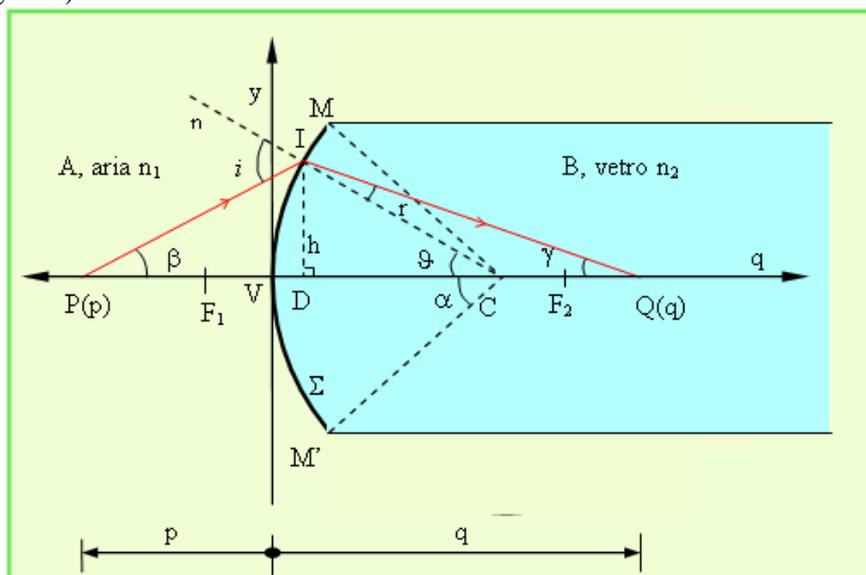


Figura 4-3

Il diottro è evidentemente un sistema ottico centrato. Qualunque retta passante per l'unico centro di curvatura C è un "asse ottico". Si dice invece asse principale la retta passante per il centro di curvatura C e per il vertice V della calotta. Le altre rette per C si dicono "assi secondari".

Supponiamo che i raggi luminosi cadano sulla parte convessa della calotta e che questa separi un sostanza A, avente un piccolo indice di rifrazione assoluto n_1 (per es. l'aria, $n_1=1$) da una sostanza B, avente un grande indice

di rifrazione assoluto n_2 (per esempio il vetro). Allora A è lo spazio-oggetti e B lo spazio-immagini.

Consideriamo due sistemi di riferimento V_{py} e V_{qy} , aventi come origine comune il vertice V della calotta, come asse y la perpendicolare all'asse ottico nel punto V e gli assi delle ascisse sovrapposti all'asse ottico: nello spazio-oggetti l'asse p è orientato verso sinistra; nello spazio-immagini l'asse q è orientato verso destra.

Quando la superficie rifrangente volge la sua convessità alla sorgente dei raggi luminosi, il suo raggio di curvatura si considera positivo; in tal caso la sorgente e il centro di curvatura della calotta stanno da parte opposta rispetto alla superficie rifrangente. Nel nostro caso si ha $R = CV > 0$.

L'angolo $\widehat{MCM'} = 2\alpha$ si dice apertura del diottro; con le approssimazioni di Gauss esso deve essere molto piccolo. Con le stesse approssimazioni i raggi luminosi che cadono sulla superficie del diottro devono essere poco inclinati sull'asse (raggi parassiali).

Se un fascio di raggi paralleli all'asse ottico cade sulla superficie concava della calotta, i raggi si rifrangono passando tutti per un punto F_1 dell'asse p: esso è il "primo fuoco". Se invece i raggi cadono sulla superficie convessa, essi si rifrangono passando tutti per un punto F_2 dell'asse q, detto "secondo fuoco".

Le misure f_1 e f_2 dei segmenti VF_1 e VF_2 si dicono distanze focali.

N. 4 — Formula dei punti coniugati per il diottro sferico.

Sia P una sorgente luminosa monocromatica posta sull'asse ottico dello spazio-oggetti e sia p la sua ascissa. Siano poi PV e PI due raggi luminosi emessi dalla sorgente. Il raggio PV ($= r$) cade perpendicolarmente sulla superficie di separazione dei due mezzi A e B e quindi passa da A e B senza subire deviazioni e resta coincidente con l'asse ottico.

Il raggio PI passa da un primo a un secondo mezzo più rifrangente e quindi si avvicina alla normale nel punto I e va ad intersecare l'asse ottico nel punto Q di ascissa $q > 0$.

Vogliamo sapere se il diottro trasforma il fascio omocentrico uscente da P in un fascio omocentrico passante per Q, cioè vogliamo sapere se il punto Q, determinato con la nostra costruzione, è lo stesso qualunque sia l'inclinazione del raggio incidente PI. Se la risposta è positiva Q si dice immagine del punto P e i punti P e Q si dicono coniugati.

Se la risposta è negativa si dice che il diottro trasforma il fascio omocentrico uscente da P in un fascio astigmatico.

Passiamo ai calcoli (vedi E. Perucca, Fisica Generale, vol.II pag. 59

U.T.E.T.). Dalla (fig. 3) si vede anzitutto che: $i + \widehat{P\hat{I}C} = \pi$

Se ora applichiamo il teorema dei seni al triangolo PIC si ottiene:

$$\frac{PI}{\sin \vartheta} = \frac{PC}{\sin(\pi - i)}; \quad \text{quindi} \quad (1) \quad \frac{PI}{\sin \vartheta} = \frac{PC}{\sin i}$$

Applicando lo stesso teorema al triangolo ICQ si ha:

$$\frac{IQ}{\sin(\pi - \vartheta)} = \frac{CQ}{\sin r}; \quad \text{quindi} \quad (2) \quad \frac{IQ}{\sin \vartheta} = \frac{CQ}{\sin r}.$$

Ma per diottri di piccola apertura si ha :

$$PI \approx PV = p \quad \quad PC = p + R ;$$

$$QI = QV = q \quad \quad CQ = q - R .$$

Sostituendo nelle equazioni (1) e (2) si ha:

$$(3) \quad \frac{p}{\sin \vartheta} = \frac{p + R}{\sin i} \quad (4) \quad \frac{q}{\sin \vartheta} = \frac{q - R}{\sin r} .$$

Dividendo membro a membro si ha:

$$\frac{q}{p} = \frac{q - R}{p + R} \cdot \frac{\sin i}{\sin r} ;$$

Ricordando che $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$

si ricava: $\frac{q}{p} = \frac{(q - R)n_2}{(p + R)n_1} .$

Ne segue: $qpn_1 + qRn_1 = qpn_2 - pRn_2 ,$

ossia $qRn_1 + pRn_2 = qp(n_2 - n_1)$;

infine: (5)
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{1}{R}(n_2 - n_1)$$
 .

La (5) è l'equazione dei punti coniugati del diottro sferico secondo le approssimazioni di Gauss.

Indicando con $n = \frac{n_2}{n_1}$ l'indice di rifrazione relativo del vetro rispetto all'aria possiamo scrivere:

(5')
$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{R}(n - 1)$$
 .

Nella (5) non compare l'angolo di inclinazione β del raggio incidente sull'asse ottico. Ciò è dovuto al fatto che per piccoli valori dell'angolo β si è potuto scrivere:

$$PI \cong PV = p \quad \text{e} \quad QI \cong QV = q .$$

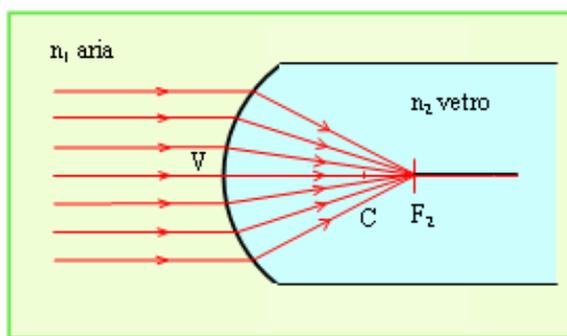


Figura 4-4

Quindi per piccoli valori dell'angolo β il diottro trasforma un fascio omocentrico di centro P in un fascio omocentrico passante per Q.

Poniamo ora nella (5) $p = \infty$, ossia supponiamo che l'onda incidente sul diottro sia un'onda piana (Fig. 4-4) (la sorgente si trova a distanza infinita); si ottiene la

seconda distanza focale, e precisamente:

$$\frac{n}{f_2} = \frac{n - 1}{R} \quad \rightarrow \quad (6) \quad f_2 = R \frac{n}{n - 1} > R .$$

Se nella (5) si pone $q = \infty$ si trova la prima distanza focale, e precisamente

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{R} \rightarrow (7) \quad f_1 = R \frac{1}{n-1} .$$

Essendo $R > 0$ e $n_2 > n_1$ risulta $f_1 > 0$ e $f_2 > 0$; ciò equivale a dire che i fuochi F_1 e F_2 sono reali.

Dalle (6), (7) si ricava:

$$(8) \quad \frac{f_2}{f_1} = n = n_2/n_1$$

$$\text{e} \quad f_2 - f_1 = R \left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1} \right) \quad \text{cioè:} \quad (9) \quad f_2 - f_1 = R .$$

La (5') si può scrivere nella forma

$$\frac{R}{p(n-1)} + \frac{nR}{q(n-1)} = 1 ;$$

tenendo conto delle (6), (7) si ha

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1$$

$$\text{o anche} \quad pq - f_2 p - f_1 q = 0 .$$

N. 5 – Costruzione grafica degli elementi di un diottro.

Nella fig. 4-5 abbiamo disegnato l'immagine di un oggetto fornita da un diottro di raggio $R = 14 \text{ u}$, realizzato con vetro avente indice di rifrazione assoluto $n = 1,58$. Le formule $f_2 - f_1 = R$ ed $f_2 / f_1 = n$ del parag. 5 forniscono, per la prima e seconda distanza focale, rispettivamente i valori $f_1 = 24 \text{ u}$ ed $f_2 = 38 \text{ u}$.

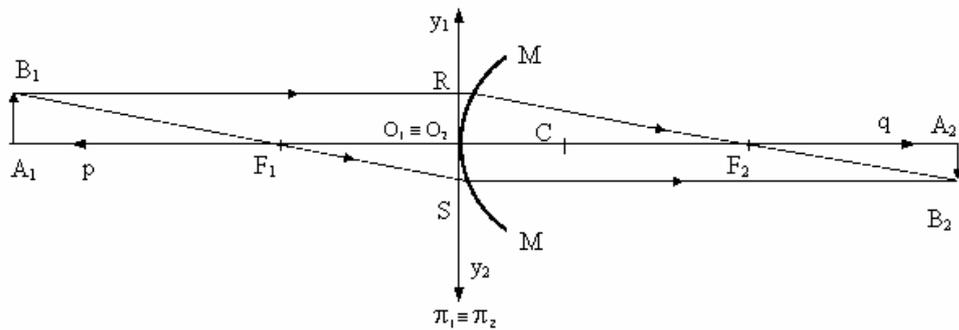


Figura 4-5

Il disegno è eseguito in scala.

N. 6 – Cammini ottici equivalenti nel diottro.

Vogliamo fare una considerazione riguardante la formazione di una immagine ottenuta per mezzo di un diottro sferico (vedi, F.W. Sears, Ottica pag. 66, C.E. Ambrosiana).

Sull'asse ottico principale consideriamo una sorgente luminosa $P(p)$ e la sua immagine $Q(q)$ (fig. 4-3). Come sappiamo l'equazione del diottro è:

$$(1) \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{1}{R}(n_2 - n_1) \quad \text{o anche} \quad (1') \quad \frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{R}(n - 1),$$

ove R è il raggio del diottro, n_1 l'indice di rifrazione dell'aria ed n_2 l'indice di rifrazione del vetro.

Vogliamo dimostrare che il segmento PVQ e la spezzata PIQ sono cammini ottici equivalenti, ossia che essi contengono lo stesso numero di lunghezza d'onda, anche se uno di essi si propaga più nell'aria che nel vetro rispetto all'altro: in altre parole le onde luminose partono in fase dalla sorgente P e

raggiungono ancora in fase l'immagine Q. in ciò consiste il vero significato del concetto di immagine.

Dimostrazione.

Sia λ_0 la lunghezza d'onda della luce nel vuoto. Le lunghezze d'onda nel primo e nel secondo mezzo sono quindi:

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$$

Il cammino d'onda nel raggio PVQ è quindi:

$$\frac{p}{\lambda_1} + \frac{q}{\lambda_2}.$$

Poniamo ora $\overline{PI} = \ell_1$ e $\overline{IQ} = \ell_2$. Il numero di onde sulla spezzata PIQ è allora:

$$\frac{\ell_1}{\lambda_1} + \frac{\ell_2}{\lambda_2}.$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$(3) \quad \frac{p}{\lambda_1} + \frac{q}{\lambda_2} = \frac{\ell_1}{\lambda_1} + \frac{\ell_2}{\lambda_2}.$$

Se teniamo presente le (2), dalla (3) si ricava:

$$p \frac{n_1}{\lambda_0} + q \frac{n_2}{\lambda_0} = \ell_1 \frac{n_1}{\lambda_0} + \ell_2 \frac{n_2}{\lambda_0},$$

ossia (4)
$$p n_1 + q n_2 = \ell_1 n_1 + \ell_2 n_2 :$$

questa è la relazione che dobbiamo quindi dimostrare.

Dalla (fig. 4-3) del diottro si ha:

$$R = \overline{VC} = \overline{VD} + \overline{DC}$$

$$\overline{DC} = R \cos \varphi \quad \overline{VD} = R - \overline{CD} = R(1 - \cos \varphi)$$

Inoltre: $p = \overline{PD} - \overline{VD}$ ove $\overline{PD} = \ell_1 - \cos \beta$;

quindi (5) $p = \ell_1 \cos \beta - R(1 - \cos \vartheta)$

Per i raggi paralleli, gli angoli β , ϑ e γ sono piccoli; con buona approssimazione possiamo dire:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}, \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Sostituendo nella (5) si ha:

$$p = \ell_1 \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) - R \left(1 - 1 + \frac{\vartheta^2}{2} \right)$$

cioè (6) $p = \ell_1 - \frac{1}{2}(\ell_1 \beta^2 + R \vartheta^2)$

Ma dalla (fig. 4-3) si ha:

$$\overline{ID} = h = \ell_1 \sin \beta = \ell_2 \sin \gamma = R \sin \vartheta,$$

e poiché gli angoli β , ϑ e γ sono piccoli si può dire:

$$h = \ell_1 \beta = \ell_2 \gamma = R \vartheta.$$

Ponendo $\ell_1 \beta = R \vartheta$ della (6) si ricava:

$$p = \ell_1 - \frac{1}{2}(\beta \cdot R\vartheta + R\vartheta^2) \quad \text{da cui} \quad p = \ell_1 - \frac{R\vartheta}{2}(\beta + \vartheta)$$

Ora osservando il triangolo PIC, per il teorema dell'angolo esterno si ha $i = \beta + \vartheta$. Sostituendo nella precedente si ottiene:

$$(7) \quad p = \ell_1 - \frac{1}{2}Ri\vartheta .$$

Procedendo in modo analogo, dalla fig. (3) si ha:

$$(8) \quad q = \overline{VQ} = \overline{VD} + \overline{DQ} .$$

$$\text{Ma:} \quad \overline{VD} = \overline{VC} - \overline{DC} = R - \overline{DC} = R - R \cos \vartheta \quad \overline{VD} = R(1 - \cos \vartheta)$$

$$\text{e,} \quad \overline{DQ} = \overline{IQ} \cos \gamma \quad \overline{DQ} = \ell_2 \cos \gamma$$

Si ottiene quindi:

$$(9) \quad q = R(1 - \cos \vartheta) + \ell_2 \cos \gamma .$$

Poiché per i raggi parassiali gli angoli ϑ e γ sono piccoli, con buona approssimazione possiamo dire:

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} , \quad \cos \gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2} .$$

Sostituendo nella (9) si ha:

$$q = R \left(1 - 1 + \frac{\vartheta^2}{2} \right) + \ell_2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} \right)$$

$$\text{cioè,} \quad q = \ell_2 + \frac{1}{2} (R\vartheta^2 - \ell_2\gamma^2) .$$

Ma abbiamo visto che per piccoli valori degli angoli si ha:

$$h = \ell_1 \beta = \ell_2 \gamma = R \vartheta .$$

Ponendo $\ell_2 \gamma = R \vartheta$ nella relazione precedente si ottiene:

$$q = \ell_2 + \frac{1}{2} (R \vartheta^2 - \gamma R \vartheta) \quad \text{da cui} \quad q = \ell_2 + \frac{R \vartheta}{2} (\vartheta - \gamma) .$$

Ora, osservando il triangolo ICQ per il teorema dell'angolo esterno si ha:

$$\vartheta = r + \gamma \quad \text{da cui} \quad r = \vartheta - \gamma .$$

Sostituendo nella relazione precedente si ha:

$$(10) \quad q = \ell_2 + \frac{1}{2} R \vartheta r .$$

Moltiplicando la (7) per n_1 e la (10) per n_2 e sommando membro a membro si ha:

$$pn_1 + qn_2 = \ell_1 n_1 - \frac{1}{2} R \vartheta i n_1 + \ell_2 n_2 + \frac{1}{2} R \vartheta r n_2$$

$$(11) \quad pn_1 + qn_2 = \ell_1 n_1 + \ell_2 n_2 - \frac{1}{2} R \vartheta (i n_1 - r n_2) .$$

Osserviamo ora il raggio luminoso PI che si rifrange sulla superficie del diottro. Per la legge di Snellius si ha:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} .$$

Se i raggi luminosi sono parassiali, gli angoli i ed r sono piccoli e con buona approssimazione possiamo scrivere:

$$\frac{i}{r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{da cui} \quad (12) \quad i n_1 - r n_2 = 0 .$$

L'ultimo termine che figura nell'equazione (11) è pertanto nullo o trascurabile e pertanto si ricava:

$$p n_1 + q n_2 = \ell_1 n_1 + \ell_2 n_2$$

e ciò è quanto volevamo dimostrare; il fatto che il numero di onde è lo stesso per i percorsi parassiali $P \rightarrow Q$ equivale a stabilire che il tempo che la luce impiega a propagarsi in questi percorsi è sempre lo stesso. Ciò costituisce un altro esempio del principio di Fermat.

N. 7 — Lente semplice; elementi di una lente.

Si dice lente semplice un sistema ottico costituito dalla successione di due diottri; abbiamo quindi tre mezzi trasparenti che in generale sono: aria, vetro, aria. Indichiamo rispettivamente con n_1 , n_2 , n_1 i loro indici di rifrazione assoluti.

In particolare una lente si dice biconvessa se le sue facce sono due superfici sferiche Σ_1 , Σ_2 convesse verso l'esterno.

Descriviamo brevemente gli elementi di una lente biconvessa sottile (vedi fig.4-6).

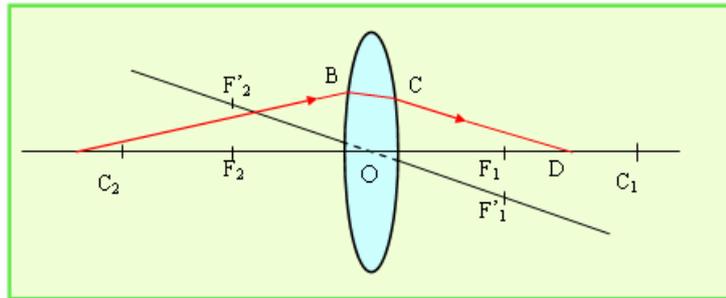


Figura 4-6

Centri di curvatura: sono i centri C_1 e C_2 delle calotte sferiche che costituiscono le facce della lente. I raggi R_1 e R_2 delle calotte sferiche si dicono raggi di curvatura della lente.

Asse ottico principale: è la retta a passante per i centri di curvatura della lente.

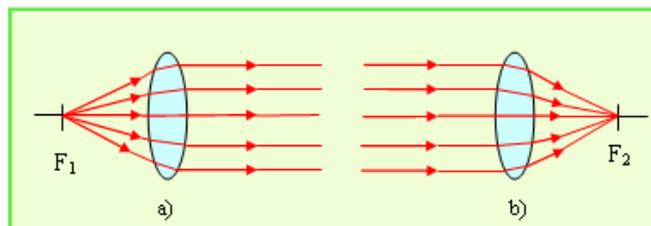
Centro ottico: è un punto dell'asse ottico che gode di una importante proprietà: se un raggio luminoso monocromatico, cadendo sulla lente, si

rifrange passando per il centro O, allora esso emerge dalla parte opposta della lente parallelamente a se stesso. Ciò dipende dal fatto che quando un raggio luminoso passa per il centro ottico, la lente si comporta come una lastra trasparente a facce piane e parallele. Se poi abbiamo una lente molto sottile (e consideriamo raggi luminosi poco inclinati rispetto all'asse ottico), allora si verifica che tutti i raggi passanti per il centro della lente non subiscono praticamente deviazioni.

Asse secondario; è una qualsiasi retta passante per il centro O della lente.

I raggi paralleli all'asse ottico, dopo essersi rifratti due volte sulle facce della lente, convergono in un punto dell'asse detto fuoco principale. Una lente ha due fuochi principali F_1 e F_2 (vedi fig. 4-7).

Per il principio di invertibilità del cammino luminoso, i raggi uscenti da un



fuoco, dopo essersi rifratti due volte sulle facce della lente, escono dalla lente parallelamente all'asse ottico.

I piani perpendicolari all'asse ottico e passanti per i fuochi si dicono **piani focali**.

Figura 4-7

I punti in cui un asse secondario interseca i piani focali si dicono **fuochi secondari** e si indicano con le lettere F_1' ed F_2' . Essi godono di proprietà analoghe a quelle dei fuochi principali.

Ricordiamo che le lenti possono essere convergenti o divergenti. Le prime sono sottili alle estremità e più spesse al centro. Le lenti divergenti, invece, sono più sottili al centro che non alle estremità.

Infine, le lenti convergenti sono di tre tipi:

biconvessa, piano-convessa e menisco convergente.

Anche le lenti divergenti sono di tre tipi:

biconcava, piano-concava e menisco divergente.

N. 8 — Equazione dei punti coniugati di una lente.

Ricordiamo che si dice lente semplice un sistema ottico costituito dalla successione di due diottri di cui almeno uno sferico; abbiamo quindi tre mezzi trasparenti che in generale sono: aria, vetro, aria.

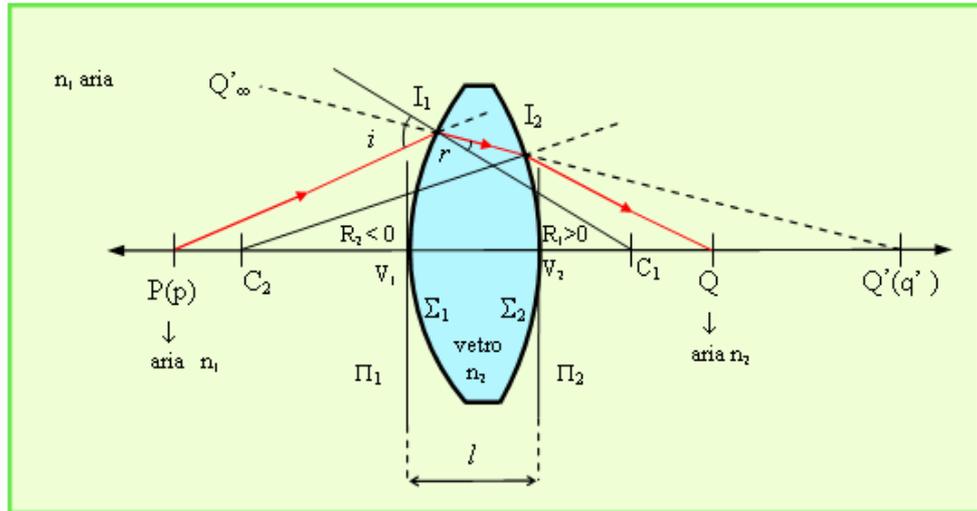


Figura 4-8

Indichiamo rispettivamente con n_1 , n_2 , n_1 i loro indici di rifrazione assoluti.

Supponiamo che la lente sia biconvessa, cioè che le sue facce siano due calotte sferiche Σ_1 , Σ_2 , convesse verso l'esterno (vedi fig. 4-8).

Siano rispettivamente R_1 e R_2 i raggi delle due calotte e C_1 e C_2 i loro centri, detti centri di curvatura della lente. Ricordiamo che si dice asse ottico principale la retta su cui giacciono i due centri. Esso interseca le calotte rispettivamente nei punti V_1 e V_2 , detti vertici delle calotte.

Consideriamo due sistemi di riferimento V_1py e V_1qy , aventi come origine comune il vertice V_1 della calotta Σ_1 , come asse y la perpendicolare all'asse ottico nel punto V_1 e gli assi delle ascisse sovrapposti all'asse ottico: l'asse p è orientato verso sinistra (spazio-oggetti), mentre l'asse q è orientato verso destra (spazio-immagini).

Sia $P(p)$ una sorgente reale monocromatica posta sull'asse ottico a sinistra della lente (spazio-oggetti). Da essa parte un raggio luminoso r che passa per i vertici delle due calotte senza subire alcuna deviazione. Un altro raggio luminoso PI_1 , poco inclinato sull'asse ottico, cade sulla superficie Σ_1 del primo diottrio nel punto I_1 , si rifrange nella lente secondo I_1I_2 , giunge sulla superficie Σ_2 nel punto I_2 e, passando nell'aria, si rifrange nuovamente formando il raggio I_2Q .

Possiamo esprimere matematicamente la posizione dell'immagine fornita dalla lente esaminando separatamente le rifrazioni prodotte dai due diottri. Per il primo diottro riferiremo la posizione del punto oggetto e della sua immagine al piano π_1 tangente alla superficie Σ_1 nel punto V_1 . Per il secondo diottro riferiremo queste posizioni al piano π_2 , tangente alla superficie Σ_2 nel punto V_2 .

1^a Rifrazione.

Il raggio luminoso PI_1 si rifrange sulla calotta Σ_1 del primo diottro e prosegue nel mezzo di indice n_2 secondo il raggio I_1Q' (fig. 4-8). Come già sappiamo, il diottro trasforma il fascio di raggi omocentrico e parassiali di centro P in un fascio di raggi rifratti convergenti nel punto Q' . Indicando rispettivamente con p e q' le distanze dei punti P e Q' dal vertice V_1 , per la formula dei punti coniugati si ha:

$$(1) \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

con $p > 0$, $q' > 0$, $R_1 > 0$ (cfr. fig. 4-7).

2^a Rifrazione.

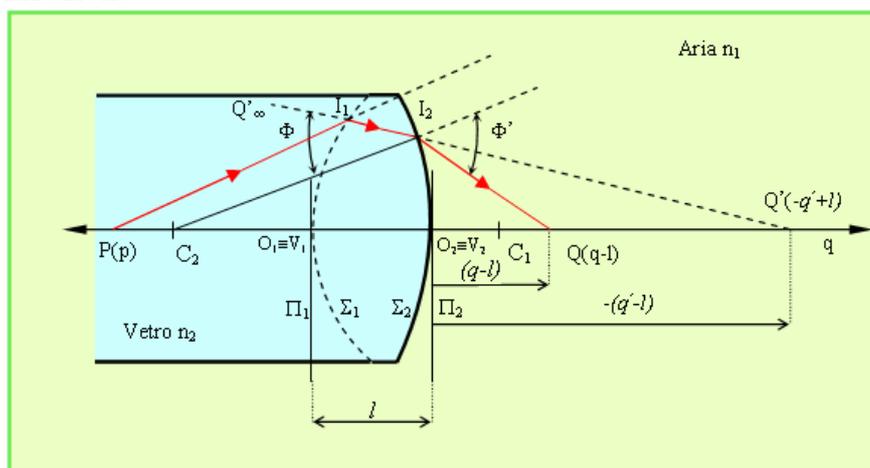


Figura 4-9

Il raggio I_1Q' attraversa la lente, incontra nel punto I_2 la calotta Σ_2 del secondo diottro (che si estende alla sinistra della figura) e si rifrange nell'aria secondo il raggio I_2Q (fig. 4-9). Rispetto al secondo diottro il punto

Q' può considerarsi una sorgente virtuale, posta alla distanza $|q' - \ell|$ dal vertice V_2 , avendo indicato con ℓ lo spessore $\overline{V_1V_2}$ della lente. Poiché la sorgente virtuale Q' giace nello spazio dove si forma la sua immagine, per una convenzione fatta sui diottri, alla distanza $q' - \ell$ dobbiamo attribuire il segno - ; quindi:

$$-(q' - \ell) < 0 .$$

Se vogliamo dare un'altra spiegazione, possiamo pensare che il raggio I_1I_2 che si è formato nella lente provenga da una sorgente Q'_∞ posta a distanza infinita nel diottro delimitato dalla calotta sferica Σ_2 . Ne segue che al raggio luminoso $Q'_\infty I_2$, e al suo prolungamento virtuale I_2Q' , dobbiamo attribuire l'indice di rifrazione n_2 del vetro. Inoltre, poiché il raggio luminoso $Q'_\infty I_2$ cade sulla concavità della calotta sferica Σ_2 , il raggio R_2 di detta calotta ha, per convenzione, valore $q - \ell$ negativo; quindi $R_2 < 0$.

Ora il secondo diottro dà un'immagine reale di Q' che si va a formare nel punto Q. Indichiamo con q (> 0) la distanza di tale punto dal vertice V_1 e quindi con $q - \ell$ la distanza dal vertice V_2 . Teniamo anche presente che al raggio I_2Q , che si propaga nell'aria rispetto al secondo diottro, spetta l'indice di rifrazione n_1 .

Fatta questa precisazione, teniamo anche presente che le distanze $-(q - \ell)$ e $q - \ell$ che abbiamo introdotte hanno come origine il vertice V_2 del secondo diottro. Applicando a questo la formula dei punti coniugati si ha:

$$-\frac{n_2}{q' - \ell} + \frac{n_1}{q - \ell} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad \text{con } R_2 < 0 .$$

Poiché per una lente sottile lo spessore ℓ è trascurabile possiamo scrivere:

$$(2) \quad -\frac{n_2}{q'} + \frac{n_1}{q} = -\frac{n_2 - n_1}{R_2} .$$

Sommando membro a membro le relazioni (1), (2) si ottiene la formula dei punti coniugati di una lente. Essa è:

$$(3) \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{q} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{con } R_1 > 0, \quad R_2 < 0 .$$

Se indichiamo con $n = \frac{n_2}{n_1}$ l'indice di rifrazione del vetro rispetto all'aria, possiamo anche scrivere:

$$(4) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{con } R_1 > 0, \quad R_2 < 0.$$

o se si vuole
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{|R_2|} \right).$$

Dalla (4) possiamo ricavare le due distanze focali della lente ponendo prima

$$p = f_1, \quad q = \infty \quad \text{e poi} \quad p = \infty, \quad q = f_2$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{f_1} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right); \quad \frac{1}{f_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Da queste relazione si ricava:

$$(5) \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

La (5) è detta **equazione dei fabbricanti di lenti**.

L'inverso della distanza focale, cioè $\frac{1}{f}$, si dice “**potere diottrico della lente**”; esso rappresenta in valore e segno la **convergenza** della lente. Le lenti divergenti hanno convergenza $\frac{1}{f}$ negativa.

Quando la distanza focale è espressa in metri si dice che il potere diottrico della lente è espresso in **Diottrie**.

Esempio, se $f = 0,5 \text{ m}$ si ha $\frac{1}{f} = \frac{1}{0,5} \text{ m}^{-1} = 2 \text{ diottrie}$.

Se la lente è biconvessa, come nel caso particolare che abbiamo considerato, ed ha facce uguali si ha :

$$R_1 > 0, \quad R_2 < 0, \quad |R_1| = |R_2| = R$$

Dalla (4) si ricava: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1)\frac{2}{R}$

Poiché $(n-1)\frac{2}{R}$ è l'inverso di $\frac{1}{f}$ della distanza focale si ha:

$$(6) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} .$$

La (6) è la formula dei punti coniugati di una lente convergente sottile.

N. 9 – Centro ottico di una lente.

Data una lente biconvessa di centri C_1 e C_2 , tracciamo dai centri della lente due raggi di curvatura paralleli $C_1I_1 = R_1$ e $C_2I_2 = R_2$ (fig. 4-10); in giacciano evidentemente da parti opposte rispetto all'asse ottico a .

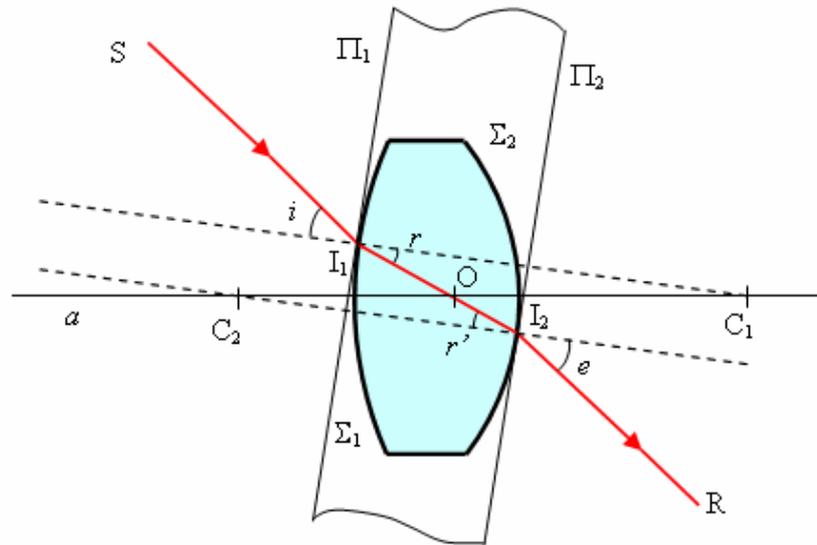


Figura 4-10

Il segmento che congiunge I_1 con I_2 interseca l'asse a in un punto O , detto centro ottico della lente. Dalla similitudine dei triangoli (C_1OI_1) e (C_2OI_2) si vede subito che si ha:

$$\frac{C_1O}{OC_2} = \frac{C_1I_1}{C_2I_2} \quad \text{ossia (1)} \quad C_1O : OC_2 = R_1 : R_2 .$$

Possiamo dire pertanto: il centro O della lente divide il segmento $\overline{C_1C_2}$ in parti direttamente proporzionali ai raggi di curvatura.

Per la regola del comporre, dalla (1) si ha:

$$(2) \quad C_1C_2 : C_1O = (R_1 + R_2) : R_1 .$$

E' facile allora mostrare che se consideriamo altri due raggi paralleli di curvatura C_1I_1' e C_2I_2' , il segmento $\overline{I_1'I_2'}$ passa ancora per il punto O dell'asse ottico. Infatti, supponiamo che esso passi per un punto $O' \neq O$. ripetendo le considerazioni svolte si avrà :

$$(3) \quad C_1 C_2 : C_1 O' = (R_1 + R_2) : R_1 .$$

Confrontando le (2), (3) si vede che:

$$C_1 O = C_1 O' \quad \text{ossia} \quad O' \equiv O .$$

Vediamo ora di quali proprietà gode questo punto.

Inviando alla lente un raggio luminoso SI_1 giacente sul piano individuato dall'asse ottico e dal punto I_1 ; la direzione del raggio sia tale ad esso corrisponda nella lente il raggio rifratto $I_1 I_2$ passante per il punto O . Siano rispettivamente i ed r gli angoli che i raggi SI_1 e $I_1 I_2$ formano con la normale $C_1 I_1$.

Il raggio $I_1 I_2$ incontra l'altra superficie della lente nel punto I_2 formando con la normale $C_2 I_2$ in tal punto un angolo $r' = r$ (angoli alterni interni); esso quindi emerge nella direzione $I_2 R$ formando un angolo e con la normale $C_2 I_2$.

Detto n_{12} l'indice di rifrazione relativo del vetro (o del mezzo con cui è fatta la lente) rispetto al primo mezzo si ha:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n_{12} \quad \frac{\text{sen } r'}{\text{sen } e} = \frac{1}{n_{12}} .$$

Ne segue:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} \cdot \frac{\text{sen } r'}{\text{sen } e} = 1 .$$

Poiché $r' = r$, come abbiamo già detto, si ha:

$$\text{sen } i = \text{sen } e \quad \text{ossia} \quad (4) \quad e = i .$$

La (4) ci dice che il raggio emergente $I_2 R$ è parallelo al raggio SI_2 che, incidendo sulla lente, si rifrange passando per il centro O della lente. Questo fatto si verifica ogni qual volta un raggio incide sulla lente in modo che il raggio rifratto nell'interno della lente passi per il centro O di questa. Possiamo concludere dicendo:

“il centro ottico di una lente è quel punto dell’asse ottico principale per il quale si verifica che tutti i raggi luminosi che vi passano attraversando la lente ne fuoriescono indeviati”.

Notare.

Rammentiamo che i raggi di curvatura C_1I_1 e C_2I_2 sono stati presi paralleli; C_1I_1 è normale alla superficie Σ_1 della lente, mentre C_2I_2 è normale all’altra superficie Σ_2 . Ne segue che i piani π_1 e π_2 , tangenti alle superfici Σ_1 e Σ_2 rispettivamente nei punti I_1 e I_2 , sono perpendicolari a rette parallele e quindi anche essi sono paralleli fra loro.

Ne segue che rispetto al raggio SI_1 la lente si comporta come una lastra di vetro avente come facce i piani paralleli π_1 , π_2 e quindi il raggio SI_1 si riflette attraverso la lente come farebbe attraverso una lastra di vetro disposta come abbiamo detto.

N. 10 –Costruzione di Dowell del raggio rifratto da un diottro.

Consideriamo un diottro sferico convergente di centro C , raggio R e vertice V (fig. 4-11). Siano rispettivamente n_1 e n_2 gli indici di rifrazione assoluti del mezzo meno rifrangente e del mezzo più rifrangente.

Un raggio luminoso PI parte da un punto dell’asse ottico e cade sulla superficie convessa del diottro passando dal primo al secondo mezzo. Vogliamo trovare la direzione del raggio rifratto IQ .

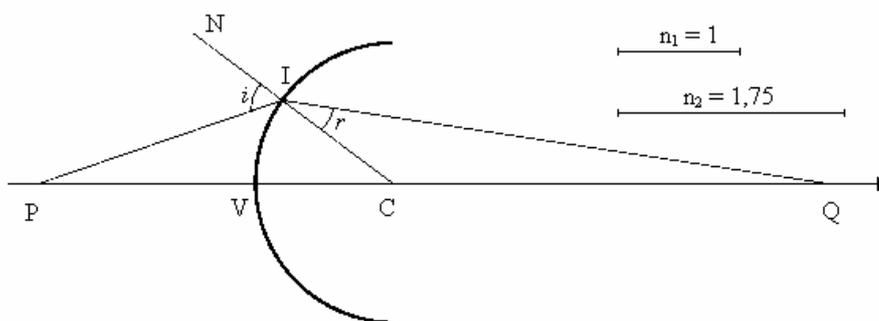


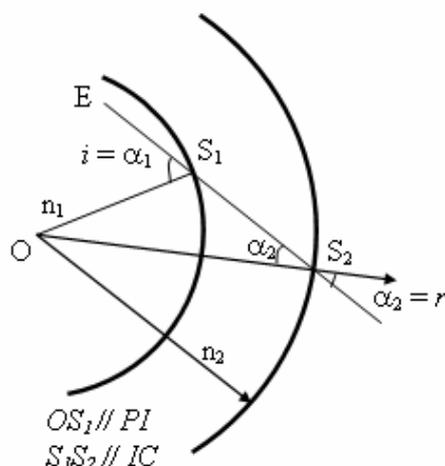
Figura 4-11

Supponiamo che il primo mezzo sia il vuoto, o approssimativamente l’aria e il secondo mezzo sia un vetro flint pesante; quindi $n_1 = 1$ ed $n_2 = 1,75$. Consideriamo ora due segmenti a e b di lunghezze uguali ai valori di n_1 ed n_2 . Tracciamo due archi circolari di centro O e raggi a e b , e sia OS_1 un raggio del primo arco parallelo al raggio luminoso PI .

Se dal punto S_1 si conduce una retta parallela al raggio CI del diottro si interseca il secondo arco circolare nel punto S_2 (fig. 4-12). Ne segue che gli angoli $\widehat{OS_1S_2}$ e $\widehat{P\hat{I}C}$ hanno i lati paralleli a due a due per costruzione possiamo quindi scrivere:

$$\widehat{OS_1S_2} = \widehat{P\hat{I}C} = 180^\circ - i \quad \text{e} \quad \widehat{OS_1E} = \widehat{P\hat{I}N} = i \quad .$$

Vogliamo dimostrare la seguente tesi: il segmento orientato $\overrightarrow{OS_2}$ dà la direzione ed il verso del raggio IQ , rifratto dal diottro.



Infatti consideriamo il triangolo OS_1S_2 e siano α_1 e α_2 gli angoli indicati in figura. Applicando il teorema dei seni al triangolo considerato si ha:

$$\frac{\overline{OS_2}}{\text{sen}(180^\circ - \alpha_1)} = \frac{\overline{OS_1}}{\text{sen } \alpha_2} \quad \rightarrow$$

$$(1) \quad \frac{\overline{OS_2}}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{\overline{OS_1}}{\text{sen } \alpha_2} \quad .$$

Figura 4-12

Ma α_1 è uguale all'angolo di incidenza i con il quale il raggio PI cade sul diottro; come abbiamo già indicato. Tenendo presente che per costruzione $\overline{OS_1} = n_1$, $\overline{OS_2} = n_2$, dalla (1) si ha:

$$\frac{n_2}{\text{sen } i} = \frac{n_1}{\text{sen } \alpha_2} \quad \rightarrow \quad (2) \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad .$$

La (2) ci dice che α_2 è uguale all'angolo di rifrazione r che il raggio rifratto IQ forma con la normale IC alla superficie del diottro.

Ne segue che $\overrightarrow{OS_2}$ dà la direzione e il verso del raggio IQ rifratto dal diottro.

c.v.d.

N. 11 –Specchi piani di Fresnel: teoria ondulatoria della luce e lunghezza d'onda di una radiazione.

Vogliamo illustrare un esperimento che non si può spiegare con le leggi dell'ottica geometrica; si tratta dell'esperienza degli specchi di Fresnel. Essa ci permette di dare una prova della teoria ondulatoria della luce, enunciata per la prima volta da Huyghens, facendo interferire le onde luminose emesse da due sorgenti coerenti, senza mettere in gioco fenomeni di diffrazione, come accade nell'esperienza di Young.

Secondo il ragionamento di Fresnel, se la luce ha una natura ondulatoria, due treni di onde luminose coerenti debbono dare un segnale rinforzato nei punti di uno schermo piano in cui le onde giungono in concordanza di fase (interferenza costruttiva), dovranno invece dare un segnale indebolito o nullo nei punti in cui esse giungono in opposizione di fase (interferenza distruttiva). In altre parole, le proprietà di due onde luminose coerenti debbono essere analoghe a quelle di due onde meccaniche, anch'esse coerenti, che si propagano in una corda, in un tubo di Quincke o in un endoscopio.

Ma ora si presenta una difficoltà: infatti è facile studiare fenomeni di interferenza fra onde due acustiche o meccaniche, perché è facile costruire due diapason che vibrano con la stessa frequenza. È invece difficile studiare fenomeni di interferenza fra due onde luminose (ammesso che la luce abbia natura ondulatoria) perché è difficile, se non impossibile, costruire due sorgenti luminose coerenti, cioè che abbiano la stessa frequenza. La difficoltà può essere aggirata se si fa in modo di avere due immagini virtuali di una sorgente luminosa, come fece Fresnel con il suo interferometro a specchi.

Una sorgente di luce S , monocromatica e puntiforme, e posta dinanzi a due specchi piani a e b formanti un angolo molto vicino a 180° . Poiché ogni specchio ci dà una immagine virtuale di S avremo due sorgenti virtuali S_1 e S_2 coerenti fra loro, stabili e perfettamente in accordo di fase, generate rispettivamente dai due specchi a e b .

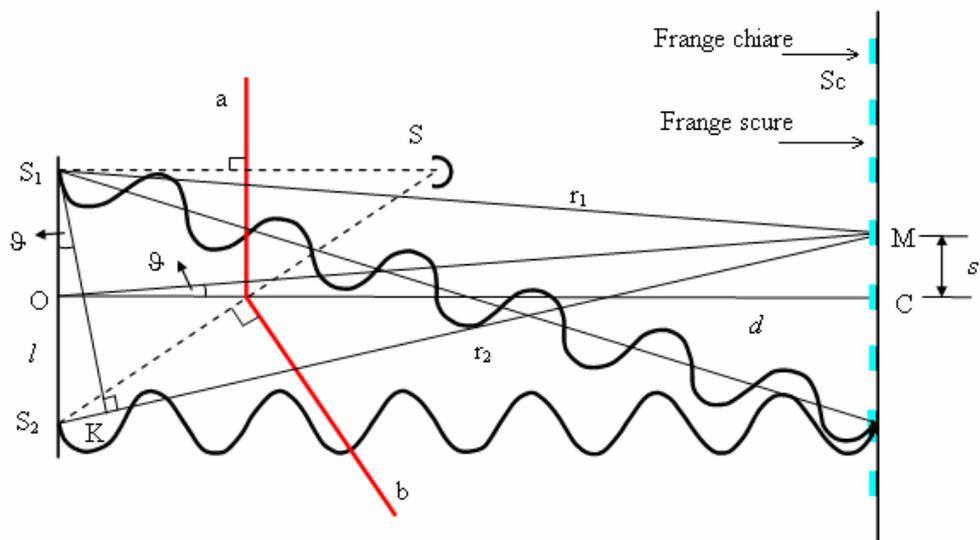


Figura 4-13

Copriamo la sorgente S con uno schermo circolare in modo che la sua luce non arrivi sullo schermo piani Sc . gli specchi a e b riflettono la luce della sorgente S e quindi sullo schermo Sc arriva la luce emessa dalle due sorgenti coerenti S_1 e S_2 .

Praticamente lo schermo Sc anziché essere illuminato da una sorgente reale S è illuminato da due sorgenti virtuali S_1 ed S_2 , da cui partono due treni di onde perfettamente coerenti, in accordi di fase e aventi la stessa ampiezza.

L'esperienza, ora, ci dice che sullo schermo Sc non abbiamo una illuminazione uniforme, ma abbiamo delle frange chiare e oscure che si alternano fra di loro, dette frange di interferenza. Per rendere più visibili queste frange è opportuno usare una sorgente di luce S di larghezza puntiforme, ma un po' lunga. In tal caso essa deve essere disposta parallelamente alla linea di separazione dei due specchi a e b dell'interferometro.

Tutto ciò non si può spiegare con la teoria della propagazione rettilinea della luce dovuta a Newton (teoria corpuscolare dell'emissione).

Il fenomeno si può spiegare, invece, se pensiamo che la luce abbia una natura ondulatoria; tuttavia l'esperienza ancora non ci permette di decidere se le vibrazioni luminose siano di natura trasversale o longitudinale. Solo i fenomeni di polarizzazione della luce permetteranno di concludere che essa

è costituita da onde trasversali, analoghe a quelle che si propagano in una corda. Secondo questa interpretazione, le onde luminose si propagano vibrando perpendicolarmente alla direzione di propagazione. Pertanto, tornando all'esperienza di Fresnel, si hanno frange chiare nelle zone in cui le due onde giungono in fase, cioè nelle zone tali che la differenza di cammino percorso dalle due onde è uguale a un numero pari di mezze lunghezze d'onda. Si hanno frange oscure nelle zone tali che la differenza di cammino percorso dalle due onde è un numero dispari di mezze lunghezze d'onda.

Questa esperienza è importante perché fornisce una ulteriore prova a favore della teoria ondulatoria della propagazione della luce, per mezzo della quale possiamo spiegare fenomeni ottici che non si possono spiegare con la teoria corpuscolare.

L'esperienza degli specchi di Fresnel è importante anche perché ci permette di ricavare la lunghezza d'onda di una radiazione luminosa.

Infatti torniamo alla figura.

Indichiamo con $s = \overline{CM}$ la distanza fra le prime due frange, a partire dalla frangia centrale C . Detto O il punto medio del segmento $S_1 S_2$, indichiamo con d la distanza delle due sorgenti virtuali $S_1 S_2$ dallo schermo Sc , quindi $\overline{CO} = d$.

Poniamo inoltre:

$$\overline{S_1 S_2} = \ell ; \quad \widehat{COM} = \vartheta ; \quad \overline{S_1 M} = r_1 ; \quad \overline{S_2 M} = r_2$$

e sia K la proiezione ortogonale del punto S_1 sul segmento $\overline{S_2 M}$.

Poiché la distanza l fra le due sorgenti è estremamente piccola rispetto ai due raggi r_1 e r_2 , possiamo ritenere con ottima approssimazione che la retta $S_1 K$, perpendicolare ad $S_2 M$, sia anche perpendicolare alla retta OM . Segue che i due angoli \widehat{COM} e $\widehat{S_2 S_1 K}$ sono uguali perché hanno i lati perpendicolari a due a due; e pertanto possiamo dire $\widehat{COM} = \widehat{S_2 S_1 K} \approx \vartheta$.

Con la stessa approssimazione si ha inoltre $\overline{S_2 K} \approx r_2 - r_1$.

Se ora osserviamo la figura, che per noti teoremi di trigonometria si ha:

$$\overline{S_2 K} = r_2 - r_1 = \ell \operatorname{sen} \vartheta \quad \text{e} \quad s = d \cdot \operatorname{sen} \vartheta .$$

Poiché l'angolo ϑ è molto piccolo ed è misurato in radianti possiamo dire:

$$\text{sen}\vartheta \approx \text{tg}\vartheta \approx \vartheta .$$

Ne segue:

$$(1) \quad \overline{S_2K} = \ell\vartheta \qquad (2) \quad s = d\vartheta .$$

Dalla (1) si ricava $\overline{S_2K}/\ell$ e sostituendo nella (2) si ottiene:

$$(2) \quad s = \frac{d}{\ell} \cdot \overline{S_2K} .$$

Ma $\overline{S_2K}$ è la differenza di cammino percorso dai due raggi luminosi S_1M e S_2M . Questa differenza di cammino $\overline{S_2K}$ sarà uguale ad un numero pari o dispari di mezze lunghezze d'onda a seconda che la frangia corrispondente sia chiara oppure oscura.

Nel primo caso si avrà:

$$(3) \quad s = \frac{d}{\ell} \cdot 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad s = k \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \lambda .$$

Per la prima frangia M si ha $k = 1$ e quindi si ricava:

$$\lambda = \frac{s \cdot \ell}{d} .$$

Questa formula ci dà la lunghezza d'onda della luce monocromatica emessa dalla sorgente. Ripetendo l'esperienza con luci di diverso colore, possiamo ottenere le lunghezze d'onda delle radiazioni luminose dal rosso al violetto.

Abbiamo visto che sullo schermo S_c la distanza della k .esima frangia luminosa dalla frangia centrale C è data dalla formula:

$$s = k \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \lambda .$$

Quindi le distanze delle varie frange, a partire dalla prima di esse, sono:

$$s_1 = \frac{d}{\ell} \cdot \lambda \quad s_2 = 2 \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \lambda \quad s_3 = 3 \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \lambda \quad s_4 = 4 \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \lambda ,$$

mentre la distanza fra due frange luminose consecutive è:

$$\Delta s = \frac{d}{\ell} \cdot \lambda .$$

Questa distanza, come si nota, è proporzionale alla lunghezza d'onda λ della luce. Poiché λ è molto piccola, per osservare agevolmente le frange è necessario:

- 1) aumentare d , cioè porre lo schermo S_c a grande distanza dalle sorgenti virtuali S_1 e S_2 ($d \approx 2$ m);
- 2) diminuire ℓ , cioè avere due sorgenti virtuali molto vicine fra di loro, precisamente $\ell \approx 2$ mm; per avere ciò bisogna che l'angolo compreso fra i due specchi sia anche esso molto piccolo (vedi Bruno Rossi, *Ottica* pag. 130; Casa Ed. Masson, Milano).

I vari esperimenti con l'interferometro di Fresnel mostrano che la larghezza delle frange di interferenza dipende dal colore della luce; per esempio le frange che si osservano con la luce rossa sono larghe circa il doppio di quelle prodotte con la luce blu.

La lunghezza d'onda λ delle radiazioni visibili decresce gradualmente dal rosso al violetto ed è compresa nel seguente intervallo:

$$0,38 \mu\text{m} < \lambda < 0,76 \mu\text{m} , \quad \text{cioè} \quad 0,38 \cdot 10^{-6} \text{ m} < \lambda < 0,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{e quindi} \quad 3800 \cdot 10^{-10} \text{ m} < \lambda < 7600 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{infine} \quad 3600 \text{ \AA} < \lambda < 7600 \text{ \AA} .$$

E' opportuno ricordare i seguenti dati:

- lunghezza d'onda della luce rossa $\lambda = 7600 \text{ \AA}$,
- lunghezza d'onda della luce violetta $\lambda = 3800 \text{ \AA}$.

Si ricordano anche le seguenti unità di misura delle lunghezze:

- $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-10} \text{ m}$
- $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$
- unità X = 10^{-13} m
- $1 \text{ nm (nanometro)} = 10^{-9} \text{ m}$.

Dalla relazione $\lambda = cT$, nota la lunghezza d'onda, possiamo ricavare il periodo T delle onde luminose. Ricordando il valore della velocità della luce nel vuoto, $c = 299.793 \text{ Km/s}$, si ha:

$$\text{luce rossa; } T = \frac{\lambda}{c} = \frac{0,76 \cdot 10^{-6}}{299.793 \cdot 10^{-3}} = 2,53 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-9} = 2,53 \cdot 10^{-15} \text{ sec} .$$

In modo analogo per la luce violetta si trova il periodo $T = 1,27 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$.

Se indichiamo le radiazioni luminose con la loro frequenza $\nu = \frac{1}{T}$ si ha:

$$\begin{array}{ll} \text{per la luce rossa} & \nu = 3,95 \cdot 10^{16} \text{ Hz} , \\ \text{per la luce violetta} & \nu = 7,87 \cdot 10^{16} \text{ Hz} . \end{array}$$

Ricordiamo che la lunghezza d'onda di una radiazione luminosa o elettromagnetica dipende dal mezzo in cui essa si propaga; la frequenza, invece, rimane costante.

N. 12 –Approfondimenti sull’esperienza degli specchi di Fresnel.

Le onde luminose coerenti sono soggette a fenomeni di interferenza da cui dipende l’intensità di vibrazione dell’onda risultante e la distribuzione spaziale delle frange di interferenza. Lo studio di questi fenomeni ci permette quindi di approfondire la formazione delle frange di interferenza prodotte dagli specchi di Fresnel.

I fenomeni di interferenza delle onde luminose coerenti saranno studiati in un secondo momento e vedremo che essi sono analoghi ai fenomeni di interferenza delle onde meccaniche che abbiamo già studiato (N° 10 e 11, Cap. 2° parte 1^). Questa analogia ci permette di approfondire fin da ora la formazione delle frange prodotte dagli specchi di Fresnel, senza dover rinviare la questione ad un momento più opportuno.

Esaminiamo l’esperienza.

Ricordiamo che i due specchi a e b forniscono due immagini virtuali S_1 ed S_2 di una stessa sorgente luminosa puntiforme S e quindi esse rappresentano due sorgenti di onde luminose coerenti e aventi la stessa ampiezza. Possiamo anche pensare che le onde che giungono sullo schermo S_c dell’apparato di Fresnel siano onde piane, dato che lo schermo è molto distante dalle sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 . Infine le onde, pur avendo direzioni di propagazione diverse, in ogni istante hanno vettori elettrici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 paralleli, e quindi questi hanno lo stesso piano di polarizzazione, anche se esso è continuamente variabile per il meccanismo di emissione della luce.

Conclusione: sullo schermo S_c dell’apparato di Fresnel giungono onde luminose linearmente polarizzate, avente lo stesso piano di polarizzazione e praticamente la stessa direzione di propagazione e con i vettori elettrici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 sempre paralleli.

Fra di essa, però, si ha una differenza di fase $\varphi_2 - \varphi_1$ che varia da punto a punto e che dipende esclusivamente dalla differenza di cammino percorso. Queste due onde interferiscono nel modo che conosciamo (parag. N. 5) e l’intensità di radiazione dell’onda risultante, come è noto, è data dalla formula:

$$I = 2I_1 + 2I_1 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

L'intensità di radiazione è $4I_1$ nei punti dello schermo per i quali la differenza di cammino percorso dalle due onde è uguale ad un numero pari di mezze lunghezze d'onda, cioè:

$$d = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) .$$

L'intensità è nulla nei punti dello schermo per i quali la differenza di cammino percorso dalle due onde è:

$$d = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) .$$

N. 13 – Condizioni per l'interferenza di due treni d'onda emessi da due sorgenti luminose.

Vogliamo fare una riflessione per quanto riguarda le condizioni che rendono possibile l'interferenza delle onde luminose emesse dai vari punti di due sorgenti estese S_1 e S_2 e per quanto riguarda l'intensità di illuminazione dell'onda generata da due onde elementari.

A tale proposito ci sembra cosa utile riferire quanto si legge nelle pagg. 383 – 384 del testo di OTTICA di Enrico Persico, edito dalla Casa Editrice Zanichelli.

Sappiamo che l'intensità di illuminazione di una radiazione luminosa è proporzionale al quadrato dell'ampiezza delle sue onde cosicché, se l'ampiezza raddoppia, l'intensità diventa quattro volte maggiore.

Si potrebbe allora pensare che due sorgenti uguali di luce, per esempio due lampade, poste una vicina all'altra, dovrebbero dare una intensità luminosa quattro volte maggiore di quella data da una sola, ma nella realtà questa intensità è soltanto due volte maggiore di quella fornita da una di esse.

Il fatto si spiega se teniamo presente che le ampiezze di due oscillazioni si sommano solo se le oscillazioni sono in concordanza di fase, mentre si sottraggono se sono in opposizione di fase.

Ora, una sorgente estesa, per es. il filamento di una lampada elettrica, è costituita da innumerevoli sorgenti atomiche (dette oscillatori), indipendenti fra di loro e quindi aventi tutte le possibili fasi. Per tale motivo la luce che

arriva dalla sorgente estesa in un punto P di uno schermo S_c è la risultante di un gran numero di oscillazioni, diciamo N, aventi fasi diverse fra di loro. Se queste oscillazioni luminose avessero tutte la stessa fase, la stessa ampiezza E_0 e lo stesso piano di polarizzazione, l'ampiezza d'onda risultante sarebbe $N E_0$ e l'intensità di illuminazione sarebbe proporzionale a $N^2 E_0^2$. Se invece ci fossero N/2 onde di una data pulsazione ω e di una certa fase φ ed N/2 onde della stessa pulsazione ma di fase opposta, l'intensità della radiazione luminosa sarebbe nulla. Si capisce, però, che non si realizzerà mai né l'uno né l'altro di questi due casi estremi ed il risultato sarà qualcosa di intermedio. Il calcolo della probabilità dimostra che quando le fasi sono distribuite a caso, l'ampiezza della radiazione risulta $\sqrt{N} E_0$ e quindi l'intensità della radiazione luminosa è proporzionale a $N E_0^2$.

Si capisce così che se prendiamo due sorgenti luminose distinte e interdipendenti fra loro, il numero di oscillazioni incoerenti che arrivano in un punto raddoppia e ciò fa raddoppiare anche l'intensità di illuminazione.

Supponiamo ora che le due sorgenti S_1 ed S_2 siano le immagini di una terza sorgente S, come accade nell'interferometro di Fresnel.

In tal caso ognuno degli N oscillatori che costituiscono la sorgente S_1 è costantemente in fase con un oscillatore dell'altra sorgente S_2 .

Ne segue che le 2N oscillazioni elementari che arrivano in un punto P possono raggrupparsi a due a due; si ottengono così N coppie di oscillatori coerenti. Le onde di una coppia di oscillatori presentano nel punto P una differenza di fase $\Delta\varphi$, la quale dipende ovviamente dal cammino percorso dalle due radiazioni.

Se questa differenza di fase $\Delta\varphi$ è pari ad un multiplo intero di 2π rad, le ampiezze delle oscillazioni emesse dalle due sorgenti di una coppia si sommano perché le due oscillazioni hanno lo stesso piano di polarizzazione. Le due oscillazioni danno così luogo ad una oscillazione di ampiezza $2E_0$, la quale ha una intensità di illuminazione proporzionale a $4E_0^2$.

Consideriamo ora una coppia di oscillatori coerenti e indichiamo con ℓ_1 ed ℓ_2 i cammini percorsi dalle onde che essi emettono per giungere nel punto P. Allora la differenza di fase con cui giungono in tale punto le onde emesse dalla prima coppia di oscillatori è

$$\Delta_1 = \omega_1 t - \frac{\ell_1}{C} + \phi - \left(\omega_1 t - \frac{\ell_2}{C} + \phi \right) = \frac{\ell_2 - \ell_1}{C} ;$$

a tale proposito si vedano le equazioni (1) del N. 11 Cap. II°.

Se prendiamo un'altra coppia di oscillatori elementari coerenti, possiamo dire che le distanze che questi hanno dal punto P sono, con buona approssimazione, $\ell_1 + h$ ed $\ell_2 + h$.

La differenza di cammino ottico percorso dalle onde, emesse dai due oscillatori armonici elementari, per giungere nel punto P sarà quindi :

$$\Delta_2 = \omega_2 t - \frac{\ell_1 + h}{C} + \phi - \left(\omega_2 t - \frac{\ell_2 + h}{C} + \phi \right) = \frac{\ell_2 + h}{C} - \frac{\ell_1 + h}{C} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{C} ;$$

come è evidente, abbiamo indicato con ω_2 la pulsazione comune alle due onde emesse dalla seconda coppia di oscillatori.

Come si vede, risulta $\Delta_1 = \Delta_2$. Il fatto è generale; ciò vuol dire che: "Le onde emesse da una qualsiasi coppia di oscillatori coerenti giungono in un punto P dello schermo con una differenza di fase che è sempre la stessa, qualunque sia la coppia di oscillatori considerata. Naturalmente, quando varia la posizione del punto P, varia anche la differenza di fase".

Se questa differenza di fase è $2k\pi$ rad, la differenza di cammino ottico percorso dai due treni d'onda emessi da una coppia di oscillatori è uguale ad un numero pari di mezze lunghezze d'onda $\left[\Delta\phi = 2k \frac{\lambda}{2} \right]$ e nel punto P si ha una frangia chiara. In tal caso l'intensità di illuminazione della frangia è pari a 4 volte quella dovuta ad una singola sorgente elementare.

Se invece la differenza di fase è $(2k+1)\pi$ rad, la differenza di cammino ottico percorso dai due treni d'onda emessi da una coppia di oscillatori è uguale ad un numero dispari di mezze lunghezze d'onda $\left[\Delta\phi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \right]$ e nel punto P si ha una frangia oscura e l'intensità di illuminazione è nulla. In tal caso, infatti, le onde emesse da ciascuna coppia di oscillatori interferiscono in modo distruttivo.

Dobbiamo notare anche che il principio di conservazione dell'energia non è contraddetto dai fenomeni di interferenza: infatti l'energia che manca nelle frange oscure si ritrova tutta nelle frange luminose.

APPENDICI

N. 1 - Pendolo semplice.

Si dice pendolo semplice un punto materiale pesante P sospeso ad un punto fisso O per mezzo di un filo flessibile, inestensibile e di massa trascurabile (fig. 5-1). Praticamente un pendolo semplice si ottiene collegando una sferetta di massa m ad un filo di cotone.

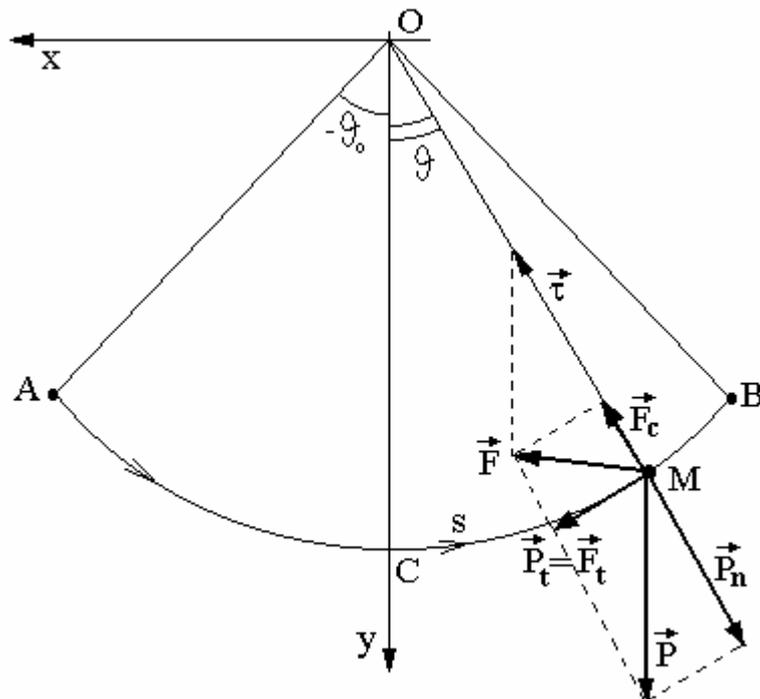


Figura 5-1

Se spostiamo la sferetta dalla sua posizione di riposo C ad un'altra posizione A e poi la lasciamo libera, essa comincia ad oscillare descrivendo un arco Γ di circonferenza di centro O : la sferetta raggiunge la posizione di equilibrio C con velocità crescente, poi rallenta, si ferma nel punto B posto alla stessa quota del punto A , torna indietro e il fenomeno si ripete.

- La lunghezza $\ell = \overline{OC}$ del filo si dice lunghezza del pendolo;
- l'angolo $\widehat{AOB} = 2\vartheta_0$ si dice angolo di oscillazione;
- l'arco \widehat{AB} si dice oscillazione semplice;
- $\widehat{AB} + \widehat{BA}$ si dice oscillazione completa.

- Infine si dice periodo del pendolo il tempo T che la sferetta impiega a compiere un'oscillazione completa.

La forza \vec{F} che agisce sulla massa m della sferetta è il risultante del peso $\vec{P} = m \vec{g}$ e della reazione vincolare $\vec{\tau}$ esercitata dal filo, quindi

$$(1) \quad \vec{F} = \vec{P} + \vec{\tau} .$$

Se indichiamo con \vec{a} l'accelerazione vettoriale della sferetta possiamo scrivere

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \text{ossia} \quad (2) \quad \vec{P} + \vec{\tau} = m \vec{a} .$$

Facendo la somma vettoriale delle forze \vec{P} e $\vec{\tau}$ con la regola del parallelogrammo si vede che la forza $\vec{F} = m \vec{a}$ è diretta verso l'interno della circonferenza, ma non verso il centro: e ciò è giusto perché il moto è circolare, ma non uniforme.

Dato un punto sull'arco di circonferenza, scomponiamo anche la forza \vec{F} nella direzione del filo e nella direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato. Otteniamo due nuovi componenti $\vec{F}_c = m \vec{a}_c$ e $\vec{F}_t = m \vec{a}_t$: il primo ci dà la forza centripeta del moto circolare, il secondo coincide con il componente tangenziale \vec{P}_t della forza peso e fa muovere di moto vario la massa m sulla traiettoria.

Proiezione normale .

Proiettiamo la relazione vettoriale (2) su un asse \vec{n} diretto come il filo e orientato verso il punto O (asse normale alla traiettoria del pendolo); considerando i componenti dei tre vettori sopra considerati si ottiene

$$(3) \quad \vec{P}_n + \vec{\tau} = m \vec{a}_c .$$

Prendendo ora le componenti secondo la normale \vec{n} , si ha in valore e segno:

$$-P_n + \tau = m \frac{v^2}{\ell} .$$

Poiché $P_n = m g \cos \vartheta$ si ottiene

$$(4) \quad \tau = m g \cos \vartheta + m \frac{v^2}{\ell} .$$

La (4) ci dice che:

“Ad ogni istante la tensione esercitata dal filo è uguale alla somma della componente normale del peso e della forza centripeta”.

Poiché a O^0 la funzione $\cos \alpha$ ha il valore massimo $\cos \alpha = 1$ e anche la velocità della sferetta assume il valore massimo, possiamo dire:

“Quando la sferetta, movendosi, passa per la posizione C , la tensione del filo ha il valore massimo

$$(5) \quad \tau = m g + m \frac{v_{\max}^2}{2}, \quad \text{ove} \quad v_{\max}^2 = 2g \cdot (y_C - y_A),$$

mentre quando essa è ferma in questo punto la tensione del filo è $\tau = m g$ ”.

Assumiamo ora il punto C , comune all'arco Γ e all'asse positivo y , come origine di un sistema di ascisse curvilinee s , misurate positivamente in senso antiorario. Sia poi ϑ l'anomalia di un generico punto P della circonferenza, contata a partire dall'asse y e misurata anch'essa positivamente in senso antiorario. Naturalmente, le due ascisse s e ϑ sono funzioni del tempo, quindi: $s = s(t)$ e $\vartheta = \vartheta(t)$.

Sia A la posizione iniziale del punto, ϑ_0 il valore iniziale dell'anomalia e supponiamo che il punto parta dalla quiete, cioè con velocità iniziale nulla. Vogliamo trovare l'equazione differenziale del moto.

A tale scopo applichiamo il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, detto impropriamente teorema delle forze vive. Per un corpo vincolato come la nostra sferetta, tale teorema assume la forma:

$$(6) \quad T - T_0 = L_{0,t}^{(a)} + L_{0,t}^{(v)}$$

ove $L_{0,t}^{(a)}$ è il lavoro delle forze attive, che nel caso del pendolo si riducono alla sola forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$;

$L_{0,t}^{(v)}$ è il lavoro della reazione vincolare $\vec{\tau}$ esercitata dal filo sulla sferetta; ma tale lavoro è nullo perché la reazione $\vec{\tau}$ è sempre perpendicolare allo spostamento del corpo oscillante;

T_0 è l'energia cinetica iniziale del corpo, ed è nulla perché esso parte dalla quiete.

Poiché $L_{o,t}^{(a)}$ è il lavoro della forza peso, esso è dato dal prodotto del modulo P del peso per la differenza di quota del punto oscillante; quindi

$$L_{o,t}^{(a)} = mg(y - y_o).$$

Sostituendo nella (6) si ha:

$$(7) \quad \frac{1}{2}mv^2 = mg(y - y_o),$$

da cui (7') $\frac{1}{2}mv^2 - mgy = -mgy_o = \text{cost}$

L'espressione $-mgy$ è l'energia potenziale U del campo gravitazionale; la (7') assume quindi la forma

$$T + U = \text{cost}.$$

Poiché nel sistema non si hanno forze dissipative, abbiamo ritrovato la formula che esprime il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

Tornando alla (7), dalla fig. 1 si vede che si ha:

$$y = \ell \cos \vartheta, \quad y_o = \ell \cos \vartheta_o \quad \text{con} \quad \vartheta \leq \vartheta_o,$$

e quindi la (7) assume la forma

$$(8) \quad v^2 = 2g\ell (\cos \vartheta - \cos \vartheta_o).$$

Sostituendo la (8) nella (4), la tensione esercitata dal filo sulla sferetta assume la forma

$$\tau = m g \cos \vartheta + 2m g (\cos \vartheta - \cos \vartheta_o),$$

da cui $\tau = 3m g \cos \vartheta - 2m g \cos \vartheta_o,$

quindi (9) $\tau = m g (3 \cos \vartheta - 2 \cos \vartheta_o).$

La (9) è importante perché esprime la reazione vincolare del filo (o tensione) in funzione della sola posizione occupata dalla sferetta.

L'equazione (8) ci permette anche di trovare l'equazione differenziale del moto del pendolo. Infatti, derivando l'ascissa curvilinea $s(t) = \ell \vartheta(t)$ rispetto al tempo si ha

$$\dot{s} = \ell \dot{\vartheta} \quad \text{e quindi} \quad (10) \quad v = |\dot{s}| = |\ell \dot{\vartheta}| .$$

Sostituendo nella (8) l'espressione di v data dalla (10), il teorema delle forze vive assume la forma

$$\ell^2 \dot{\vartheta}^2 = 2g \ell (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0),$$

ossia (11) $\ell \dot{\vartheta}^2 = 2g (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0), \quad \text{ove} \quad -|\vartheta_0| \leq \vartheta \leq |\vartheta_0| .$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$2\ell \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} = -2g \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

e quindi (12) $\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0 .$

Per determinare il moto del pendolo, limitiamoci a considerare il caso di piccole oscillazioni, nella quale ipotesi $\sin \vartheta$ è uguale, con buona approssimazione, alla misura in radianti dell'anomalia ϑ . Con ciò la (12) diviene

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \vartheta = 0 ; \quad \text{ponendo} \quad \frac{g}{\ell} = \omega^2$$

si ha (13) $\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0 .$

La (13) è l'equazione differenziale caratteristica dei moti armonici; il suo integrale generale, come è noto, è dato dalla formula

$$(14) \quad \vartheta(t) = A \cos(\omega t + \alpha) .$$

La (14) ci dice che **le piccole oscillazioni di un pendolo sono descritte da un moto armonico.**

Derivando la (14) si ha

$$\dot{\vartheta}(t) = -A \omega \sin(\omega t + \alpha) .$$

Possiamo determinare le costanti di integrazione A ed α in base alle condizioni iniziali del moto:

per $t=0$ si ha $\vartheta(0) = \vartheta_0$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0 .$

Queste condizioni ci permettono di scrivere il sistema

$$\begin{cases} A \cos \alpha = \mathcal{G}_0 \\ -A \omega \sin \alpha = 0 \end{cases} .$$

Esso ha la soluzione evidente $\alpha = 0$ e $A = \mathcal{G}_0$. Ne segue che il moto del pendolo semplice è un moto armonico di equazione

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0 \cos \omega t ;$$

e ricordando che $\omega^2 = g/\ell$ si ha

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0 \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

Il periodo T di questo moto armonico è $T = 2\pi/\omega$, ossia

$$(15) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} .$$

Siccome T non dipende dall'ampiezza \mathcal{G}_0 del moto armonico possiamo dire: “le piccole oscillazioni di un pendolo semplice hanno un periodo T che non dipende dalla loro ampiezza, ossia sono isocrone”.

Nella formula (14) non compare la massa del corpo oscillante; ne segue che le oscillazioni di un pendolo, qualunque sia la loro ampiezza, hanno un periodo che non dipende dalla massa del punto oscillante.

Ricordiamo anche che il piano di oscillazione non varia se ruotiamo il supporto al quale è attaccato il filo che sorregge la sferetta.

N. 2 - Ancora sul pendolo semplice.

Abbiamo trovato l'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice per mezzo del teorema del lavoro e dell'energia cinetica (o delle forze vive). Facciamo vedere che possiamo trovare questa equazione anche mediante il teorema del momento della quantità di moto.

A tale scopo completiamo il riferimento Oxy di fig.5-1 con un asse z , in modo da avere un riferimento cartesiano trirettangolo levogiro Oxyz (asse z rivolto verso l'osservatore) e prendiamo il polo T del momento polare coincidente con il punto O ; vedi la nuova fig 5-2.

Poiché il polo O è fisso si ha la formula

$$(1) \quad \vec{M}_O^{(f)} = \frac{d\vec{P}_O}{dt} .$$

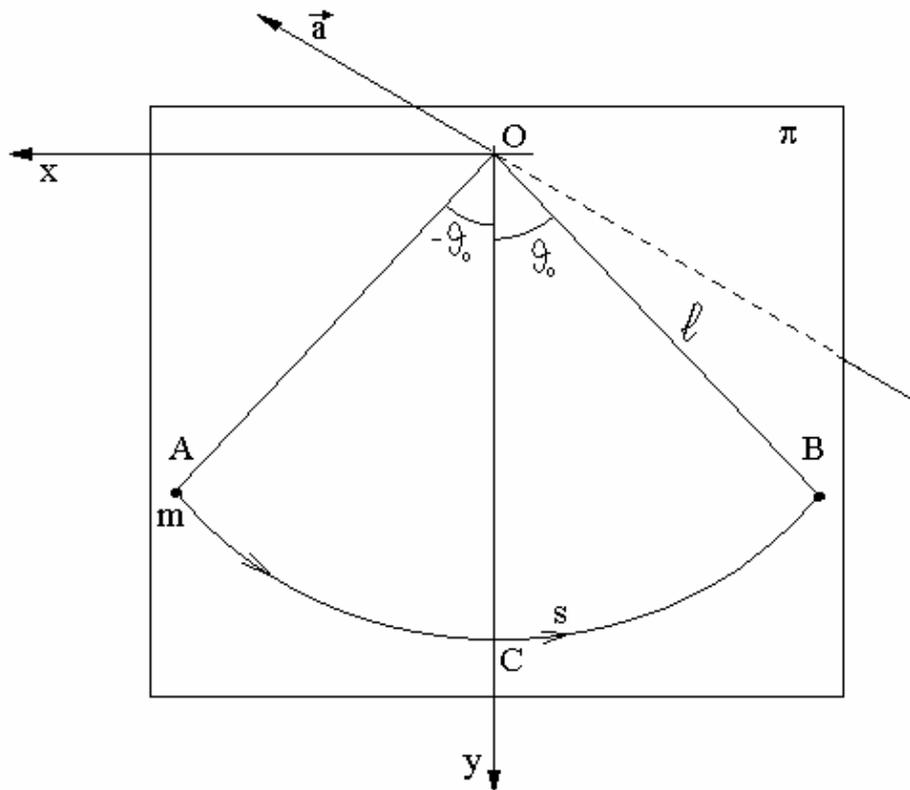


Figura 5-2

Ricordiamo l'enunciato del teorema nel caso di un sistema inerziale:
 "In un sistema inerziale, il derivato rispetto al tempo del momento della
 quantità di moto di un punto materiale rispetto ad un punto fisso O è uguale
 al momento della forza esterna totale \vec{f} agente su di esso, calcolato rispetto
 al medesimo punto O ".

Nota: le forze esterne che agiscono sulla sferetta sono la forza peso $\vec{P} = m \vec{g}$
 e la reazione vincolare $\vec{\tau}$ del filo; quindi per il momento delle forze esterne
 rispetto al polo O si ha l'espressione

$$\vec{M}_O^{(f)} = \vec{OP} \wedge (\vec{\tau} + m \vec{g})$$

Ma se supponiamo che gli attriti del vincolo siano trascurabili, la reazione
 vincolare $\vec{\tau}$ è perpendicolare all'asse z nel punto O . Ne segue

$$\vec{OP} // \vec{\tau} \quad \text{e} \quad \vec{OP} \wedge \vec{\tau} = 0,$$

quindi (2)
$$\vec{M}_O^{(f)} = \vec{OP} \wedge m \vec{g} .$$

Si ha inoltre (3)
$$\vec{P}_T = \vec{OP} \wedge m \vec{v} .$$

Grazie alle (2),(3), la (1) diventa

$$(4) \quad \vec{OP} \wedge m \vec{g} = \frac{d}{dt} (\vec{OP} \wedge m \vec{v}) .$$

Proiettando la (4) sull'asse z e passando alle componenti dei vettori si ha:

$$- \ell m g \sin \vartheta = \ell m \frac{dv}{dt} \quad \text{ove} \quad v = \ell \frac{d\vartheta}{dt} .$$

Ne segue
$$- \ell m g \sin \vartheta = \ell m \frac{d}{dt} \left(\ell \frac{d\vartheta}{dt} \right) ,$$

$$- g \sin \vartheta = \ell \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} ,$$

da cui (5)
$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0 .$$

Abbiamo così ottenuto per altra via la formula (12) del N.1 e lo studio di questa equazione differenziale procede come già abbiamo fatto.

Vogliamo dare la risoluzione di due notevoli equazioni differenziali, che si presentano spesso nello studio dei problemi di fisica.

N. 3 - Studio del moto libero senza attrito di un liquido in un tubo ad U.

Un tubo ad U contiene un liquido in quiete: fissiamo un riferimento cartesiano Ox avente l'origine in un punto O della superficie libera del liquido del ramo A e l'asse x orientato verso l'alto (fig.5-3).

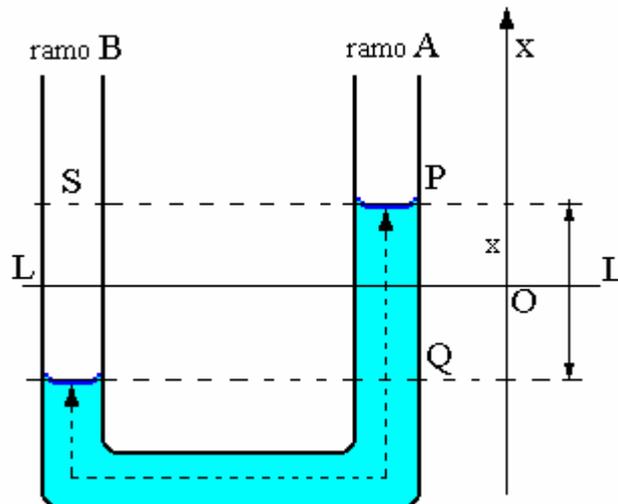


Figura 5-3

Sia S la sezione costante del tubo,
 ℓ la lunghezza del tubo occupato dal liquido,
 d la densità del liquido (non viscoso),
 m la massa del liquido ; quindi $m = \ell S \cdot d$.

Spingiamo il liquido nel ramo A in modo che esso si sollevi di un tratto x e poi lasciamolo libero. Allora il liquido comincia a oscillare sotto l'azione del peso della massa liquida contenuta in eccesso una volta nel ramo A e un'altra nel ramo B.

Sia poi PQ il tratto di tubo del ramo A in cui si svolge l'oscillazione e $2x\ell$ l'ampiezza dell'oscillazione.

Il tratto PQ del tubo ha il volume $v = S \cdot 2x$.

Il liquido contenuto in questo tratto ha

la massa $m = v \cdot d$ cioè $m = S2x \cdot d$,

e il peso $P = mg$ cioè $P = S2x \cdot d \cdot g$.

Quando il liquido si solleva di un tratto x nel ramo A, la forza peso tende a riportarlo nella posizione di equilibrio; la componente di questa forza lungo l'asse x ha il valore

$$-2xS \cdot dg :$$

il segno - sta ad indicare che la forza ha sempre verso opposto allo spostamento x .

Quando il liquido scende, nel ramo A, al disotto della superficie di equilibrio LL ($x < 0$), la forza che tende a farlo risalire in questo ramo è il peso di una uguale massa liquida che si trova nell'altro ramo del tubo al di sopra della superficie LL.

Come abbiamo detto, la massa del liquido che si muove lungo il tubo è

$$m = \ell S d .$$

Possiamo applicare al liquido la II legge della Dinamica come se si trattasse del moto di un punto materiale e si ha

$$(1) \quad \ell S d \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -2xS \cdot dg$$

da cui
$$\ell \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -2xg$$

e quindi (2)
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{g}{\ell} x = 0 .$$

Come si vede, l'equazione del moto è una equazione differenziale lineare e omogenea del 2° ordine. Vedremo che il liquido compie delle oscillazioni

isocrone di periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$; in altre parole il liquido si comporta come un pendolo di lunghezza $\ell/2$.

Scriviamo l'equazione caratteristica corrispondente all'equazione differenziale e troviamo le sue radici. Si ha

$$\alpha^2 + 2g/\ell = 0 ,$$

con le radici $\alpha_1 = +i\sqrt{\frac{2g}{\ell}}$, $\alpha_2 = -i\sqrt{\frac{2g}{\ell}}$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$(3) \quad x(t) = C_1 e^{i\alpha t} + C_2 e^{-i\alpha t} = (K_1 - iK_2) e^{i\alpha t} + (K_1 + iK_2) e^{-i\alpha t} ,$$

$$x(t) = (K_1 - iK_2)(\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t) + (K_1 + iK_2)(\cos \alpha t - i \operatorname{sen} \alpha t)$$

$$x(t) = K_1 \cos \alpha t + iK_1 \operatorname{sen} \alpha t - iK_2 \cos \alpha t + K_2 \operatorname{sen} \alpha t + \\ + K_1 \cos \alpha t - iK_1 \operatorname{sen} \alpha t + iK_2 \cos \alpha t + K_2 \operatorname{sen} \alpha t ,$$

da cui $x(t) = 2K_1 \cos \alpha t + 2K_2 \operatorname{sen} \alpha t$ ove $\alpha = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$,

ossia (4) $x(t) = H_1 \cos \alpha t + H_2 \operatorname{sen} \alpha t$.

Poniamo $\frac{H_2}{H_1} = \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}$, $\frac{H_2}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{H_1}{\cos \varphi} = A$;

da esse si ricava $H_1 = A \cos \varphi$, $H_2 = A \operatorname{sen} \varphi$.

Sostituendo nella (4) si ottiene:

$$x(t) = A \cos \alpha t \cdot \cos \varphi + A \operatorname{sen} \alpha t \cdot \operatorname{sen} \varphi ,$$

$$x(t) = A \cos(\alpha t - \varphi) ,$$

infine (5)
$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{\ell}}t - \varphi\right) .$$

Abbiamo così trovato che la (5) è l'integrale dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{g}{\ell}x = 0 ;$$

notiamo che A e φ sono due costanti arbitrarie, in particolare A ci dà l'ampiezza delle oscillazioni e, come si vede, non dipende dal tempo.

La (5) ci dice che il liquido compie delle oscillazioni isocrone il cui periodo T si ricava imponendo che sia

$$\cos(\alpha t - \varphi) = \cos[\alpha(t + T) - \varphi] ,$$

da cui (6)
$$\alpha t = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = 2\pi/\alpha ,$$

infine (7)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}} .$$

La (7) ci dice che il liquido si comporta come un pendolo semplice di lunghezza $\frac{\ell}{2}$.

Dalla (6) si ha $\frac{2\pi}{T} = \alpha$. Poiché $\frac{2\pi}{T} = \omega$, possiamo dire che per la pulsazione ω si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} ;$$

quindi ω è la pulsazione propria del moto oscillatorio del liquido in assenza di smorzamento.

Il moto oscillatorio privo di attrito di un punto materiale ha una equazione analoga alla (2) .Per esempio, l'equazione differenziale del moto del pendolo semplice è:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad \text{ove} \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Il moto oscillatorio di un punto materiale ha grande importanza teorica e pertanto, nel seguito, dovremo spesso prenderlo in considerazione.

N. 4 - Moto di un punto sottoposto ad una forza di tipo elastico

Vogliamo dare un altro esempio di moto oscillatorio libero (vedi fig.5-4).

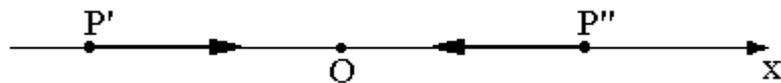


Figura 5-4

Sia P un punto materiale di massa m sottoposto ad una forza di tipo elastico, cioè ad una forza tale che la sua intensità sia proporzionale alla distanza di P dall'origine O di un riferimento cartesiano Ox e sia sempre contraria allo spostamento.

Se assumiamo la forza nella direzione dell'asse x , la sua componente su tale asse sarà

$$(1) \quad F = -kx;$$

– k è un coefficiente di proporzionalità avente segno negativo per indicare che la forza si oppone sempre allo spostamento.

Dalla (1) subito si ricava che l'equazione differenziale del moto è:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow (2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Posto $\frac{k}{m} = \omega^2$ la (2) diventa

$$(3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{o se si vuole,} \quad \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Abbiamo così un'equazione differenziale analoga a quella già vista nel N.1 ; abbiamo già visto che la (3) ha una soluzione del tipo

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) ,$$

ove A e φ sono costanti di integrazioni che dipendono dalle condizioni iniziali del moto.

N. 5 – Moto oscillatorio smorzato

Seguiamo lo studio del moto oscillatorio di un punto materiale e supponiamo che il moto sia smorzato, cioè presenti attrito. Possiamo immaginare che la forza resistente che rallenta il moto sia proporzionale alla velocità dx/dt del punto oscillante. Essa è

$$-r^2 \frac{dx}{dt} ,$$

ove $-r^2$ è il coefficiente della forza di attrito.

L'equazione differenziale del moto del punto è:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r^2}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 ,$$

ove ω è la pulsazione propria del moto oscillatorio in assenza di smorzamento.

Come si vede, la (1) è un'equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine.

Si informa che il moto oscillatorio smorzato di un pendolo o dell'equipaggio mobile di un galvanometro è espresso da una equazione analoga alla (1).

Per risolvere l'equazione differenziale (1), consideriamo l'equazione caratteristica ad essa relativa:

$$(2) \quad \alpha^2 + \frac{r^2}{m} \alpha + \omega^2 = 0 .$$

Le sue radici sono

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{r^2}{m} \pm \sqrt{\frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2} \right) , \quad \text{quindi}$$

$$(3) \quad \alpha_1 = -\frac{r^2}{2m} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2} \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{r^2}{2m} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2} \quad .$$

Le radici dell'equazione caratteristica (2) sono reali e distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate a seconda che il discriminante

$$\frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2$$

risulti rispettivamente positivo, nullo, negativo.

1° caso

Supponiamo che il discriminante dell'equazione caratteristica sia positivo, cioè

$$(4) \quad \Delta = \frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2 > 0 \quad ;$$

ciò si verifica per $\left(\frac{r^2}{m} + 2\omega\right) \cdot \left(\frac{r^2}{m} - 2\omega\right) > 0$, cioè per

$$\frac{r^2}{m} - 2\omega > 0 \quad , \quad \text{ossia per} \quad r^2 > 2m\omega \quad .$$

In tal caso, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

ove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie da determinarsi in base alle condizioni iniziali imposte al moto.

Ma se è discriminante $\Delta > 0$, cioè se è $r^2 > 2m\omega$, gli esponenti α_1 e α_2 della funzione esponenziale (5) sono entrambi negativi; pertanto la (5) rappresenta un moto aperiodico smorzato che tende a portare asintoticamente il punto mobile nella posizione di riposo.

2° caso

Il discriminante dell'equazione caratteristica è nullo, cioè

$$\frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2 = 0 \quad .$$

In tal caso le radici dell'equazione caratteristica coincidono e si ha

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{r^2}{2m} .$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$x(t) = h_1 e^{\alpha_1 t} + h_2 t \cdot e^{\alpha_2 t} ,$$

ossia $x(t) = e^{-\frac{r^2}{2m}t} (h_1 + h_2 t)$ $x(t) = e^{-\frac{r^2}{2m}t} (h_1 + h_2 t)$

Anche esso rappresenta un moto aperiodico smorzato che tende a riportare asintoticamente il punto mobile nella posizione di riposo.

3° caso

Supponiamo che il discriminante dell'equazione caratteristica (2) sia negativo, cioè

$$(6) \quad \Delta = \frac{r^4}{m^2} - 4\omega^2 < 0 ;$$

ciò si verifica per $\left(\frac{r^2}{m} + 2\omega\right)\left(\frac{r^2}{m} - 2\omega\right) < 0$, cioè per

$$\frac{r^2}{m} - 2\omega < 0 , \quad \text{ossia per} \quad r^2 < 2m\omega .$$

In tal caso l'equazione caratteristica avrà le radici complesse coniugate

$$\alpha = -\frac{r^2}{2m} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4\omega^2 - \frac{r^4}{m^2}} , \quad \text{cioè} \quad \alpha = -\frac{r^2}{2m} \pm i \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}} .$$

Scriviamo per semplicità $\alpha = \beta \pm i\gamma$;

l'integrale generale dell'equazione differenziale (1) sarà

$$(7) \quad x(t) = C_1 e^{(\beta+i\gamma)t} + C_2 e^{(\beta-i\gamma)t} .$$

Ponendo $C_1 = K_1 - iK_2$ e $C_2 = K_1 + iK_2$ si ha in successione:

$$x(t) = (K_1 - iK_2) e^{\beta t} (\cos \gamma t + i \operatorname{sen} \gamma t) +$$

$$+(K_1 + iK_2)e^{\beta t}(\cos \gamma t - i \sin \gamma t) ,$$

$$\frac{x(t)}{e^{\beta t}} = K_1 \cos \gamma t + iK_1 \sin \gamma t - iK_2 \cos \gamma t + K_2 \sin \gamma t + \\ + K_1 \cos \gamma t - iK_1 \sin \gamma t + iK_2 \cos \gamma t + iK_2 \sin \gamma t ,$$

$$x(t) = e^{\beta t}(2K_1 \cos \gamma t + 2K_2 \sin \gamma t)$$

infine (8) $x(t) = e^{\beta t}(H_1 \cos \gamma t + H_2 \sin \gamma t)$. Poniamo

$$\frac{H_1}{H_2} = \operatorname{tg} \varphi , \quad \text{da cui} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{cos} \varphi} , \quad \frac{H_1}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{H_2}{\operatorname{cos} \varphi} = A ;$$

si ricava $H_1 = A \operatorname{sen} \varphi$, $H_2 = A \operatorname{cos} \varphi$

Sostituendo nella (8) si ha :

$$x(t) = Ae^{\beta t}(\operatorname{sen} \gamma t \cdot \operatorname{cos} \varphi + \operatorname{cos} \gamma t \cdot \operatorname{sen} \varphi) ,$$

$$x(t) = Ae^{\beta t} \cdot \operatorname{sen}(\gamma t + \varphi) ,$$

ossia (9) $x(t) = Ae^{-\frac{r^2}{2m}t} \cdot \operatorname{sen} \left(\sqrt{\left(\omega^2 + \frac{r^4}{4m^2} \right)} t + \varphi \right)$.

La (9) è l'integrale generale dell'equazione differenziale (1) quando si ha

$$\frac{r^4}{4m^2} - \omega^2 < 0 , \quad \text{ossia} \quad r^2 < 2m\omega .$$

La (9) ci dice che in tal caso il moto del punto non è periodico; tuttavia il punto riesce a compiere oscillazioni la cui ampiezza va riducendosi nel tempo con legge esponenziale. In altre parole si ha un moto oscillatorio smorzato , detto anche moto armonico smorzato.

Conclusione: se $r^2 < 2m\omega$ si ha un attrito abbastanza piccolo da permettere al punto mobile di compiere oscillazioni, anche se queste vanno lentamente smorzandosi con il tempo.

La pulsazione del moto armonico smorzato è

$$(10) \quad \omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}}, \quad \text{da cui} \quad \omega_0 = \omega \sqrt{1 - \frac{r^4}{4m^2\omega^2}}.$$

Siccome $\frac{r^2}{2m\omega} < 1$ possiamo dire

“La pulsazione ω_0 del moto oscillatorio smorzato è minore della pulsazione ω che si avrebbe se lo smorzamento fosse trascurabile; ciò vuol dire che nell’unità di tempo il numero delle oscillazioni attorno al punto di equilibrio diminuisce”. Il periodo del moto oscillatorio smorzato è:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \frac{r^4}{4m^2\omega^2}}}.$$

Ne segue $T_0 > T$,

cioè: ” Nel moto oscillatorio smorzato il periodo T_0 è maggiore del periodo che il punto mobile avrebbe se oscillasse senza attrito”.

NOTA Ricordiamo che la formula della forza resistente del mezzo:

$$(11) \quad \vec{f} = -r^2 \vec{v}, \quad \text{ove} \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

La \vec{f} non è una forza conservativa: condizione necessaria (anche se non sufficiente) perché una forza sia conservativa è che essa sia posizionale, cioè dipenda solo dalle coordinate del punto in cui essa è definita. La (11), invece, assume in ogni posizione un valore diverso, a seconda della velocità con la quale il punto materiale passa per la posizione stessa.

La forza resistente del mezzo data dalla (11) ha sempre verso opposto alla velocità e quindi allo spostamento elementare $d\vec{s} = \vec{v} dt$; essa pertanto compie sempre un lavoro negativo e tende, dunque, a far diminuire continuamente l'energia meccanica del punto materiale in movimento.

N. 6 - Complementi sul moto armonico smorzato

Consideriamo l'equazione che dà l'oscillazione di un moto armonico smorzato:

$$x(t) = Ae^{-\frac{r^2}{2m}t} \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}} t + \varphi \right),$$

ove ω è la pulsazione propria del moto oscillatorio in assenza di smorzamento. Scriviamo più semplicemente:

$$(1) \quad x(t) = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_0 t + \varphi),$$

ove ω_0 è stata definita con la (10) del N.3

Vogliamo determinare le costanti di integrazione A φ che compaiono nella (1); per determinarle basta assegnare le condizioni iniziali.

Per esempio

$$\text{per } t=0 \text{ si abbia} \quad (i) \quad x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Troviamo la derivata $\dot{x}(t)$ della (1). Si ha:

$$\dot{x}(t) = -A\beta e^{-\beta t} \text{sen}(\omega_0 t + \varphi) + A\omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Per le condizioni (i), dalla (1) si ricava:

$$(3) \quad x_0 = A \text{sen} \varphi, \quad \dot{x}_0 = -A\beta \text{sen} \varphi + A\omega_0 \cos \varphi.$$

Grazie alla prima condizione (3), la seconda assume la forma

$$\dot{x}_0 = -\beta x_0 + A\omega_0 \cos \varphi.$$

Si ottiene così il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} A \operatorname{sen} \varphi = x_0 \\ A \operatorname{cos} \varphi = \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega} \end{cases} .$$

Quadrando e sommando membro a membro le due equazioni del sistema si ha:

$$A^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{cos}^2 \varphi) = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega} \right)^2 .$$

Quindi (5)
$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega} \right)^2} .$$

Nota l'ampiezza iniziale A del moto oscillatorio smorzato, dal sistema (3) si ricava:

$$(6) \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{x_0}{A} , \quad \operatorname{cos} \varphi = \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{A \omega} .$$

Le due equazioni (6) ci permettono di determinare univocamente la fase iniziale φ del moto armonico smorzato.

Possiamo anche dire

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \beta x_0} ,$$

ma in tal caso l'angolo φ è determinato a meno di π rad ; il suo valore esatto è quello che soddisfa le due relazioni (6) .

Decremento logaritmico

Consideriamo l'equazione di un moto armonico smorzato

$$x(t) = A e^{-\frac{r^2}{2m} t} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) , \quad \text{ove} \quad \omega_0 = \omega \left(1 - \frac{r^4}{4m^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Il rapporto p fra una oscillazione e la precedente ha l'espressione :

$$p = Ae^{-\frac{r^2}{2m}(t+T_0)} : Ae^{-\frac{r^2}{2m}t} = e^{-\frac{r^2}{2m}T_0} .$$

Si dice decremento logaritmico delle oscillazioni il numero positivo

$$\delta = |\ln p| = \left| \ln e^{-\frac{r^2}{2m}T_0} \right| = \frac{r^2}{m} \cdot \frac{T_0}{2} = \frac{r^2}{m} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} .$$

Se lo smorzamento del moto oscillatorio è molto piccolo, allora $\left(\frac{r^2}{2m\omega} \right)^2$ è

trascurabile e si ha $\omega_0 \cong \omega = 2\pi\nu$, ove ν è la frequenza dell'oscillatore
In assenza di smorzamento. Per il decremento logaritmico possiamo allora scrivere l'espressione

$$\delta = \frac{r^2}{m} \frac{\pi}{\omega_0} \cong \frac{r^2}{m} \frac{\pi}{\omega} = \frac{r^2}{m} \frac{1}{2\nu} , \quad \text{quindi} \quad \delta \cong \frac{r^2}{m} \frac{1}{2\nu} .$$

N. 7 - Oscillazioni forzate

Consideriamo un moto armonico smorzato; supponiamo però che il punto materiale P sia soggetto non solo alla forza elastica di richiamo e a quella resistente che origina lo smorzamento, ma sia sottoposto anche all'azione di una forza esterna di tipo periodico.

Supponiamo che queste forze siano parallele all'asse x , che il punto P oscilli attorno all'origine O e che la forza resistente sia proporzionale alla velocità del punto oscillante e opposta ad essa; sotto queste ipotesi l'equazione del moto è:

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -r^2 \frac{dx}{dt} - kx + F(t).$$

E' interessante il caso che la funzione $F(t)$ sia una funzione sinusoidale, e quindi periodica, es. $F(t) = F_0 \cos \omega_e t$, ove per semplicità abbiamo supposto che la fase iniziale della forza sia nulla. In tal caso la (1) assume la forma

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r^2}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega_e t,$$

ove $\omega^2 = \frac{k}{m}$ è la pulsazione propria del moto oscillatorio in assenza di smorzamento.

E' questo un caso che si presenta molto spesso in fisica. Esempi di questo moto sono dati:

- a) da un pavimento sul quale sono collocati motori o macchine utensili in moto uniforme;
- b) dalla lamina di un microfono costretta a vibrare attorno alla sua posizione di riposo per l'azione delle onde sonore in arrivo;
- c) dalla lamina di un altoparlante costretta a vibrare sotto l'azione elettromagnetica della corrente variabile in arrivo.

L'esperienza fatta su fenomeni meccanici mostra che dopo un periodo iniziale piuttosto complicato si raggiunge una condizione di equilibrio. In particolare, se la forza esterna è una funzione periodica del tempo, questo stato di regime consiste in oscillazioni armoniche forzate che il punto

materiale compie con la stessa frequenza della forza esterna e con una ampiezza che è proporzionale alla forza medesima.
 La costante di proporzionalità dipende dalla frequenza della forza esterna. Se lo smorzamento del punto oscillante è piccolo, tale costante diventa estremamente grande quando la frequenza della della forza sinusoidale esterna è prossima alla frequenza propria dell'oscillatore: come sappiamo questa frequenza è quella che avrebbe l'oscillatore sotto l'azione della forza elastica se lo smorzamento fosse nullo.

Questo fenomeno attraverso il quale viene esaltata l'ampiezza delle oscillazioni forzate è chiamato risonanza. Un esempio comunissimo è l'altalena che, partendo dalla sua posizione di equilibrio, raggiunge delle oscillazioni di ampiezza considerevole quando essa sia periodicamente sottoposta a piccoli impulsi in sincronismo con il suo periodo proprio.

Riprendiamo la legge del moto di un punto soggetto ad un moto oscillatorio forzato; come abbiamo visto essa è data dall'equazione

$$(3) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + r^2 \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = F_0 \cos \omega_e t .$$

Facciamo vedere che la (3) ha un integrale particolare del tipo

$$(4) \quad x(t) = a \cdot \cos(\omega_e t + \varphi) ,$$

dove a e φ hanno valori particolari che si ricavano imponendo che la (4) soddisfi identicamente (cioè per qualsiasi valore del tempo t) l'equazione (3). Troviamo questi valori delle costanti a e φ .

Calcolando le derivate prima e seconda della (3) si ha:

$$\dot{x}(t) = -a\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi) \quad , \quad \ddot{x}(t) = -a\omega_e^2 \cos(\omega_e t + \varphi) .$$

Sostituiamo nella (3) e imponiamo la condizione che l'equazione sia identicamente soddisfatta. Si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} & -m a \omega_e^2 \cos(\omega_e t + \varphi) - r^2 a \omega_e \sin(\omega_e t + \varphi) + m\omega^2 a \cos(\omega_e t + \varphi) = \\ & = F_0 \cos \omega_e t . \end{aligned}$$

Sviluppando le funzioni goniometriche si ha:

$$\begin{aligned}
& -m a \omega_e^2 \cos \omega_e t \cdot \cos \varphi + m a \omega_e^2 \sin \omega_e t \cdot \sin \varphi - r^2 a \omega_e \sin \omega_e t \cdot \cos \varphi + \\
& \quad - r^2 a \omega_e \cos \omega_e t \cdot \sin \varphi + m a \omega^2 \cos \omega_e t \cdot \cos \varphi + \\
& \quad - m a \omega^2 \sin \omega_e t \cdot \sin \varphi = F_0 \cos \omega_e t , \\
& \cos \omega_e t \cdot (-m a \omega_e^2 \cos \varphi - r^2 a \omega_e \sin \varphi + m a \omega^2 \cos \varphi) + \\
& \quad + \sin \omega_e t \cdot (+m a \omega_e^2 \sin \varphi - r^2 a \omega_e \cos \varphi - m a \omega^2 \sin \varphi) = F_0 \cos \omega_e t .
\end{aligned}$$

Affinché l'equazione (5) sia identicamente soddisfatta i parametri a , φ debbono verificare il sistema

$$\begin{cases} -m a \omega_e^2 \cos \varphi - r^2 a \omega_e \sin \varphi + m a \omega^2 \cos \varphi = F_0 \\ +m a \omega_e^2 \sin \varphi - r^2 a \omega_e \cos \varphi - m a \omega^2 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\text{ossia (6)} \quad \begin{cases} m(\omega^2 - \omega_e^2) \cdot a \cos \varphi - r^2 \omega_e a \sin \varphi = F_0 \\ r^2 \omega_e \cdot a \cos \varphi + m(\omega^2 - \omega_e^2) \cdot a \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con la regola di Cramer; si ha:

$$a \cos \varphi = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -r^2 \omega_e \\ 0 & m(\omega^2 - \omega_e^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m(\omega^2 - \omega_e^2) & -r^2 \omega_e \\ r^2 \omega_e & m(\omega^2 - \omega_e^2) \end{vmatrix}} = \frac{F_0 m(\omega^2 - \omega_e^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} ,$$

$$a \sin \varphi = \frac{\begin{vmatrix} m(\omega^2 - \omega_e^2) & F_0 \\ r^2 \omega_e & 0 \end{vmatrix}}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} = \frac{-r^2 \omega_e F_0}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} .$$

Quindi

$$(6) \quad a \cos\varphi = \frac{m(\omega^2 - \omega_e^2) F_0}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2}$$

$$a \sin\varphi = \frac{-r^2\omega_e F_0}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2} .$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$(7) \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{r^2\omega_e}{m(\omega^2 - \omega_e^2)} .$$

Se invece quadriamo e sommiamo membro a membro si ottiene:

$$a^2 = \frac{F_0^2 [m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2]}{[m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2]^2} .$$

Semplificando subito si ottiene l'ampiezza del moto oscillatorio forzato:

$$(8) \quad a = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2}} .$$

Ne segue che l'integrale particolare dell'equazione differenziale non omogenea (3) è dato dalla funzione

$$(9) \quad x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2}} \cdot \cos(\omega_e t + \varphi) .$$

Per semplicità di scrittura porremo $a = F_0 / G$.

Dalla seconda delle (6) si deduce che φ è sempre negativo; di conseguenza dalla (7) si ricava che φ è compreso fra 0 e $-\frac{\pi}{2}$ rad. Ne segue che l'oscillatore è sempre in ritardo di fase rispetto alla forza e che il ritardo è tanto maggiore quanto più grande è ω_e ; ossia il ritardo è tanto maggiore quanto più rapidamente oscilla la forza esterna $F(t)$.

Dalla (7) si ricava anche che ω_e varia da 0 a ω . Per $\omega_e = \omega$ si ha $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, quindi $\varphi = -\pi/2$. In questo caso il moto oscillatorio forzato è in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla forza esterna $F(t)$.

Dalla (9) si vede anche che se ω_e è molto diverso da ω , il fattore G è grande e quindi l'ampiezza F_0/G del moto oscillatorio forzato è piccola. Se invece $\omega_e \rightarrow \omega$ (cioè, se la pulsazione della forza esterna si avvicina alla pulsazione del moto oscillatorio privo di attrito), l'ampiezza di oscillazione a del moto forzato cresce notevolmente.

Dobbiamo invece notare che l'ampiezza di oscillazione a del moto armonico forzato è massima in corrispondenza ai valori di ω_e che rendono minimo il radicando

$$m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2,$$

cioè che rendono minima la funzione

$$(10) \quad F(z) = m^2(\omega^2 - z^2)^2 + r^4z^2 \quad \text{ove si è posto} \quad \omega_e = z.$$

Deriviamo questa funzione rispetto alla variabile z ed eguagliamo a zero; le radici dell'equazione ottenuta ci danno le ascisse dei punti di minimo relativo. Si ha

$$F'(z) = 0 \quad \text{per} \quad -2m^2(\omega^2 - z^2)2z + 2zr^4 = 0,$$

$$\text{da cui} \quad 2z \cdot (2m^2z^2 - 2m^2\omega^2 + r^4) = 0.$$

$$\text{Soluzioni:} \quad z = 0, \quad z = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{2m^2}} = \pm \alpha_1.$$

Per trovare l'ascissa del punto di minimo relativo studiamo il segno della disequazione di 3° grado $F'(z) \geq 0$.

Applicando la regola dei segni essa si riduce al sistema di disequazioni

$$\begin{array}{l} R \left\{ z \geq 0 \right. \\ S \left\{ 2m^2z^2 - 2m^2\omega^2 + r^4 \geq 0 \right. \end{array}$$

Poiché la disequazione di 2° grado del sistema è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici $(-\alpha_1, +\alpha_1)$, estremi compresi, si ha il diagramma

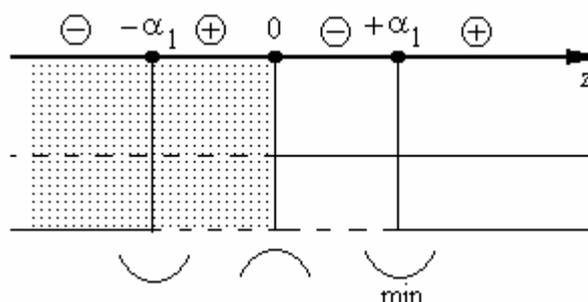


Figura 5-5

I valori $z < 0$ si scartano perché ad essi corrispondono frequenze negative della forza periodica esterna e ciò non ha significato fisico. Si scarta anche la frequenza nulla $z = \omega_e = 0$, perché ad essa corrisponde una forza esterna $\bar{F}(t) = \overline{\cos t}$, che non produce un moto oscillatorio del punto al quale è applicata. Ne segue che la funzione $F(z)$ ha un sol minimo (assoluto e relativo) per

$$\alpha_1 = \omega_e = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{2m^2}}, \quad \text{cioè per} \quad \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^4}{2m^2}} ;$$

Quando la pulsazione ω_e della forza esterna ha questo valore minimo, allora l'ampiezza a dell'oscillatore è massima.

Questa particolare pulsazione ω_e è detta pulsazione di risonanza e viene indicata con la lettera ω_r ; si dice anche che il moto oscillatorio forzato si trova in condizioni di risonanza (o di sintonia).

Come abbiamo detto introducendo l'argomento, in condizioni di risonanza l'ampiezza di oscillazione a è massima. In queste condizioni, per $r^2 \rightarrow 0$ l'ampiezza di oscillazione cresce ancora maggiormente: in queste condizioni una struttura come un ponte corre un forte rischio di crollare.

L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$(3) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + r^2 \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = F_0 \cos \omega_e t, \quad (\text{ove } \omega^2 = \frac{k}{m}),$$

è la somma della soluzione particolare trovata con la (9) e della soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea ad essa associata. Ciò corrisponde al seguente fatto fisico. Il punto oscillante P è soggetto a due movimenti.

1°- un movimento è una oscillazione forzata (non smorzata) data dalla (9); il rapporto $T = 2\pi/\omega_e$ è il periodo della oscillazione e della forza periodica esterna che lo genera.

2°- L'altro movimento è una oscillazione propria smorzata di periodo $T_o = 2\pi/\omega_o$ ove

$$\omega_o = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}} = \omega \sqrt{1 - \frac{r^4}{4m^2\omega^2}} = \omega \sqrt{1 - \psi} .$$

Dopo qualche tempo dall'inizio del moto, l'oscillazione propria svanisce; resta invece la sola oscillazione forzata perché essa non è smorzata.

Naturalmente questo moto oscillatorio prosegue a spese del lavoro della forza esterna $F(t) = F_o \cos \omega_e t$; questo lavoro viene trasformato in calore, per attrito, durante il moto.

Quando resta la sola oscillazione forzata si dice che è passata la fase transitoria e che si è raggiunta la condizione di regime costante o stazionario. Questa condizione è la più semplice e quella che ha un notevole interesse pratico.

Quando si è raggiunta questa condizione di regime stazionario, l'energia totale del punto oscillante è uguale alla somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

Questa energia cinetica è data dalla formula

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega_e^2 \frac{F_o^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} \cdot \text{sen}^2(\omega_e t + \varphi) .$$

Durante l'oscillazione questa energia raggiunge il valore massimo

$$E_o = \frac{1}{2} m \omega_e^2 \frac{F_o^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} ;$$

ricordando la formula che dà l'ampiezza del moto oscillatorio forzato si ha

$$E_0 = \frac{1}{2} m \omega_e^2 a^2 .$$

L'energia cinetica raggiunge questo valore massimo negli istanti in cui l'elongazione $x(t)$ del moto oscillatorio è nulla, cioè quando il punto P passa per la sua posizione di riposo. In questi istanti l'energia potenziale del punto oscillante è nulla, quindi la sua energia cinetica coincide con l'energia totale.

Il valor medio \bar{E} dell'energia cinetica si calcola con l'integrale

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m a^2 \left[\frac{d}{dt} \cos(\omega_e t + \varphi) \right]^2 dt$$

$$\bar{E} = \frac{m a^2}{2T} \int_0^T \omega_e^2 \text{sen}^2(\omega_e t + \varphi) dt .$$

Poiché $\text{sen}^2(\omega_e t + \varphi) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega_e t + 2\varphi)]$

Si ha $\bar{E} = \frac{m a^2 \omega_e^2}{4T} \int_0^T [1 - \cos(2\omega_e t + 2\varphi)] dt$

Quindi $\bar{E} = \frac{1}{4} m \omega_e^2 a^2 - \frac{m \omega_e a^2}{8T} \cdot \int_0^{2\pi/\omega_e} \cos(2\omega_e t + 2\varphi) d(2\omega_e t + 2\varphi)$

Poiché il valore dell'integrale è nullo, si ha

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \omega_e^2 a^2 \quad \text{ossia} \quad \bar{E} = \frac{1}{2} E_0 ,$$

cioè: “l'energia cinetica media è uguale alla metà dell'energia totale del punto oscillante”.

GLI INTEGRALI ELLITTICI (nello studio del periodo di oscillazione di un pendolo)

Introduzione

Gli integrali cosiddetti **ellittici** ebbero, nel periodo posto fra il XVIII ed il XIX secolo, una indubbia importanza nel problema della rettificazione di curve quali ellissi, iperboli, lemniscate e così anche nella risoluzione di notevoli problemi di fisica e astronomia.

Inoltre il loro studio, attraverso i lavori dei maggiori matematici del tempo, fra i quali Johan Bernouilli, Euler, Lagrange, Legendre, Abel, Jacobi, Weierstrass e Riemann, condusse all'introduzione ed allo studio di funzioni ellittiche che aprì uno dei capitoli più importanti della matematica dell'Ottocento.

La determinazione del periodo di oscillazione di un pendolo che compie oscillazioni di notevole ampiezza è interessante perché richiede di studiare se esista la possibilità di applicare alcuni teoremi del calcolo integrale riguardanti le condizioni di integrabilità della funzione integranda, la convergenza dello sviluppo in serie e la possibilità di integrazione termine a termine.

N. 8 - Periodo di oscillazione di un pendolo semplice

Vogliamo calcolare il periodo di oscillazione di un pendolo semplice che oscilla in un piano verticale π con oscillazioni di *notevole* ampiezza. Ricordiamo che si dice pendolo semplice un punto materiale pesante P sospeso ad un punto fisso C per mezzo di un filo flessibile, inestensibile e di massa trascurabile (fig. 5-6).

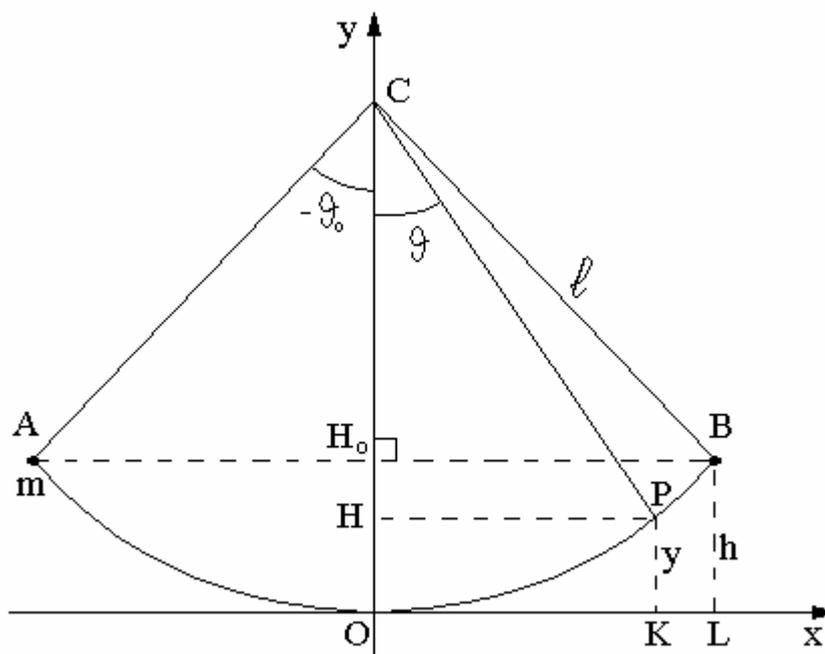


Figura 5-6

Sia ℓ la lunghezza del filo, m la massa del punto oscillante P , che può essere benissimo una sferetta e π il piano verticale in cui avvengono le oscillazioni.

La lunghezza ℓ del filo è detta lunghezza del pendolo semplice.

Se spostiamo la sferetta dalla sua posizione di riposo O ad un'altra posizione A e poi la lasciamo libera, essa comincia ad oscillare descrivendo un arco AB di circonferenza di centro C e raggio $\overline{CA} = \ell$.

Sul piano π assumiamo un riferimento cartesiano Oxy di origine O e avente l'asse y rivolto verso l'alto; le coordinate del punto C sono quindi $C(0, \ell)$.

Sull'arco AB fissiamo un sistema di ascisse curvilinee s , aventi come origine il punto O e misurate positivamente in senso antiorario. Sia poi ϑ

l'anomalia di un generico punto $P(x,y)$ della circonferenza, contata a partire dall'asse y e misurata anch'essa positivamente in senso antiorario.

Naturalmente, le due ascisse \underline{s} e $\underline{\vartheta}$ sono funzioni del tempo, quindi si ha:

$$s = s(t) , \quad \vartheta = \vartheta(t) .$$

Infine sia L la proiezione ortogonale del punto B sull'asse x e sia $h = \overline{LB}$ La massima quota raggiunta dal punto oscillante. Altre dati si possono vedere sulla figura.

Date queste indicazioni preliminari, vogliamo determinare non l'equazione del moto del pendolo, che già conosciamo, ma il periodo T delle oscillazioni nel caso che queste abbiano una considerevole ampiezza.

Se il filo che sorregge il corpo oscillante ruota attorno al punto fisso C con attrito trascurabile, come supponiamo, possiamo applicare il teorema dell'energia meccanica; questo teorema afferma che “ **la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del punto materiale è una costante del moto** “. Quindi l'energia meccanica in una generica posizione P è uguale a quella del punto B ; e poiché nel punto B si ha solo energia potenziale, essendo esso un punto di arresto, possiamo scrivere

$$T + U = U_B ,$$

$$\text{ossia} \quad (1) \quad \frac{1}{2} m v^2 + m g y = m g h ,$$

$$\text{da cui} \quad (2) \quad v = \sqrt{2 g (h - y)} .$$

E' possibile ora seguire un procedimento trigonometrico; infatti, se indichiamo con H e H_0 le proiezioni ortogonali dei punti P e B sull'asse y , si ha:

$$\overline{OH} = y = \ell (1 - \cos \vartheta) \quad \overline{OH_0} = h = \ell (1 - \cos \vartheta_0) ,$$

$$\text{quindi} \quad h - y = \ell (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \geq 0$$

$$\text{e} \quad v = \sqrt{2 g h (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)} .$$

Noi non seguiremo questo procedimento trigonometrico; seguiremo invece un procedimento algebrico, senz'altro più impegnativo, poiché esso ci offre la possibilità di risolvere un particolare integrale ellittico.

Tornando alla (2), possiamo esprimere la velocità v per mezzo della derivata ds/dt , dove s rappresenta l'ascissa curvilinea di origine O , misurata positivamente in senso antiorario; quindi si ha:

$$(3) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-y)} .$$

Questa espressione è corretta anche nel segno quando si ha $\frac{ds}{dt} > 0$, cioè

quando il punto P si muove nel verso delle ascisse positive; per i nostri calcoli potremo sempre riferirci a questo caso.

Dalla relazione (3) possiamo trovare il tempo infinitesimo dt ; infatti si ha:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} .$$

Indicando poi con T' il tempo corrispondente ad $1/4$ di oscillazione completa, si ricava

$$(4) \quad T' = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-y}} .$$

Troviamo l'espressione dell'elemento di traiettoria ds . A tale scopo, subito vediamo che l'equazione della circonferenza di centro $C(0, \ell)$ e raggio ℓ è $x^2 + y^2 - 2\ell y = 0$; e in forma implicita si ha

$$(5) \quad x = f(y) = \sqrt{2\ell y - y^2} \quad \text{con} \quad y \in [0, h] .$$

Da essa si ricava che l'arco di curva AB ha le equazioni parametriche

$$\begin{cases} y = y(t) = t \\ x = x(t) = f(t) = \sqrt{2\ell t - t^2} \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [t_1, t_2] .$$

La lunghezza dell'arco di curva relativo all'intervallo base $[t_1, t_2]$ è :

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{y'^2(t) + x'^2(t)} dt ,$$

cioè

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

da cui (5) $ds = \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy .$

Sostituendo la (5) nell'espressione di T' si ottiene

$$(6) \quad T' = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^h \frac{\sqrt{1 + [f'(y)]^2}}{\sqrt{h-y}} dy .$$

Possiamo esprimere completamente l'integrale (6) solo dopo il calcolo della derivata della funzione composta $f(y)$. Ricordando che

$$x = f(y) = (2\ell y - y^2)^{1/2}$$

si ha $f'(y) = \frac{1}{2}(2\ell y - y^2)^{-1/2} \times (2\ell - 2y),$

da cui $f'(y) = \frac{\ell - y}{\sqrt{2\ell y - y^2}} .$

Si ricava pertanto:

$$1 + [f'(y)]^2 = 1 + \frac{\ell^2 + y^2 - 2\ell y}{2\ell y - y^2} = \frac{2\ell y - y^2 + \ell^2 + y^2 - 2\ell y}{2\ell y - y^2} ,$$

e quindi (7)
$$\sqrt{1 + [f'(y)]^2} = \frac{\ell}{\sqrt{2\ell y - y^2}} .$$

Sostituendo la (7) nella (6) si ottiene

$$T' = \frac{1}{\sqrt{\ell g}} \cdot \int_0^h \frac{1}{\sqrt{h-y}} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{2\ell y - y^2}} dy , \quad \text{infine}$$

$$(8) \quad T' = \frac{\ell}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y(h-y)(2\ell-y)}} , \quad \text{con } y \in]0, h[.$$

Questo è il tempo che la sferetta impiega a compiere 1/4 di oscillazione completa (es. l'arco AO), pari ad 1/4 del periodo T, cioè $T' = T/4$.

Nella (8) figura un integrale ellittico che possiamo risolvere ponendo $y = h\xi^2$. Allora:

quando $y = 0$ si ha $\xi = 0$,

e quando $y = h$ si ha $\xi^2 = 1$ cioè $\xi = 1$.

Ponendo $y = h\xi^2$ il radicando che figura nella (8) si trasforma come segue:

$$y(h-y)(2\ell-y) = h\xi^2(h-h\xi^2)(2\ell-h\xi^2) = h^2\xi^2(1-\xi^2)(2\ell-h\xi^2)$$

e quindi $y(h-y)(2\ell-y) = h^2 2\ell \cdot \xi^2(1-\xi^2) \left(1 - \frac{h}{2\ell} \xi^2\right)$.

Ponendo $h/2\ell = k^2$ ¹ e tenendo presente che $dy = 2h\xi d\xi$ dalla (8) si ricava:

¹ I valori che annullano il radicando $R = y(h-y)(2\ell-y)$ della (8) sono :

$$e_1=h \quad e_2=2\ell \quad e_3=0$$

La costante $k^2=h/2\ell$ è il valore del rapporto semplice (e_1, e_2, e_3) ; infatti si ha

$$(e_1, e_2, e_3) = (e_3-e_1)/(e_3-e_2) = h/2\ell = k^2 .$$

$$T' = \frac{\ell}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^1 \frac{2h\xi \cdot d\xi}{\sqrt{h^2 2\ell\xi^2 (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

quindi

$$T' = \frac{\ell}{\sqrt{4\ell g}} \cdot \int_0^1 \frac{2h\xi \cdot d\xi}{h\xi\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

infine (9)

$$T' = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad \text{con } 0 \leq \xi < 1$$

Ci siamo così ricondotti ad un integrale ellittico di prima specie.
Tornando alla posizione $k^2 = h/2\ell$, si nota che:

- 1°) $h \neq 0$ perché in caso contrario non si avrebbero oscillazioni;
2°) $h \neq 2\ell$ e $h < 2\ell$, altrimenti la sferetta compirebbe una rotazione completa attorno al punto C. Ne segue

$$0 < k^2 < 1.$$

Il coefficiente k si dice modulo dell'integrale ellittico.

Osserviamo subito che la funzione

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

è quasi continua nell'intervallo limitato $A[0, 1]$, con l'insieme singolare N costituito dal solo punto $\xi = 1$.

D'altra parte, il concetto di integrale definito si riferisce ad una funzione continua in un intervallo chiuso. Per una funzione $f(P)$ quasi continua in un dominio misurabile A , limitato o illimitato, con l'insieme singolare N , l'integrale va inteso come il limite finito, se esiste, a cui tende l'integrale quando il suo intervallo di definizione T_n varia in una famiglia di infiniti domini limitati e misurabili $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ che invadono il dominio dato $A - N$. Se l'integrazione è possibile, la funzione $f(P)$ si dice sommabile in A .

Nel caso di una funzione di una sola variabile $f(x)$, c'è un criterio che ci permette di stabilire se essa sia sommabile. Ecco il suo enunciato:

“ Se $f(x)$ è una funzione quasi continua in un intervallo limitato $[a, b]$ ed essa ha un sol punto singolare x_0 , internamente o in un estremo, e se per $x \rightarrow x_0$ la funzione diventa infinita di un ordine α rispetto all’infinito principale $1/|x - x_0|$, allora la funzione $f(x)$ è sommabile in $[a, b]$ se $\alpha < 1$, non lo è se $\alpha \geq 1$ (vedi A. Ghizzetti, Analisi matematica II, cap. XXI, n.10, pag.267-Ed. Veschi,1954).

Nel nostro caso, la funzione $\varphi(\xi)$ è quasi continua nell’intervallo limitato $A[a, 1]$, con l’insieme singolare N costituito dal solo punto $\xi = 1$. Inoltre, come vedremo subito, essa diventa infinita di ordine $\alpha = 1/2$ (quindi $\alpha < 1$) rispetto all’infinito principale $\frac{1}{1-\xi}$; quindi la funzione $\varphi(\xi)$ è sommabile in A . Troviamo l’ordine di infinito della funzione; si ha:

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} : \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \right) = \\ & = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)(1-k^2\xi^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \neq 0 \end{aligned}$$

Effettivamente l’ordine di infinito è $\alpha = 1/2$; quindi la funzione $\varphi(\xi)$ è sommabile nell’intervallo $[0, 1]$ e per definizione di sommabilità possiamo scrivere:

$$(10) \quad \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1-1/n} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} .$$

Operiamo ora la sostituzione $\xi = \text{sen}\varphi$ e facciamo vedere che l’integrale (9) si semplifica notevolmente. Infatti si ha:

$$d\xi = \cos\varphi \cdot d\varphi \quad \text{e} \quad \sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2\varphi} = \cos\varphi .$$

Gli estremi di integrazione, poi, si trasformano come segue:

$$\begin{aligned} & \text{quando } \xi = 0 \quad \text{si ha} \quad \varphi = 0 \\ & \text{e quando } \xi = 1 \quad \text{si ha} \quad \varphi = \pi/2 . \end{aligned}$$

Facendo tutte queste sostituzioni nella formula (9), si ha:

$$T' = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad , \quad \text{cioè}$$

$$(11) \quad T' = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad , \quad \text{ove} \quad k^2 \sin^2 \varphi \leq k^2 < 1 \quad .$$

Quando gli estremi di integrazione sono 0 e $\pi/2$ si dice che l'integrale ellittico è stato ridotto a forma completa.

La funzione $F(\varphi) = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ che compare nella (11) sotto il segno di integrazione non ammette una funzione primitiva nota, né di tipo algebrico, né di tipo circolare, logaritmico o esponenziale, come è stato dimostrato da Joseph Liouville.

Possiamo però ricorrere alla integrazione per serie, cercando di esprimere la funzione integranda come somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue F_n facilmente integrabili.

Procediamo per gradi e facciamo una prima osservazione.

Essendo $k^2 \sin^2 \varphi < k^2 < 1$, lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione $F(\varphi)$ è convergente ed ha per somma la funzione stessa. Tenendo presente che il binomio $F(\varphi)$ è una potenza con esponente $\alpha = -1/2$, si ha una particolare serie binomiale data dalla formula

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \sin^2 \varphi)^n$$

$$\text{quindi (12)} \quad (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \varphi$$

Ricordiamo lo sviluppo del coefficiente binomiale che compare nella (12). Si ha:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

quindi (13)
$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

dove $(2n-1)!!$ si legge doppio fattoriale di $2n-1$. Ad esempio si ha:
 $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Sempre per esempio si ha:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1 \quad (\text{per definizione}) \quad \binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \quad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = (-1)^2 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Tenendo presente la (13), possiamo scrivere la (12) nella forma

$$\left(1 - k^2 \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi$$

In modo più conciso si ha:

$$(14) \quad \left(1 - k^2 \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi$$

La serie che figura al secondo membro della (14) è convergente perché essa è una minorante della serie geometrica

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n},$$

e questa serie è convergente perché la ragione k^2 è < 1 .

Ora ogni termine della serie (14) è positivo e al variare di q ha come estremo superiore il termine corrispondente della progressione geometrica. Ciò ci consente di dire che la serie (14) è totalmente e assolutamente convergente nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi la serie stessa risulta anche uniformemente convergente nell'intervallo stesso. Grazie alla (14), l'integrale relativo a T' si scrive

$$(16) \quad T' = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \text{sen}^{2n} \varphi \right] d\varphi .$$

Ora la serie che figura sotto il segno di integrale è uniformemente convergente nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (come già osservato) e ogni suo termine è una funzione continua nell'intervallo stesso. Possiamo allora integrare termine a termine perché sono soddisfatte tutte le condizioni del teorema di integrazione per serie. (vedi A. Ghizetti, *Analisi matematica II*, cap. XXII, n. 3 pag. 294; Ed. Veschi – 1954). Pertanto si ha

$$T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} + \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} \varphi d\varphi$$

Ricordando che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} \varphi d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$, per il calcolo di T' si ottiene

$$(16) \quad T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} + \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \frac{\pi}{2} ,$$

$$(16) \quad T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right] k^{2n} \right\} \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{h}{2\ell} .$$

Poiché il periodo di oscillazione T del pendolo è $4T'$, si ottiene

$$T = 4T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{2\ell} \right)^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right] \right\},$$

ove $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ è il periodo di oscillazione del pendolo per piccole oscillazioni.

Ponendo $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ si ottiene

$$(17) \quad T = T_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{2\ell} \right)^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right] \right\}.$$

Tenendo ora presente la figura 5-5, per noti teoremi di trigonometria si ha

$$h = \ell(1 - \cos \vartheta_0) \quad \rightarrow \quad h = 2\ell \text{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} \quad ; \quad \text{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} = \frac{h}{2\ell} = k^2$$

ove ϑ_0 è la semiampiezza di oscillazione del pendolo.

Con ciò la (17) diventa

$$(18) \quad T = T_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \text{sen}^{2n} \frac{\vartheta_0}{2} \right\}$$

Calcoliamo alcuni valori dei coefficienti

$$C_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \text{ove} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{3!!}{4!!} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8} \quad C_3 = \frac{5!!}{6!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{5}{16}$$

quindi

$$C_1^2 = \frac{1}{4}, \quad C_2^2 = \frac{9}{64}, \quad C_3^2 = \frac{25}{256}, \quad \dots$$

Per il periodo di oscillazione T del pendolo si trova pertanto la formula

$$(19) \quad T = T_0 = \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{9}{64} \operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{25}{256} \operatorname{sen}^6 \frac{\vartheta_0}{2} + \dots \right)$$

Come si vede i termini della serie tendono rapidamente a zero al crescere di n . Per oscillazioni ϑ_0 molto piccole, il periodo si riduce alla nota formula elementare

$$T = T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Per fare un esempio, se l'elongazione del pendolo è $\vartheta_0 = 10^\circ$, dalla relazione (19) (approssimata al secondo termine) si ricava che

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} 0,0075 \right) = T_0 (1 + 0,0019) = T_0 \cdot 1,0019$$

Quindi il periodo è aumentato dello 0,19 % rispetto a quello dato dalla formula elementare: in misure di precisione l'errore è non trascurabile. Nell'arco di 24 ore il pendolo va indietro di $2^{\text{min}} 44^{\text{sec}}$ rispetto ad un altro che compie oscillazioni di piccolissima ampiezza.

Nella tabella è calcolato il ritardo R , in 24 ore, di un orologio a pendolo di qualsiasi lunghezza, perfettamente regolato su oscillazioni infinitesime, rispetto ad un altro orologio a pendolo della stessa lunghezza, ma che compie oscillazioni di ampiezza ϑ_0 non trascurabile.

ϑ_0	2°	4°	6°	8°	10°	12°
R	7^{sec}	26^{sec}	59^{sec}	$1^{\text{min}} 45^{\text{sec}}$	$2^{\text{min}} 44^{\text{sec}}$	$3^{\text{min}} 56^{\text{sec}}$

N. 9 – Periodo di oscillazione di un pendolo semplice (altra versione).

Vogliamo calcolare il periodo di oscillazione di un pendolo semplice che oscilla in un piano verticale π con oscillazioni di notevole ampiezza. Ricordiamo che si dice pendolo semplice un punto pesante P sospeso ad un punto fisso C per mezzo di un filo flessibile, inestensibile e di massa trascurabile (fig. 5-7).

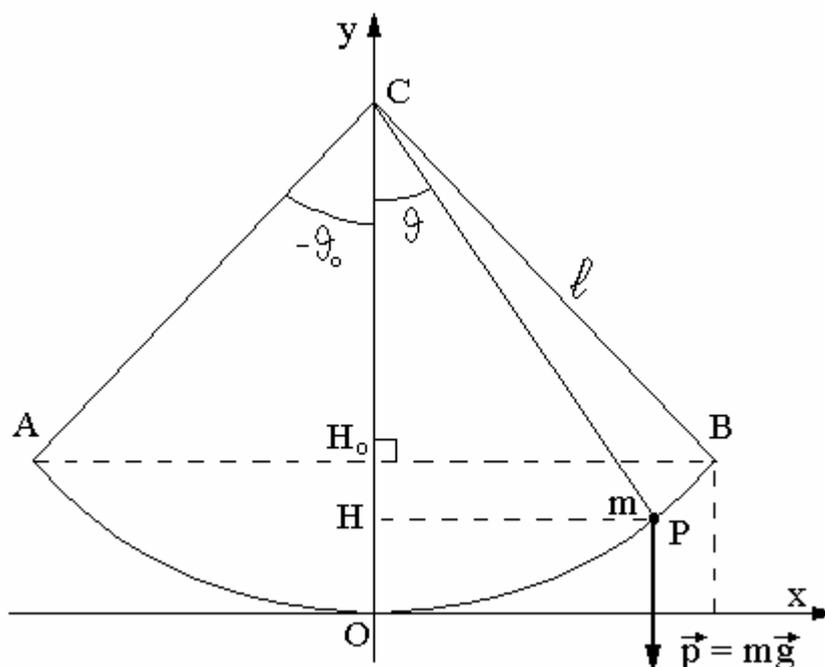


Figura 5-7

Sia ℓ la lunghezza del filo, detta lunghezza del pendolo, ed m la massa del punto oscillante P, che può essere benissimo una sferetta. Se spostiamo la sferetta dalla sua posizione di riposo O ad un'altra posizione A e poi la lasciamo libera, essa comincia ad oscillare descrivendo un arco \widehat{AB} di circonferenza di centro C, di ampiezza $\widehat{ACB} = 2\vartheta_0$ e raggio $\overline{CA} = \ell$.

Sul piano di oscillazione π assumiamo un riferimento cartesiano Oxy di origine O e avente l'asse y rivolto verso l'alto e siano $B(x_0, y_0)$, $P(x, y)$ le coordinate dei punti B e P.

Sia ϑ l'anomalia di un generico punto P della circonferenza, contata a partire dall'asse y e misurata positivamente in senso antiorario; naturalmente ϑ è funzione del tempo t, quindi si ha

$$(1) \quad \vartheta = \vartheta(t) .$$

Considerati i punti B e P, siano ϑ_0 , ϑ le loro anomalie ed H_0 , H le loro proiezioni ortogonali sull'asse y. Sappiamo dalla trigonometria che si ha

$$(2) \quad \begin{aligned} \overline{OH_0} &= \overline{OC} - \overline{H_0C} & \overline{OH} &= \overline{OC} - \overline{HC} \text{ e quindi} \\ y_0 &= \ell(1 - \cos \vartheta_0) & y &= \ell(1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

Nella posizione B la sferetta ha la sola energia potenziale

$$U_B = mg\ell(1 - \cos \vartheta_0)$$

mentre nella posizione P essa ha una energia cinetica e una energia potenziale date dalle formule

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad U(P) = mg\ell(1 - \cos \vartheta) .$$

Se il filo ruota attorno al punto O con attrito trascurabile, possiamo applicare il teorema della conservazione dell'energia meccanica al moto del punto P, e si ha:

$$(3) \quad \begin{aligned} T + U_p &= U_B & \text{ossia} \\ \frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1 - \cos \vartheta) &= mg\ell(1 - \cos \vartheta_0) . \end{aligned}$$

Semplificando per m e sciogliendo le parentesi si ottiene

$$v^2 + 2g\ell - 2g\ell \cos \vartheta = 2g\ell - 2g\ell \cos \vartheta_0 .$$

Poiché $v = |\ell \dot{\vartheta}(t)|$ possiamo scrivere

$$\ell^2 \dot{\vartheta}^2 = 2g\ell(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) , \quad \text{da cui}$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) .$$

Se ci limitiamo a considerare l'arco di circonferenza in cui $\vartheta(t)$ è crescente in valore assoluto si ha

$$(4) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} ;$$

da essa si vede che $\dot{\vartheta}(t)$ si annulla per $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0$, cioè per $\vartheta = \pm \vartheta_0$.

Dalla (4) si ha

$$dt = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}} .$$

Il tempo T' che il punto materiale impiega a percorrere l'arco OB, cioè $\frac{1}{4}$ di oscillazione completa, è $\frac{1}{4}$ del periodo T ed è dato dall'integrale:

$$(5) \quad T' = \frac{1}{4} T = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}}$$

La (5) rappresenta l'integrale improprio della funzione

$q(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}}$ che è una funzione quasi continua nell'intervallo

$[0, \vartheta_0]$ con l'insieme singolare N costituito dal solo punto $\vartheta = \vartheta_0$.

Torneremo tra poco sulle condizioni di integrabilità di questa funzione.

Facciamo vedere, con una trasformazione, che la (5) rappresenta un integrale ellittico e che questo può essere ridotto a forma completa, cioè ad una delle tre specie indicate da Legendre.

Infatti, introduciamo la variabile x così definita

$$(6) \quad x = \frac{\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2}}. \quad \text{Ne consegue}$$

$$(7) \quad \begin{array}{l} \text{quando } \vartheta = 0 \quad \text{si ha } x = 0 \\ \text{e quando } \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{si ha } x = 1 \end{array}$$

Tenendo conto che $0 \leq \vartheta < \vartheta_0$, per la variazione di x si ha $0 \leq x < 1$.
Possiamo scrivere la (6) nella forma

$$x \cdot \operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2} = \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}.$$

Differenziando ambo i membri si ha

$$\operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2} dx = \frac{1}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta \quad \text{da cui} \quad 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2} = \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{d\vartheta}{dx}.$$

Ricordando che $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ si ha :

$$(9) \quad \begin{array}{l} \cos \vartheta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2} \\ \cos \vartheta_0 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} \end{array}$$

Dalle (9), sottraendo membro a membro, si ha:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta - \cos \vartheta_0 &= 2 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \\ \text{quindi} \quad \cos \vartheta - \cos \vartheta_0 &= 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2}} \right). \end{aligned}$$

Ricordando che $\frac{\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2}} = x$, si ha :

$$\cos \vartheta - \cos \vartheta_0 = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} (1 - x^2),$$

e quindi $\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2}$.

Se ora ricordiamo che $2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2} = \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{d\vartheta}{dx}$ si ottiene

$$\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{d\vartheta}{dx} \quad \text{e quindi}$$

$$(10) \quad \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{d\vartheta}{dx}.$$

Dalla (10) si ha

$$\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta_0}{2}} \frac{d\vartheta}{dx}}.$$

Ponendo $\operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2} = k$, e ricordando che $\frac{\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\vartheta_0}{2}} = x$, si ottiene infine

$$(11) \quad \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2} \frac{d\vartheta}{dx}.$$

Sostituiamo la (11) nella (5) e ricordiamo che i valori che la variabile x assume agli estremi dell'arco AB sono rispettivamente $x = 0$ e $x = 1$: si rivedano le (2). Si ottiene :

$$T' = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \frac{dx}{d\vartheta} d\vartheta$$

cioè (12)
$$T' = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ove $0 \leq x < 1$ e $k = \text{sen} \frac{\vartheta_0}{2}$.

La (12) è un integrale ellittico di prima specie e ci dà la trasformazione dell'integrale (5) che volevamo avere.

Il coefficiente k che compare nella (12) è detto modulo dell'integrale ellittico.

La (11) coincide con la (9) del paragrafo N. 8, basta sostituire la variabile di integrazione x con ξ .

Come abbiamo detto in questo paragrafo, la funzione integrando

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

è sommabile nell'intervallo $[0,1]$ e si ha

(13)
$$\begin{aligned} T' &= \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \end{aligned}$$

L'integrale (13) è già stato risolto operando la sostituzione $x = \sin \varphi$, come indicato a partire dalla (10) del N. 8, e ciò ha permesso di trovare sia T' che il periodo di oscillazione $T = 4 T'$. Si è visto che si ha :

$$T = T_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sin^{2n} \frac{\vartheta_0}{2} \right\}, \quad \text{ove } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Per finire, facciamo vedere che il coefficiente $k = \sin \frac{\vartheta_0}{2}$ si può esprimere come rapporto di due grandezze geometriche. Infatti se indichiamo con h la quota raggiunta dalla sferetta nei punti A e B, si ha

$$h = \ell - \ell \cdot \cos \vartheta_0 \quad \rightarrow \quad h = \ell(1 - \cos \vartheta_0) \quad h = 2\ell \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}$$

da cui $\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} = k^2 = \frac{h}{2\ell}$ cioè (14) $\sin \frac{\vartheta_0}{2} = k = \sqrt{\frac{h}{2\ell}}$

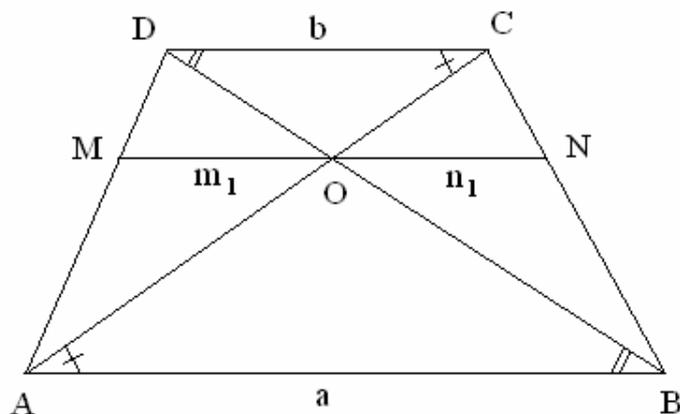
Dalla (14) risulta evidente che $0 < k < 1$.

Per trovare il periodo T del pendolo dato dalla (14), basta tornare alla (10) del paragrafo N. 8 e ripetere parola per parola la dimostrazione.

N.-10 Problema di geometria piana

Finiamo vedendo un problema di geometria piana che trovai molto interessante agli inizi della mia carriera di insegnante.

E' dato un trapezio scaleno ABCD; le misure della base maggiore e della base minore sono rispettivamente $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$. Dal punto di intersezione O delle diagonali AC e BD si conduca la parallela alle due basi e siano M ed N i punti di intersezione con i lati obliqui del trapezio (fig. 5-7). Si trovi la misura della corda MN in funzione di a e b .



Poniamo

$$\overline{OM} = m_1 \quad \overline{ON} = n_1$$

Fig. 5-7

Dalla similitudine dei triangoli (DOC) e (AOB) si ha la proporzione

$$\overline{DC} : \overline{AB} = \overline{DO} : \overline{OB} \text{ , cioè (1) } \quad \frac{b}{a} = \frac{\overline{DO}}{\overline{OB}} \text{ .}$$

Dalla similitudine dei triangoli (DMO) e (DAB) si ha la proporzione

$$(2) \quad \frac{m_1}{a} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DB}} \text{ .}$$

Dalla similitudine dei triangoli (BDC) e (BON) si ha la proporzione

$$(3) \quad \frac{b}{n_1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} \text{ .}$$

Moltiplicando membro a membro le eguaglianze (2), (3) si ha

$$\frac{m_1}{a} \cdot \frac{b}{n_1} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} \text{ , da cui (4) } \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{\overline{DO}}{\overline{BO}} \text{ .}$$

Ricordiamo che per la (1) si ha $\frac{b}{a} = \frac{\overline{DO}}{\overline{OB}}$;

sostituendo nella (4) si ha: (5) $\frac{\overline{DO}}{\overline{OB}} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{\overline{DO}}{\overline{BO}}$.

Dalla (5) si ottiene $\frac{m_1}{n_1} = 1$, cioè (6) $m_1 = n_1$, ossia $\overline{MO} = \overline{ON}$,

e questo risultato è già di per sé notevole.

Riprendendo la (3) si ha: $\frac{b}{n_1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}}$,

da cui $\frac{b}{n_1} = \frac{\overline{BO} + \overline{OD}}{\overline{BO}}$, cioè (7) $\frac{b}{n_1} = 1 + \frac{\overline{OD}}{\overline{BO}}$.

Ma come abbiamo visto dalla (1) si ha $\frac{\overline{OD}}{\overline{BO}} = \frac{b}{a}$;

sostituendo nella (7) si ottiene:

$$\frac{b}{n_1} = 1 + \frac{b}{a} \quad \text{e da questa si ricava (8) } \frac{b}{n_1} = \frac{a+b}{a}.$$

Prendendo i reciproci di ambo i membri della (8) si ha:

$$\frac{n_1}{b} = \frac{a}{a+b}, \quad \text{cioè} \quad n_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

Poiché $\overline{MN} = m_1 + n_1 = 2n_1$, si ottiene infine:

$$\overline{MN} = \frac{2ab}{a+b}.$$