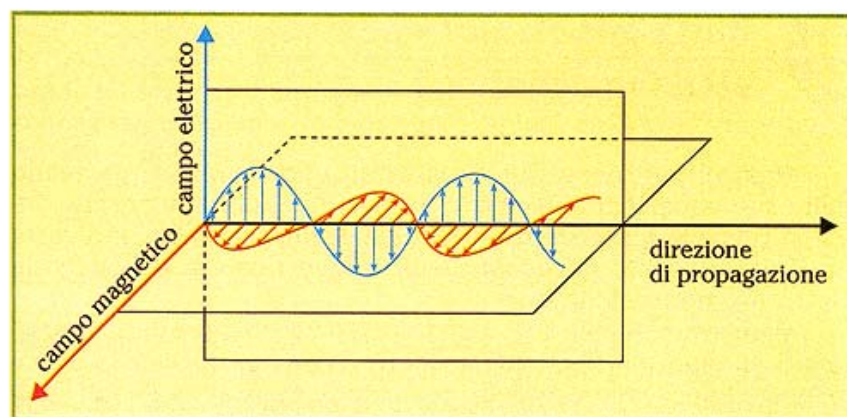


Nazario Magnarelli

ONDE ELETTROMAGNETICHE



Ringrazio l'amico Prof. Carlo Sintini per i suoi utili consigli, per i suggerimenti e la cura da lui posta nella scrittura del testo e nell'esecuzione delle figure.

*A mio figlio Lorenzo che mi ha
sostenuto, con il suo favorevole
giudizio, nella scelta degli argomenti
trattati nel presente lavoro e nella
impostazione generale dell'opera.*

PREFAZIONE

In questo lavoro abbiamo esposto la teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche sulla base delle equazioni di Maxwell e la covarianza di queste equazioni per trasformazioni di Lorentz. Un capitolo a parte è dedicato alla propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo conduttore, mentre in un altro capitolo abbiamo presentata l'interpretazione di alcuni fenomeni luminosi sulla base della teoria elettromagnetica della luce. Abbiamo infine esposto la teoria di Bohr-Sommerfeld sulla struttura dell'atomo limitandoci ad approfondire la parte, concettualmente più difficile, che riguarda la dinamica di un sistema di punti materiali e le condizioni di quantizzazioni dell'energia.

In appendice abbiamo presentato i vari operatori differenziali, allo scopo di mostrare la loro efficacia nel semplificare taluni procedimenti matematici legati al calcolo differenziale. Per uno studio più completo della Cinematica del punto e delle proprietà geometriche delle curve (curvatura, torsione, piano osculatore, evoluta, etc.) il lettore può consultare il testo "Equazioni differenziali e proprietà geometriche delle curve dei proff. N. Magnarelli e C. Sintini.

Latina, Maggio 2003

Nazario Magnarelli

BIBLIOGRAFIA

- 1) E. Perucca - Fisica generale voll. I e II, UTET.
- 2) E. Amaldi - Fisica sperimentale parte II – Litografia Marves - Roma
- 3) C. Mencuccini - V. Silvestrini, Fisica II, Liguori Editore - Napoli.
- 4) D. Sette - Lezioni di Fisica vol. III, Veschi – Roma.
- 5) A. Rostagni - Fisica generale, Vol. II parte 1^a – UTET.
- 6) A. Bandini Buti - L'atomo, Editoriale Delfino - Milano
- 7) A. Caforio - A. Ferilli, Physica voll. II e III, Le Monnier.

INDICE

CAPITOLO PRIMO	10
ONDE ELETTROMAGNETICHE	10
N. 1 – Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche	10
N. 2 – Onde elettromagnetiche piane nei dielettrici.	14
N. 3 - Sulla costante c delle onde elettromagnetiche	22
N. 4 – Intensità di radiazione delle onde elettromagnetiche	26
N. 5 –Teorema di Poynting	30
N. 6 – Energia irradiata da una carica o da un sistema di cariche elettriche in movimento.	34
N. 7 - Interdipendenza matematica delle equazioni di Maxwell	37
N. 8 - Potenziali del campo elettromagnetico	41
CAPITOLO SECONDO	48
INVARIANZA DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL	48
N. 1 - Richiami sui principi della Dinamica classica	48
N. 2 - Principio di Relatività	49
N. 3 - Invarianza del II Principio della Dinamica per trasformazioni galileiane	50
N. 4 -Velocità di una particella in due sistemi di riferimento.....	54
N. 5 - Considerazioni preliminari sulla covarianza delle equazioni di Maxwell	59
N. 6 - Covarianza della terza equazione di Maxwell; 1 ^a parte.....	60
N. 7 - Covarianza della quarta equazione di Maxwell; 1 ^a parte	65
N. 8 - Covarianza della seconda e della terza equazione di Maxwell.70	
N. 9 - Covarianza della prima e della quarta equazione di Maxwell. 76	
N. 10 – Non invarianza delle equazioni di Maxwell per trasformazioni di Galileo.....	82
CAPITOLO TERZO	87
LE ONDE IN UN CONDUTTORE	87
N. 1 - Propagazione di un'onda elettromagnetica piana in un.....	87
conduttore.	87
N.2- Velocità delle onde elettromagnetiche in un conduttore	97

N.3- Sulle ampiezze dei vettori \vec{E} ed \vec{H} di un'onda elettromagnetica piana che si propaga in un conduttore.....	98
N.4- Problemi di applicazione	101
N. 5 – Intensità di una radiazione luminosa in una lastra di rame ...	104
N.6- Unità di misura di alcune costanti fisiche.....	107
N. 7 - Le onde elettromagnetiche in un conduttore	109
N. 8 – Nota sulla propagazione di onde elettromagnetiche piane...	114
CAPITOLO QUARTO	118
LA LUCE	118
N. 1 – Interferenza della luce.....	118
N. 2 – La polarizzazione di onde luminose.....	124
N. 3 – Sovrapposizione di onde polarizzate. Polarizzazione ellittica e circolare.....	128
TEORIA DEI QUANTI.....	134
N. 4 – Emissione e assorbimento dell'energia radiante.....	134
N. 5 – Effetto fotoelettrico (Hertz-Hallwachs)	135
N. 6 – Esempio di errata interpretazione dell'effetto fotoelettrico ..	139
N. 7 – Interpretazione quantistica dell'effetto fotoelettrico.....	140
CAPITOLO QUINTO	143
STRUTTURA DELLA MATERIA	143
N. 1 - Necessità di una struttura atomica della materia	143
N. 2 – Modello atomico di Rutherford.....	144
N. 3 – Incongruenze del modello atomico di Rutherford; modello di Bohr.....	145
N. 4 – Teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno; calcolo delle orbite.	148
N. 5 – L'elettrone dell'atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale	151
N. 7 – Principio di Pauli.....	154
N. 8 – Equazioni della dinamica di un sistema di punti materiali ...	155
N. 9 – Equazioni del moto in forma lagrangiana	156
N. 10 – Equazioni lagrangiane di un sistema olonomo	157
N. 11 - Il sistema lagrangiano nello studio del moto di un pendolo composto	158
N. 12 – Le condizioni di Sommerfeld.....	161
N. 13 – La quantizzazione di Sommerfeld nel caso di un oscillatore lineare.....	164
N. 14 – Traiettoria di un elettrone in un atomo e sua equazione polare	168
N. 15 – Energia delle orbite ellittiche degli elettroni.....	172

N. 16 – La quantizzazione di Sommerfeld nel caso di un moto centrale	177
N. 17 -Condizione di quantizzazione (A)	179
N. 18 - Condizione di quantizzazione (B)	179
N. 20 – Condizione di quantizzazione (C).....	184
N. 21 – Teoria di Sommerfeld per l’atomo di idrogeno	185
N. 22 – Numero quantico di spin	191
N. 23 – Riflessione sui numeri quantici.....	192
N. 24 - Tabella dei numeri quantici	195
APPENDICE A.	196
RIASSUNTO DELLE EQUAZIONI DEL CAMPO	
ELETTROMAGNETICO.	196
N. 1 – Teorema di Gauss in forma differenziale.....	196
N. 2 – Principio di conservazione della carica elettrica ed equazione di continuità.....	198
N. 3 – Densità di corrente e velocità di deriva degli elettroni.	200
Problema di applicazione.....	201
N. 4 – Forma differenziale della legge di Neumann.....	203
N. 5 – Proprietà del vettore induzione magnetica \vec{B}	205
N. 6 – Teorema della circuitazione di Ampère.	206
N. 7 – La quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario. ..	208
N. 8 – Introduzione della densità di corrente di spostamento.....	211
APPENDICE B.....	215
REGOLE DI CALCOLO VETTORIALE.	215
N. 1 – Prodotto scalare di due vettori \vec{A} e \vec{B}	215
N. 2 – Prodotto vettoriale dei due vettori \vec{A} e \vec{B}	215
N. 3 – Operatore “nabla” = $\vec{\nabla}$	216
N. 4 – Divergenza di un vettore \vec{A}	216
N. 5 – Rotore di un vettore \vec{A}	217
N. 6 – Verificare l’identità.....	219
N. 7 – Significato del simbolo ∇^2 , detto “nabla quadro” o anche “operatore laplaciano”.	220
N. 8 – Identità vettoriale.	221
N. 9 – Seconda identità vettoriale.....	222
N. 10 – Terza identità vettoriale.	224
N. 11 – Espressione cartesiana di un operatore differenziale.	226
N. 12 – Relazione fra gradiente, rotore e nabla.	227
ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE.....	230
N. 1 – Traiettoria di un punto mobile	230

N. 2 – Curvatura di una linea	231
N. 4 – Torsione (o seconda curvatura) di una linea	238
N. 6 – Piano osculatore ad una curva.....	243
APPENDICE D	249
ARGOMENTI VARI	249
N. 1 – Equazione del moto di un pendolo composto	249
N. 2 - Problema geometrico	253
N. 3 – Un problema sulle età di due persone	254

CAPITOLO PRIMO ONDE ELETTROMAGNETICHE.

N. 1 – Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche

Vogliamo dimostrare la più importante e generale fra le conseguenze delle equazioni di Maxwell. Precisamente, un campo elettromagnetico rapidamente variabile produce nello spazio onde sferiche elettromagnetiche che si propagano nello spazio con velocità finita e ad esse è associato un trasporto di energia (Perucca, pg. 850, Amaldi pg. 445).

Supponiamo che una regione dello spazio sia riempita da una sostanza isolante (*conduttività* $\sigma = 0$), omogenea e isotropa, di costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ [$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$].

Supponiamo che la regione considerata sia sede di un campo elettromagnetico variabile e che in essa non vi siano cariche elettriche né ferme ($\rho = 0$), né in movimento ($\vec{J} = 0$).

In queste condizioni possiamo considerare solo quattro equazioni di Maxwell e precisamente:

$$\text{I)} \quad \text{div} \vec{E} = 0 \quad ,$$

$$\text{II)} \quad \text{div} \vec{H} = 0$$

$$\text{III)} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad ,$$

$$\text{IV)} \quad \text{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad .$$

ove, per es.

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} .$$

Applichiamo all'equazione III l'operatore di rotore e teniamo presente che esso si può scambiare con l'operazione di derivata; si ha:

$$\text{rot} \text{ rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} \quad .$$

Dalla IV, derivando rispetto al tempo si ha:

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$$

Confrontando le ultime due equazioni si ha :

$$\text{rot} \text{ rot} \vec{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} ,$$

ossia $\text{grad} \text{ div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$

Tenendo presente che $\text{div} \vec{E} = 0$ si ha $\text{grad} \text{ div} \vec{E} = 0$, e quindi dalla relazione precedente si ottiene:

$$(1) \quad \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$$

Riprendiamo le equazioni di Maxwell. Applicando l'operazione di rotore all'equazione IV si ha:

$$\text{rot} \text{ rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{E} ;$$

moltiplicando l'equazione III per la costante ε e derivando rispetto al tempo si ha:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} .$$

Confrontando le ultime due equazioni si ha:

$$\text{rot} \text{ rot} \vec{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} ,$$

ossia $\text{grad} \text{ div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} .$

Tenendo presente che $\text{div} \vec{H} = 0$ si ha $\text{grad div} \vec{H} = 0$, e quindi dall'equazione precedente si ha:

$$(2) \quad \nabla^2 \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Le (1), (2) forniscono il sistema di equazioni vettoriali

$$(3), (4) \quad \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases}$$

In forma cartesiana le equazione (3) e (4) danno le equazioni vettoriali:

$$(5), (6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases}$$

La (5) si scinde nelle tre equazioni scalari,

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Analogamente la (6) si scinde nelle equazioni scalari,

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Le (5') sono analoghe all'equazione di D'Alembert, che dà la propagazione delle onde in una corda. Esse definiscono la propagazione nello spazio delle componenti E_x, E_y, E_z del campo elettrico \vec{E} . Per le equazioni (6') possiamo fare le stesse considerazioni. Pertanto le (5), (6) rappresentano le equazioni della propagazione per onde del campo elettromagnetico.

Dobbiamo rilevare che la deduzione delle equazioni (5), (6) dalle equazioni generali del campo elettromagnetico è rigorosa, cioè non è subordinata ad alcuna approssimazione. Ciò significa che la propagazione delle onde elettromagnetiche è rappresentata senza limitazioni dalle equazioni differenziali lineari scritte, a differenza di quanto avviene per le onde elastiche e in genere meccaniche, per le quali si pone la condizione iniziale che gli spostamenti dei punti materiali interessati siano piccoli, perché in caso contrario si ottengono equazioni differenziali non lineari di difficili soluzioni (vedi A. Rostagni, Fisica generale, vol. II parte 1^a pag. 446: UTET).

N. 2 – Onde elettromagnetiche piane nei dielettrici.

Consideriamo ancora una regione di spazio e supponiamo che essa sia riempita da una sostanza isolante (*conduttività* $\sigma = 0$) omogenea e isotropa, di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ $[\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \mu = \mu_0 \mu_r]$.

Supponiamo che la regione considerata sia sede di un campo elettromagnetico rapidamente variabile e che in essa non vi siano cariche elettriche né ferme ($\rho = 0$), né in movimento ($\vec{J} = 0$).

In queste condizioni possiamo considerare solo quattro equazioni di Maxwell e precisamente:

$$\text{I)} \quad \text{div} \vec{E} = 0,$$

$$\text{II)} \quad \text{div} \vec{H} = 0$$

$$\text{III)} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\text{IV)} \quad \text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Per quanto riguarda l'operatore vettoriale rotore si ricordi che:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Vogliamo studiare le equazioni di Maxwell nel caso particolare di onde piane (si veda Edoardo Amaldi, Fisica Sperimentale II, pag. 445; Litografia Marves, Roma):

Fissiamo quindi un riferimento cartesiano Oxyz e supponiamo che il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{H} siano funzioni solo della variabile x e del tempo, cioè non dipendano da y e z . Ciò significa che il campo elettromagnetico si propaga lungo l'asse x e che, fissato un piano ortogonale a tale asse, i vettori \vec{E} ed \vec{H} hanno lo stesso valore su tutti i punti del piano al variare del tempo (fig. 1-1).

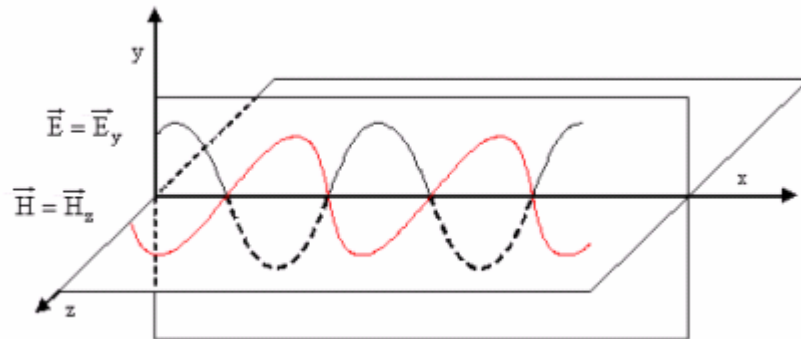


Figura 1-1

Ora, imporre che \vec{E} ed \vec{H} dipendano solo dalle variabili x ed t significa porre uguale a zero tutte le derivate parziali rispetto ad y e z che compaiono nella forma scalare delle equazioni di Maxwell.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial z}} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \qquad \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial z}} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial z}} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} .$$

Annullando le derivate parziali rispetto a y e rispetto a z , queste equazioni scalari si riducono a:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$(a) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad (b) \quad \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$(c) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (d) \quad \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} .$$

Le prime quattro equazioni ci dicono che E_x e H_x sono costanti sia rispetto a x che rispetto al tempo; quindi si ha:

$$E_x = \text{cost}_1 \qquad H_x = \text{cost}_2 .$$

Dato che il campo elettrico e il campo magnetico giacciono sempre in piani ortogonali all'asse x , queste costanti sono nulle, cioè $\text{cost}_1 = \text{cost}_2 = 0$; possiamo quindi affermare che le onde elettromagnetiche sono puramente trasversali.

Rimangono ancora quattro equazioni:

$$\begin{aligned} \text{due di esse} \quad [(a) \text{ e } (b)] & \text{ legano } E_z \text{ ad } H_y, \\ \text{le altre due} \quad [(c) \text{ e } (d)] & \text{ legano } E_y \text{ ad } H_z . \end{aligned}$$

Per semplificare ancora di più lo studio, consideriamo un caso particolare di onda piana, e cioè l'onda polarizzata linearmente:

essa si ottiene imponendo che il campo elettrico \vec{E} vibri sempre parallelamente ad una certa direzione, per esempio quella dell'asse y . Possiamo quindi porre:

$$\vec{E} = \vec{E}_y , \quad \text{mentre } E_z = 0 \qquad (\text{già era } E_x = 0) .$$

Se ora nelle equazioni (a), (b) poniamo $E_z = 0$ si ottiene:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 ;$$

ciò vuol dire che H_y , cioè la componente del campo magnetico nella direzione dell'asse y , è costante e quindi essa si può porre uguale a zero senza che il fenomeno che a noi interessa sia minimamente alterato, dato che i campi \vec{E} ed \vec{H} dipendono solo da x e da t .

Riassumendo si ha:

$$(1) \quad H_x = H_y = 0, \quad H_z \neq 0 \quad \text{ed} \quad E_x = E_z = 0, \quad E_y \neq 0.$$

Possiamo quindi porre:

$$(2) \quad \vec{E} = \vec{E}_y(x, t) \quad \vec{H} = \vec{H}_z(x, t).$$

Le (1), (2) ci dicono che in un'onda polarizzata linearmente i vettori \vec{E} ed \vec{H} sono ortogonali fra loro e alla direzione di propagazione delle onde, presa coincidente con l'asse x ; inoltre, se si prende l'asse y nella direzione del vettore \vec{E} (quindi $\vec{E} = \vec{E}_y$), allora il campo magnetico \vec{H} risulta automaticamente nella direzione dell'asse z ($\vec{H} = \vec{H}_z$).

Rimangono da considerare le altre due equazioni (c) e (d); ossia:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t , dopo averla moltiplicata per la costante μ , si ha:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \cdot \partial x}, \quad \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \cdot \partial t}.$$

Eguagliando membro a membro si ottiene:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

ponendo $1/\sqrt{\epsilon \mu} = v$ si ha:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

L'espressione più esplicita di v è:

$$(5) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \text{ si è posto } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Se riprendiamo le equazioni (c), (d) e deriviamo la prima rispetto a t , dopo averla moltiplicata per la costante ε , e la seconda rispetto a x , si ottiene:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \cdot \partial t} = -\varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \cdot \partial x} = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}.$$

Eguagliando membro a membro si ha :

$$(6) \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad \text{ove } \frac{1}{v^2} = \varepsilon \mu.$$

Sia la (5) che la (6) rappresentano la ben nota equazione del differenziale del moto ondoso in una dimensione; esse sono dette equazioni delle onde.

E' facile verificare che qualsiasi funzione della forma;

$$E_y(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

soddisfa l'equazione (5).

Limitiamoci a prendere in considerazione la funzione f_1 . Con derivazioni successive si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{1}{v} f_1' & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} f_1'' \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= f_1' & \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= f_1'' \end{aligned}$$

Sostituendo la seconda e quarta derivata nella (3) si ha:

$$\frac{1}{v^2} f_1'' = \varepsilon \cdot \mu f_1'' .$$

Possiamo così dire che $f_1(t - x/v)$ rappresenta una soluzione dell'equazione (3) purché sia soddisfatta la condizione $v = 1/\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$.

Facciamo ora vedere che la funzione $f_1(t - x/v)$ rappresenta un'onda che si propaga rigidamente nel verso positivo dell'asse x (onda progressiva). Infatti, consideriamo due punti dell'asse x di ascisse x_1 e x_2 agli istanti t_1 e t_2 e nei quali l'onda assume elongazioni uguali. Deve essere allora:

$$f_1(t_1 - x_1/v) = f_2(t_2 - x_2/v) ;$$

ne segue che gli argomenti debbono essere uguali, ossia;

$$t_1 - \frac{x_1}{v} = t_2 - \frac{x_2}{v} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{v}(x_2 - x_1) = t_2 - t_1 .$$

Si deduce che se $t_2 > t_1$ anche $x_2 > x_1$, cioè l'onda si propaga nel verso positivo dell'asse x con velocità $v = \Delta x / \Delta t$.

Analogamente $f_2(t + x/v)$ rappresenta un'onda che si propaga rigidamente nel verso negativo dell'asse x (onda regressiva).

Consideriamo ancora una volta le equazioni

$$(c) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (d) \quad \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} .$$

Ognuna di esse contiene una importante informazione che riguarda il rapporto delle componenti E_y ed H_z dei vettori \vec{E} ed \vec{H} . Basta trovarne una sola. Limitiamoci al caso delle onde progressive, senza perdere

in generalità. Ponendo $t - x/v = \xi$ troviamo le espressioni:

$$E_y(x, t) = E_y\left(t - \frac{x}{v}\right) = E_y(\xi),$$

$$H_y(x, t) = H_z\left(t - \frac{x}{v}\right) = H_z(\xi) .$$

Derivando si ha:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{quindi (7)} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{dE_y}{d\xi}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{dH_z}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{quindi (8)} \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{dH_z}{d\xi} .$$

Sostituendo le (7), (8) nell'equazione (c) si ha:

$$-\frac{1}{v} \frac{dE_y}{d\xi} = -\mu \frac{dH_z}{d\xi} ,$$

$$\text{da cui (9)} \quad \frac{dE_y}{d\xi} = \mu \cdot v \frac{dH_z}{d\xi} .$$

Integrando membro a membro questa semplice equazione differenziale si ottiene

$$E_y(x, t) = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} H_z(x, t) + \text{cost} .$$

Possiamo porre la costante uguale a zero perché il campo E_y non ha componenti costanti; si ottiene così:

$$(10) \quad E_y\left(t - \frac{x}{v}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot H_z\left(t - \frac{x}{v}\right) ,$$

o se si vuole:

$$(11) \quad \frac{E_y}{H_z} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = Z \quad .$$

La costante Z si dice impedenza caratteristica del mezzo.

Se il mezzo in cui si propagano le onde elettromagnetiche è il vuoto si ha $\mu_r = \varepsilon_r = 1$; in tal caso si ha la seguente relazione (12):

$$\frac{E_y}{H_z} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,859 \cdot 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{125,663}{8,859} \cdot 10^4} = 377 \text{ Ohm} \quad .$$

Il fatto che il rapporto Z_0 fra il campo elettrico e il campo magnetico nel vuoto abbia le unità di misura di una resistenza dipende esclusivamente dal particolare sistema di misura usato e non nasconde alcun fatto importante dal punto di vista di interpretazione del fenomeno.

La (10) ci dà una particolare soluzione dell'equazione di Maxwell. Essa rappresenta un'onda elettromagnetica propagatesi nella direzione positiva dell'asse x , tale che il vettore intensità del campo elettrico \vec{E} sia ovunque parallelo all'asse y e il vettore intensità del campo magnetico \vec{H} sia ovunque parallelo all'asse z : l'onda è perciò polarizzata linearmente e la possiamo rappresentare come in (fig. 1-2).

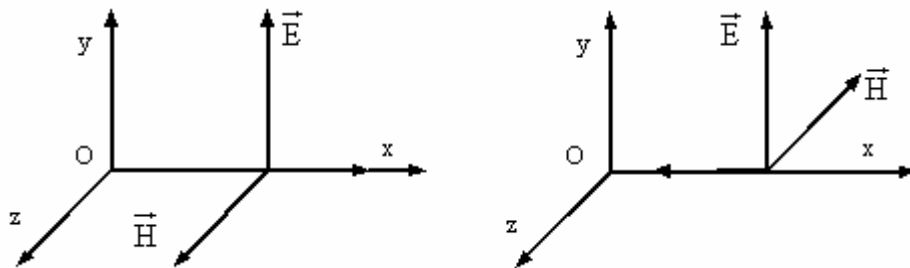


Figure 1-2 e 1-3

I vettori \vec{E} e \vec{H} possono essere anche rappresentati come in (fig. 1-3), che rappresenta un'onda polarizzata linearmente che si propaga nella direzione negativa dell'asse x ; ma non è necessario soffermarsi su questo caso e su altri.

Per l'esame di questi casi si può consultare il testo: Bruno Rossi, Ottica pag. 353, Casa Ed. Masson; Milano.

In pratica uno dei casi più importanti è quello in cui la funzione $E_y(x, t)$ considerata è sinusoidale; infatti una funzione periodica si può rappresentare, grazie al teorema di Fourier, come somma di un grandissimo numero di onde sinusoidali. In tal caso le onde date dai vettori \vec{E} e \vec{H} avranno le espressioni:

$$(13) \quad \vec{E}(x, t) = \vec{E}_{y0} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) ;$$

$$(14) \quad \vec{H}(x, t) = \vec{H}_{z0} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) .$$

Se i campi vettoriali \vec{E} e \vec{H} sono funzioni sinusoidali, come nel caso detto, la (12) si riduce più semplicemente ad una relazione fra le ampiezze delle onde (E. Perucca, Fisica II, pag. 853), cioè:

$$(15)_1 \quad E_{y0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{z0} \quad \text{da cui} \quad (15)_2 \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{H_{z0}}{E_{y0}} .$$

N. 3 - Sulla costante c delle onde elettromagnetiche

Vogliamo trovare il valore e la dimensione della costante c che compare nell'equazione delle onde elettromagnetiche; ricordiamo che abbiamo posto $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$. Troviamo anzitutto le unità di misura della costante c nel sistema MKSA.

A tale proposito, si ricordi che un filo rettilineo percorso da una corrente di intensità i genera, in un punto a distanza r dal filo, un campo di induzione magnetica dato dalla formula:

$$(1) \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} \quad \text{legge di Biot - Savart} .$$

Per la permeabilità magnetica μ_0 del vuoto si ricava l'espressione:

$$(2) \quad \mu_0 = 2\pi \cdot B_0 \frac{i}{r} .$$

Ricordiamo anche la seconda formula di Laplace: se un filo di lunghezza ℓ , percorso da una corrente di intensità i è disposto perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico di induzione magnetica \vec{B}_0 , esso è soggetto ad una forza di modulo:

$$F = i\ell B_0 \quad \text{da cui} \quad (3) \quad B_0 = \frac{F}{i\ell} .$$

Sostituendo la (3) nella (2) si trova:

$$(4) \quad \mu_0 = 2\pi \frac{F}{i\ell} \cdot \frac{r}{i} .$$

Questa espressione ci permette di trovare le unità di misura della permeabilità magnetica μ_0 . Nel sistema MKSA si ha:

$$[\mu_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Newton} \cdot \text{metro}}{(\text{ampère})^2 \cdot \text{metro}} .$$

Sempre nel sistema MKSQ, le unità di misura della costante dielettrica assoluta ϵ_0 del vuoto sono:

$$[\epsilon_0]_{\text{MKSA}} = \text{Farad/metro} .$$

Possiamo ora trovare le unità di misura della costante $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$; ricordando le unità di misura di ϵ_0 e μ_0 si ha:

$$[\epsilon_0 \mu_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Farad}}{\text{metro}} \cdot \frac{\text{Newton} \cdot \text{metro}}{(\text{ampère})^2 \cdot \text{metro}} ,$$

$$[\varepsilon_0 \mu_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt} \cdot \text{metro}} \cdot \frac{\text{Joule}}{(\text{Coulomb/sec})^2 \cdot \text{metro}} ,$$

$$[\varepsilon_0 \mu_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\cancel{\text{Coulomb}}}{\cancel{\text{Volt}} \cdot \text{metro}} \cdot \frac{\cancel{\text{Coulomb}} \cdot \text{Volt} \cdot \text{sec}^2}{\cancel{\text{Coulomb}} \cdot \cancel{\text{Coulomb}} \cdot \text{metro}} ,$$

$$[\varepsilon_0 \mu_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{sec}^2}{\text{metro}^2} , \quad \text{infine,}$$

$$c = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{metro}}{\text{sec}} .$$

Quindi la costante c ha le dimensioni di una velocità.
Per il suo valore nel sistema MKSQ si ha:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,859 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}}} = \frac{10^{10}}{\sqrt{1113,253882}} ,$$

$$c = \frac{10^{10}}{33,3654} = 0,0299711 \cdot 10^{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

infine $c = 299.711 \text{ Km/s}$.

Conclusione: nel vuoto la velocità delle onde elettromagnetiche è uguale alla velocità della luce.

Partendo da questa osservazione Maxwell ha potuto stabilire che **la luce è costituita da onde elettromagnetiche di particolare lunghezza d'onda λ** ($\lambda \approx 4 \div 7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$). Questa conclusione è un dato comprovato dagli esperimenti e quindi si deve ritenere definitivamente acquisito. Dalla formula

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_{y0} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

vista nel paragrafo precedente, possiamo ricavare che la lunghezza delle onde elettromagnetiche nel vuoto è

$$\lambda = c T \quad .$$

In un generico dielettrico le onde elettromagnetiche si propagano con velocità $v \neq c$ e la loro lunghezza d'onda è:

$$\lambda' = v T \quad .$$

Possiamo dire pertanto:

“ la lunghezza λ di un'onda elettromagnetica, o di una radiazione luminosa monocromatica, varia quando essa passa dal vuoto ad un dielettrico, o da un dielettrico ad un altro; il periodo T e la frequenza $f = \frac{1}{T}$ restano invece invariati “. Per questo motivo è più opportuno indicare le onde luminose ed elettromagnetiche per mezzo della loro frequenza che non per mezzo della loro lunghezza.

Infine ricordiamo che **la velocità di propagazione delle onde luminose in un dato mezzo trasparente dipende della loro frequenza**, ossia dal loro colore; e precisamente le radiazioni luminose che hanno frequenza maggiore delle altre, si propagano con velocità minore di queste.

Per la dimostrazione **basta ricordare che l'indice di rifrazione assoluto n di un mezzo trasparente cresce, con il colore della luce, dal rosso al violetto**.

Ma esso è anche inversamente proporzionale alla velocità della radiazione nel mezzo, come indica nota la formula,

$$n = \frac{c}{v} \quad .$$

Ne segue che **nei mezzi trasparenti le radiazioni luminose che hanno indice di rifrazione maggiore si propagano con velocità minore**. **Ma le radiazioni luminose che hanno indice di rifrazione maggiore (rispetto alle altre) sono quelle che hanno maggiore frequenza ; si conclude che queste radiazioni sono quelle che nei mezzi trasparenti si propagano con minore velocità**.

Ricordiamo che se ordiniamo le radiazioni luminose in ordine di frequenza crescente si hanno i colori: rosso, arancione, giallo, verde, azzurro, indaco, violetto.

Teniamo anche presente che la lunghezza d'onda di una radiazione è inversamente proporzionale alla frequenza; infatti dalla formula

$$\lambda = c T \quad \text{si ricava} \quad \lambda = c / f ;$$

ne segue che al crescere della frequenza di una radiazione diminuisce la sua lunghezza d'onda.

N. 4 – Intensità di radiazione delle onde elettromagnetiche.

Vogliamo calcolare l'energia che un'onda elettromagnetica trasporta in un secondo attraverso l'unità di superficie disposta ortogonalmente alla direzione di propagazione; essa si dice intensità di radiazione.

Riferiamoci ancora ad un'onda piana.

In un certo istante t la densità di energia del campo elettromagnetico è:

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 .$$

Sostituendo le espressioni che già conosciamo dei campi E ed H si ha:

$$(2) \quad W = \frac{1}{2} \varepsilon E_{y0}^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{2} \mu H_{z0}^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) ,$$

ove v è la velocità di propagazione delle onde nel mezzo considerato.

Poiché $H_{z0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{y0}$, sostituendo nella (2) si ricava, per la densità di energia W , un'espressione che è funzione del solo campo elettrico. Infatti si ha:

$$(3) \quad W = \frac{1}{2} \varepsilon E_{y0}^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{2} \mu \frac{\varepsilon}{\mu} E_{y0}^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) .$$

I due addendi di questa sono uguali, quindi la densità di energia del campo magnetico è uguale alla densità di energia del campo elettrico. La densità complessiva dell'energia è:

$$(4) \quad W = \varepsilon E_{y0}^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) .$$

Come si vede, essa è una funzione periodica dell'argomento $t - \frac{x}{v}$; ciò significa che anche l'energia si propaga con velocità v nel verso stesso in cui si propaga il campo elettromagnetico corrispondente.

Inoltre, siccome la densità di energia W varia sia in funzione del tempo che in funzione di x , anche l'energia che incide una superficie unitaria in un secondo varia.

Calcoliamo allora il valore medio \overline{W} della densità di energia che attraversa l'unità di superficie in un secondo. Moltiplicando questo valore medio \overline{W} per la velocità di propagazione v dell'energia avremo l'energia media che un'onda elettromagnetica trasporta in un secondo attraverso la superficie di 1 m^2 disposta ortogonalmente alla direzione di propagazione delle onde: cioè avremo l'intensità di radiazione. Passando ai calcoli si ha:

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon E_{y0}^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right) dt = \frac{1}{T} \epsilon E_{y0}^2 \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right) dt$$

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \epsilon \cdot E_{y0}^2 \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right) \right] dt,$$

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \epsilon \cdot E_{y0}^2 \left[\frac{1}{2} T - \frac{1}{2} \int_0^T \cos \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right) dt \right].$$

Come ben sappiamo, l'integrale dentro la parentesi quadra è nullo, quindi si ricava:

$$(5) \quad \overline{W} = \frac{1}{T} \epsilon \cdot E_{y0}^2.$$

Come abbiamo già detto, l'intensità di radiazione I si ottiene moltiplicando \overline{W} per la velocità di propagazione v dell'energia; quindi:

$$(6) \quad I = \frac{1}{2} v \epsilon \cdot E_{y0}^2 \quad \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}.$$

Come si vede, la formula che dà l'intensità di radiazione I del campo elettromagnetico è perfettamente analoga a quella che dà l'intensità di vibrazione di una corda nella quale si propaghi una oscillazione trasversale.

Notiamo anche che nella (6) compare solo l'ampiezza E_{Y0} del campo elettrico e ciò è una conseguenza immediata del fatto che la densità di energia del campo elettromagnetico può essere espressa in funzione del solo campo elettrico, come indicano le formule (3) e (4) del presente paragrafo. E' per questo motivo che nello studio di un campo elettromagnetico spesso ci si limita a ricordare la sola formula del campo elettrico \vec{E} .

Se teniamo presente che $v\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$, la (6) diventa:

$$(7) \quad I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{E_{Y0}^2}{2} \quad \text{Watt/m}^2 ,$$

cioè, per l'intensità di un'onda elettromagnetica si ottiene una formula in cui compaiono le costanti ε e μ ma non la velocità delle onde.

Per la (7) possiamo ricavare altre espressioni; vediamo la prima.

Ricordando la (12)₂ del parag. N. 2

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{H_{Z0}}{E_{Y0}}$$

e sostituendo nella (7) si ha:

$$(8) \quad I = \frac{1}{2} E_{Y0} H_{Z0} \quad \text{Watt/m}^2 .$$

Ricordiamo anche che $E_{Y0}/\sqrt{2}$ è il valore efficace del campo elettrico, definito come radice quadrata del valor medio del quadrato del campo elettrico istantaneo, ossia:

$$\frac{E_{Y0}}{\sqrt{2}} = E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_{Y0}^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) dt} .$$

Infatti, procedendo nei calcoli si ha:

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T E_{Y0}^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) dt ,$$

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{E_{Y0}^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] dt ,$$

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{E_{Y0}^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{E_{Y0}^2}{2} \frac{T}{4\pi} \int_0^T \cos \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) d \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) .$$

Poiché il valore dell'integrale è nullo, si ricava:

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{E_{Y0}^2}{2} \quad \text{da cui (9)} \quad E_{\text{eff}} = \frac{E_{Y0}}{\sqrt{2}} .$$

La (9) è la formula che dà il valore efficace del campo elettrico alternato. Sostituendo nella (7) possiamo trovare una nuova espressione per l'intensità dell'onda elettromagnetica; si ha:

$$(10) \quad I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{eff}}^2 \quad \text{Watt/m}^2 .$$

Infine ricordiamo che nel vuoto, e con buona approssimazione nell'aria, si ha:

$$\varepsilon_r \approx \mu_r \approx 1 ;$$

quindi:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{377} \quad \text{Ohm}^{-1} .$$

Pertanto nel vuoto, o nell'aria, l'intensità di radiazione di un'onda piana sinusoidale, luminosa o elettromagnetica, assume le espressioni:

$$(11)_1 \quad I = \frac{1}{377} \frac{E_{Y0}^2}{2} \quad \text{Watt/m}^2 \quad (11)_2 \quad I = \frac{1}{377} E_{\text{eff}}^2 \quad \text{Watt/m}^2 .$$

Accanto ad esse ricordiamo le formule, già trovate per un dielettrico,

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{Y0}^2}{2} \quad \text{Watt/m}^2 \quad I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\text{eff}}^2 \quad \text{Watt/m}^2 .$$

Illustriamo la formula (11)₂ con un piccolo esempio.

Vicino ad un apparecchio radio il campo elettrico varia entro i limiti:

$$E_{\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-2} \quad \text{Volt/m} , \quad E_{\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-5} \quad \text{Volt/m} ;$$

si calcoli, per mezzo della (11)₂, l'intensità di radiazione del campo elettromagnetico, cioè la potenza incidente per m^2 .

$$\text{Al minimo si ha} \quad I = \frac{10^{-10}}{377} = 2,65 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-10} = 2,65 \cdot 10^{-13} \quad \text{Watt/m}^2 ,$$

$$\text{al massimo si ha} \quad I = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{377} = 6,63 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 6,63 \cdot 10^{-6} \quad \text{Watt/m}^2 .$$

N. 5 – Teorema di Poynting.

Sappiamo che ogni punto dello spazio sede di un campo elettromagnetico stazionario la densità di energia del campo elettromagnetico è data [(1) del N.4) dalla formula:

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 .$$

Possiamo ipotizzare che questa formula sia valida anche nel caso di campi elettromagnetici variabili nel tempo e possiamo far vedere che tale ipotesi è giustificata dai risultati sperimentali e dalle conseguenze teoriche che da essa scaturiscono.

Questa ipotesi ci ha già permesso di trovare la formula

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{y0}^2 \quad \text{Watt/m}^2 ,$$

la quale fornisce l'energia media che fluisce in un secondo attraverso l'unità di superficie disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione di un'onda piana sinusoidale. Questa formula va d'accordo con i dati sperimentali e già fornisce una prima giustificazione all'ipotesi avanzata. Vogliamo ora dare un'altra giustificazione, di carattere più teorico, che la (1) è ancora valida nel caso di campi elettromagnetici variabili nel tempo. Sia V il volume di una porzione di spazio di un campo elettromagnetico, finita e limitata da una superficie chiusa S costante rispetto al tempo. L'energia totale U contenuta in tale volume è:

$$(2) \quad U = \int_V W \cdot dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV .$$

È ben chiaro che resta sempre da dimostrare che U ci dia realmente l'energia anche nel caso di E ed H variabili nel tempo. Derivando questa espressione rispetto al tempo t otteniamo la variazione di energia rispetto al tempo, cioè:

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = \int_V \left(\epsilon \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV ,$$

infatti:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E} \times \vec{E}) = 2\epsilon \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 2\vec{E} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu H^2) = 2\mu \vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 2\vec{H} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Possiamo quindi scrivere la (3) anche nel modo seguente:

$$(3)' \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \left(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \quad .$$

Ma per le equazioni di Maxwell si ha:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad .$$

Per cui dalla (3)' si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \left[\vec{E} \times (\text{rot } \vec{H} - \vec{J}) - \vec{H} \times \text{rot } \vec{E} \right] dV \quad ,$$

da cui:

$$(4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \left[\vec{E} \times \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \times \text{rot } \vec{E} \right] dV - \int_V \vec{E} \times \vec{J} dV \quad .$$

Ricordiamo l'identità vettoriale:

$$\vec{E} \times \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \times \text{rot } \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) \quad .$$

Con ciò la (4) diventa:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\int_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV - \int_V \vec{E} \times \vec{J} dV \quad ,$$

ossia:

$$(5) \quad -\frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV + \int_V \vec{E} \times \vec{J} dV \quad .$$

La (5) si può ancora trasformare se ricordiamo il noto teorema della divergenza :

“Il flusso $\Phi_S(\vec{H})$ del vettore \vec{H} attraverso una superficie chiusa S è uguale all'integrale della $\text{div } \vec{H}$ esteso a tutto il volume V racchiuso da S , cioè:

$$\Phi_S(\vec{H}) = \int_S \vec{H} \times \vec{n} \, dS = \int_V \text{div } \vec{H} \, dV ,$$

ove il vettore \vec{n} è rivolto verso l'esterno della superficie, e quindi si tratta di un flusso uscente “.

Utilizzando questo teorema la (5) diventa:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV = \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \times \vec{n} \, dS + \int_V \vec{E} \times \vec{J} \, dV .$$

$$\vec{I} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \quad \text{è detto vettore di Poynting ;}$$

- dU è la diminuzione di energia del campo elettromagnetico entro il volume V nel tempo dt ; quindi:

- 1) $-\frac{\partial U}{\partial t}$ è la diminuzione di energia del campo elettromagnetico entro la porzione di spazio di volume V nell'unità di tempo.
- 2) $\int_V \vec{E} \times \vec{J} \, dv$ è il calore che si sviluppa per effetto Joule nell'unità di tempo nella materia contenuta nella porzione di spazio di volume V ; più generalmente questo tempo rappresenta la potenza elettromagnetica che si trasforma in altre forme di energia (meccanica, termica, chimica ecc. ecc.).
- 3) $\int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \times \vec{n} \, dS$ è il flusso del vettore di Poynting associato all'onda elettromagnetica attraverso la superficie S che racchiude la regione di spazio considerata.

Ora il teorema di conservazione dell'energia ci induce ad interpretare questo flusso come *flusso di energia* nell'unità di tempo; quindi $\int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \times \vec{n} \, dS$ rappresenta l'energia che l'onda elettromagnetica trasporta attraverso la superficie chiusa S nell'unità di tempo.

Analogamente il vettore $\vec{E} \wedge \vec{H}$ rappresenta il flusso di energia elettromagnetica riferita all'unità di tempo e all'unità di superficie disposta normalmente alle linee di flusso.

Evidentemente, il campo elettromagnetico (\vec{E}, \vec{H}) è anche il campo del vettore di Poynting $\vec{E} \wedge \vec{H}$ e le linee di flusso di questo vettore sono normali ad \vec{E} ed a \vec{H} e sono le linee di flusso dell'energia elettromagnetica.

Questa interpretazione del vettore di Poynting giustifica anche il significato di energia elettromagnetica dato alla funzione $U = \int_V W \, dV$ anche nel caso in cui i campi \vec{E} ed \vec{H} siano variabili con il tempo.

In sintesi, l'equazione (6) che riassume il teorema di Poynting ci dice che:

se l'energia del campo elettromagnetico contenuta in una regione T di spazio diminuisce, la variazione è dovuta o ad effetti dissipativi nella materia contenuta nella regione di spazio T o a energia che sfugge attraverso la superficie chiusa S che delimita la regione stessa.

N. 6 – Energia irradiata da una carica o da un sistema di cariche elettriche in movimento.

Abbiamo visto che la propagazione delle onde elettromagnetiche è associata ad un trasporto di energia e che l'intensità di energia, cioè l'energia media che fluisce in un secondo attraverso l'unità di superficie disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione delle onde, è data, nel caso di onde piane e sinusoidali, dalla formula:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{y0}^2 \quad \text{Watt/m}^2 \quad .$$

Orbene Larmor, partendo dalle equazione di Maxwell, ha dimostrato che anche una carica elettrica e che si muove con accelerazione a irradia energia, e precisamente l'energia irradiata in un secondo è data dalla formula:

$$(1) \quad W = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_0}{v} e^2 a^2 \quad \text{Watt} \quad ,$$

ove v rappresenta la velocità delle onde elettromagnetiche nel mezzo considerato.

La (1) si può anche scrivere nella forma:

$$(2) \quad W = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_0}{v} \ddot{M}^2 \quad ,$$

ove \vec{M} è il movimento elettrico della carica in esame, cioè il vettore dei componenti $M_x = e\xi$, $M_y = e\eta$, $M_z = e\zeta$, essendo ξ , η , ζ le coordinate della carica. Da questa componenti, infatti, subito si ricava;

$$(3) \quad \ddot{M} = e a \quad .$$

Ora, grazie al teorema di Fourier, possiamo sempre pensare che il moto della carica sia dato dalla sovrapposizione di infiniti moti armonici, e quindi possiamo limitare le nostre considerazioni al caso in cui essa oscilla sinusoidalmente lungo una retta. Le equazioni del moto sono allora:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = \ell \cdot \sin \omega t \quad .$$

derivando due volte ζ rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione a con cui si muove la carica; introducendo poi a nell'equazione (1) si ottiene l'energia che essa irradia in un secondo. Naturalmente questa energia è associata ad un'onda elettromagnetica che ha la stessa frequenza del moto della carica. Da questo fatto segue che una carica che non si muova di moto

armonico irradia tante onde elettromagnetiche quante sono le armoniche in cui si può pensare decomposto il suo moto.

È opportuno procurarci una formula utile nella pratica; a tale scopo ci conviene trasformare la (2) in modo da far figurare in essa l'intensità di corrente corrispondente al momento elettrico \bar{M} delle cariche in movimento.

A tale scopo immaginiamo di avere un circuito elettrico costituito da due sferette collegate da un filo di lunghezza ℓ (fig. 1-4): esso è un particolare oscillatore hertziano.

Possiamo pensare che la corrente che percorre tale circuito sia dovuta ad una carica elettrica che oscilla su e giù da una all'altra sferetta. Detta $e(t)$ l'intensità di corrente che percorre il circuito, è chiaro che la carica posseduta al tempo t da una delle due sferette è:

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt .$$

Il momento elettrico corrispondente è quindi:

$$M = q\ell = \ell \int i dt ,$$



Figura 1-4

e la sua derivata seconda rispetto al tempo è:

$$(4) \quad \ddot{M} = \ell \frac{d i}{d t} .$$

La (4) esprime la derivata seconda del momento elettrico del sistema di cariche in funzione della corrente $i(t)$ che percorre il circuito e della lunghezza ℓ di questo.

Introducendo la (4) nella (2) si ottiene:

$$(5) \quad W = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_0}{v} \ell^2 \left(\frac{d i}{d t} \right)^2 \text{ Watt} .$$

In particolare nell'aria si ha $\mu_r \approx \epsilon_r \approx 1$ e quindi si ricava:

$$\frac{\mu_0}{v} = \mu_0 \sqrt{\epsilon \mu} = \mu_0 \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot \mu_0 \mu_r} = \mu_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\mu_0}{c} ,$$

da cui:

$$\frac{\mu_0}{v} = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{Z_0}{c^2} ,$$

infine:

$$\frac{\mu_0}{v} = \frac{Z_0}{c^2} \quad \text{ove } Z_0 = 377 \text{ Ohm} .$$

Ne segue che nell'aria la (5) assume la forma:

$$(6) \quad W = \frac{1}{3\pi} \frac{Z_0}{c^2} \ell^2 \left(\frac{d i}{d t} \right)^2 \text{ Watt} .$$

La (6) è equivalente alla (2) , ma si presta maggiormente al calcolo della potenza irradiata da una antenna costituita da un filo rettilineo percorso da una corrente di intensità $i(t) = I \sin \omega t$.

Infatti, per una corrente di tale intensità la (6) diventa:

$$W = \frac{1}{3\pi} \frac{Z_0}{c^2} \ell^2 \omega^2 I^2 \cos^2 \omega t \text{ Watt} .$$

N. 7 - Interdipendenza matematica delle equazioni di Maxwell

Consideriamo il campo elettromagnetico generato da cariche elettriche e da correnti e supponiamo che lo spazio in cui si propagano le onde elettromagnetiche sia vuoto, tranne che nei punti in cui si trovano le sorgenti elettriche. Le equazioni di Maxwell che descrivono il campo elettromagnetico sono:

$$\begin{aligned} \text{I) } \operatorname{div} \vec{E}_0 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \text{II) } \operatorname{div} \vec{B}_0 &= 0, \\ \text{III) } \operatorname{rot} \vec{E}_0 &= -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}, & \text{IV) } \operatorname{rot} \vec{B}_0 &= \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

In totale abbiamo 8 equazioni scalari : 6 equazioni scalari sono date dalle due equazioni vettoriali III) e IV) ; altre due equazioni scalari sono le equazioni I) e II) .

Nel ricavare le equazioni di Maxwell abbiamo ammessa l'ipotesi che le sorgenti del campo elettromagnetico, cioè la densità di carica ρ e la densità di corrente \vec{J} , soddisfino l'equazione di continuità della corrente elettrica

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ammessa questa ipotesi, la I) e la II) equazione di Maxwell si possono ricavare rispettivamente dalla IV) e dalla III) equazione.

1) Facciamo vedere che l'equazione $\operatorname{div} \vec{B}_0 = 0$ può essere dedotta dall'equazione $\operatorname{rot} \vec{E}_0 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$.

Infatti, applicando l'operatore divergenza alla III) equazione si ha:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}_0) = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}.$$

Poiché risulta identicamente $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}_0) = 0$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}_0 = 0.$$

Ne segue che in ogni punto del campo elettromagnetico si ha

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{B}_0 = \cos t = C_1.$$

Ma all'istante iniziale, cioè prima che venissero realizzate le correnti elettriche, era ovunque $\vec{B}_0 = 0$ e quindi $\text{div}\vec{B}_0 = 0$. Ne segue che nella (2) la costante C_1 è nulla e quindi possiamo scrivere

$$\text{div}\vec{B}_0 = 0.$$

2) Facciamo ora vedere che la I) equazione di Maxwell $\text{div}\vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ si può ricavare dalla IV) equazione

$$\text{rot}\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}.$$

Infatti, applicando l'operatore divergenza alla IV) equazione si ha:

$$\text{div}(\text{rot}\vec{B}_0) = \mu_0 \text{div}\vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}.$$

Tenendo conto che risulta identicamente $\text{div}(\text{rot}\vec{B}_0) = 0$ si ottiene

$$\text{div}\vec{J} + \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = 0.$$

Ma i due operatori div e $\frac{\partial}{\partial t}$ si possono scambiare di posto perché si riferiscono a variabili diverse; e quindi possiamo scrivere

$$\text{div}\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{E}_0 = 0.$$

Ricordando ora che $\text{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (per l'equazione di continuità della corrente elettrica) possiamo scrivere

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{E}_0 = 0, \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \text{div}\vec{E}_0 - \rho) = 0,$$

e quindi (5)
$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{div} \vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho) = 0 .$$

Integrando si ha (6)
$$\text{div} \vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = \cos t = C_2 .$$

Ricordiamo ora che all'istante iniziale era $\rho = 0$, e quindi si aveva anche :

$$\vec{E}_0 = 0 , \quad \text{div} \vec{E}_0 = 0 \quad \text{e quindi} \quad \text{div} \vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = 0 .$$

Ne segue che la costante C_2 della (6) è nulla e quindi possiamo scrivere:

$$\text{div} \vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = 0 .$$

c.v.d.

Supponiamo ora che lo spazio in cui si propaga il campo elettromagnetico, anziché essere vuoto, sia riempito da un materiale omogeneo e isotropo.

In questo caso, alle sorgenti localizzate macroscopiche \vec{J} e ρ , note a priori, vanno aggiunte le correnti e le cariche microscopiche che il campo elettromagnetico stesso induce nella materia con la sua azione: queste correnti e queste cariche microscopiche, proprio perché attivate dal campo, non sono note a priori.

Tuttavia sappiamo che per molti materiali (diamagnetici, paramagnetici e materiali ferromagnetici limitatamente ai casi in cui la curva $\vec{B} = \vec{B}(H)$ sia Univoca e lineare) la trattazione diviene formalmente analoga a quella del vuoto: **basta sostituire le costanti ε_0 e μ_0 con le costanti ε e μ e i campi \vec{E}_0 e \vec{B}_0 con \vec{E} e $\vec{B} = \mu \vec{H}$.**

In tal modo, in un mezzo omogeneo e isotropo di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ , le equazioni di Maxwell divengono

$$\text{I) } \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho , \quad \text{II) } \text{div} \vec{B} = 0 ,$$

$$\text{III) } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{IV) } \text{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Poiché $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (σ = conducibilità elettrica) possiamo scrivere le equazioni di Maxwell anche nel modo seguente

$$\begin{array}{ll} \text{I) } \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho, & \text{II) } \text{div} \vec{H} = 0, \\ \text{III) } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{IV) } \text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array}$$

Se ora ci riferiamo ad un campo elettromagnetico in un dielettrico omogeneo e isotropo, e consideriamo una porzione di spazio in cui non vi siano cariche elettriche né ferme ($\rho = 0$) né in movimento ($\vec{J} = 0$), le equazioni di Maxwell che descrivono il campo sono:

$$\begin{array}{ll} \text{I) } \text{div} \vec{E} = 0, & \text{II) } \text{div} \vec{B} = 0, \\ \text{III) } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{IV) } \text{rot} \vec{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array}$$

N. 8 - Potenziali del campo elettromagnetico

Consideriamo il campo elettromagnetico che si propaga in un mezzo materiale di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ . Il campo è descritto dalle equazioni di Maxwell

$$\text{I) } \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad \text{II) } \text{div} \vec{B} = 0,$$

$$\text{III) } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{IV) } \text{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Le equazioni III) e IV) forniscono un sistema di 6 equazioni scalari nelle 6 funzioni incognite E_x, E_y, E_z e B_x, B_y, B_z . Le 6 equazioni sono fra loro accoppiate perché ciascuna di esse contiene sia le componenti del campo elettrico \vec{E} che del campo magnetico \vec{B} .

Vogliamo far vedere che le 6 componenti dei vettori \vec{E} e \vec{B} si possono esprimere per mezzo del solo potenziale vettore \vec{A} e del potenziale scalare V , cioè per mezzo di sole 4 funzioni scalari A_x, A_y, A_z, V .

Vedremo che queste quattro funzioni scalari si ottengono come soluzioni di quattro equazioni differenziali del secondo ordine che offrono il vantaggio di essere disaccoppiate, giacché ciascuna di esse contiene una sola delle quattro grandezze incognite A_x, A_y, A_z, V .

Un altro vantaggio che si ottiene esprimendo le equazioni del campo per mezzo dei potenziali \vec{A} e V sta nel fatto che la covarianza relativistica delle equazioni del campo può essere espressa in termini molto eleganti e compatti.

Troviamo ora le equazioni che legano le 6 componenti dei vettori \vec{E} e \vec{B} .

Dimostrazione.

Poiché $\text{div} \vec{B} = 0$, cioè $\frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = 0$,

si può sempre trovare un integrale \vec{A} della forma

$$(1) \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{con} \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t).$$

Infatti, dalla (1) si ha:

$$(2) \quad \text{div} \vec{B} = \text{div}(\text{rot} \vec{A}) \equiv 0.$$

L'identità (2) è fin troppo nota; del resto, usando l'operatore $\vec{\nabla}$ (= nabla), la (2) si può scrivere nel modo

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \equiv 0,$$

e il primo membro della (3) è identicamente nullo poiché esso è il determinante di una matrice quadrata con due righe uguali.

Il vettore \vec{A} si dice potenziale vettore; esso, però, non è univocamente determinato dalla posizione $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$; infatti, per una funzione arbitraria $\varphi(x, y, z, t)$ si ha $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad} \varphi}) = 0$, e quindi possiamo dire :

$$(4) \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot}(\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad} \varphi}) .$$

Ora, posto $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, la III) equazione di Maxwell $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ diventa:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{A} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ;$$

e da questa equazione subito si ricava

$$(5) \quad \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

L'eq. (5) ci dice che il vettore $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ è irrotazionale e quindi esso può essere scritto, istante per istante, come gradiente di una grandezza scalare V , funzione delle variabili x, y, z, t e tale che si abbia

$$(6) \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad} V}, \quad \text{da cui} \quad (7) \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad} V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} .$$

La funzione $V(x, y, z, t)$ è detta *potenziale scalare* .

Le formule (4) e (7) sono le relazioni che legano i potenziali elettromagnetici ai campi \vec{B} ed \vec{E} .

Una volta noti il potenziale vettore \vec{A} e il potenziale scalare V possiamo conoscere anche i vettori \vec{B} ed \vec{E} per mezzo delle formule

$$(A) \quad \begin{cases} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad} V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} . \end{cases}$$

Come si vede, il sistema (A) equivale ad un sistema differenziale di 6 equazioni scalari.

Notiamo che \vec{A} e V debbono anche soddisfare alcune condizioni che possiamo ricavare dalle due equazioni di Maxwell (I e IV) non ancora utilizzate. Scriviamo queste due equazioni, dette **equazioni della dinamica dei potenziali** ; si ha:

$$(B) \quad \begin{cases} \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho \\ \text{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} .$$

Sostituendo nel sistema (B) le espressioni di \vec{E} e \vec{B} date dal sistema (A) si ottiene :

$$(C) \quad \begin{cases} \text{div}(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{1}{\varepsilon} \rho \\ \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \end{cases} .$$

La seconda equazione del sistema (C) si può trasformare nel modo seguente:

$$\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} - \varepsilon \mu \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} ,$$

$$\text{da cui} \quad -\mu \vec{J} = \nabla^2 \vec{A} - \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \varepsilon \mu \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} .$$

Si ottiene quindi

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t}) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} .$$

Possiamo sfruttare il fatto che \vec{A} e V non sono determinati univocamente per rendere nulla l'espressione entro parentesi.

Si ottiene così l'equazione:

$$(8) \quad \nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

accompagnata dalla relazione

$$(9) \quad \text{div} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad : \text{ "condizione di Lorentz" .}$$

La condizione di Lorentz è una condizione di “ gauge “ o di “ricalibratura“.

Veniamo ora alla prima condizione del sistema (C), che per comodità riscriviamo:

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{1}{\epsilon} \rho ;$$

da essa si ottiene

$$(10) \quad \text{div}(\vec{\text{grad}}V) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon} \rho .$$

Ricordiamo il significato del primo termine con un calcolo diretto. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\text{grad}}V) &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\text{grad}}V)_x + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\text{grad}}V)_y + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\text{grad}}V)_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} . \end{aligned}$$

Si ottiene così
$$\text{div}(\vec{\text{grad}}V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} ,$$

ossia (11)
$$\text{div}(\vec{\text{grad}}V) = \nabla^2 V .$$

Sostituendo la (11) nella (10) si ottiene:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \quad .$$

Tenendo presente il valore di $\operatorname{div} \vec{A}$ dato dalla condizione di Lorentz si ottiene

$$\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \quad ,$$

ossia (12)
$$\nabla^2 V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \quad .$$

Le (12), (8) si possono riunire in un sistema costituito da una equazione scalare e da una equazione vettoriale, e quindi si ha:

$$(D) \quad \begin{cases} \nabla^2 V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \end{cases}$$

con la condizione $\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ e $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$, $V = V(x, y, z, t)$.

Esso equivale ad un sistema di 4 equazioni scalari differenziali nelle funzioni incognite A_x, A_y, A_z e V .

Come si vede, abbiamo ottenuto due equazioni separate per \vec{A} e V (equazioni differenziali del secondo ordine); esse ci permettono di studiare i potenziali elettromagnetici \vec{A} e V invece dei campi \vec{B} ed \vec{E} . Possiamo poi risalire ai campi stessi per mezzo delle formule (Mencuccini, II, pg. 394)

$$(A) \quad \begin{cases} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} .$$

Come abbiamo già detto, dobbiamo però ricordare che i potenziali \vec{A} e V

non sono indipendenti fra di loro, poiché essi debbono soddisfare la
 “condizione di Lorentz” $\text{div} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, detta anche gauge di Lorentz.

Le equazioni del sistema (A) ci fanno vedere che le sei grandezze scalari E_x, E_y, E_z e B_x, B_y, B_z si possono ottenere per derivazione da solo quattro grandezze scalari A_x, A_y, A_z e V .

Queste quattro grandezze, però, non sono determinate in modo univoco poiché (come abbiamo visto) si può aggiungere ad \vec{A} il gradiente di una qualsiasi funzione $\varphi(x, y, z, t)$.

Notiamo che se usiamo l’operatore d’Alembertiano

$$\square = \nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} , \quad \text{cioè} \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} ,$$

il sistema (D) si può scrivere nella forma

$$(D') \quad \begin{cases} \square V = -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \square \vec{A} = -\mu \vec{j} \end{cases} .$$

Solo a titolo informativo, diciamo che dalle equazioni del sistema (D) possiamo ricavare la celebre “formula di”. Kirchhoff.

CAPITOLO SECONDO

INVARIANZA DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

N. 1 - Richiami sui principi della Dinamica classica

Prima di affrontare l'argomento della covarianza delle equazioni di Maxwell per trasformazioni di Lorentz, vogliamo ricordare i Principi della Dinamica Classica, con particolare attenzione al Principio di Relatività galileano, che fornisce la base dalla quale si sviluppa lo studio della suddetta covarianza. Ciò ci permetterà di vedere la questione nel suo sviluppo storico e di cogliere l'essenza del problema posto dalla questione stessa.

La Dinamica studia il moto dei corpi in relazione alle loro masse e alle forze che agiscono su di essi. Essa è una teoria fisica che ci permette di spiegare in maniera sistematica tutta una categoria di fenomeni fisici. Come ogni teoria, la Dinamica si basa su un certo numero di principi, cioè di regole di validità generale dedotte dall'osservazione dei fenomeni.

I principi della Dinamica Classica (non tutti fra loro indipendenti) sono: il Principio di Relatività, il Principio di Inerzia (o Primo Principio della Dinamica), il Secondo Principio della Dinamica e il Terzo Principio. Quest'ultimo principio non interviene nella dinamica di un punto materiale, ma solo nella dinamica dei sistemi.

Con la locuzione "Dinamica Classica" si intende la teoria sviluppata da Galileo e da Newton, teoria che descrive correttamente il moto degli oggetti che si muovono con velocità v piccola rispetto a quella della luce ($c \approx 300.000 \text{ Km/s}$). Per descrivere il moto degli oggetti che si muovono con velocità vicina alla velocità della luce è necessario ricorrere ad una teoria più ampia, cioè alla Teoria della Relatività di Einstein, che comprende la

meccanica classica come caso particolare quando $\frac{v}{c} \ll 1$.

Il principio di relatività, quello di inerzia e il terzo principio sono principi di invarianza o di conservazione che restano validi anche nella teoria di Einstein. Solo il secondo principio ha validità limitata alla dinamica classica.

Passando a considerare i sistemi di riferimento, ricordiamo che se due sistemi si muovono in modo che gli assi coordinati mantengano costante il loro orientamento relativo, si dice che essi si muovono di moto traslatorio uno rispetto all'altro.

Supponiamo che un sistema di riferimento si muova di moto traslatorio rispetto ad un altro; allora se in un certo intervallo di tempo Δt un suo punto (ad esempio l'origine O) subisce uno spostamento $\Delta \vec{r}$, tutti gli altri punti solidali al sistema subiscono lo stesso spostamento. Un caso particolare notevole di moto traslatorio è il moto traslatorio rettilineo e uniforme: l'origine del sistema di riferimento e tutti gli altri suoi punti si muovono di moto rettilineo e uniforme rispetto all'altro sistema.

N. 2 - Principio di Relatività

Il Principio di Relatività è uno dei principi fondamentali non solo della dinamica, ma anche di tutta la fisica moderna. Esso è stato enunciato per la prima volta da Galileo ed è stato ripreso in un contesto più ampio da Einstein all'inizio del 1900.

Secondo il Principio di Relatività galileiano :” Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo e uniforme, non esiste alcun esperimento che dia risultati diversi nei due laboratori, e quindi essi sono completamente indistinguibili”.

Galileo ha illustrato questo principio in un celebre passo del “Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo”.

In questo passo Galileo dice chiaramente che **se un passeggero è chiuso in una nave che si muove di moto rettilineo e uniforme rispetto alla terra ferma, non esiste alcun esperimento che gli faccia capire se la nave è ferma o se cammina.**

Notiamo che affinché valga il principio di relatività non è necessario che le misure delle varie grandezze fisiche forniscano gli stessi risultati nei due riferimenti; infatti, per fare un esempio, l'uomo che salta a “pie’ giunti” sulla nave ha una certa velocità rispetto alla nave, ma ha una velocità diversa rispetto ad un osservatore che lo guardi da terra.

Il Principio di Relatività richiede invece che le leggi fisiche abbiano la stessa forma nei due sistemi di riferimento. In altre parole, se il primo membro di una equazione fisica cambia quando si passa da un riferimento inerziale ad un altro che si muova rispetto al primo di moto rettilineo e uniforme, anche il secondo membro deve cambiare in modo che sia fatta salva la relazione di eguaglianza.

Possiamo anche dire che i due membri di una equazione fisica debbono essere covarianti quando si passa da un riferimento inerziale ad un altro sistema che si muova di moto rettilineo e uniforme rispetto al primo.

Può anche darsi che i due membri di una equazione fisica risultino immutati rispetto a due sistemi inerziali, cioè può darsi che i due membri siano

invarianti anziché covarianti. Ciò si verifica se i due sistemi hanno lo stesso orientamento, cioè nel caso di una trasformazione di Galileo.

N. 3 - Invarianza del II Principio della Dinamica per trasformazioni galileiane

Sia $K = Oxyz$ un sistema di riferimento inerziale e $K' = O'x'y'z'$ un altro sistema inerziale che si muove rispetto a K di moto traslatorio rettilineo e uniforme con velocità \vec{V}_0 (fig.1). I due sistemi non hanno necessariamente lo stesso orientamento.

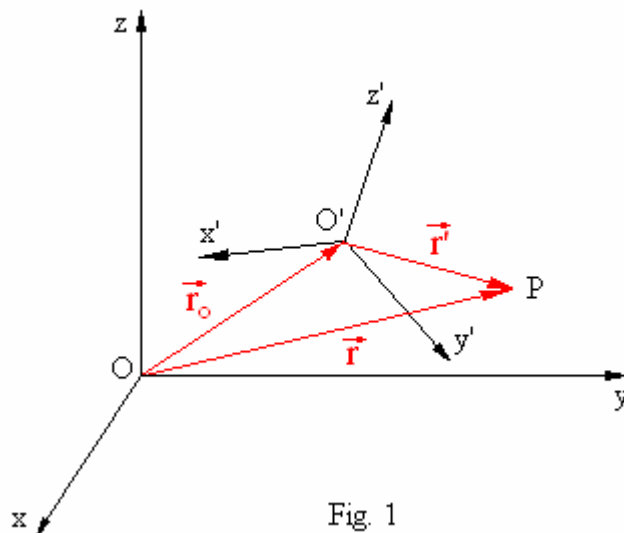


Fig. 1

Per comodità chiameremo K sistema fisso e K' sistema mobile. Vogliamo dimostrare che la formula

$$(1) \quad \vec{f} = m\vec{a} \quad ,$$

è covariante quando si passa da un riferimento inerziale all'altro, cioè che i due membri della (1) si trasformano allo stesso modo e quindi la formula (1) soddisfa il Principio di Relatività.

In particolare se i due riferimenti hanno lo stesso orientamento, la $\vec{f} = m\vec{a}$ resta immutata: essa è dunque invariante per trasformazioni di Galileo.

Dimostrazione.

Dalla figura si vede che

$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}',$$

da cui $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t$, e quindi

$$x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} - V_{0x} t \vec{i} - V_{0y} t \vec{j} - V_{0z} t \vec{k},$$

ossia

$$(3) \quad x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' = (x - V_{0x} t) \vec{i} + (y - V_{0y} t) \vec{j} + (z - V_{0z} t) \vec{k}.$$

Moltiplichiamo scalarmente la (3) prima per \vec{i}' e poi per i versori \vec{j}' e \vec{k}' , e teniamo presente la seguente tabella (a):

$$\begin{array}{lll} \vec{i}' \times \vec{i} = \cos x'x, & \vec{i}' \times \vec{j} = \cos x'y & \vec{i}' \times \vec{k} = \cos x'z, \\ \vec{j}' \times \vec{i} = \cos y'x & \vec{j}' \times \vec{j} = \cos y'y & \vec{j}' \times \vec{k} = \cos y'z \\ \vec{k}' \times \vec{i} = \cos z'x & \vec{k}' \times \vec{j} = \cos z'y & \vec{k}' \times \vec{k} = \cos z'z \end{array}$$

Si ottiene il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} x' = (x - V_{0x} t) \cos x'x + (y - V_{0y} t) \cos x'y + (z - V_{0z} t) \cos x'z \\ y' = (x - V_{0x} t) \cos y'x + (y - V_{0y} t) \cos y'y + (z - V_{0z} t) \cos y'z \\ z' = (x - V_{0x} t) \cos z'x + (y - V_{0y} t) \cos z'y + (z - V_{0z} t) \cos z'z \end{cases}.$$

Le equazioni (4) esprimono le relazioni che intercorrono fra le componenti (x', y', z') del vettore \vec{r}' nel sistema mobile e le componenti (x, y, z) del vettore \vec{r} nel sistema fisso.

In forma matriciale possiamo scrivere

$$(5) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x'x & \cos x'y & \cos x'z \\ \cos y'x & \cos y'y & \cos y'z \\ \cos z'x & \cos z'y & \cos z'z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - V_{0x} t \\ y - V_{0y} t \\ z - V_{0z} t \end{bmatrix}.$$

Indicando con $[R]$ la “matrice delle rotazioni”, cioè la matrice

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos x'x & \cos x'y & \cos x'z \\ \cos y'x & \cos y'y & \cos y'z \\ \cos z'x & \cos z'y & \cos z'z \end{bmatrix},$$

si ha (6)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} x - V_{ox}t \\ y - V_{oy}t \\ z - V_{oz}t \end{bmatrix}.$$

Se il sistema mobile e quello fisso hanno lo stesso orientamento, la matrice $[R]$ si riduce alla matrice

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{detta matrice identità.}$$

In tal caso, dal sistema (6) si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} x' = x - V_{ox}t \\ y' = y - V_{oy}t \\ z' = z - V_{oz}t \end{cases}.$$

Riprendiamo ora la (3)

$$x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' = (x - V_{ox}t) \vec{i} + (y - V_{oy}t) \vec{j} + (z - V_{oz}t) \vec{k};$$

deriviamo membro a membro rispetto al tempo e teniamo presente che il riferimento mobile ha orientamento fisso, e quindi i versori $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ sono costanti. Si ottiene:

$$(8) \quad \vec{i}' v'_x + \vec{j}' v'_y + \vec{k}' v'_z = (v_x - V_{ox}) \vec{i} + (v_y - V_{oy}) \vec{j} + (v_z - V_{oz}) \vec{k}.$$

Moltiplichiamo ora scalarmente la (8) prima per \vec{i}' , poi per i versori \vec{j}' e \vec{k}' e teniamo presenti le relazioni espresse dalla tabella (a). Si ottiene:

$$(9) \quad \begin{cases} v'_x = (v_x - V_{ox}) \cos x'x + (v_y - V_{oy}) \cos x'y + (v_z - V_{oz}) \cos x'z \\ v'_y = (v_x - V_{ox}) \cos y'x + (v_y - V_{oy}) \cos y'y + (v_z - V_{oz}) \cos y'z \\ v'_z = (v_x - V_{ox}) \cos z'x + (v_y - V_{oy}) \cos z'y + (v_z - V_{oz}) \cos z'z \end{cases} .$$

Possiamo scrivere questo sistema in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} v_x - V_{ox} \\ v_y - V_{oy} \\ v_z - V_{oz} \end{bmatrix} .$$

Deriviamo ora la (8) rispetto al tempo e teniamo presente che sono costanti sia i versori $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ che il vettore \vec{V}_o , quindi $\frac{d\vec{V}_o}{dt} = 0$. Si ottiene

$$(10) \quad \vec{i}' a'_x + \vec{j}' a'_y + \vec{k}' a'_z = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z .$$

Moltiplicando scalarmene la (10) prima per il versore \vec{i}' , poi per i versori \vec{j}' e \vec{k}' , si ottiene il sistema

$$(11) \quad \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} .$$

Se i due sistemi di riferimento sono orientati allo stesso modo si ha

$$a'_x = a_x , \quad a'_y = a_y , \quad a'_z = a_z .$$

Analogamente alla (11), per la forza \vec{f} si ha:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} .$$

La massa m , che è una grandezza scalare, è invariante quando si passa dal sistema fisso K al sistema mobile K' .

Possiamo scrivere le relazioni (11), (12) nella forma più breve

$$(13) \quad \vec{a}' = [R] \cdot \vec{a} \qquad (14) \quad \vec{f}' = [R] \cdot \vec{f}$$

Dividendo membro a membro le (13), (14) si ricava

$$\frac{\vec{f}'}{\vec{a}'} = \frac{\vec{f}}{\vec{a}}.$$

Poiché $\frac{\vec{f}}{\vec{a}} = m$ si ottiene $\vec{f}' = m\vec{a}'$.

Conclusione: “La seconda equazione della dinamica $\vec{f} = m\vec{a}$ è covariante quando si passa da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema inerziale. In particolare, se i due sistemi di riferimento sono orientati allo stesso modo la legge $\vec{f} = m\vec{a}$ resta immutata, ossia la legge stessa è invariante per trasformazioni di Galileo. Il secondo principio della dinamica soddisfa dunque il Principio di Relatività “.

N. 4 -Velocità di una particella in due sistemi di riferimento.

Supponiamo che il moto di una particella materiale venga seguito da due sistemi di riferimento inerziali $K(Oxyz)$ e $K'(O'x'y'z't')$, aventi lo stesso orientamento e gli assi x e x' sovrapposti (fig. 2).

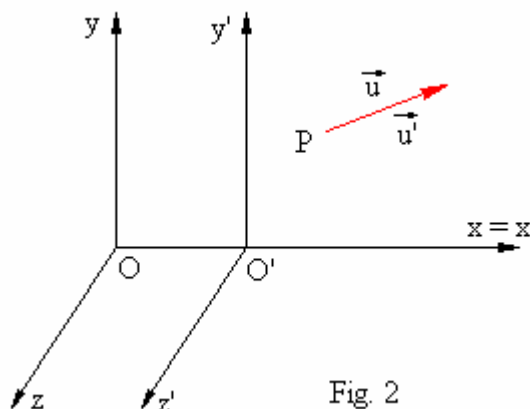


Fig. 2

Per comodità assumeremo K come sistema fisso e K' come sistema mobile e indicheremo con \vec{v} la velocità (ovviamente costante) con cui K' si muove rispetto a K.

Siano \vec{u} e \vec{u}' le velocità della particella rispetto ai due riferimenti. Indicheremo le componenti della velocità rispetto al riferimento K con i simboli u_x, u_y, u_z , mentre indicheremo le componenti della velocità rispetto al riferimento K' con i simboli u'_x, u'_y, u'_z ; non è il caso di indicarle prolissamente con la scrittura $u'_{x'}, u'_{y'}, u'_{z'}$ (vedi Fisica II, L. Lovitch-S. Rosati, pag. 417; C. E. Ambrosiana).

Rispetto al primo riferimento indicheremo con \vec{E} e \vec{B} i vettori del campo elettromagnetico e con E_x, E_y, E_z e B_x, B_y, B_z le loro componenti.

Rispetto al secondo riferimento K' indicheremo con \vec{E}' e \vec{B}' i vettori del campo elettromagnetico e con E'_x, E'_y, E'_z e B'_x, B'_y, B'_z le loro componenti. Per indicare queste componenti non è il caso di appesantire la scrittura con i simboli $E'_{x'}, E'_{y'}, E'_{z'}$ e $B'_{x'}, B'_{y'}, B'_{z'}$.

Se x, y, z, t sono le coordinate spaziali e temporale della particella mobile vista da un osservatore solidale a K, le coordinate corrispondenti della stessa particella vista da un osservatore solidale a K' sono date dalle trasformazioni di Lorentz

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad \text{ove} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Viceversa, se x', y', z', t' sono le coordinate spaziali e temporale della particella vista da un osservatore solidale a K' , le coordinate della stessa particella vista da un osservatore solidale K sono date dalle trasformazioni inverse

$$(2) \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases} .$$

Queste trasformazioni si ottengono semplicemente scambiando le coordinate x, y, z, t con le coordinate x', y', z', t' . Dobbiamo inoltre tenere presente che se il riferimento K' si muove rispetto a K con velocità \vec{v} , allora il riferimento K si muove rispetto a K' con velocità $-\vec{v}$.

Passando al moto della particella, le componenti della sua velocità rispetto al riferimento K sono

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt};$$

mentre le componenti della velocità rispetto al riferimento K' sono

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} .$$

Osserviamo che in queste ultime componenti compare dt' e non dt perché i tempi t e t' dello stesso evento non coincidono.

Dalle (2) possiamo ricavare le relazioni tra le componenti della velocità \vec{u} e quelle della velocità \vec{u}' . Infatti, passando ai calcoli, si ha:

$$(3) \quad \begin{cases} dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & dy = dy' \\ dz = dz' & dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione del sistema per l'ultima si ottiene:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{dt' \left(\frac{dx'}{dt'} + v \right)}{dt' \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Dividendo la seconda equazione per la quarta si ottiene:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dy'}{dt'} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_y \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Infine, dividendo la terza equazione per la quarta, si ottiene:

$$u_z = \frac{dz}{dx} = \frac{dz' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dz'}{dt'} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_z \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Riassumendo, le componenti della velocità rispetto al riferimento K sono:

$$(4) \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_y = \frac{u'_y \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_z = \frac{u'_z \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Supponiamo ora che la velocità v con cui il riferimento inerziale K' si muove rispetto al riferimento inerziale K sia piccola. Allora i termini

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad \text{e} \quad \frac{v}{c^2}$$

sono del tutto trascurabili e le equazioni (4) divengono

$$u_x = u'_x, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z ;$$

si ritrova così la legge di composizione delle velocità della Cinematica Classica.

Torniamo alle equazioni (4) e supponiamo che il moto della particella materiale avvenga lungo l'asse x . Allora le componenti della velocità secondo gli assi del riferimento K' sono

$$u'_x = u' \quad \text{e} \quad u'_y = u'_z = 0 ;$$

le componenti secondo gli assi del riferimento K sono invece:

$$u_y = u_z = 0 \quad \text{e} \quad (5) \quad u_x = u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'} .$$

Se $u' = c$, cioè se la particella si muove rispetto al riferimento K' con la velocità della luce, si vede subito che si ha $u = c$. Infatti dall'equazione precedente si ha

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c + v}{c + v} \cdot c \quad \text{ossia} \quad u = c .$$

Il risultato ci dice che la velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Si trova così come risultato un postulato posto a base delle trasformazioni di Lorentz.

Possiamo inoltre controllare facilmente che se le velocità u' e v sono minori della velocità c della luce, risulta anche $u < c$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} u' + v + \frac{(c - u') \cdot (c - v)}{c} &= u' + v + \frac{c^2 - cv - u'c + u'v}{c} = \\ &= u' + v + c - v - u' + \frac{u'v}{c} = c + \frac{u'v}{c} = c \left(1 + \frac{v}{c^2} u' \right) . \end{aligned}$$

Si ottiene così l'identità

$$(6) \quad c \left(1 + \frac{v}{c^2} u \right) = u' + v + \frac{(c - u') \cdot (c - v)}{c} .$$

Inserendo questo risultato nella (5) per la velocità della particella rispetto al riferimento K si trova la limitazione

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u} = \frac{(u' + v)c}{c(1 + \frac{v}{c^2} u)} = \frac{(u' + v)c}{u' + v + \frac{(c - u') \cdot (c - v)}{c}} ,$$

quindi
$$u \approx \frac{(u' + v)c}{u' + v + c} < \frac{(u' + v + c)c}{u' + v + c}$$

e da qui si ricava $u < c$,
come richiedono le trasformazioni di Lorentz .

N. 5 - Considerazioni preliminari sulla covarianza delle equazioni di Maxwell

Vogliamo dimostrare che le equazioni di Maxwell sono covarianti per trasformazioni di Lorentz. Per dare la dimostrazione si scrivono le equazioni di Maxwell, riferite al vuoto, in un riferimento inerziale K , si vede come esse si modificano con le trasformazioni di Lorentz quando si passa ad un altro riferimento K' in moto rettilineo uniforme rispetto al primo (e quindi anche esso inerziale) e si impone la condizione che le equazioni scritte nei due sistemi conservino la stessa forma. Facendo ciò si trovano anche le relazioni esistenti tra le varie componenti dei vettori \vec{E} e \vec{B} viste da due osservatori inerziali connessi con i due sistemi di riferimento K e K' . Questo procedimento è quello seguito da A. Einstein nella sua memoria sulla relatività ristretta.

Siano $K(\equiv Oxyz)$ e $K'(\equiv O'x'y'z't')$ due sistemi di riferimento inerziali aventi lo stesso orientamento e gli assi x e x' sovrapposti (vedi fig. 2) e supponiamo che K' si muova rispetto a K con velocità (costante)

$\vec{V} \equiv (V, 0, 0)$. Assumiamo come origine dei tempi nei due riferimenti l'istante in cui l'origine O coincide con O' .

Le coordinate spaziali e temporale di un medesimo evento nei due riferimenti sono legate dalle trasformazioni di Lorentz:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \end{cases} \quad \text{ove} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + Vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x') \end{cases} .$$

N. 6 - Covarianza della terza equazione di Maxwell; 1ª parte

Consideriamo la terza e quarta equazione di Maxwell, nell'ipotesi che lo spazio in cui si propagano le onde elettromagnetiche sia vuoto e che nella regione considerata non vi siano cariche elettriche né ferme ($\rho = 0$), né in movimento ($\vec{J} = 0$). Esse sono:

$$\text{III) } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{IV) } \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{ove } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} .$$

Ricordiamo che

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} ;$$

Quindi

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) .$$

1°) Consideriamo dapprima la proiezione scalare della III) equazione sull'asse y. Si ha:

$$\left(\text{rot}\vec{E}\right)_y = -\frac{\partial B_y}{\partial t} ,$$

ossia (a)
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} .$$

Le componenti vettoriali che figurano nella (a) sono funzioni di x,y,z,t attraverso le variabili x',y',z',t'. Ad esempio si ha:

$$E_z = E_z[x'(x,y,z,t), y'(x,y,z,t), z'(x,y,z,t), t'(x,y,z,t)], \text{ ecc...}$$

Calcolando la derivata di E_x rispetto alla variabile z si ottiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; ne segue che:

$$(3) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial z'} .$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale dell'equazione (a). Si ottiene

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$; ne segue che

$$(4) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} .$$

Calcoliamo la terza derivata parziale dell'equazione (a). Si ottiene

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; ne segue che

$$(5) \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\gamma V \frac{\partial B_y}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} .$$

Sostituendo le (3),(4),(5) nella relazione (a) si trova che nel riferimento inerziale K' la relazione (a) assume la forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} = \gamma V \frac{\partial B_y}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} ,$$

da cui
$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} - \gamma V \frac{\partial B_y}{\partial x'} = -\gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'}$$

infine (6)
$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma E_z + \gamma V B_y] = -\frac{\partial}{\partial t'} [\gamma B_y + \gamma \frac{V}{c^2} E_z] .$$

Confrontiamo la (6) con l'equazione (a): [si vede che passando nel sistema \$K'\$ la \(a\) conserva la struttura che essa ha nel sistema \$K\$ e quindi possiamo scrivere la \(6\) nella forma covariante](#)

$$(a') \quad \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'} , \quad \text{cioè} \quad (\text{rot} \vec{E}')_{y'} = -\left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{y'} ,$$

[purché tra le componenti dei campi nei due riferimenti si ponga il legame:](#)

$$(A) \quad \begin{cases} E'_x = E_x \\ B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \\ E'_z = \gamma (E_z + V B_y) \end{cases} .$$

2°) Consideriamo ora la proiezione scalare della III) equazione di Maxwell sull'asse z. Si ha:

$$\left(\text{rot}\vec{E}\right)_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t},$$

ossia (b)
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Calcoliamo la prima derivata parziale che compare nella (b); si ha:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$; ne segue che

$$(7) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'}.$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale che compare nella (b); si ha:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$; ne segue che

$$(8) \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial y'}.$$

Calcoliamo la terza derivata parziale che compare nella (b); si ha:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; ne segue che

$$(9) \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\gamma V \frac{\partial B_z}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'} .$$

Sostituendo le (7),(8),(9) nella (b), si trova che nel riferimento inerziale K' l'equazione (b) assume la forma:

$$\gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = \gamma V \frac{\partial B_z}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'} ;$$

da questa si ha

$$\gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \gamma V \frac{\partial B_z}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} ,$$

$$\text{ossia (10)} \quad \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma (E_y - VB_z)] - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right] .$$

Confrontiamo la (10) con la (b): si vede che passando nel sistema K' la (b) conserva la struttura che essa ha nel sistema K e quindi possiamo scrivere la (10) nella forma covariante

$$(b') \quad \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_z}{\partial t'} \quad \text{cioè} \quad (\text{rot} \vec{E}')_{z'} = -\left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{z'} ,$$

purché tra le componenti dei campi \vec{E} e \vec{B} nei due riferimenti si pongano le relazioni:

$$(B) \quad \begin{cases} E'_x = E_x \\ B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \\ E'_y = \gamma (E_y - VB_z) \end{cases} .$$

Nei sistemi di equazioni (A) e (B) compaiono le leggi di trasformazione delle componenti E_x, E_y, E_z del vettore \vec{E} e delle componenti B_y, B_z del vettore \vec{B} ; manca la legge di trasformazione della componente B_x . Si potrebbe pensare di ricavare un relazione contenente B_x partendo dall'equazione

$$\left(\text{rot}\vec{E}\right)_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \text{cioè} \quad (c) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t},$$

ottenuta proiettando sull'asse x la III) equazione di Maxwell .

Ricordando che B_x, E_y, E_z sono funzioni composte e ricordando che le coordinate nei due riferimenti K e K' sono legate dalle trasformazioni di Lorentz, si ottiene la relazione

$$(10) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = \gamma V \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'}.$$

Ma il confronto fra le equazioni (c) e (10) non ci può dare nessuna nuova relazione poiché esse non hanno eguaglianza di struttura; infatti nella (c) figurano le derivate delle componenti del campo elettromagnetico rispetto a tre variabili, mentre nell'equazione (10) abbiamo le derivate rispetto a quattro variabili.

N. 7 - Covarianza della quarta equazione di Maxwell; 1ª parte

Nell'intento di trovare la legge di trasformazione della componente B_x del campo magnetico \vec{B} quando questo sia soggetto alle trasformazioni di Lorentz, consideriamo l'equazione scalare che si ottiene proiettando sull'asse z la IV) equazione di Maxwell; si ha:

$$\left(\text{rot}\vec{B}\right)_z = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_z,$$

cioè (d)
$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Ricordiamo che B_x, B_y ed E_z sono funzioni delle variabili x, y, z, t attraverso x', y', z', t' ; ad esempio si ha

$$B_y = B_y [x'(x, y, z, t), y'(x, y, z, t), z'(x, y, z, t), t'(x, y, z, t)] .$$

Calcoliamo la prima derivata parziale che compare nella (d); si ha

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$; ne segue che

$$(11) \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \gamma \frac{\partial B_y}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t'} .$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale che compare nella (d); si ha

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$; ne segue che

$$(12) \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial y'} .$$

Calcoliamo la terza derivata parziale che compare nella (d); si ha

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; ne segue che

$$(13) \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\gamma V \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial t'} .$$

Sostituendo le (11),(12),(13) nella (d) si trova che nel riferimento inerziale K' l'equazione (d) assume la forma:

$$\gamma \frac{\partial B_y}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t'} - \frac{\partial B_x}{\partial y'} = -\gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} .$$

Da questa si ottiene

$$\gamma \frac{\partial B_y}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x'} - \frac{\partial B_x}{\partial y'} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t'} ,$$

ossia (14)
$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \right] - \frac{\partial B_x}{\partial y'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma (E_z + V B_y) \right] .$$

Confrontiamo la (14) con la (d). Si vede che passando nel riferimento inerziale K' l'equazione (d) conserva la stessa struttura che essa ha nel riferimento K e quindi possiamo scrivere la (d) nella forma covariante

$$(d') \quad \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} , \quad \text{cioè} \quad (\text{rot} \vec{B}')_{z'} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{z'} ;$$

l'unica condizione richiesta per scrivere la (d) sotto questa forma è che tra le componenti dei campi nei due riferimenti si pongano le relazioni:

$$(C) \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \\ E'_z = \gamma (E_z + V B_y) \end{cases} .$$

Da esse si ricava che alle trasformazioni già note delle componenti dei campi dobbiamo aggiungere la trasformazione $B'_x = B_x$.

Grazie ai sistemi (A),(B),(C) possiamo raggruppare in una sola tabella le formule che ci permettono di passare dalle componenti dei vettori \vec{E} e \vec{B} nel riferimento inerziale K alle componenti nel riferimento inerziale K'. Questa tabella è data dal sistema

$$(D) \quad \begin{cases} E'_x = E_x, & E'_y = \gamma(E_y - VB_z) \\ & E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \\ B'_x = B_x, & B'_y = \gamma(B_y + \frac{V}{c^2}E_z) \\ & B'_z = \gamma(B_z - \frac{V}{c^2}E_y) \end{cases} .$$

Le formule di trasformazione inverse sono date dal sistema

$$(E) \quad \begin{cases} E_x = E'_x, & E_y = \gamma(E'_y + VB'_z) \\ & E_z = \gamma(E'_z - VB'_y) \\ B_x = B'_x, & B_y = \gamma(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z) \\ & B_z = \gamma(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y) \end{cases} .$$

Vedremo che le tabelle (D) ed (E) hanno un'importanza fondamentale nella dimostrazione della covarianza delle equazioni del campo elettromagnetico.

2) Consideriamo ora l'equazione scalare che si ottiene proiettando la IV) equazione di Maxwell sull'asse y. Si ha

$$\left(\text{rot} \vec{B} \right)_y = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_y ,$$

ossia (e) $\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} .$

L'equazione si riferisce al riferimento inerziale K. Facciamo vedere che, quando si passa all'altro riferimento inerziale K' per mezzo di una trasformazione di Lorentz, essa assume la forma covariante

$$(e') \quad \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} .$$

Calcoliamo infatti la prima derivata parziale che compare nella (e); si ha

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; ne segue che

$$(15) \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z'} .$$

Calcoliamo ora la seconda derivata parziale che compare nella (e); si ha:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$; ne segue che

$$(16) \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = \gamma \frac{\partial B_z}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t'} .$$

Calcoliamo infine la terza derivata parziale che compare nella (e); si ha:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; ne segue che

$$(17) \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\gamma V \frac{\partial E_y}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_y}{\partial t'} .$$

Sostituiamo le (15),(16),(17) nell'equazione (e),che riscriviamo

$$(e) \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} ;$$

si trova che nel riferimento K' la (e) assume la forma

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial B_z}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t'} = -\gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x'} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} .$$

Da questa equazione si ottiene

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial B_z}{\partial x'} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x'} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t'} ,$$

$$\text{ossia (18)} \quad \frac{\partial B_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma (E_y - V B_z) \right] .$$

Ricordando, dalla tabella (D), le relazioni

$$B_x = B'_x , \quad \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) = B'_z , \quad \gamma (E_y - V B_z) = E'_y$$

possiamo dare alle (18) la forma

$$(\text{e}') \quad \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} , \quad \text{cioè} \quad (\text{rot} \vec{B}')_{y'} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{y'} .$$

L'equazione (e') è l'espressione che l'equazione (e) assume nel riferimento inerziale K', quando eseguiamo su di questa le trasformazioni di Lorentz.

N. 8 - Covarianza della seconda e della terza equazione di Maxwell.

Abbiamo dimostrato che le equazioni scalari

$$(a) \quad (\text{rot} \vec{E})_y = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_y , \quad (b) \quad (\text{rot} \vec{E})_z = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_z$$

sono covarianti per trasformazioni di Lorentz quando si passa da un riferimento inerziale ad un altro.

Rimane da dimostrare la covarianza, per trasformazioni di Lorentz, dell'equazione scalare

$$(f) \quad (\text{rot} \vec{E})_x = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x ,$$

cioè, in forma cartesiana, dell'equazione:

$$(f) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} .$$

Vediamo come cambia l'equazione scalare (f) per trasformazioni di Lorentz. Ricordiamo che le componenti del campo elettromagnetico sono funzioni di x, y, z, t attraverso le variabili x', y', z', t' ; per es. si ha:

$$E_z = E_z[x'(x, y, z, t), y'(x, y, z, t), z'(x, y, z, t), t'(x, y, z, t)] .$$

Calcoliamo la prima derivata parziale che figura nella (f); si ha:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$; ne segue che

$$(19) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y'} .$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale della (f); si ha:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; ne segue che

$$(20) \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z'} .$$

Calcoliamo infine la terza derivata parziale della (f); si ha:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; ne segue che

$$(21) \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = -\gamma V \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'} .$$

Sostituiamo le (19),(20),(21) nella (f). Si trova che, per trasformazioni di Lorentz, nel riferimento inerziale K' la (f) assume la forma:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = \gamma V \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'} .$$

Ma passando dal riferimento K al riferimento K' le componenti del campo elettromagnetico si trasformano come è indicato nella tabella (E). Pertanto l'equazione precedente diviene:

$$\frac{\partial}{\partial y'} \gamma(E'_z - VB'_y) - \frac{\partial}{\partial z'} \gamma(E'_y + VB'_z) = \gamma V \frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B'_x}{\partial t'} .$$

Semplificando per γ ed eseguendo le derivate delle somme si ottiene in successione:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - V \frac{\partial B'_y}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} - V \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = V \frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial t'} ,$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = V \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) - \frac{\partial B'_x}{\partial t'} ,$$

cioè
$$\left(\text{rot} \vec{E}' \right)_{x'} = V \cdot \text{div} \vec{B}' - \left(\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \right)_{x'} ,$$

e infine (22)
$$\operatorname{div} \vec{B}' = \frac{1}{V} \left[\left(\operatorname{rot} \vec{E}' \right)_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'} \right].$$

Ora non possiamo dire che sia a priori $\operatorname{div} \vec{B}' = 0$; rimane quindi da dimostrare l'equazione

$$\left(\operatorname{rot} \vec{E}' \right)_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'} = 0 ,$$

cioè rimane da dimostrare la covarianza della terza equazione di Maxwell. Vediamo allora come varia per trasformazioni di Lorentz la II) equazione di Maxwell $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, cioè l'equazione scalare

$$(g) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 .$$

Calcoliamo la prima derivata parziale che figura nella (g); si ha

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$; ne segue che

$$(23) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} .$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale che figura nella (g); si ha:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$; ne segue che

$$(24) \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial y'} .$$

Calcoliamo infine la terza derivata parziale che figura nella (g); si ha:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; ne segue che

$$(25) \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z'} .$$

Sostituendo le (23),(24),(25) nella (g) si ha :

$$(g_1) \quad \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 .$$

Consideriamo la tabella di trasformazione (E), che ci permette di passare dalle componenti dei vettori \vec{E}, \vec{B} nel riferimento inerziale K alle componenti corrispondenti nel riferimento inerziale K'. Applicando le formule di trasformazione all'equazione (g₁) si ha:

$$\gamma \frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B'_x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial y'} \gamma (B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z) + \frac{\partial}{\partial z'} \gamma (B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y) = 0 .$$

Semplifichiamo il fattore γ , eseguiamo le derivate delle due somme e trasportiamo opportunamente alcuni termini al secondo membro. Si ha:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \frac{V}{c^2} \frac{\partial B'_x}{\partial t'} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial z'} .$$

La somma al primo membro è la divergenza del vettore \vec{B}' , e quindi possiamo scrivere

$$(g_2) \quad \text{div} \vec{B}' = \frac{V}{c^2} \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \right) .$$

Ma per l'espressione entro parentesi al secondo membro si ha:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = (\text{rot} \vec{E}')_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'}.$$

Ne segue che l'equazione (g₂) assume la forma

$$(g_3) \quad \text{div} \vec{B}' = \frac{V}{c^2} \left[(\text{rot} \vec{E}')_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'} \right].$$

Confrontiamo la (g₃) con la (22), che per comodità riscriviamo

$$(22) \quad \text{div} \vec{B}' = \frac{1}{V} \left[(\text{rot} \vec{E}')_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'} \right].$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$\left(\frac{V}{c^2} - \frac{1}{V} \right) \left[(\text{rot} \vec{E}')_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'} \right] = 0$$

Poiché il fattore $\frac{V}{c^2} - \frac{1}{V}$ è diverso da zero, si ricava:

$$(f') \quad (\text{rot} \vec{E}')_{x'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{x'} = 0.$$

Essa è la forma covariante dell'equazione (f) per trasformazioni di Lorentz. In precedenza (parag. N. 3) avevamo trovato le relazioni scalari:

$$(a') \quad (\text{rot} \vec{E}')_{y'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{y'} = 0, \quad (b') \quad (\text{rot} \vec{E}')_{z'} + \left(\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \right)_{z'} = 0,$$

che sono le forme covarianti delle equazioni scalari che si ottengono proiettando la III) eq. di Maxwell rispettivamente sugli assi y e z.

Le equazioni (a'),(b'),(f'), ci dicono che la terza eq. di Maxwell

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

è covariante per trasformazioni di Lorentz quando si passa da un riferimento inerziale ad un altro, che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

In forza della (f'), dalla (g₃) [o dalla (22)] si ricava:

$$\text{div} \vec{B}' = 0 ;$$

essa esprime la covarianza della seconda equazione Maxwell ($\text{div} \vec{B} = 0$) per trasformazioni di Lorentz.

N. 9 - Covarianza della prima e della quarta equazione di Maxwell

Rimane da completare la dimostrazione della covarianza della IV) equazione di Maxwell nel caso che nello spazio considerato non vi siano cariche elettriche né ferme ($\rho=0$), né in movimento ($\vec{J}=0$); cioè dobbiamo dimostrare la covarianza dell'equazione

$$\text{IV) } \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Abbiamo già dimostrato (parag. N. 3) la covarianza delle equazioni scalari che si ottengono proiettando l'eq. IV) sugli assi z e y ; infatti abbiamo fatto vedere che le equazioni

$$(d) \quad (\text{rot} \vec{B})_z = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_z , \quad (e) \quad (\text{rot} \vec{B})_y = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_y$$

divengono, per trasformazioni di Lorentz, le seguenti:

$$(d') \quad (\text{rot} \vec{B}')_{z'} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{z'}, \quad (e') \quad (\text{rot} \vec{B}')_{y'} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{y'}.$$

Rimane da dimostrare la covarianza dell'equazione scalare che si ottiene proiettando la IV) eq. sull'asse x , cioè dell'equazione scalare

$$(\text{rot} \vec{B})_x = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_x,$$

ossia (h)
$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Calcoliamo la prima derivata parziale della (h), ricordando che E_x, B_y e B_z sono funzioni di x, y, z, t attraverso le variabili x', y', z', t' ; si ha.:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$; ne segue che

$$(26) \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y'}.$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale della (h); si ha:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; ne segue che

$$(27) \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z'}.$$

Calcoliamo la terza derivata parziale della (h); si ha:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; ne segue che

$$(28) \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\gamma V \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_x}{\partial t'} .$$

Sostituiamo le (26),(27),(28) nella (h). Si trova che, per trasformazioni di Lorentz, nel riferimento inerziale K' la (h) assume la forma:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} = -\gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} .$$

Ma passando dal riferimento inerziale K al riferimento K' le componenti del campo elettromagnetico si mutano, per trasformazioni di Lorentz, come è indicato nella tabella (E). Applicando le formule di trasformazione si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial y'} \gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right) = -\gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} .$$

Semplifichiamo il fattore comune γ , eseguiamo le derivate delle due somme e trasportiamo opportunamente qualche termine al primo membro; si ha:

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} + \frac{V}{c^2} \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} .$$

La differenza al primo membro dell'equazione rappresenta la componente secondo l'asse x' del vettore $\text{rot} \vec{B}'$, mentre la somma entro parentesi tonde rappresenta la quantità $\text{div} \vec{E}'$. Possiamo quindi scrivere

$$\left(\text{rot}\vec{B}'\right)_{x'} + \frac{V}{c^2} \text{div}\vec{E}' = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'},$$

ossia (m)
$$\text{div}\vec{E}' = \frac{c^2}{V} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'} - \left(\text{rot}\vec{B}'\right)_{x'} \right].$$

L'espressione (m) ci spinge a trovare il cambiamento dell'equazione

$$(n) \quad \text{div}\vec{E} = 0$$

per trasformazioni di Lorentz. Teniamo presente che la (n) è la Prima Equazione di Maxwell in una regione di spazio priva di cariche ($\rho = 0$). Scrivendo opportunamente la (n) in forma cartesiana si ha:

$$(n) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Calcoliamo la prima derivata dell'eq. (n), ricordando che E_x, E_y, E_z sono funzioni di x, y, z, t tramite le variabili x', y', z', t' ; si ha:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$; ne segue che

$$(29) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'}.$$

Calcoliamo la seconda derivata parziale che figura nella (n); si ha:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$; ne segue che

$$(30) \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y'}$$

Calcoliamo infine la terza derivata parziale che figura nella (n); si ha:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z}$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ha $\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; ne segue che

$$(31) \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z'}$$

Sostituiamo le (29),(30),(31) nella (n). Troviamo che, applicando le trasformazioni di Lorentz, nel riferimento inerziale K' la (n) assume la forma:

$$\gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = 0$$

Ma passando dal riferimento inerziale K al riferimento inerziale K' le componenti del campo elettromagnetico si mutano, per trasformazioni di Lorentz, come è indicato nella tabella (E). Applicando le formule di trasformazione si ricava:

$$\gamma \frac{\partial E'_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial y'} \gamma (E'_y + VB'_z) + \frac{\partial}{\partial z'} \gamma (E'_z - VB'_y) = 0$$

Semplifichiamo il fattore γ , eseguiamo le derivate delle due somme e lasciamo solo alcuni termini al primo membro; si ha:

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = \frac{V}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - V \frac{\partial B'_z}{\partial y'} + V \frac{\partial B'_y}{\partial z'}$$

Poiché la somma al primo membro rappresenta la quantità scalare $\text{div} \vec{E}'$, possiamo scrivere

$$(32) \quad \text{div} \vec{E}' = V \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'} - \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right) \right] .$$

Ma per la differenza entro parentesi al secondo membro si ha:

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = (\text{rot} \vec{B}')_{x'} .$$

Ne segue che l'equazione (32) assume la forma

$$(p) \quad \text{div} \vec{E}' = V \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'} - (\text{rot} \vec{B}')_{x'} \right] .$$

Riscriviamo l'equazione (m) accanto alla (p); si ha :

$$(m) \quad \text{div} \vec{E}' = \frac{c^2}{V} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'} - (\text{rot} \vec{B}')_{x'} \right] .$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni si ha:

$$\left(\frac{c^2}{V} - V \right) \cdot \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'} - (\text{rot} \vec{B}')_{x'} \right] = 0 .$$

Poiché $c > V$, il fattore $\frac{c^2}{V} - V$ è diverso da zero e quindi si ricava

$$(h') \quad (\text{rot} \vec{B}')_{x'} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right)_{x'} = 0 .$$

La (h') e le equazioni (e') e (d') del N.3 dimostrano la covarianza, per trasformazioni di Lorentz, delle tre equazioni scalari che si ottengono proiettando sugli assi x, y, z del riferimento K la quarta equazione di Maxwell

$$(IV) \quad \text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0,$$

e ciò dimostra la covarianza della stessa equazione vettoriale per trasformazioni di Lorentz.

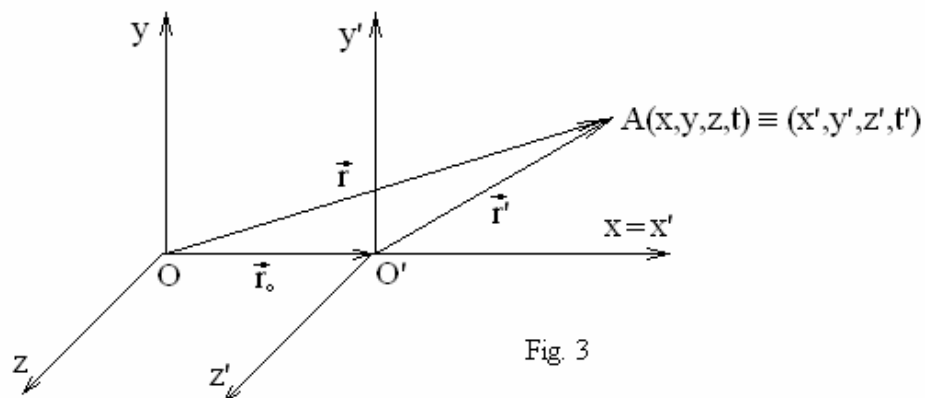
Dalle equazioni (h'), (m), inoltre, si ricava subito che si ha :

$$\text{div} \vec{E}' = 0.$$

Essa dimostra la covarianza della I) equazione di Maxwell nell'ipotesi che nella regione di spazio in cui si propaga il campo elettromagnetico non vi siano cariche elettriche.

N. 10 – Non invarianza delle equazioni di Maxwell per trasformazioni di Galileo

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali $S=Oxyz$ ed $S'=O'x'y'z'$, egualmente orientati e aventi gli assi x e x' sovrapposti (fig. 3).



Supponiamo che S' si muova rispetto ad S di moto rettilineo uniforme con velocità \vec{V} avente il verso concorde con quello dell'asse x , quindi $\vec{V} = [V, 0, 0]$.

Supponiamo inoltre che quando O' passa per O , due orologi identici, solidali ai due sistemi e posti nei punti stessi O e O' , vengano sincronizzati

in modo da segnare lo stesso tempo $t=t'=0$. Assumiamo questo istante come inizio di un evento A che termina rispettivamente agli istanti t e t' nei due riferimenti S e S' e siano (x,y,z,t) e (x',y',z',t') le coordinate spazio-temporale di questo evento rispetto ai due riferimenti negli istanti t e t' . Possiamo sempre pensare che questo evento accada in un punto fisso rispetto ad uno dei due sistemi di riferimento; per esempio in un punto solidale al sistema S' .

Fatte queste precisazioni, è ovvio che t e t' sono le durate temporali dell'evento A rispetto ai due riferimenti. Ora, **Galileo ipotizza che le due durate temporali siano uguali e pone $t = t'$** .

Inoltre, dalla fig. 1 subito si ricava la relazione vettoriale

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad \text{da cui} \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 .$$

Poiché t è uguale nei due sistemi di riferimento, si ha $\vec{r}_0 = \vec{V}t$; si ricava così che fra le coordinate dell'evento A nei due riferimenti intercorrono le relazioni:

$$(g) \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t ;$$

esse sono le formule di passaggio da S a S' .

Le formule inverse sono:

$$(g') \quad x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' .$$

Questi due sistemi rappresentano la cosiddetta “trasformazione di Galileo”.

Facciamo vedere che le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, cioè le equazioni di Maxwell, non sono invarianti rispetto a questa trasformazione (E. Persico, Fisica teorica, pag. 45).

Facciamo vedere, per esempio, che la III) eq. di Maxwell

$$(1) \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

non è invariante per trasformazione di Galileo.

Infatti passiamo dal riferimento S al riferimento S' e teniamo presente che i vettori \vec{E} ed \vec{H} del campo elettromagnetico sono funzioni di x,y,z,t attraverso le variabili x',y',z',t' , cioè

$$(2) \quad \vec{E} = \vec{E}[x'(x,y,z,t), y'(x,y,z,t), z'(x,y,z,t), t'(x,y,z,t)] ,$$

$$\text{e così } (3) \quad \vec{H} = \vec{H}[x'(x,y,z,t), y'(x,y,z,t), z'(x,y,z,t), t'(x,y,z,t)] .$$

Deriviamo la funzione \vec{H} rispetto a t applicando il teorema della derivata di una funzione composta; dalla trasformazione (g) si ha:

$$(4) \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Ma $\frac{\partial x'}{\partial t} = -V$, $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$, mentre $\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$. Si ottiene pertanto

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -V \frac{\partial \vec{H}}{\partial x'} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'} , \quad \text{da cui} \quad (6) \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + V \frac{\partial \vec{H}}{\partial x'} .$$

La (6) si scinde nelle tre equazioni scalari :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t'} &= \frac{\partial H_x}{\partial t} + V \frac{\partial H_x}{\partial x'} , & \frac{\partial H_y}{\partial t'} &= \frac{\partial H_y}{\partial t} + V \frac{\partial H_y}{\partial x'} , \\ \frac{\partial H_z}{\partial t'} &= \frac{\partial H_z}{\partial t} + V \frac{\partial H_z}{\partial x'} . \end{aligned}$$

La (5) ci dice che la derivata $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ cambia forma quando si passa dal riferimento S al riferimento S' .

Facciamo vedere che il $\text{rot} \vec{E}$, invece, non cambia forma quando si passa dal primo al secondo riferimento. Infatti, proiettiamo il vettore $\text{rot} \vec{E}$ sull'asse x e prendiamo in considerazione la componente $(\text{rot} \vec{E})_x$. Si ha:

$$(7) \quad (\text{rot} \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} ,$$

da cui
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} ;$$

ma
$$\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0 , \quad \text{mentre} \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 .$$

Si ricava
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y'}$$
.

Analogamente

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} ;$$

ma
$$\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0 , \quad \text{mentre} \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 .$$

Si ricava
$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z'}$$
.

Sostituendo nella (7) si vede che l'espressione di $(\text{rot} \vec{E})_x$ non cambia forma quando si passa dal riferimento S al riferimento S', cioè

$$(\text{rot} \vec{E})_x = (\text{rot} \vec{E})_{x'} .$$

Ciò si poteva prevedere subito dall'esame delle trasformazioni di Galileo, osservando che x, y, z, t sono funzioni lineari di x', y', z', t' .

Procedendo in modo analogo si ricava

$$(\text{rot} \vec{E})_y = (\text{rot} \vec{E})_z , \quad (\text{rot} \vec{E})_z = (\text{rot} \vec{E})_{z'} .$$

Complessivamente si ha

$$(8) \quad \text{rot} \vec{E} = \text{rot}' \vec{E} ,$$

dove l'apice in $\text{rot}' \vec{E}$ indica che le derivate sono eseguite rispetto a x', y', z' . Tenendo conto delle (5), (8) la (1) diventa

$$(9) \quad \text{rot}' \vec{E} = -\mu \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t'} - \nabla \frac{\partial \vec{H}}{\partial x'} \right) .$$

Ma la (9) non ha la stessa forma della (1), perché al secondo membro della (9) abbiamo non uno, ma due tipi di derivate, cioè le derivate $\frac{\partial}{\partial t'}$ e $\frac{\partial}{\partial x'}$.

Abbiamo così dimostrato che la III) equazione di Maxwell ha espressioni diverse rispetto ai due riferimenti inerziali S e S' ; pertanto essa non è invariante per trasformazioni di Galileo.

Onde elettromagnetiche – Nazario Magnarelli

CAPITOLO TERZO

LE ONDE IN UN CONDUTTORE

N. 1 - Propagazione di un'onda elettromagnetica piana in un conduttore.

Vogliamo dimostrare, partendo dalle equazioni di Maxwell, che in un conduttore un'onda elettromagnetica viene assorbita esponenzialmente (vedi I. F. Quercia - B. Rispoli - Problemi di Fisica II pag. 380 - Libreria Veschi Roma; C. Mencuccini - V. Silvestrini - Fisica II pag. 379 Ed. Liguori - Napoli; A. Vicentini- Argomenti di Fisica ; Arbizzano-Verona)

Dimostrazione.

Consideriamo un'onda elettromagnetica piana che si propaghi nel verso positivo dell'asse x e polarizzata linearmente secondo l'asse y ; in altre parole, il campo elettrico \vec{E} sia orientato secondo l'asse y .

Le componenti del vettore \vec{E} sono allora

$$E_x = 0, \quad E_y(x,t) \neq 0, \quad E_z = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = [0, E_y, 0] .$$

Poiché il vettore \vec{H} del campo magnetico è orientato secondo l'asse z , le sue componenti sono:

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z(x,t) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{H} = [0, 0, H_z] .$$

Supponiamo che l'onda cada su una lastra di un mezzo materiale avente conduttività elettrica σ e permittività ε . Vogliamo dimostrare, partendo dalle equazioni di Maxwell, che nella lastra l'onda elettromagnetica viene assorbita esponenzialmente.

Scriviamo la III e IV equazione di Maxwell:

$$\text{III)} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ,$$

$$\text{IV)} \quad \text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ;$$

ovviamente, $\sigma = 0$ nel vuoto o nell'aria, mentre $\sigma \neq 0$ in un metallo.

Il vettore $\vec{j} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ è la densità di corrente totale. In un mezzo a conduttività σ e permittività ε la densità di corrente \vec{j} è la somma (vettoriale) della densità di corrente di conduzione $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$ e della densità di corrente di spostamento $\vec{j}_s = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, generata per induzione elettrica al variare nel tempo del campo elettrico.

Supponiamo che il campo elettromagnetico dipenda dal tempo secondo una legge sinusoidale con pulsazione ω (costante, reale e positiva) e che le sue componenti sul piano $x=0$ siano:

$$E_x = 0 \quad E_y(x, t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad E_z = 0 \quad .$$

Dimostreremo che in tal caso l'onda del campo si attenua con legge esponenziale mentre essa si propaga entro un mezzo. Vedremo che il vettore campo elettrico $\vec{E} = \vec{E}_y(x, t)$, dopo aver attraversato uno spessore x del mezzo, ha un modulo dato dall'espressione

$$(1) \quad E = E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi) \quad .$$

Dalla (1) si ricava:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \omega E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi) \quad .$$

Si ottiene pertanto :

$$(2) \quad j_s = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon \omega E_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad ,$$

$$(3) \quad j_c = \sigma E = \sigma E_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi)$$

Si riconosce così che i vettori \vec{j}_c e \vec{j}_s sono in quadratura nel tempo e che essi hanno le ampiezze

$$j_c = \sigma E_0 e^{-\alpha x} \quad , \quad j_s = \varepsilon \omega E_0 e^{-\alpha x} \quad .$$

Dividendo membro a membro le due eguaglianze si ottiene:

$$(4) \quad \frac{j_c}{j_s} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

Troviamo subito le componenti dei vettori $\text{rot } \vec{E}$ e $\text{rot } \vec{H}$ ricordando che le componenti dei vettori \vec{E} e \vec{H} sono $\vec{E}[0, E_y(x, t), 0]$, $\vec{H}[0, 0, H_z(x, t)]$. Si ottiene:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = +\vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \rightarrow \quad (5) \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} ;$$

Si tenga presente che la derivata $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ è nulla perché E_y non è funzione di z .

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = -\vec{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \rightarrow \quad (6) \quad \text{rot } \vec{H} = -\vec{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} ;$$

Si tenga presente che la derivata $\frac{\partial H_z}{\partial y}$ è nulla perché H_z non è funzione di y .

Le proiezioni scalari delle equazioni III e IV sugli assi coordinati sono pertanto

$$A) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} .$$

Applicando l'operatore rotore alla III) si ha:

$$\text{rot} (\text{rot } \vec{E}) = -\mu \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) ;$$

d'altra parte sappiamo che

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} .$$

Eguagliando membro a membro si ha:

$$(7) \quad \nabla^2 \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) = \mu \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) .$$

In un mezzo elettricamente neutro, sia esso un isolante o un conduttore, si ha $\rho = 0$. In tal caso, ricordando che $\text{div}\vec{E} = \rho$, si ottiene:

$$\text{div}\vec{E} = 0 , \quad \text{e quindi} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) = 0 .$$

Ne segue che la (7) diventa :

$$(8) \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\vec{H}) .$$

Sostituendo nella (8) l'espressione di $\text{rot}\vec{H}$ data dalla IV equazione di Maxwell si ha:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{da cui (9)} \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu \left(\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) .$$

Se poi l'onda elettromagnetica si propaga in un dielettrico, il coefficiente di conducibilità è $k = 0$ e la (9) diventa:

$$(9') \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$$

Tenendo presente che $E = E_y(x, t)$, e che le derivate di \vec{E} rispetto a y e rispetto a z sono nulle, dalla (9) si ha :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial t} .$$

In forma scalare si ha:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{ove si pone} \quad \mu \varepsilon = \frac{1}{v^2} ,$$

essendo v la velocità delle onde elettromagnetiche nel metallo considerato.

Torniamo ora al sistema (A) e deriviamo la prima equazione rispetto a t e la seconda rispetto a x . Si ottiene:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial E_y}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} . \end{cases}$$

Da queste equazioni si ha

$$(12) \quad -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial E_y}{\partial x} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} .$$

Ma la prima equazione del sistema (A) ci dice che $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$;

sostituendo l'espressione di $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ nella (12) si ottiene:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} .$$

Le equazioni differenziali (10),(13) formano il sistema:

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} \quad \text{ove} \quad \mu \varepsilon = \frac{1}{v^2} .$$

Le equazioni (10), (13) ci dicono che il campo elettrico $\vec{E}(0, E_y, 0)$ e il campo magnetico $\vec{H}(0, 0, H_z)$ soddisfano la medesima equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine. Se la legge con cui il campo elettromagnetico dipende dal tempo è sinusoidale con pulsazione ω (costante, reale e positiva), è facile provare che l'onda del campo si attenua con legge esponenziale mentre si propaga entro il materiale, ossia le (10) e (13) sono rispettivamente soddisfatte da equazioni del tipo

$$(14) \quad E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi) ,$$

$$(15) \quad H_z(x, t) = H_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi) ,$$

dove E_0 , φ , H_0 e ψ sono costanti reali arbitrarie, mentre α e β sono costanti positive opportune, dipendenti dalle caratteristiche elettromagnetiche del mezzo e dalla pulsazione.

Precisamente α e β hanno i seguenti significati fisici (vedi C. Mencuccini-V. Silvestrini, Fisica II, pag. 377; Ed. Liguori) :

$$\alpha = \frac{\omega n_2}{c} , \quad \beta = \frac{\omega}{v} \quad \text{con} \quad v = \frac{c}{n_1} .$$

Ricordo che v è la velocità di propagazione dell'onda e.m. nel mezzo considerato, mentre n_1 ed n_2 (con $n_1 > 0$ ed $n_2 > 0$) sono i coefficienti del numero complesso

$$n = n_1 - j n_2 \quad j = \sqrt{-1} ,$$

che rappresenta l'indice di rifrazione complesso del mezzo in cui l'onda si propaga. Alla parte reale n_1 del numero n si riserva il nome di "indice di rifrazione".

Come primo controllo della (14), vediamo subito che per $x=0$ si ottiene $E_y(0, t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$; si ritrova così l'espressione del campo elettrico sul piano $x = 0$.

Facciamo ora vedere, sfruttando il principio di identità, che l'equazione

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi)$$

soddisfa l'eq. differenziale (10) se e solo se i coefficienti α e β verificano alcune condizioni. A tale scopo calcoliamo le seguenti derivate:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= E_0 \cdot [-\alpha e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi) - \beta e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi)] , \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= E_0 \cdot [\alpha^2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi) + \alpha \beta \cos(\omega t - \beta x + \varphi) + \\ &\quad + \alpha \beta e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi) - \beta^2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi)] .\end{aligned}$$

Riducendo i termini simili si ha la seguente relazione (16) :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = E_0 e^{-\alpha x} [(\alpha^2 - \beta^2) \sin(\omega t - \beta x + \varphi) + 2\alpha \beta \cos(\omega t - \beta x + \varphi)] .$$

Calcoliamo ora le derivate rispetto al tempo dell'equazione d'onda (14). Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= +E_0 \omega e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x + \varphi) , \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= -E_0 \omega^2 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi) .\end{aligned}$$

Da esse si ottiene:

$$\begin{aligned}(17) \quad \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \\ E_0 e^{-\alpha x} \cdot [-\epsilon \mu \omega^2 \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi) + \sigma \mu \omega \cdot \cos(\omega t - \beta x + \varphi)] .\end{aligned}$$

La funzione (14) soddisfa l'equazione differenziale (10) se e solo se il secondo membro della (16) e il secondo membro della (17) sono identici; e ciò succede se e solo se abbiamo:

$$(18) \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\epsilon \mu \omega^2 \quad \text{e} \quad 2\alpha \beta = \sigma \mu \omega .$$

Le equazioni (18) costituiscono un sistema di 4° grado di 2 equazioni nelle incognite α e β .

Possiamo scrivere il sistema nella forma:

$$(18') \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\varepsilon\mu \omega^2 \\ \beta = \sigma\mu\omega/2\alpha \end{cases}$$

Risolviamo. Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha:

$$\alpha^2 - \frac{(\sigma\mu\omega)^2}{4\alpha^2} + \varepsilon\mu \omega^2 = 0,$$

$$\text{da cui} \quad 4\alpha^4 + 4(\varepsilon\mu \omega^2)\alpha^2 - (\sigma\mu \omega)^2 = 0.$$

Risolvendo rispetto ad α^2 si ha:

$$\alpha^2 = \frac{1}{4} \left(-2\varepsilon\mu \omega^2 \pm \sqrt{4(\varepsilon\mu \omega^2)^2 + 4(\sigma\mu \omega)^2} \right),$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left(-\varepsilon\mu \omega^2 \pm \sqrt{(\varepsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} \right).$$

Il segno - davanti al radicale si scarta perché ad esso corrisponde un valore negativo di α^2 , cioè un valore immaginario di α . Pertanto si ha:

$$(19) \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(\varepsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} - \varepsilon\mu \omega^2 \right]}.$$

Ricaviamo ora β ; ricordando che $\beta = \sigma\mu \omega/2\alpha$ si ha:

$$\beta = \frac{\sigma\mu\omega}{\sqrt{2 \cdot \left[\sqrt{(\varepsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} - \varepsilon\mu \omega^2 \right]}}.$$

Razionalizzando il denominatore si ha:

$$\beta = \frac{\sigma\mu\omega \cdot \sqrt{\left[\sqrt{(\varepsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} + \varepsilon\mu \omega^2 \right]}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sigma\mu \omega)^2}},$$

da cui (20)
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(\epsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} + \epsilon\mu \omega^2 \right]}.$$

Possiamo trovare espressioni più semplici per α e β , ma prima vogliamo ricavare altri elementi dal sistema (18). Esso si può scrivere più opportunamente nel modo seguente:

$$(g) \quad \begin{cases} \alpha^2 + j^2 \beta^2 = -\epsilon\mu \omega^2 \\ 2j \alpha\beta = j \sigma\mu \omega \end{cases} \quad \text{ove } j = \sqrt{-1}.$$

Sommando membro a membro le due equazioni si ha:

$$(\alpha + j\beta)^2 = -\epsilon\mu \omega^2 + j\sigma\mu \omega \rightarrow \alpha + j\beta = \sqrt{-\epsilon\mu \omega^2 + j\sigma\mu \omega};$$

quindi il sistema (g), nel campo complesso, equivale ad una equazione di 2° grado nella quale α e β sono positivi e $\alpha + j\beta$ è la radice quadrata del numero complesso $w = -\epsilon\mu \omega^2 + j\sigma\mu \omega$.

Poiché è $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, l'argomento ϑ del numero complesso $\alpha + j\beta$ è compreso fra 0 e $\pi/2$ rad. Scrivendo il numero in forma trigonometrica si ha $\alpha + j\beta = m(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$.

Troviamo il modulo m del numero complesso; si ha $m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; e dalle (19), (20) si ricava

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(\epsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2}.$$

Per il modulo m del numero complesso si ha quindi l'espressione:

$$m = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = \left[(\epsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2 \right]^{1/4}.$$

L'argomento (o anomalia) ϑ del numero complesso è dato dalle due espressioni goniometriche

$$\cos(\vartheta) = \frac{\alpha}{m}, \quad \sin(\vartheta) = \frac{\beta}{m}.$$

Possiamo indicare l'argomento ϑ del numero complesso $\alpha + j\beta$ con l'espressione

$$\vartheta = \Phi(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

I calcoli che abbiamo eseguiti ci permettono di dire che l'onda elettrica e l'onda magnetica si propagano entro un conduttore secondo le equazioni

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi)$$

$$H_z(x, t) = H_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi);$$

esse ci mostrano che l'ampiezza del campo elettromagnetico si attenua con legge esponenziale mentre il campo si propaga entro il metallo. Le costanti α e β sono date dalle formule (19),(20); queste ci mostrano che le costanti dipendono dalla pulsazione ω dell'onda elettromagnetica, dalla conducibilità elettrica k del metallo e dalle costanti dielettrica ϵ e magnetica μ del metallo stesso. Notiamo anche che le costanti α e β non sono indipendenti fra di loro, ma sono legate dalle relazioni già viste

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\epsilon\mu\omega^2 \quad \text{e} \quad 2\alpha\beta = \sigma\mu\omega.$$

Le formule (19), (20) che esprimono α e β si possono scrivere sotto un'altra forma più facile da ricordare (vedi D. Sette, Fisica III pag.470, Casa Ed. Veschi-Roma). Infatti si ha

$$\alpha = \left[\frac{1}{2} \epsilon\mu\omega^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma\mu\omega}{\epsilon\mu\omega^2} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}, \quad \text{da cui}$$

$$(21) \quad \alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \text{analogamente}$$

$$(22) \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)^{1/2}$$

N.2- Velocità delle onde elettromagnetiche in un conduttore

Le formule (14) e (19) del N. 1 [relative al campo elettrico $E_y(x, t)$ e alla costante α] ci permettono di trovare la velocità v_c con cui l'onda elettromagnetica si propaga nel conduttore. Infatti, osserviamo che la (14) si può scrivere nel modo seguente:

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}x\right) + \varphi\right]$$

ne segue che si ha

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{v_c} \rightarrow (1) \quad v_c = \frac{\omega}{\beta},$$

ove v_c è la velocità con cui l'onda elettromagnetica si propaga nel conduttore.

Sostituendo a β la sua espressione $\beta = \mu\sigma\omega/2\alpha$ si ha

$$v_c = \omega \cdot \frac{2\alpha}{\mu\sigma\omega} = \frac{1}{\mu\sigma} 2\omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)^{1/2}, \text{ da cui}$$

$$(2) \quad v_c = \frac{\omega}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)^{1/2}.$$

N.3- Sulle ampiezze dei vettori \vec{E} ed \vec{H} di un'onda elettromagnetica piana che si propaga in un conduttore

Abbiamo visto che le equazioni differenziali che caratterizzano la propagazione di un'onda elettromagnetica piana in un conduttore sono date dal sistema

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} & \text{ove } \vec{E} \equiv (0, E_y, 0) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} & \vec{H} \equiv (0, 0, H_z) \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del sistema è data da equazioni del tipo

$$(1) \quad E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi)$$

$$(2) \quad H_z(x, t) = H_0 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi).$$

Sappiamo anche che α e β hanno le espressioni [vedi le (21), (22) del N.1]

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)^{1/2}.$$

Teniamo inoltre presente che le derivate parziali di E_y e di H_z sono legate dalle relazioni:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}$$

Le equazioni (1),(2) debbono soddisfare anche le equazioni del sistema (A); occorre quindi che le costanti (E_0 , φ) ed (H_0 , ψ) siano legate anche esse da alcune relazioni: queste si possono ottenere con il principio di identità nella verifica delle eguaglianze. Infatti, sostituendo le equazioni (1),(2) nella (A) si ha :

$$\begin{aligned}
& -E_0 \alpha e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \varphi) - \beta E_0 e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x + \varphi) = \\
& = -\mu \omega H_0 e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x + \psi)
\end{aligned}$$

Semplificando il fattore comune $e^{-\alpha x}$ e sciogliendo le funzioni goniometriche si ha:

$$\begin{aligned}
& +E_0 \alpha \cdot \sin(\omega t - \beta x) \cos \varphi + E_0 \alpha \cdot \cos(\omega t - \beta x) \sin \varphi + \\
(c) \quad & \beta E_0 \cdot \cos(\omega t - \beta x) \cos \varphi - \beta E_0 \cdot \sin(\omega t - \beta x) \sin \varphi = \\
& = \mu \omega H_0 \cdot \cos(\omega t - \beta x) \cos \psi - \mu \omega H_0 \cdot \sin(\omega t - \beta x) \sin \psi .
\end{aligned}$$

Se ora indichiamo con ϑ l'argomento del numero complesso $\alpha + j\beta$ si ha:

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \vartheta , \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \vartheta .$$

Sostituendo nella (c) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \vartheta (\sin(\omega t - \beta x) \cos \varphi + \cos(\omega t - \beta x) \sin \varphi) + \\
& E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \vartheta (\cos(\omega t - \beta x) \cos \varphi - \sin(\omega t - \beta x) \sin \varphi) = \\
& = \mu \omega H_0 \cos(\omega t - \beta x) \cos \psi - \mu \omega H_0 \sin(\omega t - \beta x) \sin \psi
\end{aligned}$$

Se nel primo membro raccogliamo opportunamente a fattore comune si ha:

$$\begin{aligned}
& \cos(\omega t - \beta x) \left[E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \vartheta \sin \varphi + E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \vartheta \cos \varphi \right] + \\
& + \sin(\omega t - \beta x) \left[E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \vartheta \cos \varphi - E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \vartheta \sin \varphi \right] = \\
& = \mu \omega H_0 \cos \psi \cdot \cos(\omega t - \beta x) - \mu \omega H_0 \sin \psi \cdot \sin(\omega t - \beta x) .
\end{aligned}$$

Affinché questa eguaglianza sia un'identità, cioè sia vera per qualsiasi valore dell'argomento $\omega t - \beta x$, i coefficienti di $\cos(\omega t - \beta x)$ e di $\sin(\omega t - \beta x)$ debbono essere uguali; cioè deve essere:

$$(d) \quad \begin{cases} \mu \omega H_0 \cos \psi = E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi) \\ \mu \omega H_0 \sin \psi = -E_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi) . \end{cases}$$

Ricordando note formule di trigonometria il sistema (d) diventa

$$\begin{cases} \mu\omega H_o \cos \psi = E_o \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\vartheta + \varphi) \\ \mu\omega H_o \sin \psi = - E_o \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\vartheta + \varphi) \end{cases}$$

cioè (e)
$$\begin{cases} \mu\omega H_o \cos \psi = E_o \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\vartheta + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\ \mu\omega H_o \sin \psi = E_o \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\vartheta + \varphi - \frac{\pi}{2}) \end{cases} .$$

Le eguaglianze del sistema (e) sono vere per ogni valore dell'angolo φ solo se si ha:

$$(3) \quad \mu\omega H_o = E_o \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{e} \quad \psi = \vartheta + \varphi - \frac{\pi}{2} .$$

Ne segue che l'ampiezza H_o del campo magnetico entro il conduttore è legata all'ampiezza E_o del campo elettrico dalla relazione

$$(4) \quad H_o = \frac{E_o \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} .$$

I valori di α e β dati dalle (19),(20) del N.1 ci hanno permesso di ricavare la formula già vista

$$(5) \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt[4]{(\epsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} .$$

Sostituendo nella (4), si trova che l'ampiezza H_o del campo magnetico è legata all'ampiezza E_o del campo elettrico dalla relazione:

$$H_o = \frac{E_o}{\omega\mu} \cdot \sqrt[4]{(\epsilon\mu \omega^2)^2 + (\sigma\mu \omega)^2} = \frac{E_o}{\omega\mu} \cdot \sqrt[4]{\epsilon^2 \mu^2 \omega^4 + \sigma^2 \mu^2 \omega^2} ,$$

$$H_o = \frac{E_o}{\omega\mu} \cdot \sqrt[4]{\epsilon^2 \mu^2 \omega^4 \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}\right)} = \frac{E_o}{\omega\mu} \cdot \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu} \cdot \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} ,$$

$$H_o = E_o \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{\omega^2 \mu^2}} \cdot \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} \quad \text{e infine si ha}$$

$$(6) \quad H_o = E_o \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2}.$$

N.4- Problemi di applicazione

Sappiamo che nei conduttori metallici si ha $\varepsilon \cong \varepsilon_o$; inoltre, per un metallo non ferromagnetico come il rame si ha $\mu \cong \mu_o$.

Calcoliamo allora il coefficiente $\sigma/\omega\varepsilon$ che compare nelle (21), (22) del N.1, nel caso che una radiazione luminosa di frequenza $f = 6 \cdot 10^{14}$ Hz cada su una lastra di rame, sapendo che questo metallo ha un coefficiente di conduttività $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Si ricava subito:

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_o} = \frac{5,8 \cdot 10^7}{6,28 \cdot 6 \cdot 10^{14} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = \frac{5,8 \cdot 10^5}{333,6}$$

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{5,8 \cdot 10^5}{3,34 \cdot 10^2} \rightarrow \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \cong 1,74 \cdot 10^3.$$

Come si vede, nei conduttori metallici si ha $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$. Ricordando le (21), (22) del N.1, possiamo dire che, con ottima approssimazione, si ha $\alpha \cong \beta$.

Il fatto che nei conduttori sia $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$ ci dice che nei conduttori metallici la corrente di spostamento è trascurabile rispetto alla corrente di conduzione. In questi conduttori, per le (21), (22) del N.1, si ha:

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} \cong \omega \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \cdot \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^{1/2},$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\sigma \epsilon \mu}{2\omega \epsilon}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\sigma \mu}{2\omega}} .$$

Per il comune valore di α e β si trova quindi l'espressione:

$$(1) \quad \alpha \cong \beta = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} .$$

Nel caso di una radiazione luminosa che penetra in una lastra di rame, possiamo semplificare notevolmente la relazione che lega le ampiezze E_0 ed H_0 del campo elettromagnetico. Infatti, riprendiamo la (6) del N. 3 e

teniamo presente che in questo caso è $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$. Si ha:

$$H_0 = E_0 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right)^{1/4} \cong E_0 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon}} ,$$

$$\text{quindi (2)} \quad H_0 = E_0 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon}} .$$

Possiamo ricavare anche la relazione tra la fase φ dell'onda elettrica e la fase ψ dell'onda magnetica. A tale scopo riprendiamo la formula

$$\psi = \varphi + \vartheta - \frac{\pi}{2} , \quad \text{ove} \quad \vartheta = \arctg \frac{\beta}{\alpha} .$$

Abbiamo visto che quando è $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$ risulta $\alpha \cong \beta$; ne segue

$$\arctg \frac{\beta}{\alpha} \cong \arctg 1 = \frac{\pi}{4} , \quad \text{quindi} \quad \psi \cong \varphi .$$

Consideriamo ora il caso che la corrente di conduzione sia trascurabile rispetto alla corrente di spostamento, cioè $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$ e facciamo vedere che la (21) del N.1 ci permette di trovare altre espressioni per α e β . A tale scopo ricordiamo lo sviluppo del binomio di Newton per $|x| < 1$; si ha

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

Lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione $\sqrt{1+x}$ ci permette di trovare facilmente i valori dei coefficienti α e β . Si ha:

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 - 1 \right]^{1/2},$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \cdot \sqrt{\epsilon\mu}$$

quindi (3) $\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \left[2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right]^{1/2}.$$

Poiché $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2$ è più che trascurabile, si ottiene

(4) $\beta \cong \omega \sqrt{\epsilon\mu}.$

Ricaviamo infine l'ampiezza d'onda del campo magnetico. Tenendo conto che nel nostro caso è $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ si ha:

$$H_0 = E_0 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2},$$

cioè (5)
$$H_0 = E_0 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} .$$

N. 5 – Intensità di una radiazione luminosa in una lastra di rame

Ricaviamo il valore della costante α nel caso che la corrente di spostamento sia trascurabile rispetto alla corrente di conduzione, cioè nel caso che sia $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$. Riferiamoci ancora ad una radiazione luminosa di

frequenza $f = 6 \cdot 10^{14}$ Hz che penetri in una lastra di rame e ricordiamo che questa non varia quando la radiazione passa dal vuoto ad un qualsiasi mezzo.

Sapendo che $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ e che $\varepsilon \cong \varepsilon_0$ e che $\mu \cong \mu_0$ si ha :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}} = \sqrt{\frac{5,8 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot 10^{14} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2}} = \sqrt{1373 \cdot 10^{14}} ,$$

quindi (1)
$$\alpha = 37,06 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} .$$

Poiché l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza si ha la formula:

$$(2) \quad I(x) = I_0 e^{-2\alpha x} = I_0 e^{-\frac{x}{d}} ,$$

dove $d = \frac{1}{2\alpha}$ e I_0 è l'intensità della radiazione per $x = 0$, cioè sulla superficie del metallo; la formula dimostra che la radiazione diminuisce esponenzialmente. Se poi si tiene conto che gran parte della radiazione elettromagnetica viene riflessa dalla lastra di metallo, dobbiamo concludere che la sua intensità diminuisce ancora più rapidamente.

Si noti che quando la radiazione penetra nel metallo di un tratto $x = d = \frac{1}{2\alpha}$ l'intensità della radiazione si riduce al valore:

$$I(d) = I_0 e^{-1} \approx 0,368 I_0 .$$

L'esponente d è detto spessore di penetrazione.

Vogliamo ora calcolare lo spessore di penetrazione del rame nel caso in cui esso venga investito da una radiazione luminosa di frequenza $f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (luce verde). In questo caso il valore di α è già stato calcolato ed è dato dalla (1). Poiché $d = 1/2\alpha$, subito si ottiene:

$$d = \frac{10^{-7}}{2 \cdot 37,06} \text{ m} = 0,0135 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \quad \text{ossia} \quad (3) \quad d = 1,35 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

Per il campo elettrico e il campo magnetico lo spessore di penetrazione è dato dalla formula $d = 1/\alpha$. Un conduttore è da considerarsi “*elettricamente massiccio*” se il suo diametro è molto maggiore dello spessore di penetrazione. Per le correnti ad alta frequenza, l’onda elettromagnetica è addensata nello spessore superficiale dei conduttori; questo fenomeno è detto *effetto pelle*.

Il risultato trovato con la formula (3) ci fa pensare che i corpi conduttori, aventi spessori uguali a 3 o 4 volte il corrispondente d , debbano essere tutti opachi alle onde elettromagnetiche, mentre i corpi isolanti dovrebbero essere tutti trasparenti. Le eccezioni a questa regola sono frequentissime e riteniamo quindi opportuno darne una breve spiegazione.

Caso di un metallo. Se un’onda elettromagnetica si propaga in un conduttore gli elettroni di conduzione sono messi in moto dal campo elettrico dell’onda incidente e quindi generano una corrente che sottrae energia all’onda trasformandola in calore (effetto Joule).

Naturalmente, via via che diminuisce il campo elettrico variabile \vec{E} , diminuisce anche il campo magnetico \vec{H} ad esso associato e così l’onda viene assorbita dal conduttore.

Questo meccanismo è però possibile fintanto che gli elettroni di conduzione seguono, sia pure con ritardo, le variazioni del campo elettrico dell’onda incidente. Se però la frequenza di questa è molto elevata gli elettroni di conduzione, a causa della loro massa piccola ma non trascurabile, non possono più seguire le rapide variazioni del campo elettrico. Per frequenze molto elevate, quindi, il campo elettrico non provoca più uno spostamento di cariche e pertanto esso si propaga entro il metallo conservando costante la propria ampiezza.

Ciò è quello che accade per i raggi X e per i raggi γ i quali, come è noto, possono attraversare lastre di metallo aventi spessori di vari millimetri. In realtà anche queste radiazioni, nell’attraversare il metallo, subiscono una

diminuzione di intensità data da una legge simile alla (1). Tale assorbimento, però, non dipende dal fatto che il corpo attraversato dalla radiazione sia conduttore o isolante; esso, infatti, trae la sua origine dall'effetto Compton e dall'effetto fotoelettrico.

In modo analogo si spiega il fatto che una soluzione di NaCl, che è conduttrice, sia perfettamente trasparente per la luce visibile. In questo caso la proprietà conduttrice della soluzione è dovuta agli ioni Na^+ e Cl^- , la cui massa è molto più grande della massa degli elettroni di conduzione di un metallo. Ne segue che già per la luce visibile questi ioni non possono seguire le rapide variazioni dei vettori \vec{E} ed \vec{H} del campo elettromagnetico e quindi non possono trasformare, per effetto Joule, l'energia dell'onda incidente in calore. È per questo motivo che la soluzione di NaCl si lascia attraversare dalla luce.

Infine, la ragione per cui molti corpi isolanti sono opachi alla luce è da ricercarsi nell'esistenza di frequenze proprie nell'intervallo di spettro corrispondente alle radiazioni visibili.

Fino a questo punto abbiamo considerato il caso $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$. Supponiamo ora

che sia $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$, cioè supponiamo che la corrente di conduzione sia trascurabile rispetto alla corrente di spostamento. Allora la formula

$$(4) \quad \alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

ci dice che il valore di α è piccolo rispetto al caso in cui sia $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$.

In tal caso la formula del campo elettrico

$$(5) \quad E(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi)$$

ci dice che più piccolo è α e tanto meno l'onda è attenuata.

Se ciò succede alle frequenze ottiche, il materiale investito dalla luce può apparire trasparente. Questo è il caso di molti dielettrici poiché in essi la conduttività è trascurabile. In particolare le fibre ottiche usate in telecomunicazioni hanno $1/\alpha$ di alcune centinaia di metri.

N.6- Unità di misura di alcune costanti fisiche

Vogliamo ora ricavare le unità di misura e quindi le dimensioni fisiche della costante α . Per fare ciò dobbiamo partire un po' da lontano.

Ricordiamo la definizione del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 : $\vec{F} = i\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0$; in modulo si ha (1) $F = i\ell \cdot B_0 \sin\alpha$. Dalla (1) si possono ricavare le unità di misura dell'induzione magnetica B_0 . Nel sistema SI si ottiene

$$(2) \quad [B_0]_{SI} = \frac{\text{Newton}}{\text{Ampère} \cdot \text{metro}}.$$

Ricordiamo ora la legge di Biot-Savart:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}.$$

Da essa si possono ricavare le unità di misura della permeabilità magnetica μ_0 nel sistema SI. Si ha:

$$\frac{\text{Newton}}{\text{Ampère} \cdot \text{metro}} = [\mu_0] \frac{\text{Ampère}}{\text{metro}} \quad \text{da cui (3)} \quad [\mu_0]_{SI} = \frac{\text{Newton}}{\text{Ampère}^2}.$$

Partendo ora dalla legge di Coulomb $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{r^2}$ possiamo ricavare le unità di misura della costante dielettrica ϵ_0 del vuoto. Si ottiene:

$$(4) \quad [\epsilon_0]_{SI} = \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{metro}^2}.$$

Teniamo presente, infine, che per $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ il valore della costante α è dato

dalla formula $\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$. Per ricavare le unità di misura di α è lecito

sostituire, in questa formula, μ ed ϵ con le analoghe costanti μ_0 ed ϵ_0 . Si ottiene:

$$[\alpha]_{SI} = \frac{1}{\text{Ohm} \cdot \text{metro}} \cdot \left(\frac{\text{Newton}}{\text{Ampère}^2} \cdot \frac{\text{Newton} \cdot \text{metro}^2}{\text{Coulomb}^2} \right)^{1/2},$$

$$(5) \quad [\alpha]_{\text{SI}} = \frac{1}{\text{Ohm} \cdot \text{metro}} \cdot \frac{\text{Newton} \cdot \text{metro}}{\text{Ampère} \cdot \text{Coulomb}} .$$

Ma per quanto riguarda le relazioni tra unità di misura si ha:

$$\begin{aligned} \text{Newton} \cdot \text{metro} &= \text{Joule} = \text{Volt} \cdot \text{Coulomb} \\ \text{e} \quad \text{Ohm} &= \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} . \end{aligned}$$

Sostituendo nella (5) si ottengono le unità di misura della costante α e quindi le sue dimensioni fisiche. Si ha:

$$[\alpha]_{\text{SI}} = \frac{\text{Ampère}}{\text{Volt} \cdot \text{metro}} \cdot \frac{\text{Volt} \cdot \text{Coulomb}}{\text{Ampère} \cdot \text{Coulomb}} ,$$

$$\text{infine} \quad [\alpha]_{\text{SI}} = \text{metro}^{-1} .$$

NOTA. Vogliamo far vedere che $\sigma/\omega\epsilon$ è un numero puro, cioè senza dimensioni. Infatti, nel sistema di misure SI si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]_{\text{SI}} &= \text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} : \frac{\text{s}^{-1} \cdot \text{coulomb}^2}{\text{newton} \cdot \text{m}^2} = \frac{1}{\text{ohm} \cdot \text{m}} : \frac{\text{coulomb}^2}{\text{s} \cdot \text{newton} \cdot \text{m}^2} = \\ &= \frac{1}{\text{ohm} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{s} \cdot \text{newton} \cdot \text{m}^2}{\text{coulomb}^2} = \frac{1}{\text{m}} \cdot \frac{\text{coulomb}}{\text{volt} \cdot \text{s}} \cdot \frac{\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{joule}}{\text{coulomb}^2} , \end{aligned}$$

$$\text{quindi} \quad \left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]_{\text{SI}} = \frac{\text{joule}}{\text{volt} \cdot \text{coulomb}} = \frac{\text{joule}}{\text{joule}} . \quad \text{c.v.d.}$$

N. 7 - Le onde elettromagnetiche in un conduttore .

Secondo procedimento .

Vogliamo far vedere che le leggi che esprimono la propagazione delle onde elettromagnetiche in un conduttore si possono ricavare direttamente dalle equazioni di Maxwell; in altre parole, per ricavare le leggi della propagazione delle onde in un conduttore non siamo costretti necessariamente ad applicare operatori differenziali alle equazioni di Maxwell (vedi A. Vicentini, Argomenti di Fisica ; Arbizzano-Verona) .

Per la opportuna chiarezza, riprendiamo la dimostrazione fin dall'inizio. Consideriamo un'onda elettromagnetica piana che si propaga nel verso positivo dell'asse x e polarizzata linearmente secondo l'asse y ; in altre parole, il campo elettrico \vec{E} sia orientato secondo l'asse y .

Le componenti del vettore \vec{E} sono allora

$$E_x = 0, \quad E_y(x,t) \neq 0, \quad E_z = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = [0, E_y, 0] .$$

Poiché il vettore \vec{H} del campo magnetico è orientato secondo l'asse z , le sue componenti sono:

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z(x,t) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{H} = [0, 0, H_z] .$$

Supponiamo che l'onda cada su una lastra di metallo di conducibilità elettrica σ . Vogliamo dimostrare, partendo dalle equazioni di Maxwell, che nel conduttore l'onda elettromagnetica viene assorbita esponenzialmente.

Scriviamo la III e IV equazione di Maxwell:

$$\text{III)} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ,$$

$$\text{IV)} \quad \text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ,$$

ovviamente, $\sigma = 0$ nel vuoto o nell'aria, mentre $\sigma \neq 0$ in un metallo.

Il vettore $\vec{j} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ è la densità di corrente totale; ricordiamo che nelle zone dello spazio dove il campo elettrico \vec{E} varia nel tempo, la densità di corrente totale \vec{j} è la somma della densità di corrente di conduzione $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$ e della densità di corrente di spostamento $\vec{j}_s = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Ricordando il teorema della circuitazione di Ampère, possiamo scrivere la IV equazione di Maxwell come segue:

$$(1) \quad \oint_{\ell} \vec{H} \times d\vec{\ell} = \int_S \text{rot } \vec{H} \times \vec{n} \, dS = \int_S \vec{j} \times \vec{n} \, dS,$$

dove S è una superficie avente per contorno la linea ℓ ed \vec{n} è una normale ad S orientata in modo tale che il verso fissato come positivo sulla linea ℓ le appaia antiorario. Ricordiamo che

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}, \quad \text{quindi}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

Nel caso del particolare vettore $\vec{H}[0, 0, H_z(x, t)]$ si ha:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0.$$

Poiché H_z è funzione di x ma non di y , abbiamo anche $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$.

Si ottiene così:

$$(2) \quad \text{rot } \vec{H} = -\vec{j} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \text{da cui} \quad \text{rot}_y \vec{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Consideriamo ora un rettangolino dS_y , di lati dx , dz , giacente in un piano normale all'asse y e con i lati dx, dz paralleli agli assi x e z (fig. 2-1).

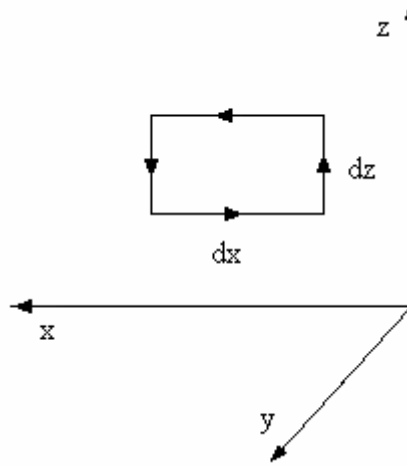


Figura 2-1

Sul contorno della superficie dS_y fissiamo il verso positivo in modo tale che esso appaia antiorario rispetto al semiasse positivo y ; sia poi \vec{n} la normale a dS_y orientata come il semiasse y .

Per un tale rettangolino la (1) fornisce l'equazione

$$(3) \quad \text{rot}_y \vec{H} dS_y = j_y dS_y.$$

Ricordando l'espressione cartesiana di $\text{rot} \vec{H}$ data dalla (2) e tenendo presente il significato della componente j_y della intensità di corrente \vec{j} , dalla (3) si ottiene

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} dx dz = \left(\sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) dx dz,$$

$$\text{da cui } (4) \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Consideriamo ora la III equazione di Maxwell

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

e teniamo presente che le componenti del vettore \vec{E} sono $\vec{E} [0, E_y(x, t), 0]$.

Ne segue che fra le derivate parziali con cui si esprime $\text{rot} \vec{E}$, l'unica derivata diversa da zero è $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ e pertanto si ha $\text{rot} \vec{E} = \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}$; la componente del vettore $\text{rot} \vec{E}$ secondo l'asse z sarà quindi

$$(5) \quad \text{rot}_z \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Se ora prendiamo le componenti scalari secondo l'asse z dei vettori che figurano nella III equazione di Maxwell si ha

$$(6) \quad \text{rot}_z \vec{E} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Eguagliando membro a membro le (5),(6) si ha:

$$(7) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Dalle equazioni (4), (7) si ottiene il sistema

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}.$$

Derivando la prima equazione rispetto a t , dopo averla moltiplicata per μ , e la seconda rispetto alla variabile x , si ha:

$$(8) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = -\sigma \mu \frac{\partial E_y}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \end{cases}.$$

Eguagliando membro a membro le equazioni del sistema e cambiando segno si ha

$$(9) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Poiché $\epsilon\mu = \frac{1}{v^2}$, ove v è la velocità di propagazione dell'onda entro il mezzo conduttore, possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} .$$

Deriviamo ora la prima equazione del sistema (A) rispetto a x e la seconda rispetto a t ; si ottiene

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\partial E_y}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} \\ \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} \end{cases} .$$

Dalle due equazioni del sistema si ottiene:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\partial E_y}{\partial x} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

Riscriviamo ora per comodità la 2^a equazione del sistema (7); essa è

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} .$$

Sostituendo l'espressione di $\partial E_y / \partial x$ nella (11) si ha:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} , \quad \text{ove} \quad \epsilon\mu = \frac{1}{v^2} .$$

Le equazioni (9), (12) formano il noto sistema

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} , & \text{ove} \quad \epsilon\mu = \frac{1}{v^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} .$$

Come si vede da tutta la dimostrazione, abbiamo ricavato la 1^a equazione del sistema di equazioni differenziali (B) senza ricorrere a regole di calcolo vettoriale come quella del tipo

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

che abbiamo sfruttato nel primo procedimento.

Trovato il sistema (B), la dimostrazione procede come abbiamo visto in precedenza.

N. 8 – Nota sulla propagazione di onde elettromagnetiche piane

Consideriamo ancora un'onda elettromagnetica piana che si propaghi nel verso positivo dell'asse x e polarizzata linearmente secondo l'asse y e supponiamo, ancora una volta, che essa cada su una lastra di metallo di conducibilità elettrica σ . Abbiamo visto che sussiste l'equazione

$$\sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

e abbiamo mostrato due procedimenti per ricavarla [(A) N. 1 e (4) N. 7]. Illustriamo un terzo procedimento, di carattere elementare, che sfrutta il noto teorema della rotazione.

Partiamo, come nel procedimento precedente, dalla IV equazione di Maxwell :

$$(1) \quad \text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

e per ognuno dei vettori che in essa figura calcoliamo il flusso attraverso un elemento di superficie dS . Si ottiene

$$(2) \quad \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{n} dS = \text{rot} \vec{H} \times \vec{n} dS.$$

Ma per il teorema della rotazione il flusso del vettore $\text{rot} \vec{H}$ attraverso un elemento di superficie dS è uguale alla circuitazione del vettore \vec{H} lungo il contorno di dS ; quindi si ha:

$$\text{rot} \vec{H} \times \vec{n} dS = \oint_{dS} \vec{H} \times d\vec{\ell}.$$

Per la proprietà transitiva dell'eguaglianza, dalle (1),(2) si ha:

$$(3) \quad \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{n} \, dS = \oint_{dS} \vec{H} \times d\vec{\ell}.$$

Supponiamo ora che dS sia un rettangolino dS_y che giace in un piano perpendicolare all'asse y e con i lati dx, dz paralleli rispettivamente agli assi coordinati x e z (fig. 2-2).

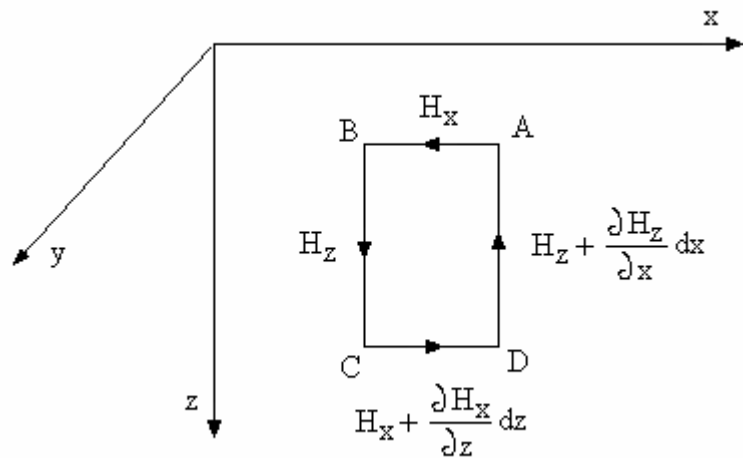


Figura 2-2

Stabiliamo un verso positivo sul contorno di dS_y , in modo che esso appaia antiorario al semiasse positivo y personificato; e consideriamo come pagina positiva di dS_y quella rivolta verso il semiasse stesso.

Quando dS coincide con dS_y (e quindi \vec{n} coincide con \vec{n}_y), la (3) diventa

$$(4) \quad \left(kE_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) dx \, dy = \oint_{dS_y} \vec{H} \times d\vec{\ell}.$$

Per calcolare l'integrale che figura al secondo membro della (4), consideriamo il rettangolino rappresentato in figura e calcoliamo la circuitazione del vettore \vec{H} lungo il suo contorno, sul quale stabiliamo come verso positivo il verso antiorario rispetto al semiasse positivo y . Per l'integrale circolare possiamo scrivere:

$$\oint_{dS_y} \vec{H} \times d\vec{\ell} = \vec{H} \times \vec{AB} + \vec{H} \times \vec{BC} + \vec{H} \times \vec{CD} + \vec{H} \times \vec{DA} .$$

Se teniamo presente quali sono le componenti del vettore \vec{H} lungo i lati del rettangolino si ha:

$$\oint_{dS_y} \vec{H} \times d\vec{\ell} = H_x(-dx) + H_z dz + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} dz \right) dx + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial x} dx \right) (-dz) .$$

Ma se ricordiamo che le componenti cartesiane del vettore \vec{H} sono

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z(x,t) \neq 0 ,$$

nel calcolo dell'integrale possiamo porre $H_x = 0$ e $\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$.

Si ottiene così:

$$(5) \quad \oint_{dS_y} \vec{H} \times d\vec{\ell} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} dx dz .$$

Per la proprietà transitiva dell'eguaglianza, dalle (4),(5) si ha:

$$(6) \quad \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} .$$

Se ora proiettiamo sull'asse z la III equazione di Maxwell e consideriamo le componenti dei vettori che in essa figurano, si ha:

$$(7) \quad \text{rot}_z \vec{E} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} .$$

Ricordiamo ora che le componenti del vettore \vec{E} sono

$$E_x = 0, \quad E_y(x,t) \neq 0, \quad E_z = 0 ;$$

,

da esse, come già abbiamo visto [(5) del N. 1] si ricava $\text{rot} \vec{E} = \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}$.

Per la componente di $\text{rot} \vec{E}$ secondo l'asse z si ha quindi l'espressione

$$(8) \quad \text{rot}_z \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} .$$

Confrontando le (7),(8) si ricava

$$(9) \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Le (6), (9) si possono riunire nel sistema:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\sigma E_y - \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Si ottiene di nuovo il sistema di equazioni differenziali (A), già visto nei procedimenti svolti in precedenza. Andando avanti nei calcoli si ritrovano, quindi, tutti i risultati che questi procedimenti ci hanno permesso di ottenere.

CAPITOLO QUARTO

LA LUCE

N. 1 – Interferenza della luce.

Consideriamo due onde luminose, polarizzate linearmente nello stesso piano; supponiamo che esse si propaghino nella direzione positiva dell'asse x e che i loro vettori elettrici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 vibrino entrambi nella direzione dell'asse y . Le componenti scalari di questi campi elettrici sono:

$$(1) \quad E_1(x, t) = A_1 \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] ,$$

$$E_2(x, t) = A_2 \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] .$$

La somma di queste due funzioni rappresenta ancora una soluzione dell'equazione differenziale delle onde, dato che questa è una equazione lineare. Ricordiamo che a ognuno di questi vettori elettrici è associato un campo magnetico \vec{H} che ha la direzione dell'asse z .

Vogliamo trovare l'intensità di radiazione dell'onda ottenuta sovrapponendo i due vettori elettrici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 , cioè della radiazione che ha la grandezza scalare:

$$(2)_1 \quad E = A_1 \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] + A_2 \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] ,$$

o brevemente

$$(2)_2 \quad E = E_1(x, t) + E_2(x, t) .$$

(Si veda E. Amaldi, Fisica sperimentale, vol. II, pag. 495; Litografia Marves, Roma).

Calcoliamo preventivamente il valore efficace della funzione E . Si ha:

$$(3) \quad E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [E_1(x, t) + E_2(x, t)]^2 dt} ,$$

dove T indica un tempo multiplo sia di $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ che di $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

Dalla (3), ricordando le espressioni di $E_1(x, t)$ e di $E_2(x, t)$ si ha:

$$(4) \quad \begin{aligned} E_{\text{eff}}^2 = & \frac{A_1^2}{T} \int_0^T \sin^2 \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] dt + \\ & + \frac{A_2^2}{T} \int_0^T \sin^2 \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] dt + \\ & + 2 \frac{A_1 A_2}{T} \int_0^T \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] dt \end{aligned}$$

Il primo integrale vale $\frac{T}{2}$; anche il secondo integrale vale $\frac{T}{2}$.

Possiamo quindi scrivere:

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + 2 \frac{A_1 A_2}{T} \int_0^T \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] dt$$

Moltiplichiamo ogni termine per la costante $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$; nel vuoto o nell'aria moltiplichiamo per il fattore $1/377$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{eff}}^2 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{A_1^2}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{A_2^2}{2} + \\
 (5) \quad &+ 2 \frac{A_1 A_2}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \int_0^T \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] dt
 \end{aligned}$$

Se ricordiamo le varie formule che danno l'intensità di radiazione di un'onda luminosa o elettromagnetica (cap. I, N. 4), possiamo dire:

a) $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{eff}}^2$ rappresenta l'intensità di radiazione I dell'onda ottenuta

sovrapponendo le onde (1) ;

b) $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{A_1^2}{2}$ ed $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{A_2^2}{2}$ rappresentano rispettivamente le intensità di

radiazione I_1 ed I_2 delle due onde.

Pertanto dalla (5) si ha:

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + \\
 (6) \quad &+ 2 \frac{A_1 A_2}{T} \int_0^T \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] dt .
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'integrale che compare nella (6), sappiamo dal calcolo integrale che esso è nullo tutte le volte che $\omega_1 \neq \omega_2$; quindi se le due onde non sono coerenti l'intensità della radiazione luminosa data dalla sovrapposizione delle due onde è uguale alla somma delle intensità delle singole onde, cioè:

$$(7) \quad I = I_1 + I_2 .$$

Consideriamo ora il caso più interessante in cui $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Posto $\varphi_2 = \varphi_1 + \alpha$ l'integrando che figura nella (6) si trasforma successivamente come segue:

$$\begin{aligned} & \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] = \\ & \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 + \alpha \right] = \\ & \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \cos \alpha + \\ & + \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Quindi si ha la seguente formula (8)

$$\begin{aligned} & \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right] = \\ & = \cos \alpha \cdot \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] + \\ & + \sin \alpha \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte gli integrali che figurano a secondo membro della (8) nell'intervallo di integrazione tra $(0, T)$ e indichiamoli rispettivamente con le lettere S_1 ed S_2 . Abbiamo:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \cos \alpha \int_0^T \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] dt = \\
&= \cos \alpha \int_0^T \frac{1}{2} dt - \cos \alpha \int_0^T \frac{1}{2} \cos \left[\frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + 2\varphi_1 \right] dt
\end{aligned}$$

Il valore dell'ultimo integrale è nullo, quindi:

$$S_1 = \left(\frac{T}{2} \right) \cos \alpha .$$

Calcoliamo ora l'integrale dell'ultimo prodotto che figura al secondo membro della (8) . Si ha:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sin \alpha \int_0^T \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] dt = \\
&= \frac{T}{4\pi} \sin \alpha \int_0^T \sin \left[\frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + 2\varphi_1 \right] dt \left[\frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + 2\varphi_1 \right] \\
S_2 &= -\frac{4\pi}{T} \sin \alpha \left| \cos \left[\frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + 2\varphi_1 \right] \right|_0^T , \\
S_2 &= -\frac{4\pi}{T} \sin \alpha \left\{ \cos \left(4\pi - 4T \frac{x}{VT} + 2\varphi_1 \right) - \cos \left(-4\pi \frac{x}{VT} + 2\varphi_1 \right) \right\}
\end{aligned}$$

Quindi $S_2 = 0$.

L'integrale che figura a secondo membro della (6) è uguale alla somma dei valori S_1 ed S_2 ; sostituendo tali valori si ha:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \frac{A_1 A_2}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{T}{2} \cos \alpha .$$

Tenendo presente che $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ si ottiene infine:

$$(9) \quad I = I_1 + I_2 + 2 \frac{A_1 A_2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Questa formula ci dice che:

“L’intensità di una radiazione ottenuta sovrapponendo due onde luminose (o in generale elettromagnetiche) della stessa frequenza, che oscillano nello stesso piano e che si propagano nella stessa direzione è uguale alla somma delle intensità delle singole onde più un cosiddetto termine di interferenza”.

Il termine che rappresenta l’interferenza delle due onde può essere positivo, negativo o nullo a seconda del valore della differenza di fase $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$.

Se le onde hanno la stessa ampiezza $A_1 = A_2$, esse hanno la stessa intensità di radiazione $I_1 = I_2$ e per quanto riguarda il termine di interferenza si ha:

$$2 \frac{A_1 A_2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = 2 \frac{A_1^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Ricordando la (7) del cap.I, N. 4 si ottiene

$$2 \frac{A_1 A_2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = 2 I_1 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Quindi l’intensità della radiazione ottenuta per sovrapposizione di due onde aventi la stessa ampiezza, la stessa direzione di propagazione e lo stesso piano di polarizzazione è:

$$(10) \quad I = 2 I_1 + 2 I_1 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Si possono ora verificare tre casi:

1° caso. Le onde sono in fase, cioè $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$. In tal caso si ha:

$$I = 2I_1 + 2I_1 = 4I_1,$$

cioè l'intensità di radiazione dell'onda ottenuta per sovrapposizione delle due onde è uguale a quattro volte l'intensità di radiazione di ognuna delle due onde luminose, o elettromagnetiche (interferenza costruttiva).

2° caso. Le due onde sono in opposizione di fase, cioè $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. In tal caso si ha:

$$I = 2I_1 - 2I_1 = 0,$$

ossia l'intensità di radiazione dell'onda risultante di due onde aventi la stessa ampiezza, la stessa direzione e lo stesso piano di polarizzazione, ma che sono in opposizione di fase, è nulla (interferenza distruttiva).

3° caso. Le due onde sono in quadratura, cioè $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

In tal caso si ha:

$$I = 2I_1,$$

cioè l'intensità di radiazione dell'onda risultante è uguale alla somma delle intensità delle singole onde.

N. 2 – La polarizzazione di onde luminose.

Un'esperienza che si può realizzare con mezzi molto semplici porta a concludere che la luce, ammesso che essa abbia una natura ondulatoria, è costituita da onde trasversali. Per l'esperimento sono necessarie due lamine polarizzatrici, come quelle costruite dalla Polaroid Corporation.

L'ultimo tipo di lamina si ottiene da un materiale plastico, di elevata trasparenza, detto alcool polivinilico, le cui molecole sono estremamente estese. Quando una lamina di questo materiale viene stirata meccanicamente in una direzione, le lunghe e disordinate molecole si ordinano e si allineano

nella direzione dello stiramento. Con questa tecnica si è riusciti a costruire lamine di notevole estensione, di elevata trasparenza e a basso costo. Esse sono comunemente usate per la costruzione delle lenti per occhiali da sole.

Detto ciò, passiamo a descrivere l'esperimento (vedi Bruno Rossi, Ottica, pgg. 289, 292, Casa Ed. Masson; Milano).

Poniamo una lamina polarizzatrice *A* davanti agli occhi e osserviamo una sorgente di luce, per esempio una lampada ad incandescenza. Si nota che l'intensità luminosa appare ridotta, ma essa non varia comunque si ruoti la lamina nel suo piano, perpendicolarmente ai raggi luminosi che provengono dalla lampada.

Sovrapponiamo alla prima lamina una seconda lamina *B* e guardiamo la sorgente luminosa. Allora se ruotiamo la seconda lamina *B* nel suo piano, tenendo fissa la prima, troviamo che l'intensità luminosa che attraversa le due lamine varia periodicamente.

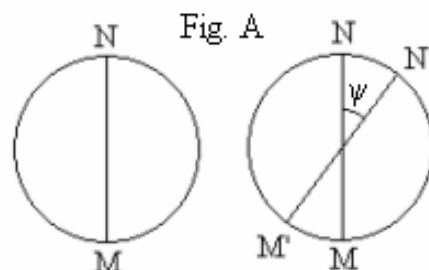
L'intensità luminosa è praticamente nulla in corrispondenza ad una posizione della lamina *B*, cresce fino ad un massimo dopo un quarto di giro, torna a zero dopo un altro quarto di giro e cresce nuovamente fino ad un massimo dopo un terzo quarto di giro. Si hanno così due posizioni della lamina *B* diametralmente opposte fra di loro e che consentono un massimo di intensità luminosa attraverso le due lamine. Queste due posizioni individuano su ognuna delle lamine una retta *MN*, detta asse di trasmissione della luce. Questa riesce ad attraversare le due lamine polarizzatrici se gli assi di trasmissione sono paralleli fra di loro, viene assorbita se gli assi sono incrociati, cioè se sono mutuamente ortogonali.

Se misuriamo l'intensità *I* della luce emergente dalla seconda lamina polarizzatrice *B* troviamo che essa obbedisce rigorosamente alla seguente legge, detta legge di Malus:

$$I(\psi) = I_0 \cos^2(\psi),$$

dove I_0 è l'intensità massima e ψ è l'angolo di rotazione della seconda lamina, misurato rispetto alla posizione in cui l'intensità luminosa è massima (Fig. A).

Dai fatti descritti discende che se la luce fosse una vibrazione longitudinale rispetto alla direzione di propagazione, essa presenterebbe una simmetria di rotazione rispetto a questa direzione: pertanto nulla



potrebbe accadere ruotando le due lamine in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

L'esperimento si spiega invece se ammettiamo che la luce sia un'onda trasversale, cioè una grandezza vettoriale \vec{E} , detta vettore ottico, che oscilla perpendicolarmente alla direzione di propagazione del raggio luminoso. In tal caso possiamo supporre che ogni polaroide sia trasparente solo rispetto alle componenti delle vibrazioni che hanno la direzione MN dell'asse di trasmissione.

L'onda incidente sul primo polaroide differisce dall'onda trasmessa perché questa ha un vettore ottico \vec{E} che vibra solo nella direzione MN; si dice anche che l'onda trasmessa è polarizzata rettilineamente nella direzione MN dell'asse di trasmissione.

Abbiamo notato il fatto che il primo polaroide A riduce l'intensità luminosa del fascio di luce che cade perpendicolarmente su di esso e che tale intensità non varia comunque si ruoti la lamina polarizzatrice A nel suo piano. Ciò ci dice che le vibrazioni trasversali sono uniformemente ripartite in tutte le direzioni contenute nel piano. In altre parole: "Nella luce proveniente da una sorgente luminosa ordinaria il vettore ottico \vec{E} cambia la sua direzione rapidamente e irregolarmente nel tempo, ma rimane sempre perpendicolare alla direzione di propagazione".

Questo comportamento è dovuto alla sovrapposizioni delle perturbazioni ottiche provenienti dalle numerose sorgenti microscopiche che formano una sorgente estesa: infatti, esse sono attive solo per una piccolissima frazione di secondo ed hanno fasi e piani di vibrazioni diversi. La luce in queste condizioni è detta luce naturale o non polarizzata.

L'onda incidente sul primo polaroide differisce dall'onda trasmessa perché questa ha un vettore ottico \vec{E} che vibra solo nella direzione dell'asse di trasmissione MN. Si dice anche che l'onda trasmessa è polarizzata rettilineamente nella direzione MN dell'asse di trasmissione.

L'onda che attraversa il primo polaroide viene trasmessa integralmente dal secondo solo se gli assi di trasmissione MN ed M'N' dei due polaroidi sono paralleli fra di loro; essa viene invece trasmessa parzialmente se le direzioni MN ed M'N' degli assi di trasmissione formano un angolo ψ

compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad. Infine l'onda viene assorbita se l'angolo ψ è di

$\frac{\pi}{2}$ rad, cioè se gli assi sono incrociati.

In altre parole, il vettore ottico \vec{E} che attraversa la prima lamina polarizzatrice si può scomporre in due componenti \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 , il primo parallelo e l'altro perpendicolare all'asse di trasmissione $M'N'$ della seconda lamina (vedi fig. 4-1).

Questa lamina trasmette il primo componente \vec{E}_1 ed assorbe il secondo. In tal modo il vettore ottico dell'onda luminosa che emerge dalla lamina B è parallelo all'asse di trasmissione $M'N'$ della lamina stessa. Diremo che questa onda è linearmente o rettilineamente polarizzata; chiameremo poi piano di vibrazione il piano contenente la direzione di propagazione e il vettore ottico.

Questo sistema ottico capace di trasmettere solo luce linearmente polarizzata viene detto filtro polarizzatore.

Se la luce incidente sul filtro polarizzatore è luce naturale, l'intensità dell'onda linearmente polarizzata emergente dal filtro non cambia quando il filtro ruota nel suo piano. Infatti, nel caso di luce naturale, il valore efficace della componente del vettore ottico è lo stesso in tutte le direzioni ortogonali alla direzione di propagazione.

Supponiamo ora che l'onda linearmente polarizzata emergente da un filtro polarizzatore venga fatta passare attraverso un secondo filtro polarizzatore. L'ampiezza dell'onda trasmessa dal secondo filtro sarà proporzionale al coseno dell'angolo compreso tra il vettore ottico dell'onda polarizzata e l'asse di trasmissione del secondo filtro (fig. 4-1). Questo angolo è uguale all'angolo ψ tra gli assi di trasmissione dei due filtri.

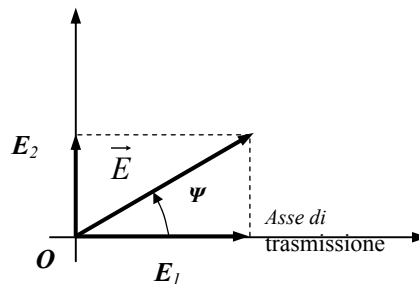


Figura 4-1

L'intensità della luce emergente dal secondo filtro è proporzionale al quadrato dell'ampiezza (come abbiamo visto nello studio dell'intensità di un'onda elettromagnetica) ed è perciò proporzionale a $\cos^2 \psi$, come mostra sperimentalmente la legge di Malus.

Quando i due polarizzatori sono disposti nel modo sopra detto, il primo filtro è detto polarizzatore e il secondo analizzatore.

Uno strumento ottico consistente di un polarizzatore e di un analizzatore è detto polarimetro.

N. 3 – Sovrapposizione di onde polarizzate. Polarizzazione ellittica e circolare

Consideriamo due onde luminose sinusoidali, coerenti, linearmente polarizzate che si propagano nella direzione dell'asse x . Se i vettori ottici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 delle due onde sono paralleli, le due onde si cambiano in una unica onda linearmente polarizzata, la cui ampiezza e la cui fase sono funzioni delle ampiezze e delle fasi delle due onde componenti.

Escluso questo caso, supponiamo che i vettori ottici delle due onde siano mutuamente ortogonali. Supponiamo che l'asse y sia parallelo al vettore ottico di un'onda e l'asse z parallelo al vettore ottico dell'altra onda, quindi $\vec{E}_1 = \vec{E}_y$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_z$.

Le componenti dei due vettori hanno le espressioni:

$$E_y = A \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi_1 \right] \quad (1)$$

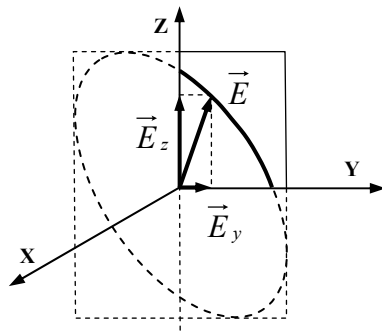
$$E_z = B \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi_2 \right]$$

Il risultante dei due vettori \vec{E}_y ed \vec{E}_z è un vettore \vec{E} per il quale possiamo scrivere:

$$(2) \quad \vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_z ;$$

le componenti di questo vettore secondo gli assi y e z coincidono con le suddette funzioni E_y ed E_z (B. Rossi, Ottica pag. 293).

In un dato punto dello spazio il vettore \vec{E} varia nel tempo sia in lunghezza che in direzione. Il suo vertice descrive una curva della quale le (1) sono le equazioni parametriche; vedremo subito che la curva è una ellisse (fig. 4-2).



Per determinare l'equazione di questa curva basta eliminare t fra le due equazioni parametriche.
A tale scopo indichiamo con $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ la differenza di fase fra le due oscillazioni e ridefiniamo l'origine dei tempi ponendo:

$$\omega t' = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 .$$

Figura 4-2

In tal modo le equazioni (1) diventano:

$$(3)_1 \quad E_y = A \cdot \cos (\omega t') ,$$

$$(3)_2 \quad E_z = B \cdot \cos (\omega t' + \varphi) = B \cdot \cos (\omega t') \cos \varphi - B \cdot \sin (\omega t') \sin \varphi .$$

Ne segue:

$$\frac{E_y}{A} \cos \varphi = \cos (\omega t') ,$$

$$\frac{E_z}{B} = \cos (\omega t') \cos \varphi - \sin (\omega t') \sin \varphi ,$$

e sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{E_y}{A} \cos \varphi - \frac{E_z}{B} = \sin (\omega t') \sin \varphi .$$

Innalzando al quadrato ambo i membri dell'equazione si ha:

$$\frac{E_y^2}{A^2} \cos^2 \varphi + \frac{E_z^2}{B^2} - 2 \frac{E_y E_z}{AB} \cos \varphi = \left[1 - \cos^2 (\omega t') \right] \sin^2 \varphi ;$$

tenendo presente la (3)₁ si ha:

$$\frac{E_y^2}{A^2} \cos^2 \varphi + \frac{E_z^2}{B^2} - 2 \frac{E_y E_z}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{E_y^2}{A^2} \sin^2 \varphi ;$$

infine:

$$(4) \quad \frac{E_y^2}{A^2} \cos^2 \varphi + \frac{E_z^2}{B^2} - \frac{2 \cos \varphi}{AB} E_y E_z = \sin^2 \varphi .$$

La (4) è una equazione di secondo grado nelle variabili E_y , E_z e rappresenta una ellisse di semiassi A e B . Ne segue che il vettore \vec{E} , ruotando attorno ad un punto dell'asse x in un piano perpendicolare all'asse, con il suo estremo descrive effettivamente un'ellisse. Esprimiamo questo fatto dicendo che l'onda è polarizzata ellitticamente. Prima di parlare delle proprietà dell'ellisse trovata, notiamo che in ogni istante il modulo del vettore \vec{E} che fornisce la perturbazione ottica risultante è dato dall'equazione pitagorica:

$$(5) \quad E^2 = E_y^2 + E_z^2 .$$

Ne segue che l'intensità dell'onda polarizzata ellitticamente è:

$$(6) \quad I = I_Y + I_Z ,$$

cioè è uguale alla somma delle intensità I_Y e I_Z delle due onde polarizzate linearmente e che vibrano nei piani ortogonali xy e xz .

Passiamo ora a discutere le proprietà dell'ellisse (4). Le sue equazioni parametriche (1) o (3) mostrano che $E_y(x, t)$ varia da $-A$ a $+A$ e che $E_z(x, t)$ varia da $-B$ a $+B$. Quindi l'ellisse rappresentata da queste equazioni parametriche è inscritta in un rettangolo con i lati di lunghezza $2A$ e $2B$ (fig. 4-3a).

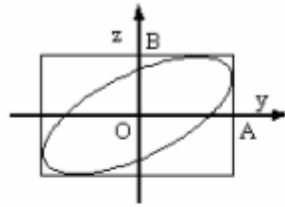


Fig. 4-3a

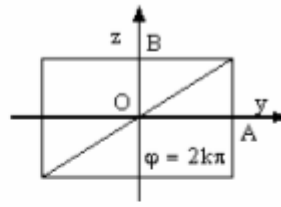


Fig. 4-3b

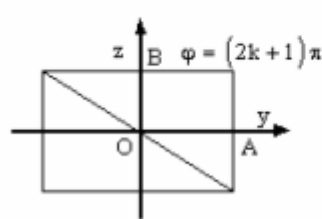


Fig. 4-3c

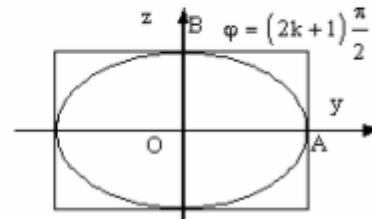


Fig. 4-4

Figure 4-3 e 4-4

Se le due oscillazioni sono in fase cioè se $\varphi = 2k\pi$, l'ellisse degenera in un segmento rettilineo coincidente con la diagonale del rettangolo che giace nel 1° e 3° quadrante del piano yz (fig. 4-3b). Infatti in questo caso dalle equazioni $(3)_1$ e $(3)_2$ si ottiene l'equazione della retta:

$$\frac{E_y}{E_z} = \frac{A}{B} \quad \rightarrow \quad E_y = \frac{A}{B} E_z \quad .$$

Se le due oscillazioni sono in opposizione di fase, cioè se $\varphi = (2k+1)\pi$, dalle equazioni $(3)_1$ e $(3)_2$ si ottiene un'altra retta di equazione:

$$\frac{E_y}{E_z} = -\frac{A}{B} \quad \rightarrow \quad E_y = -\frac{A}{B} E_z \quad .$$

Ciò vuol dire che l'onda risultante è ancora linearmente polarizzata come le onde componenti, ma ora la perturbazione ottica è rappresentata dalla diagonale del rettangolo che giace nel 2° e 4° quadrante del piano yz (fig. 4-3c). Se poi $\varphi = (2k+1)\pi/2$ l'equazione (4) diventa:

$$\frac{E_y^2}{A^2} + \frac{E_z^2}{B^2} = 1 \quad ,$$

che è l'equazione di una ellisse aventi gli assi nelle direzioni y e z (fig. 3-4).

Se $\varphi = (2k+1)\pi/2$, come abbiamo supposto, e inoltre le due onde luminose hanno la stessa ampiezza $A = B$, l'ellisse si riduce ad un cerchio e si dice che l'onda risultante è polarizzata circolarmente; in questo caso il vettore \vec{E} , che rappresenta il campo elettrico di un dato punto dell'asse di propagazione, ruota con velocità angolare costante senza variare in modulo. Studiamo ora la direzione di rotazione del vettore ottico nel caso della polarizzazione ellittica o circolare. A tal fine consideriamo la posizione del vettore ottico al tempo $t' = 0$ e al tempo $t' = \tau$, dove τ è una piccola frazione del periodo T . Queste posizioni sono mostrate dai vettori \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 nelle figure (4-5a) e (4-5b).

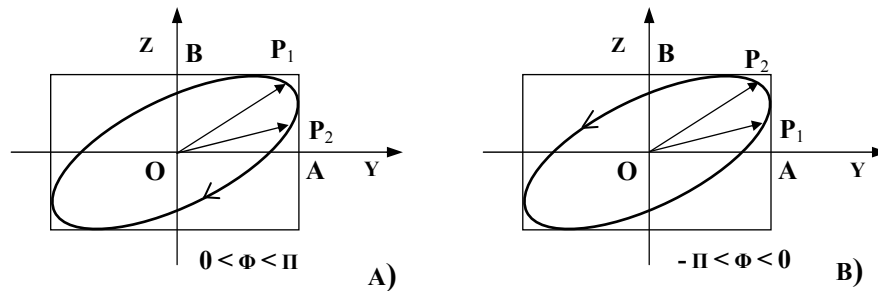


Figure 4-5

Dalle equazioni (3)₁ e (3)₂ troviamo

$$a) \quad t' = 0 \quad E_y = A \quad E_z = B \cos \varphi$$

$$b) \quad t' = \tau \quad E_y = A \cdot \cos (\omega \tau) \quad E_z = B \cos (\omega \tau + \varphi) .$$

Ricordando ora che il coseno è una funzione decrescente del suo argomento φ se $0 < \varphi < \pi$, è una funzione crescente del suo argomento φ se $-\pi < \varphi < 0$.

Quindi, se risulta $0 < \varphi < \pi$, E_z è una funzione decrescente del tempo nell'istante $t' = 0$, il punto P_2 giace al di sotto del punto P_1 , cioè fra P_1 e l'asse y (fig. 5a), e il vettore ottico ruota in senso orario al verso positivo dell'asse x ; si dice che si ha polarizzazione destrorsa.

Se invece $-\pi < \varphi < 0$, E_z è una funzione decrescente del tempo all'istante $t'=0$, e il punto P_2 giace al di sopra del punto P_1 (fig. 5b), e il vettore ottico ruota in senso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x ; in tal caso si dice che si ha polarizzazione sinistrorsa.

In conclusione, per un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse x , il vettore ottico ruota rispetto al semiasse positivo x in senso orario se la componente E_z è in anticipo di un angolo di fase $\varphi < \pi$ rispetto alla componente E_y ; se invece la componente E_z è in ritardo di un angolo di fase $\varphi < \pi$ rispetto alla componente E_y , il vettore ottico ruota in senso orario rispetto al semiasse positivo x .

Come due onde coerenti linearmente polarizzate con i piani di vibrazione tra loro ortogonali danno origine ad un'onda ellitticamente polarizzata, così, inversamente, ogni onda ellitticamente polarizzata si può considerare come la risultante di due onde linearmente polarizzate vibranti in due piani mutuamente ortogonali.

Siamo ora in grado di esporre le caratteristiche della luce naturale.

Ogni sorgente macroscopica di luce è costituita da numerosissime sorgenti microscopiche ognuna delle quali emette un treno d'onda che ha una determinata polarizzazione. I singoli treni d'onda si concludono in un'unica onda che, in generale, sarà ellitticamente polarizzata. Tuttavia, la forma dell'ellisse e la posizione dei suoi assi variano irregolarmente e rapidamente con il tempo perché ogni treno d'onda è di brevissima durata e perché non esiste correlazione tra i tempi di emissione dei vari treni d'onda.

Questi fatti ci fanno dire che la luce di una sorgente ordinaria può essere considerata come la sovrapposizione di due onde linearmente polarizzate che vibrano in piani mutuamente ortogonali, e la cui differenza di fase varia rapidamente e irregolarmente con il tempo. I due piani, evidentemente, possono essere scelti a piacere.

Parliamo di luce naturale quando l'ampiezza media delle due onde componenti è la stessa e quando la loro differenza di fase φ varia in modo completamente casuale (cioè il valor medio di $\cos \varphi$ o di $\sin \varphi$ è zero).

Se invece le ampiezze medie delle due onde componenti sono diverse, o se le loro differenze di fasi non variano in modo completamente casuale, diciamo che la luce è parzialmente polarizzata. Questa luce parzialmente polarizzata può essere considerata come risultante dalla sovrapposizione di un'onda di luce naturale e di un'onda di luce polarizzata.

TEORIA DEI QUANTI

N. 4 – Emissione e assorbimento dell'energia radiante

Lo studio del corpo nero indusse Max Planck (1900) a supporre che l'emissione e l'assorbimento della luce, e in generale dell'energia radiante, si compiano non in modo continuo, ma a scatti, in modo discreto, in quantità distinte di energia (granuli di energia) multiple di una quantità elementare ε che egli chiamò “quantum”.

Per l'energia di ogni “quanto” si ha:

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{con } h = 6,20 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec},$$

ove h è una costante universale, detta costante di Planck, e ν è la frequenza della radiazione emessa o assorbita da un atomo, ossia ν è la frequenza con cui un atomo è capace di oscillare.

Per chiarire ancor più il concetto possiamo dire che “l'energia associata ad un'onda elettromagnetica non è continua durante la fase in cui l'energia viene emessa o assorbita; durante questa fase essa, invece, è suddivisa in tante porzioni elementari, dette quanti, che si susseguono l'uno all'altro”. Quindi Planck limita la quantizzazione dell'energia alle sole fasi di assorbimento e di emissione, ritenendo invece che essa abbia una struttura continua durante la fase di propagazione.

Pur con queste distinzioni, entrava per la prima volta nella Fisica il concetto di una discontinuità nei fenomeni fisici, in contrasto con le ordinarie teorie meccaniche ed elettromagnetiche. In corrispondenza a questo nuovo concetto entrava nella Fisica una nuova costante universale h , detta costante di Planck, la cui importanza si è poi rivelata sempre maggiore in varie categorie di fenomeni.

Le vecchie teorie meccaniche ed elettromagnetiche furono dette classiche, per distinguerle dalle nuove teorie, chiamate quantistiche.

Dopo Max Planck la teoria quantistica sulla natura della luce e delle radiazioni elettromagnetiche fu ripresa e sviluppata da Albert Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico (1905). Egli dette una interpretazione quantistica del fenomeno che è una delle più sicure basi sperimentali delle teorie quantistiche (E. Amaldi- Fisica II; pag. 204).

Secondo la teoria quantistica di Einstein, una radiazione elettromagnetica monocromatica di frequenza ν è costituita da un certo numero di enti, detti

fotoni o quanti di luce, aventi tutti una stessa energia $\varepsilon = h\nu$ ed uno stesso impulso (o quantità di moto) p, legato alla loro energia dalla relazione

$$p = \frac{h\nu}{c},$$

ove c è la velocità della luce nel vuoto, quindi $c = 300.000 \text{ km/s}$.

Due radiazioni della stessa frequenza, ma di diversa intensità, differiscono solo per il numero dei fotoni di cui esse sono costituite.

Per molti aspetti, questi fotoni o quanti di luce possono essere considerati come corpuscoli che si propagano con la velocità della luce.

N. 5 – Effetto fotoelettrico (Hertz-Hallwachs)

Tutti i metalli, anche se sono allo stato neutro, hanno la proprietà di emettere elettroni non solo quando sono fortemente riscaldati o portati all'incandescenza (effetto termoelettronico) ma anche quando vengono colpiti da raggi X o da raggi ultravioletti. In particolare i metalli alcalini emettono elettroni anche quando sono esposti alla luce visibile; il rubidio e il cesio, poi, emettono elettroni anche quando sono colpiti da radiazioni infrarosse.

Possiamo fare l'esperienza con una cella fotoelettrica, che è un diodo verniciato in modo da riparare la placca P dalla luce esterna (fig. 4-6).

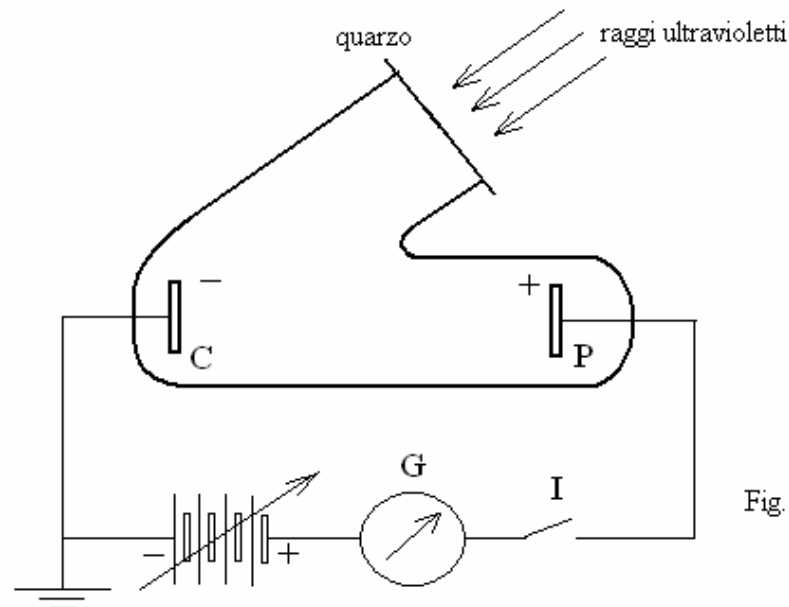


Fig. 4-6

Inviando una radiazione sul catodo C attraverso una finestrella; questa è chiusa da un vetro di quarzo che risulta trasparente ai raggi ultravioletti. La cellula è inserita in un circuito che comprende una batteria di pile e un galvanometro G .

Al buio il galvanometro non segnala alcuna corrente; ma non appena il catodo viene colpito dalla luce di un arco voltaico, il galvanometro G segnala un passaggio di corrente elettrica che è dovuta ad un flusso di elettroni emessi dal catodo.

Sia $V_a = V_P - V_C$ la d.d.p. tra placca e catodo.

Possiamo osservare quanto segue.

Se la d.d.p. V_a è sufficientemente elevata, gli elettroni emessi dal catodo sono opportunamente accelerati dal campo elettrico esistente fra i due elettrodi e vengono raccolti tutti dalla placca; in tal modo la corrente raggiunge ben presto un valore di saturazione i_s . Un ulteriore aumento della d.d.p. V_a non produce un corrispondente aumento della intensità di corrente.

Quando $V_a = 0$ la corrente non si annulla: infatti gli elettroni sono proiettati dal catodo con una certa velocità e quindi alcuni di essi riescono a raggiungere la placca producendo una corrente di intensità non trascurabile.

Infine, quando la placca raggiunge un potenziale V_0 sufficientemente negativo rispetto al catodo, gli elettroni vengono frenati dal campo elettrico e non riescono a raggiungere la placca. In tal caso il galvanometro non segnala alcuna corrente.

Possiamo anche fare un'altra riflessione. Non tutti gli elettroni emessi per effetto fotoelettrico hanno la stessa velocità e quindi la stessa energia cinetica; tuttavia possiamo calcolare facilmente la velocità v_{\max} con cui essi vengono emessi. Infatti, non appena la d.d.p. raggiunge un certo valore negativo V_0 gli elettroni vengono arrestati nello spazio fra catodo e placca e per il teorema della variazione dell'energia cinetica possiamo scrivere

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - eV_{\text{catodo}} = 0 - eV_{\text{placca}}$$

da cui
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eV_c - eV_p ,$$

ossia
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = e(V_c - V_p) ,$$

ove dobbiamo tener presente che la velocità finale degli elettroni si è ridotta a zero e che $V_p - V_c = V_0 < 0$ perché la placca è scesa ad un potenziale negativo rispetto al catodo. In valore assoluto si ha:

(2)
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = e|V_0| .$$

La (2) ci dà l'energia cinetica massima degli elettroni espulsi, misurata in Volt-elettroni. Il valore assoluto $|V_0|$ della d.d.p. è detto “potenziale di arresto”

Dalla (2) possiamo ricavare la velocità massima con cui gli elettroni vengono espulsi; si ha:

(4)
$$v_{\max} = \sqrt{2 \frac{e}{m} |V_0|} .$$

Poiché e, m sono noti mentre $|V_0|$ è misurabile, possiamo calcolare v_{\max} . Dobbiamo notare che la formula (4) ci dice che questo valore v_{\max} non dipende dall'intensità della luce incidente.

Le leggi dell'effetto fotoelettrico si possono ricavare facilmente e sono le seguenti:

1^a legge - L'emissione di elettroni ha luogo solo se la frequenza della radiazione incidente è maggiore o uguale di una certa frequenza ν_0 caratteristica del metallo considerato e che è detta “soglia fotoelettrica”.

Quando la radiazione incidente sul metallo ha una frequenza $\nu < \nu_0$ l'effetto fotoelettrico si annulla qualunque sia l'intensità della radiazione. Si può dimostrare che questa soglia ν_0 è legata al potenziale di estrazione ΔV degli elettroni dalla formula

$$(5) \quad v_o = \frac{e\Delta V}{h} ,$$

dove h è la costante di Planck, quindi $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ joule \cdot s .

2^a legge – Sperimentalmente si riconosce anche che si ha:

$$(6) \quad e|V_0| = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = hv - hv_o = h(v - v_o) ,$$

cioè l'energia cinetica massima con cui gli elettroni sono espulsi non dipende dall'intensità della radiazione incidente; essa dipende invece dalla frequenza ed è tanto maggiore quanto più elevata è la frequenza ν della radiazione incidente.

Dalla (6) si ricava
$$h = \frac{e|V_0|}{\nu - \nu_o} .$$

Questa formula ci offre un metodo per ricavare il valore della costante di Planck.

3^a legge – Non appena $\nu \geq \nu_o$ ha inizio l'emissione di elettroni, anche se l'intensità della radiazione incidente è debole .

Se la radiazione è monocromatica, aumentando l'intensità luminosa aumenta l'intensità della corrente elettrica, cioè aumenta il numero degli elettroni espulsi. Per l'esattezza, si vede che l'intensità di corrente è proporzionale all'intensità della radiazione luminosa.

4^a legge – Quando il catodo viene colpito dalla radiazione luminosa, l'emissione di elettroni avviene immediatamente (10^{-8} sec.), anche se l'intensità della radiazione è molto piccola.

N. 6 – Esempio di errata interpretazione dell'effetto fotoelettrico

Si potrebbe pensare che l'effetto fotoelettrico si possa spiegare così: gli elettroni degli atomi, sotto l'azione del campo elettrico alternato della radiazione incidente

$$E_y = E_{y0} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt),$$

entrano in vibrazione e, per una specie di risonanza, si staccano dall'atomo e vengono proiettati fuori dal metallo quando hanno assorbito dall'onda incidente una quantità sufficiente di energia.

Senonché un siffatta interpretazione del fenomeno è inammissibile. Infatti, se seguiamo questo modo di pensare, l'energia cinetica con cui vengono emessi gli elettroni dovrebbe essere tanto maggiore quanto più intenso è il campo, ossia quanto più intensa è la radiazione incidente. Noi invece sappiamo che

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = h(\nu - \nu_0),$$

cioè l'energia cinetica massima con cui gli vengono emessi gli elettroni non dipende dalla intensità della radiazione incidente, ma solo dalla frequenza.

Seguendo l'ordine di idee esposto, non si riuscirebbe nemmeno a spiegare la “soglia fotoelettrica”. Infatti, se la radiazione incidente fosse dovuta ad una causa puramente ondulatoria l'emissione di elettroni dovrebbe avvenire con luce di qualsiasi frequenza, purché l'intensità sia sufficientemente elevata.

Dobbiamo inoltre notare che quando si fa cadere un fascio di luce, anche di piccola intensità, sul catodo, l'emissione di elettroni si manifesta dopo un brevissimo intervallo di tempo (circa 10^{-8} sec); ed ora è impossibile che in un intervallo di tempo così breve e con luce di piccola intensità un elettrone possa assorbire dall'onda tanta energia da entrare in risonanza ed essere

espulso con l'energia $\frac{1}{2} m v_{\max}^2$.

N. 7 – Interpretazione quantistica dell'effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico ha una interpretazione quantistica dovuta ad Einstein: essa è una delle più sicure basi sperimentali della teoria dei quanti.

Una radiazione luminosa monocromatica di frequenza ν è costituita da un certo numero di enti, detti FOTONI o QUANTI DI LUCE, aventi tutti una stessa energia $E = h\nu$ ed uno stesso impulso (o quantità di moto) p legato alla loro energia dalla relazione

$$p = \frac{h\nu}{c},$$

ove $c = 3 \cdot 10^8$ m/s è la velocità della luce nel vuoto.

Per molti riguardi, questi fotoni possono essere considerati come corpuscoli che si muovono con la velocità della luce.

Viene inoltre ripresa l'ipotesi di Planck: un oscillatore è in grado di emettere o assorbire energia luminosa, o in generale energia raggiante, solo in forma quantizzata, cioè non in modo continuo ma secondo quantità discrete.

Se $\bar{\nu}$ è la frequenza della radiazione che un atomo può assorbire o che esso può emettere, per l'energia E di ogni quantum si ha $E = h\bar{\nu}$.

Sulla base di queste ipotesi possiamo spiegare l'effetto fotoelettrico in questo modo.

Se un quanto di luce, o fotone, cade sulla superficie di un metallo esso può cedere la sua energia ad un elettrone di conduzione prossimo alla superficie. Se tale energia è maggiore dell'energia di estrazione dell'elettrone dal metallo,

$$\text{ossia se } h\nu > \Delta E,$$

l'elettrone può oltrepassare il doppio strato elettrico esistente sulla superficie del metallo stesso e arrivare così nello spazio esterno con una energia cinetica T che al massimo può essere

$$(1) \quad T = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = h\nu - \Delta E.$$

L'energia di estrazione ΔE è la minima energia che bisogna fornire all'elettrone affinché esso possa uscire dal metallo con velocità nulla. Con l'occasione, ricordiamo che il rapporto

$$(*) \quad \Delta V = \frac{\Delta E}{e}$$

(rapporto fra l'energia ΔE e la carica dell'elettrone cambiata di segno) si dice "potenziale di estrazione degli elettroni dal metallo".

Dalla (1) si ottiene

$$(2) \quad h\nu - \Delta E \geq 0, \quad \text{ossia} \quad (3): \quad \nu \geq \frac{\Delta E}{h} = \nu_0 .$$

La (3) ci dice che "Affinché una radiazione, colpendo un metallo, produca una emissione di elettroni è necessario che la sua frequenza sia maggiore di una certa frequenza ν_0 detta soglia fotoelettrica del metallo."

Per il sodio si ha:

$$\nu_0 = \frac{e\Delta V}{h} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,7}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 0,654 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} ;$$
$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{2,997294 \cdot 10^8}{0,654 \cdot 10^{15}} = 4,58 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cong 4600 \text{ \AA} .$$

Se l'energia $h\nu$ del quanto di luce è minore del lavoro di estrazione $\Delta E = h\nu_0$, l'elettrone non può essere espulso dal metallo qualunque sia l'intensità della radiazione incidente.

Ciò spiega l'esistenza della soglia fotoelettrica ν_0 del metallo e spiega quindi la prima legge dell'effetto fotoelettrico.

In base all'ipotesi quantistica, se una radiazione luminosa monocromatica cade su un metallo ed ha una frequenza $\nu > \nu_0$ (soglia fotoelettrica del metallo) il numero di elettroni espulsi è uguale al numero dei quanti di luce incidenti e questo è proporzionale all'intensità della radiazione. Risulta così spiegata la 3^a legge dell'effetto fotoelettrico.

Se $\nu > \nu_0$ ma l'intensità luminosa è bassa, i quanti di luce sono pochi ma ognuno di essi è in grado di espellere un elettrone.

Inoltre, l'elettrone che ha ricevuta l'energia $h\nu$ dal quanto incidente, ne userà una parte per compiere il lavoro di estrazione $h\nu_0$ mentre la parte restante $h\nu - h\nu_0$ gli resterà sotto forma di energia cinetica.

Risulta così spiegata la 2^a legge

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = h\nu - h\nu_0.$$

Infine un quanto di luce di energia $h\nu > h\nu_0$ può espellere un elettrone nel momento stesso in cui esso colpisce il metallo e ciò spiega l'immediata emissione di elettroni, cioè la 4^a legge.

CAPITOLO QUINTO

STRUTTURA DELLA MATERIA

N. 1 - Necessità di una struttura atomica della materia

La scoperta delle leggi fondamentali della chimica, cioè delle proporzioni fisse e delle proporzioni multiple, fece sentire la necessità di ammettere una struttura corpuscolare della materia.

Queste leggi portarono cioè a ritenere che ognuno dei 92 elementi chimici sia formato da particelle tutte uguali fra loro che chiameremo atomi.

Dalton giunse a formulare questa teoria atomica per spiegare i rapporti semplici che erano stati osservati tra le masse delle sostanze che reagiscono chimicamente.

La chimica ci insegna ad esprimere le masse di tutti i vari atomi prendendo una opportuna unità di massa, per esempio la massa dell'atomo di Ossigeno posta uguale a 16. Si ottengono in tal modo i pesi atomici, ossia dei numeri proporzionali alle masse dei singoli atomi.

Più tardi, vari fenomeni, come l'elettrolisi, l'effetto termoionico, la conduzione nei gas e nei metalli mostrarono la necessità di ammettere che l'atomo, elettricamente neutro allo stato libero, contenga cariche positive e negative.

Il Rutherford inviò un fascetto di particelle α (la carica e la massa di queste erano già note) contro una sottile lastrina metallica e osservò che esse, uscendo dalla parte opposta, risultavano in parte deviate dalla direzione primitiva.

Tale deviazione non può essere dovuta all'azione degli elettroni sulle particelle, dato che queste hanno una massa molto più grande (~ 7000 volte) della massa degli elettroni. Essa è dovuta necessariamente all'azione delle cariche positive, dato che a queste è connessa la massa degli atomi.

Orbene il Rutherford, studiando le deviazioni dei raggi α , si formò il convincimento che l'atomo non può avere una struttura continua, ma bensì lacunare. L'esperienza ci ha permesso di calcolare il raggio R_n del nucleo, cioè la distanza dal suo centro per la quale si hanno deviazioni dalla legge di Coulomb. Per quasi tutti gli atomi vale la seguente formula empirica:

$$R_n = 1,4 \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ m ,}$$

ove A è il numero di massa, ossia il numero intero che più si approssima al peso atomico del nucleo considerato. Esempi:

per l'idrogeno si ha $R_n = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$;
 per l'argento si ha $R_n = 1,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{107} = 6,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$;
 per l'uranio si ha $R_n = 1,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{238} = 8,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

Confrontando questi numeri con le dimensioni dell'atomo (10^{-10} m) , si vede che i nuclei sono circa 10^{-5} volte più piccoli degli atomi; e quindi la massa dell'atomo è praticamente tutta concentrata nel nucleo.

La deviazione che subiscono i raggi α quando vengono inviati contro una sottile lastra di metallo ci ha permesso anche di calcolare con precisione la carica positiva del nucleo atomico per diversi atomi. Si è potuto così riconoscere che il nucleo di un elemento di numero atomico Z ha la carica $+Ze$. Diciamo per inciso che il numero atomico Z di un elemento è il numero d'ordine che esso occupa nel sistema periodico degli elementi.

N. 2 – Modello atomico di Rutherford

Secondo i dati sperimentali trovati da Rutherford, l'atomo è come un minuscolo sistema planetario formato da una parte centrale, detta nucleo, carico positivamente, attorno al quale si muovono gli elettroni, carichi negativamente. La forza centrifuga che agisce sugli elettroni fa equilibrio alla forza di attrazione coulombiana e impedisce ad essi di cadere sul nucleo.

Gli elettroni sono tutti uguali fra loro, qualunque sia l'atomo a cui appartengono, ed hanno una massa piccolissima. Precisamente si ha:

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} , \quad \text{carica dell'elettrone;} \\ m_e = 9,10 \cdot 10^{-28} \text{ grammi} , \quad \text{massa dell'elettrone} .$$

Il nucleo, invece, varia da un elemento chimico ad un altro e in esso è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo. Si è visto in seguito che il nucleo è costituito da particelle cariche positivamente, dette protoni, e da particelle neutre, dette neutroni: la massa di ogni protone è quasi uguale a quella di un neutrone.

La carica del nucleo è sempre uguale ad un multiplo della carica dell'elettrone cambiata di segno, ossia è uguale a $+Ze$.

Ma gli atomi dei vari elementi, in condizioni normali, sono sistemi elettricamente neutri; ciò significa che attorno ad un nucleo avente la carica $+Ze$ si muovono Z elettroni che con le loro cariche negative neutralizzano la carica positiva del nucleo.

Se da un atomo si strappano 1 o 2 elettroni si ottiene rispettivamente uno ione positivo monovalente o bivalente.

Se invece ad un atomo neutro si attaccano 1 o 2 elettroni si ottiene uno ione negativo monovalente o bivalente.

Gli atomi dei vari elementi chimici si distinguono uno dall'altro per il valore del numero Z , ossia per il numero delle cariche positive che formano il nucleo dell'atomo stesso.

Z si dice numero atomico e coincide con il numero d'ordine del sistema periodico degli elementi.

Siccome la massa dei protoni e dei neutroni è molto più grande di quella degli elettroni, possiamo dire che la massa dell'atomo è praticamente tutta concentrata nel nucleo. Per esempio, il nucleo dell'atomo di idrogeno H ha una massa circa 1850 volte più grande di quella dell'elettrone.

N. 3 – Incongruenze del modello atomico di Rutherford; modello di Bohr

Il modello atomico di Rutherford è attraente per la sua semplicità; ma accettando questo modello non possiamo applicare le leggi classiche dell'elettromagnetismo al moto degli elettroni attorno al nucleo, altrimenti si giungerebbe a risultati in pieno disaccordo con l'esperienza. In altre parole, nel campo della fisica atomica non possiamo applicare le leggi della elettrodinamica classica di Maxwell. Infatti, secondo queste leggi, una carica elettrica e che ruota attorno al nucleo si muove di moto accelerato, e quindi dovrebbe irradiare continuamente energia sotto forma di onde elettromagnetiche.

Precisamente, l'energia irradiata in un secondo da una carica elettrica e che si muove con accelerazione a è data dalla formula

$$(1) \quad W = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_0}{v} e^2 a^2 \text{ watt},$$

ove v è la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo considerato.

Ne segue che l'elettrone che ruota attorno ad un nucleo di idrogeno, avendo costantemente una accelerazione centripeta, dovrebbe irradiare continuamente energia elettromagnetica a spese della sua energia cinetica e potenziale e quindi il raggio dell'orbita dovrebbe diminuire rapidamente fino a che l'elettrone non cada sul nucleo.

L'atomo di Rutherford sarebbe quindi un sistema instabile e, a conti fatti, la sua vita sarebbe dell'ordine di 10^{-8} sec.

Inoltre la radiazione, cioè la luce emessa dall'atomo di idrogeno, dovrebbe avere una frequenza variabile: infatti, la frequenza della radiazione dipende dalla frequenza del moto dell'elettrone attorno al nucleo e la frequenza di tale moto varia continuamente a causa del rimpicciolirsi dell'orbita.

Quindi una massa di idrogeno, avendo innumerevoli atomi in tutte le possibili fasi della loro vita, dovrebbe emettere radiazioni di tutte le possibili frequenze, ossia dovrebbe emettere uno spettro continuo.

Ma questo fatto è in netta contraddizione con l'esperienza. Sappiamo infatti che l'idrogeno di un tubo di scarica emette radiazioni di frequenza rigorosamente costante: esse costituiscono il noto spettro dell'atomo di idrogeno.

Questa considerazione ci dice che le leggi dell'elettrodinamica classica di Maxwell non possono applicarsi al moto degli elettroni attorno al nucleo, ossia non valgono nel campo della fisica atomica.

Per evitare queste contraddizioni con i fatti sperimentali è necessario supporre che il moto degli elettroni attorno al nucleo sia governato da leggi diverse da quelle della elettrodinamica classica.

A tale scopo il fisico danese Niels Bohr, ispirandosi all'ipotesi dei quanti, ammise i seguenti postulati:

1° - Esistono orbite particolari, dette orbite stazionarie, sulle quali un elettrone può ruotare senza irradiare, ossia senza perdere energia.

2° - Le orbite stazionarie sono caratterizzate dal fatto che il momento angolare L dell'elettrone, cioè il momento della quantità di moto attorno al nucleo, sia un multiplo intero di $\frac{h}{2\pi}$, cioè:

$$(2) \quad mvr = n \frac{h}{2\pi} \text{ ove } n = 1, 2, 3, \dots \text{ e } h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

Ne segue che **il raggio dell'orbita di un elettrone non può assumere qualsiasi valore, come nella meccanica classica, ma solo valori discreti, cioè non continui; quindi anche l'energia dell'elettrone, che dipende dal raggio della**

sua orbita, può assumere solo valori discreti, caratteristici dell'atomo considerato, detti livelli energetici o stati quantici.

3° - Lo stato stabile di un elettrone è quello di minima energia; quindi un elettrone tenderà ad occupare prima l'orbita più vicina al nucleo e poi le altre, quando quella è completa. Quando l'elettrone passa ad un'orbita di energia maggiore, cioè più esterna, si dice che l'atomo si trova in uno stato eccitato. In tal caso l'elettrone tende a tornare sulla sua orbita.

4° - Quando un elettrone passa da una qualsiasi orbita ad una più interna, alla quale spetta un'energia minore, esso irradia un quanto di energia (quanto di luce o fotone)

$$h\nu = E_i - E_f ,$$

pari alla differenza di energia fra i due livelli energetici.

Se invece l'atomo viene colpito da un fotone, esso ne può assorbire l'energia $h\nu$ solo se questa è uguale alla differenza di energia esistente fra due stati quantici dell'atomo. In tal caso si ha:

$$(i) \quad h\nu = E_n - E_{n'} ,$$

ove n è l'indice di arrivo ed n' l'indice di partenza.

La frequenza della radiazione emessa o assorbita è data quindi dalla formula

$$(ii) \quad \nu = \frac{E_n - E_m}{h} .$$

Se l'energia $h\nu$ di un fotone non è uguale alla differenza fra due possibili stati quantici, cioè se la frequenza ν non è una delle frequenze che l'atomo può emettere, l'assorbimento non può avvenire perché porterebbe l'atomo ad uno stato non quantico, ossia ad un livello energetico non consentito. Si spiega così perché la frequenza delle righe di emissione sia eguale a quella delle righe di assorbimento.

Informiamo, per inciso, che si dice “elettrone ottico” l'elettrone in grado di emettere una radiazione, cioè l'elettrone che può dare luogo a salti quantici che producono emissione di radiazione.

Riassumendo, gli elettroni non possono muoversi attorno al nucleo su un'orbita qualsiasi, come nella meccanica classica, ma solo su quelle orbite per le quali il momento della quantità di moto dell'elettrone è un multiplo intero di $h/2\pi$. L'energia di un elettrone che ruoti attorno al nucleo su una

di queste orbite è una grandezza che rimane costante durante il moto ed è una funzione del raggio R dell'orbita (in accordo con la meccanica classica).

Si chiamano stati quantici questi valori discreti, cioè non continui, che può assumere l'energia degli elettroni che ruotano attorno al nucleo. Anche se rifiutiamo il modello planetario dell'atomo, come vuole il principio di indeterminazione di Heisenberg, rimane tuttavia valido il concetto fondamentale affermato dalla meccanica quantistica, cioè:

“Un atomo o una molecola è un sistema capace di trovarsi in diversi stati, detti stati quantici, a ciascuno dei quali corrisponde un diverso valore dell'energia.

Ma queste energie costituiscono un insieme discreto, ossia l'energia di un elettrone non può variare con continuità, ma varia per salti e può assumere solo certi determinati valori”.

L'insieme delle orbite per le quali l'energia ha valori quasi uguali formano uno strato o anello. Gli strati vengono contrassegnati con le lettere K,L,M,N man mano che si procede dagli strati interni, che hanno minore energia, a quelli più esterni, che hanno energia maggiore.

N. 4 – Teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno; calcolo delle orbite

Secondo il modello di Bohr, un atomo di idrogeno H consta di un nucleo centrale e di un solo elettrone che ruota attorno ad esso. Secondo le leggi della meccanica classica l'orbita descritta dall'elettrone sarà un'ellisse, che in prima approssimazione possiamo considerare come una circonferenza di raggio r.

La forza centrifuga che agisce sull'elettrone è uguale alla forza di attrazione coulombiana che la carica Ze del nucleo esercita su di esso. Indicando con v la velocità periferica dell'elettrone possiamo quindi scrivere

$$(1) \quad m \frac{v^2}{r} = Z \frac{e^2}{r^2},$$

da cui $mv^2 = Z \frac{e^2}{r}$, e quindi (2) $v = \sqrt{\frac{Ze^2}{mr}}$.

Nel caso dell'idrogeno il nucleo ha la carica e , quindi $Z = 1$; tuttavia indicheremo tale carica ancora con Ze , allo scopo di poter considerare un qualsiasi sistema idrogenoide di numero atomico $Z > 1$.

L'energia totale E dell'elettrone è uguale alla somma dell'energia cinetica e della sua energia potenziale, cioè:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - Z \frac{e^2}{r}.$$

Poiché $mv^2 = Ze^2/r$, possiamo esprimere tale energia in funzione di r ; si ha

$$E = \frac{1}{2}Z \frac{e^2}{r} - Z \frac{e^2}{r}, \text{ ossia (3) } E = -\frac{1}{2}Z \frac{e^2}{r}.$$

Questa energia è detta **energia di legame dell'elettrone**. Il valore negativo di E significa che per fermare l'elettrone e allontanarlo a distanza infinita si deve spendere un lavoro perché l'energia cinetica che si ricava fermando l'elettrone è minore del lavoro necessario a vincere l'attrazione coulombiana quando spostiamo l'elettrone dalla distanza r a distanza infinita.

La (3) ci dice che quanto più piccolo è il raggio r , tanto maggiore in valore assoluto risulta l'energia di legame dell'elettrone. Pertanto gli elettroni più interni sono più fortemente legati al nucleo.

Vogliamo trovare il valore che può avere il raggio dell'orbita di un elettrone. A tale scopo ricordiamo che il momento della quantità di moto dell'elettrone $p = mrv$ è un multiplo intero di $h/2\pi$, cioè

$$(4) \quad mrv = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ove n è detto numero quantico dell'orbita.

Poiché $v = \sqrt{Ze^2/mr}$ sostituendo nella (4) si ha:

$$mr \cdot \sqrt{\frac{Ze^2}{mr}} = n \frac{h}{2\pi}, \text{ da cui } (mr)^{\cancel{2}} \frac{Ze^2}{\cancel{mr}} = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2}.$$

Il raggio r_n della n-esima orbita è dato quindi dalla formula

$$(5) \quad r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m Z}.$$

Per quanto riguarda le orbite di raggio r_n , possiamo dire che a ciascuna di esse corrisponde l'energia

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{r_n},$$

cioè, per la (5)
$$E_n = -Z^2 \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

L'energia dell'atomo, dunque, può assumere solo certi valori discreti E_n , che si chiamano “livelli energetici” o “stati quantici” dell'atomo.

Il Bohr ammise poi che l'elettrone potesse passare con un salto da un'orbita n ad un'orbita m . In tale passaggio, naturalmente, esso dovrà emettere o assorbire uno sprazzo di energia sotto forma di onde elettromagnetiche. Precisamente, quando l'elettrone passa dalla propria orbita ad un'orbita più interna, esso irradia un quanto di luce o fotone di energia

$$h\nu = E_n - E_m$$

pari alla differenza di energia dei due livelli energetici corrispondenti.

L'elettrone assorbe invece un fotone quando esso passa ad un'orbita più esterna.

La frequenza della radiazione emessa o assorbita sarà quindi

$$(6) \quad \nu = \frac{E_n - E_m}{h}.$$

Bohr postulò che la radiazione emessa o assorbita da un atomo sia “quantizzata” perché alcuni fenomeni, come l'effetto fotoelettrico, possono essere spiegati solo se si ammette che la radiazione di frequenza ν sia raccolta in “quanti”, ciascuno dei quali contenga l'energia $E = h\nu$.

N. 5 – L'elettrone dell'atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale

Applichiamo la (5) del paragrafo precedente per trovare l'energia dell'elettrone dell'atomo di Idrogeno nel suo stato fondamentale.

Esprimiamo le misure di tutte le grandezze fisiche nel sistema MKSA e sostituiamo Z con $Z/4\pi\epsilon_0$. Si ha:

$$E = -\frac{2\cancel{\pi}^2 me^4}{h^2 n^2} \cdot \frac{Z^2}{16 \cdot \cancel{\pi}^2 \epsilon_0} = -\frac{me^4 Z^2}{8h^2 \epsilon_0^2 \cdot n^2}.$$

Ponendo $n = 1$ e $Z = 1$ si ottiene:

$$E = -\frac{9,10 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{8 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^2 \cdot (8,854 \cdot 10^{-12})^2} = -2,16 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Esprimiamo questa energia in eV; poiché $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, si ha

$$(1) \quad E = -13,5 \text{ eV}.$$

Per allontanare l'elettrone dell'atomo di Idrogeno dalla sua prima orbita, dove esso ruota in condizioni normali, sino a portarlo all'infinito, è necessario fornire all'atomo proprio l'energia W data dal valore assoluto della (1); essa è detta energia di ionizzazione dell'atomo. Il potenziale

$$V = \frac{E}{-e} = 13,5 \text{ Volt} \quad \text{è detto potenziale di ionizzazione dell'atomo stesso.}$$

Troviamo il raggio r_1 dell'atomo di Idrogeno nel suo stato fondamentale.

Passiamo al sistema MKSA: oltre ad esprimere le misure di tutte le grandezze fisiche in tale sistema, dobbiamo anche sostituire Z con $Z/4\pi\epsilon_0$.

$$\text{Si ha: } (2) \quad r_1 = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2 m} \cdot \frac{4\cancel{\pi} \epsilon_0}{Z}.$$

Ponendo $n = 1$ e $Z = 1$ si ottiene:

$$r_1 = \frac{6,63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{3,14 \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = \frac{389 \cdot 10^{-80}}{73,15 \cdot 10^{-69}} = 5,33 \cdot 10^{-11} \text{ m},$$

$$\text{quindi} \quad r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,53 \overset{\circ}{\text{Å}}.$$

Calcoliamo infine la velocità dell'elettrone dell'atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale. A tale scopo ricordiamo che la forza centrifuga che agisce sull'elettrone è uguale alla forza di attrazione coulombiana che la carica Ze del nucleo esercita su di esso. Indicando con v la velocità periferica dell'elettrone possiamo scrivere:

$$(f) \quad m \frac{v^2}{r} = Z \frac{e^2}{r^2}, \text{ da cui } mv^2 = \frac{Ze^2}{r}, \text{ e quindi } mvr = \frac{Ze^2}{v}.$$

$$\text{Poiché } mvr = n \frac{h}{2\pi} \text{ si ricava } n \frac{h}{2\pi} = \frac{Ze^2}{v},$$

$$\text{e infine } v = \frac{2\pi Ze^2}{nh}.$$

Passando al sistema MKSA dobbiamo esprimere i valori delle grandezze fisiche in tale sistema e dobbiamo sostituire Z con $Z/4\pi\epsilon_0$. Si ottiene:

$$v = \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 h \cdot n}.$$

Poniamo $Z = 1$, $n = 1$ e passiamo ai valori. Si ottiene:

$$v = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34}} = \frac{2,56}{1,18} \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\text{ossia } v = 2,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Tenendo conto che il raggio dell'orbita è $0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, si ricava che il periodo di rivoluzione dell'elettrone risulta pari a

$$(2) \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}}{2,18 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ secondi}.$$

Per una dimostrazione più elementare si veda E. Amaldi, Fisica II, pg. 116.

N. 6 – Spettro dell'atomo di idrogeno

Consideriamo le frequenze delle radiazioni che possono essere emesse da un atomo eccitato; sotto forma opportuna possiamo scrivere

$$(1) \quad \bar{\nu}_{nm} = \frac{\nu}{c} = \frac{E_n - E_m}{hc} = \tau_n - \tau_m .$$

La (1) ci mostra che le frequenze emesse da un atomo eccitato si presentano come differenze di due termini spettrali; ogni termine, poi, corrisponde ad un diverso livello energetico dell'atomo, ossia ad un diverso stato quantico. Ricordando la (5) del paragrafo N. 7 si ha:

$$(2) \quad \bar{\nu}_{nm} = \frac{Z^2 2\pi^2 e^4 m}{h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) .$$

La (2) coincide con la formula di Balmer generalizzata quando si ponga

$$Z = 1 \quad \text{e} \quad R = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3 c} .$$

Fatti i conti si trova $R = 110.150 \text{ cm}^{-1}$, in ottimo accordo con l'esperienza che ci dà $R = 109.677,8 \text{ cm}^{-1}$ (costante di Rydberg).

La concordanza diviene ancora maggiore se si tiene conto della correzione dovuta al movimento del nucleo.

Le righe dello spettro dell'atomo di H si possono raggruppare in quattro serie:

$m = 1, \quad n = 2, 3, 4, \dots$	serie di Lyman	(ultravioletta),
$m = 2, \quad n = 3, 4, 5, \dots$	“ “	Balmer (visibile),
$m = 3, \quad n = 4, 5, 6, \dots$	“ “	Paschen (infrarossa),
$m = 4, \quad n = 5, 6, 7, \dots$	“ “	Brackett (infrarossa).

Le formule (1) e (2) ci fanno vedere che le righe spettrali emesse da un atomo di un elemento si possono ottenere come differenza di due termini.

Non è però vero il viceversa: alla differenza di due termini qualsiasi non sempre corrisponde una riga effettivamente emessa da quell'elemento. Ciò ci dice che l'atomo può trovarsi solo in un insieme discreto di stati e non tutte le transizioni tra due stati quantici dell'atomo sono permesse.

NOTA. In spettroscopia si usa individuare una radiazione non solo con la sua frequenza $\nu = \frac{c}{\lambda}$ (numero di vibrazioni al secondo), ma anche con la quantità ad essa proporzionale $\bar{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$. Essa è detta “numero d’onde”, perché rappresenta il numero delle lunghezze d’onda contenuto in un cm.

Nel sistema CGS, l’unità di misura per ν è il sec^{-1} , per $\bar{\nu}$ è il cm^{-1} .

N. 7 – Principio di Pauli

Diamo un cenno sul principio di esclusione di Pauli, che è un principio fondamentale della meccanica quantistica. Per il momento diamo come acquisita la conoscenza dei numeri quantici n, ℓ, m, s . Essi saranno trattati con il necessario approfondimento nei prossimi paragrafi.

Tale principio afferma che in un atomo non possono trovarsi due elettroni aventi la stessa quaterna di numeri quantici. Vedremo che lo strato avente il numero quantico principale n può contenere al massimo $N = 2n^2$ elettroni. Pertanto ci possono essere al massimo:

2 elettroni sul 1° strato, 8 elettroni sul 2° strato,
18 elettroni sul 3° strato, ecc.

Normalmente gli elettroni tendono sempre ad andare, finché è possibile, sulle orbite più vicine al nucleo, che hanno minore energia; cioè gli elettroni tendono prima a saturare gli strati più interni e poi si distribuiscono sugli strati esterni.

Quando lo strato esterno di un atomo contiene esattamente $2 \cdot n^2$ elettroni, ossia quando lo strato esterno è saturo di elettroni, esso ha una struttura particolarmente stabile. In tal caso l’atomo che si ottiene difficilmente forma ioni $+$ o $-$, e quindi esso non prende parte a reazioni chimiche.

Ciò corrisponde al fatto sperimentale che gli elettroni che contengono 2 o 8 elettroni esterni sono i gas nobili. Per questo motivo **gli elettroni appartenenti allo strato esterno sono detti elettroni di valenza**, in quanto essi sono responsabili delle proprietà chimiche dell’elemento.

N. 8 – Equazioni della dinamica di un sistema di punti materiali

Richiami di meccanica analitica

La teoria sull'atomo di idrogeno formulata da Bohr fu ampliata pochi anni dopo da Arnold Sommerfeld allo scopo di includervi lo studio delle orbite ellittiche dell'idrogeno e di altri atomi.

A tale scopo la condizione di Bohr sulla quantizzazione del momento della quantità di moto fu sostituita da condizioni più generali. Per illustrare queste condizioni è necessario richiamare alcune nozioni sulla dinamica di un sistema di punti materiali.

Per gli argomenti che vogliamo richiamare si può consultare il testo:

Piero Caldirola, Istituzioni di Fisica Teorica, Casa Editrice Viscontea - Milano

Consideriamo un sistema di N punti materiali non legati da alcun vincolo e sottoposti all'azione di forze qualsiasi. Ogni punto segue le leggi di Newton e quindi possiamo scrivere il sistema di equazioni differenziali:

$$(1) \quad \begin{cases} m_i \ddot{x}_i = X_i \\ m_i \ddot{y}_i = Y_i \\ m_i \ddot{z}_i = Z_i \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

ove m_i è la massa della i -esima particella, di coordinate (x_i, y_i, z_i) , sulla quale agisce la forza complessiva $\vec{F}_i(X_i, Y_i, Z_i)$.

L'energia cinetica del sistema, in coordinate cartesiane, è

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \dots + \frac{1}{2} m_N (\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2 + \dot{z}_N^2),$$

ossia
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Passando alle derivate parziali, si ottiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} m_i 2 \dot{x}_i, \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i; \text{ da cui}$$

$$2) \quad m_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}.$$

Supponiamo che la forza \vec{F}_i agente su una singola particella ammetta un potenziale V_i ; sia inoltre V il potenziale del sistema di forze e U l'energia potenziale, ove

$$V = V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N), \quad \text{e} \quad U = -V.$$

Ne segue che le componenti (X_i, Y_i, Z_i) della forza \vec{F}_i , applicata alla massa m_i della generico punto materiale, sono date dalle derivate:

$$(3) \quad X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad \text{ove } i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Sostituendo le (2),(3) nelle (1) si ottiene:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0, \quad \text{con } i=1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

N. 9 – Equazioni del moto in forma lagrangiana

La (4)₁ del paragrafo precedente si può trasformare come segue:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (T - U) - \frac{\partial}{\partial x_i} (T - U) = 0.$$

Infatti nel primo termine di questa equazione la funzione U non dipende da \dot{x}_i , mentre nel secondo termine l'energia cinetica T non è funzione di x_i .

Analogamente si ha:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} (T - U) - \frac{\partial}{\partial y_i} (T - U) = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} (T - U) - \frac{\partial}{\partial z_i} (T - U) = 0.$$

Poniamo ora

$$L = L(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t) = \\ = T(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) - U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t) .$$

Questa funzione $L = T - U$, definita come differenza fra l'energia cinetica e l'energia potenziale dei punti del sistema dato, è detta **Funzione Lagrangiana**. Usando questa funzione possiamo scrivere il sistema (4) N. 9 nella forma:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0, \quad \text{ove } i=1,2,3,\dots,N. \end{cases}$$

Le equazioni del sistema (1) sono dette equazioni di Lagrange: esse sono importanti perché, sotto condizioni poco restrittive, mantengono inalterata la loro forma se facciamo uso di un tipo di coordinate diverse dalle coordinate cartesiane e se esse non sono fra loro indipendenti. Vedremo queste equazioni nel prossimo paragrafo.

N. 10 – Equazioni lagrangiane di un sistema olonomo

Consideriamo un sistema olonomo a vincoli dipendenti dal tempo e supponiamo che esso abbia f gradi di libertà; ne segue che le posizioni che esso può assumere sono ben individuate da f coordinate lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_f dipendenti dal tempo t , cioè

$$q_k = q_k(t), \quad \text{ove } k = 1, 2, \dots, f .$$

Se i vincoli sono fissi manca la dipendenza dal tempo.

Supponiamo, inoltre, che il sistema sia soggetto ad una sollecitazione attiva conservativa, cioè che le forze agenti sul sistema si possano esprimere per mezzo di un potenziale generalizzato dato dalla funzione lagrangiana

$$L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t) = \\ = T(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f) - U(q_1, q_2, \dots, q_f, t) .$$

In modo più sintetico, la funzione lagrangiana si può scrivere nella forma

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i, t) ,$$

ove le funzioni $T(q_i, \dot{q}_i)$ e $U(q_i, t)$ rappresentano rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del generico punto P_i del sistema. Per mezzo di questa funzione le equazioni del moto del sistema di punti materiali si possono esprimere con il sistema di f equazioni differenziali:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \text{ ove } k = 1, 2, \dots, f ;$$

quindi, il numero di equazioni del sistema è uguale al numero dei gradi di libertà che esso possiede.

Le derivate della funzione lagrangiana L rispetto alle velocità generalizzate \dot{q}_k sono dette “ impulsi generalizzati” e sono dati dalle espressioni

$$(2) \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} , \text{ ove } k = 1, 2, \dots, f.$$

La quantità p_k si dice anche “momento cinetico coniugato alla coordinata lagrangiana q_k ”.

Le derivate (3) $F_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ sono dette “forze generalizzate”.

Sostituendo (2), (3) nell'equazioni (1) di Lagrange si ottiene:

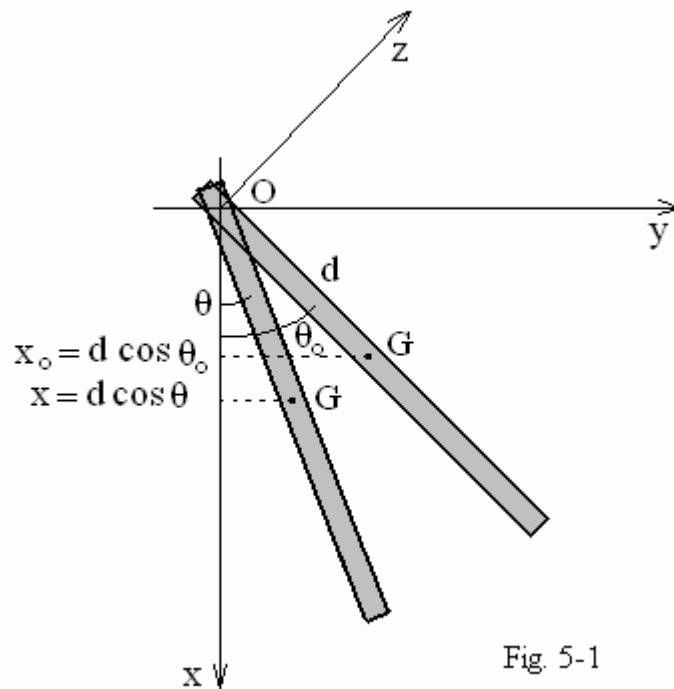
$$\frac{dp_k}{dt} - F_k = 0, \text{ cioè } F_k = \dot{p}_k .$$

Nel caso generale, le grandezze p_k sono funzioni lineari ed omogenee delle velocità generalizzate \dot{q}_k ; dobbiamo, però, notare che ogni \dot{q}_k non si riduce al semplice prodotto di una massa per la sua velocità.

N. 11 - Il sistema lagrangiano nello studio del moto di un pendolo composto

Consideriamo un pendolo composto, ossia un corpo rigido girevole senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per un punto O . Possiamo

pensare che la massa m del pendolo sia raccolta nel suo baricentro G e sia d la distanza di questo punto dal punto di sospensione O . Assumiamo tale punto come origine di un riferimento cartesiano $T \equiv Oxyz$, con l'asse x diretto verticalmente verso il basso e l'asse z orizzontale (fig. 5-1).



Sia ϑ l'angolo che la retta orientata \overrightarrow{OG} forma con l'asse x , misurato positivamente in senso antiorario. L'angolo è l'unica coordinata lagrangiana sufficiente ad individuare la posizione del corpo, che è quindi un sistema fisico ad un sol grado di libertà. Ne segue che **il moto del sistema è individuato da una sola equazione lagrangiana:**

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0.$$

L è la “funzione lagrangiana”; essa è definita come differenza fra l'energia cinetica e l'energia potenziale

$$(2) \quad L = T - U$$

e rappresenta il potenziale cinetico.

Facendo intervenire nella (1) l'espressione della coordinata lagrangiana $q_1 = \vartheta(t)$ si ha:

$$L(q_1, \dot{q}_1, t) = T(q_1, \dot{q}_1) - U(q_1, t),$$

ove
$$T = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2, \quad U = -mgd \cos \vartheta.$$

Ricordiamo che $d = \overline{OG}$ è la distanza del baricentro G dal punto di sospensione O, mentre I è il momento di inerzia del pendolo rispetto all'asse z .

Ricordiamo come si trova la formula dell'energia potenziale U .

Sia ξ l'ascissa del baricentro del pendolo composto in una generica posizione P e $U(P) = U(\xi)$ l'energia del pendolo in questa posizione. Indichiamo poi con $U(L)$ l'energia del pendolo quando esso si trova sovrapposto all'asse y e attribuiamo ad essa il valore zero, quindi $U(L) = 0$. In questa posizione si ha $x_L = 0$.

Per l'energia potenziale U si ha:

$$U(P) = \cancel{U(L)} - \int_L^P m\vec{g} \times d\vec{x} = - \int_0^\xi mg \cdot dx = -mg[x]_0^\xi = -mg\xi + \cancel{mg \cdot 0}.$$

Indichiamo genericamente con x l'ascissa ξ del baricentro e teniamo presente che si ha

$$\xi = x = d \cos \vartheta;$$

possiamo allora scrivere

$$(3) \quad U(x) = -mgx = -mgd \cos \vartheta.$$

Ne segue che la funzione lagrangiana L ha la forma:

$$(4) \quad L = T - U = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + mgd \cos \vartheta.$$

Da essa si ricava

$$(5) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = I \dot{\vartheta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -mgd \cdot \sin \vartheta,$$

ove $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}$ è il momento cinetico p_ϑ coniugato a ϑ .

Sostituendo le espressioni (5) nella (1) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I \dot{\vartheta} + mgd \cdot \sin \vartheta &= 0, \\
 I \ddot{\vartheta} + mgd \cdot \sin \vartheta &= 0, \\
 (5) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{md}{I} g \cdot \sin \vartheta &= 0.
 \end{aligned}$$

Poniamo $\frac{I}{md} = \ell$, ove ℓ è la “lunghezza ridotta del pendolo composto”; con ciò la (5) diviene:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0, \quad \text{da cui} \quad \ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0, \quad \text{ove} \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Per oscillazioni di piccola ampiezza $\sin \vartheta \approx \vartheta$, e quindi l’equazione del moto del pendolo composto diventa

$$(6) \quad \ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0.$$

Questa equazione è identica a quella che descrive il moto di un pendolo semplice di lunghezza ℓ ; è per questo motivo che ℓ si dice “lunghezza ridotta del pendolo composto”.

L’integrale della (6) è dato dalla funzione

$$\vartheta(t) = A \sin(\omega t + \varphi);$$

essa è una funzione periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mgd}}$.

Riassumendo, il pendolo composto è un sistema che ha un sol grado di libertà; l’equazione lagrangiana che traduce il moto del pendolo si riduce ad una equazione differenziale lineare del secondo ordine. L’integrale di tale equazione dipende da due costanti arbitrarie: esse sono A e φ .

N. 12 – Le condizioni di Sommerfeld

Come abbiamo già accennato, la teoria di Bohr per l’atomo di H fu ampliata pochi anni dopo da Sommerfeld in modo da potervi includere anche le orbite ellittiche dell’idrogeno e di atomi più complessi. A tale

scopo, la condizione di Bohr sulla quantizzazione del momento della quantità di moto fu sostituita da condizioni più generali che ora enunceremo.

Seguendo Sommerfeld, possiamo considerare l'atomo come un sistema meccanico conservativo ad f gradi di libertà. Le configurazioni del sistema sono allora individuate da f coordinate libere o lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_f , dipendenti dal tempo, alle quali corrispondono altrettanti momenti cinetici p_1, p_2, \dots, p_f . Ricordiamo che si dice "momento cinetico coniugato alla coordinata lagrangiana q_k " la quantità

$$(4) \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}, \quad \text{ove } k = 1, 2, \dots, f;$$

esso si dice anche "impulso generalizzato".

Ricordiamo le equazioni di Lagrange che ci danno le leggi del moto del sistema materiale:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad \text{ove } k = 1, 2, \dots, f.$$

Sostituendo l'espressione di p_k nella corrispondente equazione del sistema di Lagrange (vedi le (1) N. 9) si ottiene:

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad \text{ove } k = 1, 2, \dots, f$$

$$\text{ossia (5):} \quad \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, f.$$

L è la funzione lagrangiana che rappresenta il potenziale cinetico ed è data dall'espressione

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t) = \\ = T(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f) - U(q_1, q_2, \dots, q_f, t). \end{aligned}$$

Supponiamo

1° - che ciascuna q_i sia funzione periodica del tempo con periodo T_i : allora se tutti i periodi T_i coincidono o ammettono un multiplo comune, il moto è periodico.

2°- che ciascuna p_i sia funzione della sola q_i ad essa coniugata e non delle altre .

Notiamo che queste due condizioni sono soddisfatte in tutti i casi che in pratica si verificano nella meccanica atomica.

Immaginiamo ora di aver integrato le equazioni differenziali del moto (5) e di aver trovato le q_i e le p_i in funzione del tempo t e di $2f$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$. Sostituendo queste due espressioni nell'energia E , anche E sarà espressa in funzione di tali costanti. Anzi, si può verificare che nella E figurino solo f costanti, cosicché potremo scrivere

$$(6) \quad E = E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f) .$$

Possiamo ora postulare le condizioni che introducono la discontinuità nella meccanica atomica: esse richiedono che le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ non vengano scelte ad arbitrio (come consente la meccanica classica), ma siano scelte in modo da soddisfare le f condizioni di Sommerfeld:

$$(7) \quad \oint p_i dq_i = n_i h , \text{ con } i = 1, 2, \dots, f ,$$

dove le q_i sono funzioni periodiche del tempo e il segno di integrale circolare \oint indica che l'integrazione deve essere estesa a tutto un periodo della coordinata q_i , mentre le n_i indicano numeri interi arbitrari non negativi, detti numeri quantici.

Si può dimostrare che gli integrali a primo membro sono funzioni delle sole costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ e che le condizioni (7) determinano completamente tali costanti in funzione dei numeri quantici n_1, n_2, \dots, n_f .

Sostituendo le costanti α così determinate nell'espressione dell'energia E , questa risulta espressa mediante gli f numeri n_i , cosicché conviene indicare tale energia con l'espressione E_{n_1, n_2, \dots, n_f} .

Questi valori discreti dell'energia rappresentano, secondo Sommerfeld, i livelli energetici dell'atomo. Ognuno di essi, quindi, è individuato non più da un solo numero quantico, come nella teoria di Bohr, ma da tanti numeri quantici quanti sono i gradi di libertà.

Illustriamo quanto abbiamo detto applicando le condizioni di Sommerfeld al caso delle orbite circolari dell'atomo di H.

In questo caso, siccome imponiamo all'elettrone il vincolo di muoversi su una circonferenza, il sistema meccanico ha un sol grado di libertà: **come coordinata libera q si può scegliere l'anomalia ω , contata positivamente nel verso in cui l'orbita è percorsa dall'elettrone.** Si ha allora:

$$(8) \quad v = \dot{\omega} r, \quad T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\omega}^2,$$

e quindi il momento coniugato al coordinata q è

$$(*) \quad (p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}) \rightarrow p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} = m r^2 \dot{\omega} = m r \cdot r \dot{\omega}, \text{ ossia } (9) \quad p = m r v.$$

Si ricava che il momento coniugato a q è il momento della quantità di moto $p = m r v$. L'unica condizione di Sommerfeld che si ricava dalla (7) acquista quindi l'espressione

$$(10) \quad \oint p d\omega = n h.$$

Poiché il momento $p = m r v$ è costante e ω varia in un periodo da 0 a 2π , la condizione (10) diviene

$$p \oint d\omega = n h, \Rightarrow 2\pi p = n h;$$

da cui
$$p = n \frac{h}{2\pi}, \quad \text{ossia} \quad m r v = n \frac{h}{2\pi}.$$

Si ritrova così la condizione di quantizzazione già postulata da Bohr.

Per lo studio del modello atomico di Bohr – Sommerfeld abbiamo tenuto presente il pregevole testo di Enrico Persico: “Gli atomi e la loro energia”, edito dalla C. E. Zanichelli- Bologna

N. 13 – La quantizzazione di Sommerfeld nel caso di un oscillatore lineare

La teoria di Sommerfeld ci permette di ricavare l'ipotesi con cui Planck riuscì a interpretare lo spettro del corpo nero.

Supponiamo che l'oscillatore sia un elettrone mobile su una retta (che assumeremo come asse x) e soggetto ad una forza derivante dall'energia

potenziale $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$, con $k > 0$. Esprimendo la forza per mezzo

dell'energia potenziale si ha:

$$(1) \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx, \quad \text{quindi} \quad \vec{F} \equiv (-kx, 0, 0).$$

Si tratta di una forza di tipo elastico, che richiama l'elettrone verso l'origine O con una intensità proporzionale alla distanza dal punto stesso.

Affrontiamo il problema secondo gli schemi della meccanica classica.

Per la forza (1) possiamo scrivere l'equazione:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

$$\text{ossia (2)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{ove} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine; la sua equazione caratteristica associata, $\alpha^2 + \omega^2 = 0$, ha le radici $\alpha = \pm i\omega$. L'integrale generale della (2) è dato dalla funzione

$$(3) \quad x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad \text{da cui}$$

$$x(t) = (k_1 - ik_2) e^{i\omega t} + (k_1 + ik_2) e^{-i\omega t},$$

$$x(t) = (k_1 - ik_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t) + (k_1 + ik_2)(\cos \omega t - i \sin \omega t),$$

$$x(t) = k_1 \cos \omega t + ik_1 \sin \omega t - ik_2 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t + \\ + k_1 \cos \omega t - ik_1 \sin \omega t + ik_2 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t.$$

$$\text{Si ricava} \quad x(t) = 2k_1 \cos \omega t + 2k_2 \sin \omega t,$$

$$\text{ossia (4)} \quad x(t) = m \cdot \cos \omega t + n \cdot \sin \omega t.$$

$$\text{Posto} \quad \frac{m}{n} = \tan \gamma, \quad \text{si ha:} \quad \frac{m}{n} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}, \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\sin \gamma} = \frac{n}{\cos \gamma} = A,$$

$$\text{da cui} \quad m = A \sin \gamma, \quad n = A \cos \gamma.$$

Sostituendo queste espressioni di m ed n nella (4) si ha:

$$x(t) = A \sin \gamma \cdot \cos \omega t + A \cos \gamma \cdot \sin \omega t,$$

$$\text{ossia} \quad x(t) = A \sin(\omega t + \gamma), \quad \text{ove} \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Ponendo infine $A = \alpha$ e $\gamma = -\beta$, possiamo dire che l'equazione che descrive il moto dell'elettrone è:

$$(5) \quad x(t) = \alpha \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \beta\right);$$

notiamo che α e β sono costanti arbitrarie. La prima costante fornisce l'ampiezza del moto oscillatorio.

L'energia totale E del moto oscillatorio è data dall'equazione

$$(6) \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \frac{1}{2} k \alpha^2;$$

come si è detto nel parag. precedente, l'energia totale E del sistema dipende dalla costante α , ma non dalla costante β .

Imponiamo ora la condizione di Sommerfeld

$$(7) \quad \oint p dq = nh.$$

Nel nostro caso si ha $p = p_x = m\dot{x}$; e quindi la condizione di Sommerfeld diventa

$$\oint m \dot{x} dx = nh.$$

Poiché lo spostamento x è funzione del tempo, possiamo scrivere $x = x(t)$ e $dx = \dot{x} dt$. Sostituendo nella relazione precedente si ha

$$\oint m \cdot \dot{x}^2(t) dt = nh.$$

Ricordando la (5) possiamo scrivere:

$$\oint m \alpha^2 \frac{k}{m} \cos^2(\omega t - \beta) dt = nh.$$

Ricordando che il simbolo \oint indica che l'integrazione si deve estendere a tutto il periodo T della coordinata q , possiamo scrivere:

$$(8) \quad \alpha^2 k \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) dt = nh.$$

Calcoliamo a parte l'integrale. Si ha:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) d(\omega t - \beta) = \\
 &= \frac{1}{2\omega} \int_0^T 2 \cos^2(\omega t - \beta) d(\omega t - \beta) = \frac{1}{2\omega} \int_0^T [1 + \cos 2(\omega t - \beta)] d(\omega t - \beta) .
 \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) dt &= \frac{1}{2\omega} \int_0^T d(\omega t - \beta) + \frac{1}{4\omega} \int_0^T \cos 2(\omega t - \beta) d2(\omega t - \beta) = \\
 &= \frac{1}{2\omega} [\omega t - \beta]_0^{2\pi/\omega} + \frac{1}{4\omega} [\sin 2(\omega t - \beta)]_0^{2\pi/\omega} = \\
 &= \frac{1}{2\omega} \left[\cancel{\omega} \frac{2\pi}{\cancel{\omega}} - \beta + \beta \right] + \frac{1}{4\omega} \left[\sin 2(\cancel{\omega} \frac{2\pi}{\cancel{\omega}} - \beta) - \sin(-2\beta) \right] .
 \end{aligned}$$

Si ricava
$$\int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) dt = \frac{1}{2\omega} 2\pi + \frac{1}{4\omega} [\cancel{\sin(4\pi - 2\beta)} - \sin(-2\beta)] ;$$

ossia (b)
$$\int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) dt = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} .$$

Riprendiamo la formula (6) da cui siamo partiti, e che per comodità riscriviamo

$$\alpha^2 k \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta) dt = nh .$$

Sostituendo in essa il valore dell'integrale dato dalla (b) si ottiene:

(c)
$$\alpha^2 k \cdot \frac{T}{2} = nh , \quad \text{da cui} \quad (7) \quad \alpha^2 = n \frac{2h}{kT} .$$

In questa formula $k > 0$ è la costante della forza di tipo elastico con cui viene richiamato il corpo oscillante, mentre n è il numero quantico che può assumere uno dei valori $1, 2, \dots, f$, se f è il grado di libertà del sistema. Nel nostro caso si ha il valore $n=1$.

Ricordando che l'energia totale del sistema oscillante è $E = \frac{1}{2}k\alpha^2$, possiamo ricavare α^2 e sostituire poi nella (7). Si ottiene:

$$(d) \quad \frac{2E}{k} = n \frac{2h}{kT}, \quad \text{da cui} \quad (8) \quad E = n \frac{h}{T}.$$

Poiché $\frac{1}{T} = \nu$ (frequenza dell'oscillatore), possiamo scrivere la nota formula

$$E = n \cdot h\nu;$$

Essa dice che: "I livelli energetici dell'oscillatore risultano multipli interi di $h\nu$. Passando da un livello energetico a quello immediatamente inferiore, l'oscillatore emetterà in una sola volta l'energia $h\nu$, conformemente all'ipotesi di Planck, mentre non potrà mai emettere energia in modo graduale, come richiede l'elettromagnetismo classico".

N. 14 – Traiettoria di un elettrone in un atomo e sua equazione polare

In questo paragrafo e in quello che segue tratteremo due argomenti che presentano, più che altro, difficoltà di carattere matematico e nei quali solo di sfuggita si fa cenno al "numero quantico totale n " dell'atomo, che sarà spiegato nel modo dovuto in un secondo momento. Ciò ci eviterà di interrompere il discorso quando passeremo ad illustrare la teoria quantistica dell'atomo dovuta ad A. Sommerfeld.

A tale scopo ricordiamo anzitutto alcune nozioni riguardanti il moto centrale di un pianeta.

Sia P un pianeta che si muove attorno al Sole S e siano m ed M le loro masse, con $m \ll M$.

Se stiamo in assenza di forze esterne, come supponiamo, il pianeta è soggetto solo ad una forza centrale dovuta all'attrazione gravitazionale.

Indicando con \vec{r} il raggio vettore \overrightarrow{SP} possiamo scrivere

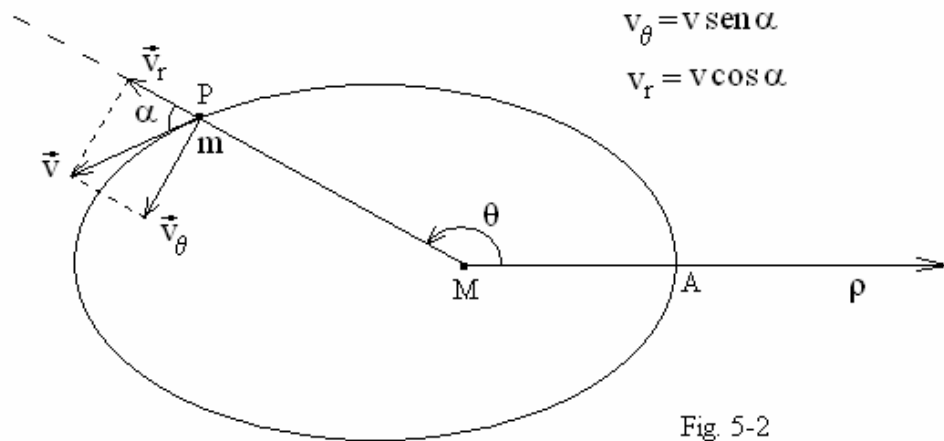
$$(1) \quad \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{P}}{dt^2} = G \frac{mM}{r^2} \text{vers} \overrightarrow{PS} .$$

La proiezione scalare di questa forza sull'asse orientato $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$ è

$$F = -G \frac{mM}{r^2}$$

e l'energia potenziale del punto P è $U = -G \frac{mM}{r}$.

Consideriamo un sistema inerziale di coordinate polari (r, θ) avente il polo S nel Sole e l'asse polare orientato verso il perielio (fig. 5-2) .



Se indichiamo con \vec{u} il versore del raggio vettore \overrightarrow{SP} si ha:

$$\overrightarrow{SP} = r\vec{u} .$$

Derivando rispetto al tempo si ricavano i componenti radiali e trasversali della velocità:

$$(*) \quad \frac{d\overrightarrow{SP}}{dt} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}} , \quad \text{ossia: } (2) \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{T}_u .$$

Ne segue: velocità radiale $v_r = \dot{r}$, velocità trasversale $v_\theta = r\dot{\theta}$,
quadrato del modulo della velocità $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.

Nel sistema inerziale considerato, per il teorema di conservazione dell'energia si ha:

$$(3) \quad T + U = E, \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) - G \frac{mM}{r} = E = \text{cost.}$$

Integrando l'equazione differenziale (3), si trova che l'equazione polare dell'ellisse descritta dal pianeta è (Mencuccini-Silvestrini, Fisica I, pg.159)

$$(4) \quad r = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \vartheta}, \quad \text{ove} \quad a = -G \frac{mM}{2E} > 0, \quad b^2 = -\frac{p^2}{2Em},$$

ove E è l'energia totale del pianeta e per essa si ha $E < 0$.

La grandezza p che compare nell'espressione di b^2 è il modulo del momento della quantità di moto del pianeta. Per esso si ha:

$$p = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = |m r \vec{u} \wedge (\dot{r} \vec{u} + r \dot{\vartheta} \vec{T}_u)| = |m r \cancel{\vec{u} \wedge \vec{u}} + m r^2 \dot{\vartheta} \vec{u} \wedge \vec{T}_u|,$$

quindi $p = |m r^2 \dot{\vartheta} \vec{e}_3|$, ossia (5) $p = m r^2 \dot{\vartheta}$.

Nello studio dell'atomo l'anomalia ϑ si indica con la lettera ω , che in tal caso non va confusa con la velocità angolare; ne segue che per il momento p possiamo anche scrivere

$$(6) \quad p = m r^2 \dot{\omega}$$

Con questi dati possiamo calcolare il parametro b^2/a che compare nella equazione polare (4) dell'ellisse. Si ha:

$$\frac{b^2}{a} = -\frac{p^2}{m 2E} \cdot (-1) \frac{2E}{GMm}, \quad \text{quindi} \quad (7) \quad \frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{GMm^2}.$$

Questi elementi riguardanti la traiettoria di un pianeta si possono subito adattare alla traiettoria di un elettrone attorno al nucleo di un atomo, che è anch'essa un'ellisse. Infatti, vediamo come si trasforma l'equazione polare (4) del pianeta quando vogliamo trovare l'equazione polare dell'elettrone di un atomo idrogenoide.

La forza attrattiva tra il nucleo e un elettrone orbitante non è svolta dalla forza gravitazionale ma dalla forza di attrazione coulombiana tra la carica $+Ze$ del nucleo e la carica $-e$ dell'elettrone. Dobbiamo quindi sostituire

le masse M ed m con le cariche Ze del nucleo ed e dell'elettrone.

Dobbiamo inoltre sostituire la potenza m^2 che figura nella (7) con il prodotto $e \cdot m$. Infatti dobbiamo considerare l'elettrone sotto due aspetti diversi: cioè come carica elettrica soggetta ad una forza centrale, dovuta all'attrazione coulombiana da parte del nucleo, e come massa materiale dotata di energia cinetica che ruota attorno al nucleo, sfuggendo in tal modo alla forza centripeta (di natura elettrica) che richiama l'elettrone verso il nucleo. In conclusione,

$$\begin{aligned} \text{nel caso dell'orbita di un pianeta si ha} \quad & \frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{GMm^2}, \quad \text{mentre} \\ \text{nel caso dell'orbita di un elettrone si ha (8):} \quad & \frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{Ze^2m}. \end{aligned}$$

Sostituendo la (8) nell'equazione polare (4) dell'ellisse descritta da un pianeta si trova l'equazione polare dell'orbita descritta dall'elettrone di un atomo idrogenoide:

$$r = \frac{p^2 / (Ze^2m)}{1 + \varepsilon \cos \omega}, \quad \text{ossia (9)} \quad r = \frac{p^2}{Ze^2m(1 + \varepsilon \cos \omega)}.$$

Nella formula, come già detto, ω indica l'angolo che il raggio vettore $\vec{r} = \overline{SP}$ forma con l'asse polare.

Completiamo le informazioni riguardanti il moto centrale di un corpo (A. Signorini, Meccanica Razionale vol. II, pag145; C.E. Petrella-Roma). L'energia del corpo che descrive il moto centrale è data dalla formula:

$$(10) \quad E = G \frac{mM}{2p} (\varepsilon^2 - 1), \quad \text{ove} \quad \frac{1}{p} = G \frac{m+M}{c^2}$$

e c è il doppio della velocità areale: $c = 2\dot{A}(t) = \rho^2 \dot{\vartheta}$.

Per un'ellisse si ha $\varepsilon^2 - 1 < 0$; ne consegue $E < 0$.

La (10) è una formula molto importante perché stabilisce una relazione tra l'energia totale E di un satellite – es. un satellite artificiale della Terra- e l'eccentricità dell'orbita da esso descritta. In particolare, essa ci fa vedere che l'energia totale E può variare con continuità al variare dell'eccentricità ε dell'orbita. Vedremo poi che anche l'energia di un elettrone dipende

dall'eccentricità della sua orbita, ma i suoi valori non possono variare con continuità poiché risultano quantizzati.

N. 15 – Energia delle orbite ellittiche degli elettroni

Possiamo ora calcolare l'energia di un elettrone che si muove su un'orbita ellittica attorno al nucleo di un atomo. I calcoli sono quelli riportati nel testo di A. Bandini Buti: "L'atomo", pag. 161- Edizioni Delfino, Milano.

Sappiamo che la forza coulombiana $F = -e^2/r$ che attrae un elettrone si può ottenere dall'energia potenziale $U(r) = -e^2/r$ per mezzo della formula $F = -\frac{\partial U}{\partial r}$. Nel caso dell'idrogeno il nucleo ha carica elettrica $+e$; noi, però, indicheremo tale carica con $+Ze$ allo scopo di poter estendere i risultati che troveremo ad un qualsiasi idrogenoide di numero atomico Z .

Per un tale atomo l'orbita descritta dall'elettrone è un'ellisse avente un fuoco nel nucleo. Consideriamo un sistema di coordinate polari (r, φ) avente il polo nel nucleo S dell'atomo e l'asse polare r rivolto verso il punto più vicino al nucleo; l'equazione polare dell'orbita è

$$(1) \quad r = \frac{p^2}{Ze^2 m(1 + \varepsilon \cos \varphi)}.$$

Come abbiamo detto nel paragrafo precedente:

p è il modulo del momento della quantità di moto dell'elettrone;

φ è l'angolo che il raggio vettore $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$ forma con l'asse polare e che altre volte abbiamo indicato con la lettera ω ;

mentre ε è l'eccentricità dell'ellisse e per essa si ha $0 < \varepsilon < 1$.

Come nel caso delle orbite circolari, l'energia di un elettrone che si muove su un'orbita ellittica è uguale alla somma della sua energia cinetica

$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$ e dell'energia potenziale $U = -Ze^2/r$. Si ha quindi:

$$(2) \quad E = T + U = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r}.$$

Osserviamo ora che al perielio e all'afelio, cioè nei punti di minima e massima distanza dal nucleo, la velocità radiale \dot{r} cambia di segno: infatti quando l'elettrone passa "al perielio", esso cessa di avvicinarsi per allontanarsi e viceversa "all'afelio", esattamente come fa la Terra con il Sole. Possiamo quindi dire che in tali punti la velocità radiale è nulla. Osserviamo inoltre che al perielio il raggio vettore assume il valore $r = a - c$, mentre all'afelio il raggio diviene $r = a + c$, essendo a il semiasse maggiore dell'ellisse c la distanza del nucleo dal centro dell'orbita. Eseguendo le sostituzioni nella (2) e ponendo $\dot{r} = 0$ si ottiene

$$(a) \quad E_{\text{per}} = \frac{1}{2} m(a - c)^2 \dot{\omega}_p^2 - \frac{Ze^2}{a - c} ,$$

$$(b) \quad E_{\text{af}} = \frac{1}{2} m(a + c)^2 \dot{\omega}_a^2 - \frac{Ze^2}{a + c} .$$

Ora per il teorema di conservazione dell'energia possiamo porre

$$E_{\text{per}} = E_{\text{af}} :$$

infatti, secondo il postulato di Bohr, l'elettrone non deve irradiare né assorbire energia mentre si muove sulla sua orbita.

Eguagliando le due espressioni (a),(b) si ha:

$$(*) \quad \frac{1}{2} m(a - c)^2 \dot{\omega}_p^2 - \frac{Ze^2}{a - c} = \frac{1}{2} m(a + c)^2 \dot{\omega}_a^2 - \frac{Ze^2}{a + c} .$$

Possiamo eliminare le due velocità angolari con alcuni artifici di calcolo; si ha:

$$(3) \quad \frac{[m(a - c)^2 \dot{\omega}_p]^2}{2m(a - c)^2} - \frac{Ze^2}{a - c} = \frac{[m(a + c)^2 \dot{\omega}_a]^2}{2m(a + c)^2} - \frac{Ze^2}{a + c} .$$

Ricordiamo ora che il momento della quantità di moto dell'elettrone è un vettore costante e il suo modulo è:

$$p = mrv = mr\dot{\omega}r , \quad \text{quindi} \quad (4) \quad p = mr^2\dot{\omega} = \text{cost} .$$

Tenendo conto della (4) possiamo scrivere:

$$(5) \quad m(a - c)^2 \dot{\omega}_p = m(a + c)^2 \dot{\omega}_a = p .$$

Sostituendo nella (3) si ottiene:

$$\frac{p^2}{2m(a-c)^2} - \frac{p^2}{2m(a+c)^2} = \frac{Ze^2}{a-c} - \frac{Ze^2}{a+c},$$

$$\frac{p^2}{2m} \left[\frac{1}{(a-c)^2} - \frac{1}{(a+c)^2} \right] = Ze^2 \left[\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a+c} \right],$$

$$\frac{p^2}{2m} \left[\frac{a^2 + c^2 + 2ac - a^2 - c^2 + 2ac}{(a-c)^2(a+c)^2} \right] = Ze^2 \frac{a+c-a+c}{(a-c)(a+c)},$$

$$\frac{p^2}{2m} \frac{4ac}{(a-c)^2(a+c)^2} = \frac{2Ze^2}{(a-c)(a+c)},$$

$$\frac{p^2}{2m} \frac{2a}{(a-c)(a+c)} = Ze^2,$$

da cui (4) $\frac{p^2}{2m} = \frac{Ze^2}{2a}(a^2 - c^2).$

Facciamo vedere che la quantità $p^2/2m$ data dalla (4) figura nella formula che esprime l'energia totale del sistema del sistema. Infatti, se scegliamo tale formula nella forma semplificata (b) corrispondente all'afelio, si ha:

$$E = E_{af} = \frac{1}{2} m(a+c)^2 \omega_a^2 - \frac{Ze^2}{a+c}$$

ossia (5) $E_{af} = \frac{[m(a+c)^2 \omega_a]^2}{2m(a+c)^2} - \frac{Ze^2}{a+c}$

Ricordiamo che $p = mrv$, ossia $p = mr^2 \dot{\omega}$ e che nel nostro caso si ha:

$$p = m(a+c)^2 \dot{\omega}_a.$$

Sostituendo nella (5) si ottiene:

$$(6) \quad E_{af} = \frac{p^2}{2m} \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{Ze^2}{a+c} .$$

Da essa si vede che nella formula dell'energia totale del sistema figura effettivamente la quantità $p^2/2m$. Abbiamo visto dalla (4) che per tale quantità si ha

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{Ze^2}{2a} (a^2 - c^2) .$$

Introducendo nella (6) tale espressione di $p^2/2m$ si ottiene:

$$E_{af} = \frac{Ze^2(a^2 - c^2)}{2a} \cdot \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{Ze^2}{a+c} ,$$

$$E_{af} = \frac{Ze^2[a^2 - c^2 - 2a(a+c)]}{2a(a+c)^2} = - \frac{Ze^2(a^2 + c^2 + 2ac)}{2a(a+c)^2} ,$$

infine (7):
$$E_{af} = E = - \frac{Ze^2}{2a} , \quad \text{ove } a = a_n .$$

La (7) esprime il valore dell'energia che compete ad un elettrone che ruota su un'orbita ellittica. Questa formula è analoga a quella che esprime l'energia elettrica totale di un elettrone che ruota su un'orbita circolare, solo che al posto del raggio r si trova il semiasse maggiore a dell'ellisse. L'osservazione è della massima importanza perché essa ci dice che l'energia dipende solo da uno dei parametri dell'ellisse e quindi non varia al mutare della sua eccentricità, come succede nel moto dei satelliti attorno ad un pianeta [(8) pag. 150].

Ciò porta ad escludere che le varie orbite aventi lo stesso numero quantico totale n , e quindi uguale semiasse maggiore a , possano dar luogo a salti quantici poco differenti fra di loro, come si richiederebbe per spiegare la struttura fine degli spettri emessi dagli idrogenoidi.

L'espressione del semiasse maggiore a dell'ellisse si può trovare dall'equazione polare (1) della conica. Infatti ricaviamo dalla (1) i valori estremi di r , corrispondenti ai valori $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ rad; si ottiene:

$$r_{\min} = \frac{p^2}{Ze^2m(1+\varepsilon)}, \quad \text{ed} \quad r_{\max} = \frac{p^2}{Ze^2m(1-\varepsilon)}.$$

Poiché l'asse maggiore $2a$ è uguale alla loro somma, si ha:

$$(8) \quad a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p^2}{Ze^2m(1-\varepsilon^2)}, \quad \text{ove} \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Per il semiasse minore b , come è noto, si ha:

$$(9) \quad b = a \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

$$\text{Vedremo presto che} \quad 1-\varepsilon^2 = \frac{k^2}{n^2},$$

ove n è un numero intero, detto "quanto totale", che può assumere i valori $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ [vedi le (10) e (11) del prossimo N. 21].

Sostituendo nell'espressione di a data dalla (8) si ottiene:

$$a_n = \frac{p^2}{Ze^2m} \cdot \frac{n^2}{k^2}, \quad \text{ove} \quad p = \frac{kh}{2\pi},$$

$$\text{quindi} \quad a_n = \frac{k^2 h^2}{4\pi^2 Ze^2m} \cdot \frac{n^2}{k^2},$$

$$\text{ossia (10):} \quad a_n = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 m Ze^2}.$$

Per l'energia dell'elettrone che si muove sull'orbita corrispondente si ha:

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a_n}, \quad \text{da cui} \quad E_n = -\frac{Ze^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2 m Ze^2}{h^2 n^2},$$

$$\text{infine (11):} \quad E_n = -\frac{Z^2 2\pi^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Come si vede, questa formula è esattamente uguale a quella trovata da Bohr per le orbite circolari [(5), N. 4]. Possiamo dire pertanto:

I livelli energetici degli elettroni sono uguali per tutte le orbite ellittiche aventi lo stesso asse maggiore, qualunque sia la loro eccentricità. Ogni livello energetico, o stato quantico, è rappresentato quindi da più orbite. A tutte queste orbite corrisponde lo stesso numero quantico totale n , che è legato all'energia dello stato, mentre il numero quantico azimutale $\ell = k - 1$, che presto definiremo, determina l'eccentricità dell'ellisse. Tale numero quantico può assumere solo valori compresi fra 0 ed $n-1$, ai quali corrispondono n tipi di orbite.

N. 16 – La quantizzazione di Sommerfeld nel caso di un moto centrale

Consideriamo ora il moto di un elettrone attorno al nucleo di un atomo di H e supponiamo che l'atomo si possa equiparare ad un sistema avente f gradi di libertà. Ovviamente l'elettrone è soggetto ad una forza centrale derivante da una energia potenziale $U(r) = -\frac{e^2}{r}$. Vogliamo applicare al sistema le condizioni di Sommerfeld:

$$(1) \quad \oint p_i dq_i = n_i h, \text{ con } i = 1, 2, \dots, f,$$

ove f è il numero dei gradi di libertà del sistema.

Fissato un asse polare uscente dal nucleo, prendiamo come coordinate libere le tre coordinate polari: r = raggio vettore, ϑ = colatitudine, φ = longitudine; esse corrispondono alle tre coordinate lagrangiane q_1, q_2, q_3 che si usano più in generale.

Come sappiamo, la formula dell'energia cinetica è:

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta).$$

Riprendiamo la funzione lagrangiana L che sintetizza la natura del sistema

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i, t),$$

ove $i = 1, 2, \dots, f$ e $q_i = q_i(t)$, e ricordiamo che il momento cinetico coniugato alla coordinata lagrangiana q_i è

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \text{ ossia } p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

Nel nostro caso i momenti coniugati alle coordinate libere r, ϑ, φ sono:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{2} m 2r^2 \dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m 2r^2 \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta,$$

che si ottengono per derivazioni dalla (2). Semplificando si ha:

$$(3) \quad p_r = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = mr^2 \dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta.$$

Notiamo che p_φ è il momento della quantità di moto rispetto all'asse polare $\rho \equiv z$. Infatti il raggio di un generico parallelo è $r \cdot \sin \vartheta$; la componente della quantità di moto lungo questo parallelo è $(mr \sin \vartheta) \cdot \dot{\varphi}$ e quindi il momento di questa componente rispetto all'asse polare è

$$p = r \sin \vartheta \cdot (mr \sin \vartheta) \dot{\varphi}, \text{ ossia } p = mr^2 \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta.$$

Le altre due componenti, ovviamente, hanno momento nullo.

Dopo aver calcolato i momenti coniugati alle coordinate libere r, ϑ, φ possiamo scrivere le tre condizioni di Sommerfeld che introducono la quantizzazione nell'atomo di H. Esse sono:

$$(A) \quad \oint mr^2 \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta \, d\varphi = n_1 h \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots$$

$$(B) \quad \oint mr^2 \dot{\vartheta} \, d\vartheta = n_2 h \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$(C) \quad \oint m r \, dr = n_3 h \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Un elettrone che dentro l'atomo ruoti lungo un meridiano ha la velocità $r\dot{\vartheta}$ e la quantità di moto $mr\dot{\vartheta}$.

Il momento della quantità di moto di questo elettrone rispetto al nucleo è quindi $p_\vartheta = r \cdot mr\dot{\vartheta}$, cioè $p_\vartheta = mr^2 \dot{\vartheta}$.

N. 17 -Condizione di quantizzazione (A)

Poiché in un sistema isolato $mr^2\dot{\phi} \cdot \sin^2\vartheta = p_\phi = \text{cost}$ (conservazione del momento della quantità di moto), si ha:

$$p_\phi \oint d\phi = n_1 h, \quad \text{da cui} \quad \pm 2\pi \cdot p_\phi = n_1 h,$$

con il segno $+$ o $-$ a seconda che l'elettrone ruoti attorno all'asse polare nel verso positivo o negativo. Ne segue

$$(1) \quad p_\phi = \pm n_1 \frac{h}{2\pi},$$

$$\text{e quindi : (2)} \quad p_\phi = m \frac{h}{2\pi} \quad \text{ove} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Questa importante relazione è la generalizzazione della condizione di Bohr

$$p = n \frac{h}{2\pi}.$$

Il numero intero m (positivo, negativo o nullo), che misura il momento della quantità di moto dell'elettrone rispetto all'asse polare in unità $h/2\pi$, si chiama “quanto magnetico”; (qui la parola quanto è usata come sinonimo di “numero quantico”).

Notare . Poiché $\pm n_1 = m$ si ricava $n_1 = |m| = 0, 1, 2, 3, \dots$

N. 18 - Condizione di quantizzazione (B)

Consideriamo la condizione di quantizzazione (B) e associamola alla condizione (A), già considerata:

$$\oint mr^2 \dot{\vartheta} d\vartheta = n_2 h \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$\oint mr^2 \dot{\phi} \cdot \sin^2\vartheta d\phi = n_1 h \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots$$

Sommando membro a membro si ha:

$$\oint mr^2 (\dot{\vartheta} d\vartheta + \sin^2\vartheta \cdot \dot{\phi} d\phi) = (n_2 + n_1) h.$$

Poiché $n_1 = |m|$ possiamo porre

$$(1) \quad n_2 + n_1 = n_2 + |m| = k, \text{ da cui si ha } k \geq |m|.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$(2) \quad \oint m r^2 (\dot{\vartheta} d\vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot \varphi d\varphi) = k h, \quad \text{ove } k = 1, 2, 3, \dots$$

Vedremo infatti che il valore $k = 0$ si deve escludere.

Ora, poiché l'orbita dell'elettrone è piana, possiamo introdurre nel piano dell'orbita un sistema di coordinate polari r, ω con il polo nel nucleo dell'atomo e l'asse polare arbitrario: converremo anche di fissare il verso positivo dell'anomalia ω coincidente con il verso secondo cui ruota l'elettrone. Si avrà allora:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega, \text{ da cui } \dot{x} = \dot{r} \cos \omega - r \dot{\omega} \sin \omega, \\ y &= r \sin \omega, \text{ da cui } \dot{y} = \dot{r} \sin \omega + r \dot{\omega} \cos \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \omega + r^2 \dot{\omega}^2 \sin^2 \omega - \cancel{2r\dot{\omega} \cos \omega \sin \omega} + \\ &+ \dot{r}^2 \sin^2 \omega + r^2 \dot{\omega}^2 \cos^2 \omega + \cancel{2r\dot{\omega} \cos \omega \sin \omega}; \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2.$$

Possiamo quindi dire che l'energia cinetica dell'elettrone è

$$(a) \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2).$$

Sappiamo, d'altra parte, che l'energia cinetica di una particella di massa m in coordinate polari è data dall'espressione:

$$(b) \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Eguagliando membro a membro le due equazioni (a) e (b) si ottiene:

$$(c) \quad \cancel{\frac{1}{2}} m (\dot{r}^2 + r \dot{\omega}^2) = \cancel{\frac{1}{2}} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2),$$

$$\cancel{\dot{r}^2} + r^2 \dot{\omega}^2 = \cancel{\dot{r}^2} + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2,$$

$$r^2 \dot{\omega}^2 dt = r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) dt$$

$$r^2 \dot{\omega} \cdot \dot{\omega} dt = r^2 (\dot{\vartheta} \cdot \dot{\vartheta} dt + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} dt)$$

$$r^2 \dot{\omega} d\omega = r^2 (\dot{\vartheta} d\vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi} d\varphi).$$

Quindi (d)
$$mr^2 \dot{\omega} d\omega = mr^2 (\dot{\vartheta} d\vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\phi} d\phi) .$$

Integrando membro a membro la (d) su un intero periodo e confrontando poi con la (2) si ottiene:

$$\oint mr^2 \dot{\omega} d\omega = \oint mr^2 (\dot{\vartheta} d\vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\phi} d\phi) ,$$

e quindi: (3)
$$\oint mr^2 \dot{\omega} d\omega = hk .$$

Se ora teniamo presente che con il simbolo ω abbiamo indicato non la velocità angolare dell'elettrone, ma la sua anomalia contata positivamente nel verso del moto, vediamo subito che:

a) la quantità di moto dell'elettrone ha il modulo

$$q = mv = mr \cdot \dot{\omega}$$

b) il momento della quantità di moto dell'elettrone rispetto al nucleo ha il modulo

$$p = rmv = mr^2 \dot{\omega} = \text{cost}$$

Ovviamente p è costante per il teorema della conservazione del momento della quantità di moto di un punto materiale: esso è il modulo costante di un vettore normale al piano dell'orbita dell'elettrone. Poiché p è costante e l'anomalia ω varia da 0 a 2π rad, dalla (3) si ha :

$$p \oint d\omega = kh , \quad \text{da cui} \quad p \cdot 2\pi = hk , \quad \text{e quindi}$$

$$(9) \quad p = k \frac{h}{2\pi} , \quad \text{ove} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

L'intero k rappresenta il momento della quantità di moto rispetto al nucleo misurato in unità \hbar .

Generalmente si pone $k = \ell + 1$; l'intero $\ell = k - 1$ si chiama “quanto azimutale” ed ha grande importanza in tutta la fisica atomica. Poiché si deve escludere il valore $k = 0$ e quindi il valore $\ell = -1$ (E. Persico, op. cit., pag. 97), possiamo avere i valori $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$.

N. 19 – Interpretazione fisica dei numeri quantici m e k

Dalle condizioni di Sommerfeld (A) e (B) si ricavano le due condizioni di quantizzazione :

$$(i) \quad p_{\varphi} = (mr^2 \dot{\omega} \sin^2 \vartheta) = m \frac{h}{2\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$(f) \quad p = (mr^2 \dot{\omega}) = k \frac{h}{2\pi}, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

p_{φ} è il momento della quantità di moto rispetto all'asse polare (esso è la proiezione del vettore \vec{p} sull'asse stesso);

p è il momento della quantità di moto rispetto al nucleo.

Da queste due quantizzazioni si ricava una condizione circa l'orientamento del piano dell'orbita nello spazio.

Infatti, detto α l'angolo che il vettore \vec{p} forma con l'asse polare, si ha anzitutto

$$p_{\varphi} = p \cos \alpha .$$

Se ora consideriamo la catena di eguaglianze

$$p_{\varphi} = m \frac{h}{2\pi} = p \cos \alpha = k \frac{h}{2\pi} \cos \alpha ,$$

si ricava $m = k \cos \alpha$.

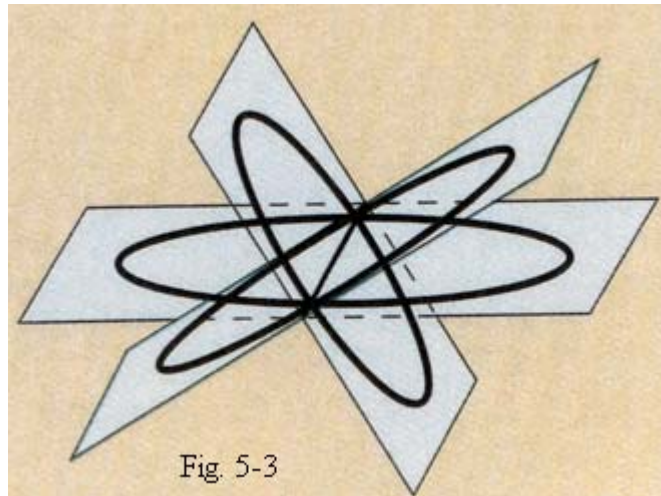
Poiché possiamo escludere il valore $k = 0$, si può scrivere

$$(10) \quad \cos \alpha = \frac{m}{k}, \quad \text{ove} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Quindi, fissato k , si ricava che $\cos \alpha$ può assumere solo i valori discreti

$$0, \pm \frac{1}{k}, \pm \frac{2}{k}, \pm \frac{3}{k}, \dots, \pm 1 .$$

Il piano dell'orbita può dunque avere solo certe determinate inclinazioni rispetto all'asse polare (“quantizzazione spaziale”) (fig. 5-3).



Aggiungiamo che, per essere d'accordo con certi risultati sperimentali, si deve escludere l'ultima coppia di valori $m = \pm k = \pm(\ell + 1)$, che corrispondono ai valori $\cos \alpha = \pm 1$: ciò vuol dire che sono escluse le orbite giacenti in un piano normale all'asse polare (E. Persico, op. cit. pag. 98).

Di questa esclusione la teoria di Bohr-Sommerfeld non dà nessuna giustificazione soddisfacente, mentre essa risulta ovvia nella meccanica quantistica. Il "quanto magnetico" m può assumere dunque solo i $2\ell + 1$ valori

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell .$$

Nota. Si potrebbe osservare che l'asse polare è scelto ad arbitrio e quindi le orientazioni delle orbite restano arbitrarie, nonostante la (10). Questa osservazione è valida nel caso, praticamente irrealizzabile, di una completa assenza del campo magnetico. Se l'atomo è invece immerso in un campo magnetico, il calcolo precedente si può fare, purché si prenda l'asse polare nella direzione del campo. **Se questo è debole, è trascurabile la sua influenza sulla forma delle orbite e sui valori dell'energia, ma non è trascurabile la sua influenza sull'orientamento delle orbite poiché il campo fissa una direzione privilegiata nello spazio.**

Per chiarire ulteriormente il significato fisico del numero quantico m , ricordiamo che una spira percorsa da corrente e di momento magnetico $i\vec{S}\vec{n}$, immersa in un campo magnetico \vec{H} , tende a ruotare e a disporsi in un

piano perpendicolare alla direzione del campo, in modo che i vettori \vec{H} ed $i\vec{S}\vec{n}$ siano concordi. La forza responsabile di tale rotazione è la forza di Lorentz.

Nel nostro caso, l'orbita percorsa dall'elettrone è come una spira percorsa da corrente; essa quindi tende a ruotare nel modo detto.

I valori degli angoli di rotazione, però, non sono continui, ma quantizzati e sono misurati in unità $h/2\pi$; inoltre, l'orbita dell'elettrone non può disporsi in un piano perpendicolare alla direzione del campo. Si rende quindi necessario introdurre un parametro quantizzato, dato dal numero quantico m . Esso caratterizza i possibili orientamenti dell'orbita descritta dall'elettrone in un campo magnetico.

N. 20 – Condizione di quantizzazione (C)

Resta da considerare la condizione di Sommerfeld relativa alla coordinata r , cioè la condizione

$$(C) \quad \oint m \dot{r} dr = n_3 h, \quad \text{con } n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Questa relazione si può trasformare prendendo come variabile di integrazione la ω , quindi $r = r(\omega)$. Derivando si ha:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\omega} \cdot \dot{\omega}.$$

Ricordando che $p = m r^2 \dot{\omega}$ si ha $\dot{\omega} = p/mr^2$ e sostituendo nella relazione precedente si ha:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\omega} \frac{p}{mr^2}, \quad \text{da cui (1)} \quad \dot{r} = -\frac{p}{m} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\omega}.$$

Ma ora si ha $d\left(\frac{1}{r}\right) = dr^{-1} = -\frac{1}{r^2} dr$

e da questa si ricava : (2) $dr = -r^2 d\left(\frac{1}{r}\right).$

Sostituendo la (2) nella relazione $dr = \frac{dr}{d\omega} d\omega$ si ottiene:

$$(3) \quad dr = -r^2 \frac{d(1/r)}{d\omega} d\omega .$$

Sostituendo le (1),(3) nella condizione (C) di Sommerfeld si ha:

$$\oint \frac{p}{m} \frac{d(1/r)}{d\omega} \cdot r^2 \frac{d(1/r)}{d\omega} d\omega = n_3 h \quad (p = k \frac{h}{2\pi}),$$

$$(4) \quad \oint \left[\frac{d(1/r)}{d\omega} \right]^2 \cdot r^2 d\omega = \frac{2\pi n_3}{k} .$$

Le formule fin qui stabilite valgono per tutti i moti centrali, qualunque sia la legge con cui la forza varia in funzione di r . Per trasformare ulteriormente la (4) e ricavare i livelli energetici è necessario specificare questa legge dando la funzione $U(r)$ che la esprime. Vedremo un esempio concreto nel caso dell'atomo di idrogeno, che tratteremo nel prossimo paragrafo.

N. 21 – Teoria di Sommerfeld per l'atomo di idrogeno

Vogliamo ora riprendere alcuni risultati trovati nei paragrafi precedenti allo scopo di collegarli sinteticamente tra di loro.

Ricordiamo che per un sistema avente f gradi di libertà, come l'elettrone di uno ione idrogenoide, sussistono le condizioni di Sommerfeld, che per comodità riscriviamo:

$$(1) \quad \oint p_i dq_i = n_i h , \quad \text{ove } h = 1, 2, 3, \dots, f ;$$

esse esprimono le condizioni di quantizzazione dell'atomo.

Nella (1) le quantità p_i sono i momenti cinetici coniugati alle coordinate lagrangiane q_i .

Fissato un asse polare uscente dal nucleo, prendiamo come coordinate libere le tre coordinate polari: r = raggio vettore, ϑ = colatitudine, φ = longitudine; esse corrispondono alle tre coordinate lagrangiane q_1, q_2, q_3 che si usano nella trattazione più generale.

Nel nostro caso i momenti coniugati alle coordinate libere r, ϑ, φ si indicano con la scrittura $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$. Le espressioni di questi tre momenti si ottengono per derivazione dalla formula dell'energia cinetica

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) .$$

E' facile verificare che si ha:

$$(3) \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta , \quad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta} , \quad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} .$$

Dopo aver calcolato i momenti coniugati alle coordinate libere φ, ϑ, r possiamo scrivere le corrispondenti condizioni di Sommerfeld, che introducono la quantizzazione di un idrogenoide. Come abbiamo già visto, esse sono:

$$(A) \quad \oint m r^2 \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta d\varphi = n_1 h \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots$$

$$(B) \quad \oint m r^2 \dot{\vartheta} d\vartheta = n_2 h \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$(C) \quad \oint m \dot{r} dr = n_3 h \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Abbiamo visto che il primo integrale introduce la condizione di quantizzazione

$$p_\varphi = (m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) = m \frac{h}{2\pi} , \quad \text{con} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ove p_φ è il momento della quantità di moto rispetto all'asse polare.

Per quanto riguarda il secondo integrale, $m r^2 \dot{\vartheta}$ è il momento della quantità di moto rispetto al nucleo. Poiché l'orbita dell'elettrone è piana, possiamo introdurre nel piano dell'orbita un sistema di coordinate polari r, ω con il polo nel nucleo dell'atomo e l'asse polare arbitrario. Converremo anche di fissare il verso positivo dell'anomalia ω coincidente con il verso secondo cui ruota l'elettrone. Fatte queste precisazioni, il secondo integrale introduce la condizione di quantizzazione:

$$p = (m r^2 \dot{\omega}) = k \frac{h}{2\pi} , \quad \text{con} \quad k \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Resta da esaminare la condizione di quantizzazione (C). Poiché $r = r(\omega)$, abbiamo visto (parag. N. 16) che essa si può scrivere nella forma:

$$(C') \quad \oint \left[\frac{d(1/r)}{d\omega} \right]^2 \cdot r^2 d\omega = \frac{2\pi n_3}{k} .$$

Poniamo per semplicità (*) $I = \oint \left[\frac{d(1/r)}{d\omega} \right]^2 \cdot r^2 d\omega$ e sviluppiamo a

parte tale integrale. Arrivati alla fine dei calcoli porremo $I = 2\pi \frac{n_3}{k}$.

Ricordando che $\frac{1}{r} = \frac{Ze^2 m(1 + \varepsilon \cos \omega)}{p^2}$ si ha:

$$I = \oint \left[\frac{Ze^2 m}{p^2} \frac{d}{d\omega} (1 + \varepsilon \cos \omega) \right]^2 \cdot \frac{p^4}{Z^2 e^4 m^2 (1 + \varepsilon \cos \omega)^2} d\omega ,$$

$$I = \frac{\cancel{Z^2 e^4 m^2}}{p^4} \cdot \oint \left[\frac{d}{d\omega} (1 + \varepsilon \cos \omega) \right]^2 \cdot \frac{p^4}{\cancel{Z^2 e^4 m^2} (1 + \varepsilon \cos \omega)^2} d\omega .$$

Semplificando si ha:

$$I = \oint \frac{(-\varepsilon \sin \omega)^2}{(1 + \varepsilon \cos \omega)^2} d\omega .$$

Il simbolo \oint indica che l'integrale si deve estendere a tutto il periodo T della variabile ω . Possiamo quindi scrivere:

$$(4) \quad I = \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \omega}{(1 + \varepsilon \cos \omega)^2} d\omega .$$

Ora $d \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \omega} = d(1 + \varepsilon \cos \omega)^{-1} = -(1 + \varepsilon \cos \omega)^{-2} (-\varepsilon \sin \omega) d\omega ;$

da cui
$$\frac{\varepsilon \sin \omega}{(1 + \varepsilon \cos \omega)^2} d\omega = d \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \omega}.$$

Sostituendo nella (4) si ha:

$$I = \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin \omega \cdot d \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \omega} \right).$$

Integrando per parti l'integrale si ha :

$$I = \varepsilon \left[\frac{\sin \omega}{1 + \varepsilon \cos \omega} \right]_0^{2\pi} - \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \omega} d \sin \omega,$$

$$I = - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \omega}{1 + \varepsilon \cos \omega} d\omega = - \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \omega} \right] d\omega,$$

$$I = - \int_0^{2\pi} d\omega + \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 + \varepsilon \cos \omega},$$

$$(5) \quad I = \oint \left[\frac{d(l/r)}{d\omega} \right]^2 \cdot r^2 d\omega = -2\pi + 2 \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{1 + \varepsilon \cos \omega}.$$

Calcoliamo a parte l'integrale del secondo membro nella (5). A tale scopo, ricordiamo le formule razionali che esprimono le funzioni goniometriche in

funzione della tangente dell'arco metà. Posto $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = t$ si ha:

$$(6) \quad \cos \omega = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \text{ da cui } 1 + \varepsilon \cos \omega = 1 + \frac{\varepsilon(1 - t^2)}{1 + t^2},$$

$$\text{quindi (7)} \quad 1 + \varepsilon \cos \omega = \frac{1 + t^2 + \varepsilon - \varepsilon t^2}{1 + t^2} = \frac{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)t^2}{1 + t^2}.$$

Ricordiamo poi che $\sin \omega = \frac{2t}{1+t^2}$, e quindi (8) $d(\sin \omega) = d\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$.

Dalla (8) si ha: $\cos \omega \cdot d\omega = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \cdot dt$;

sostituendo la (6) si ha $\frac{\cancel{1-t^2}}{1+t^2} \cdot d\omega = \frac{2(1-\cancel{t^2})}{(1+t^2)^2} \cdot dt$,

e quindi (9) $d\omega = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Dalla formula $\sin \omega = \frac{2t}{1+t^2}$ si ricava che:

al valore $\omega = 0$ rad corrisponde il valore $t = 0$, mentre
quando $\omega \rightarrow \pi$ rad allora $t \rightarrow +\infty$.

Riprendiamo l'integrale che figura nella (5); tenendo conto delle relazioni (7) e (9) si ha:

$$(a) \quad G = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{1+\varepsilon \cos \omega} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{1+t^2}}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)t^2} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}} dt ,$$

$$G = \frac{4}{1+\varepsilon} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot t^2} = \frac{4}{1+\varepsilon} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cdot t\right)^2} ,$$

$$G = \frac{4}{1+\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{d\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cdot t}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cdot t\right)^2} ,$$

$$G = \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cdot t \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} .$$

Si trova così il risultato

$$(8) \quad G = 2 \int_0^\pi \frac{d\omega}{1 + \varepsilon \cos \omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} .$$

Sostituendo nella (5) l'espressione di G data dalla (8) si ottiene:

$$(9) \quad I = \oint \left[\frac{d(1/r)}{d\omega} \right]^2 \cdot r^2 d\omega = -2\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} .$$

Eguagliando tale risultato a $2\pi \frac{n_3}{k}$ si ha:

$$(b) \quad -2\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = 2\pi \frac{n_3}{k} . \quad \text{Semplificando si ricava:}$$

$$(c) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{n_3}{k} + 1, \quad \text{da cui}$$

$$(d) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{n_3 + k}{k} , \text{ ove } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ricordiamo che l'intero k è dato dalla somma $k = n_2 + |m|$ e che

$$n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{mentre} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ;$$

ne segue che l'intero k assume i valori $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Abbiamo visto che generalmente si pone $k = \ell + 1$.

L'intero $\ell = k - 1$ si chiama “quanto azimutale” (nei lavori più antichi tale nome è dato a k). Il valore $\ell = -1$, corrispondente al valore $k = 0$, come si vedrà in seguito, deve essere escluso.

Ne segue che l'intero ℓ assume i valori $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$

Tornando alla (d), possiamo porre:

$$(10) \quad n_3 + k = n , \text{ quindi } n = n_3 + \ell + 1 , \quad \text{ove } n = 1, 2, 3, \dots$$

Questo nuovo intero n è detto “quanto totale”.

Introducendo tale numero n nella (d) si ottiene la terza condizione di quantizzazione

$$(11) \quad \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{n}, \quad \text{ove } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ricordiamo la (8) del N. 15:

$$(8) \quad a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p^2}{Ze^2 m(1-\varepsilon^2)}, \quad \text{ove } \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

La relazione (11), sostituita nella (8) del N. 15, ci ha permesso di trovare l'ampiezza del semiasse maggiore dell'ellisse corrispondente al generico numero quantico n . Abbiamo già visto che si ha:

$$a_n = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 m Z e^2}.$$

Ora fra i due semiassi dell'ellisse si ha la relazione: $b = a \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Grazie alla (11), questa diventa:

$$(12) \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{n} = \frac{\ell+1}{n}.$$

N. 22 – Numero quantico di spin

Alcuni fenomeni magnetici ci inducono a ritenere che gli elettroni di un atomo abbiano, oltre ad un moto orbitale attorno al nucleo, anche un moto di rotazione su se stessi, proprio come i pianeti del Sole. Questa ipotesi dell'elettrone rotante fu avanzata da Uhlenbeck e Goudsmit nel 1925.

A causa della sua massa e della sua velocità di rotazione, l'elettrone ha un momento meccanico intrinseco \vec{p}_0 (oltre al momento \vec{p} dovuto al suo moto orbitale attorno al nucleo). Tale momento \vec{p}_0 è detto comunemente spin (dall'inglese *to spin* = girare velocemente su se stesso).

Con questo modello l'elettrone perde la sua simmetria sferica ed acquista un asse privilegiato, proprio come un giroscopio.

Se due elettroni ruotano nello stesso verso si dice che essi hanno spin paralleli; se i due elettroni ruotano in versi contrari, si dice che essi hanno spin antiparalleli.

Misurato in unità $\hbar/2\pi$ lo spin di un elettrone può assumere solo i due valori semi-interi $s = +\frac{1}{2}$ ed $s = -\frac{1}{2}$; s è detto numero quantico di spin. Secondo il principio di esclusione di Pauli, che presto esamineremo, su un livello energetico non possono esistere due elettroni aventi spin uguali; cioè su un livello energetico possono esistere solo due elettroni aventi spin antiparalleli.

N. 23 – Riflessione sui numeri quantici

Riscriviamo le **espressioni riguardanti il “quanto totale n ” e il numero ℓ** :

$$(1) \quad n = n_3 + k = n_3 + \ell + 1, \quad \text{ove} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(2) \quad \frac{b}{a} = \frac{k}{n} = \frac{\ell + 1}{n}$$

Dalla (1) si vede che si ha $k \leq n$, mentre dalla (2) si vede che non può essere $k = 0$. Infatti per $k = 0$ si avrebbe $b = 0$ e quindi l’elettrone andrebbe a urtare il nucleo; il che induce a escludere il caso $k = 0$, ossia $\ell = -1$ (come avevamo anticipato in precedenza). Ne segue che, fissato n , restano possibili per ℓ i valori:

$$(3) \quad \underline{\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1}.$$

Ad essi corrispondono n ellissi tutte con lo stesso asse maggiore e con diversi assi minori. In particolare quella corrispondente a $\ell = n-1$ è un cerchio.

Le energie dei diversi livelli sono invece date dalla formula:

$$(4) \quad E_n = -\frac{Z^2 2\pi^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Come si vede, tali energie E_n , invece di dipendere dai tre numeri quantici n_1, n_2, n_3 o dalle loro combinazioni m, ℓ , dipendono da un solo numero intero, che è il quanto totale n . In tal modo, tutti i livelli energetici aventi lo stesso quanto n , ma diversi numeri m ed ℓ , hanno la stessa energia e lo

stesso asse maggiore, ma corrispondono a orbite differenti o per l'orientamento o per l'asse minore, cioè per l'eccentricità. Questo fatto giustifica la teoria di Bohr, che considera le sole orbite circolari e non si preoccupa del loro orientamento nello spazio e, ciò nonostante, riesce a dare conto dello spettro dell'idrogeno.

Concludiamo sottolineando il fatto che la teoria di Sommerfeld mostra che ciascuno dei livelli energetici E_n è un livello multiplo, cioè non corrisponde ad un solo stato quantico, ma a diversi stati quantici con la stessa energia. Il numero di questi stati si può calcolare così: fissato il numero n , a ℓ si possono dare gli n valori $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Per ciascun ℓ , poi, come abbiamo detto a pag. 161, m può assumere i $2\ell+1$ valori

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell.$$

Si conclude che il numero totale degli stati corrispondenti ad un dato n è dato dalla somma

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1).$$

Trattandosi di n termini di una progressione aritmetica, la loro somma è

$$S_n = \frac{(1+2n-2+1)n}{2} = \frac{2n \cdot n}{2}, \text{ quindi } S_n = n^2.$$

Dobbiamo ora ricordare che esiste il numero quantico di spin s , che può assumere due valori e quindi su ogni orbita vi possono essere due elettroni aventi spin antiparalleli. Si conclude che sullo strato di ordine n vi può essere al massimo un numero N di elettroni dato dalla formula:

$$N = 2n^2.$$

Possiamo ora enunciare per esteso il principio di esclusione di Pauli, che è un principio fondamentale della meccanica quantistica. Secondo tale principio :

“In un atomo non possono trovarsi due elettroni aventi la stessa quaterna di numeri quantici n, ℓ, m, s ; essi debbono differire per almeno uno di tali numeri”.

Come già detto, il numero di elettroni che possono stare sullo strato di ordine n è dato dalla formula $N = 2n^2$.

Onde elettromagnetiche – Nazario Magnarelli – Latina

N. 24 - Tabella dei numeri quantici

Sfruttando le relazioni trovate fra i vari numeri quantici e tenendo conto del Principio di esclusione di Pauli, abbiamo potuto stabilire quanti elettroni possono occupare un dato strato. Se non si fosse introdotto tale Principio, il numero di elettroni per ogni strato sarebbe risultato indefinito perché avremmo potuto pensare di trovare più elettroni dotati esattamente degli stessi numeri quantici. E' quindi opportuno riportare in una tabella i numeri quantici degli elettroni dei primi tre strati.

Strato <i>n</i>	Numero quantico azimutale <i>l</i>	Numero quantico magnetico <i>m</i>	Spin <i>s</i>	Numero elettroni	
				per orbita	per strato
K 1	0	0	$-1/2$ $+1/2$	2	2
L 2	0	0	$-1/2$ $+1/2$	2	8
	1	-1	$-1/2$ $+1/2$	6	
		0	$-1/2$ $+1/2$		
		+1	$-1/2$ $+1/2$		
M 3	0	0	$-1/2$ $+1/2$	2	18
	1	-1	$-1/2$ $+1/2$	6	
		0	$-1/2$ $+1/2$		
		+1	$-1/2$ $+1/2$		
	2	-2	$-1/2$ $+1/2$	10	
		-1	$-1/2$ $+1/2$		
		0	$-1/2$ $+1/2$		
		+1	$-1/2$ $+1/2$		
		+2	$-1/2$ $+1/2$		
		-2	$-1/2$ $+1/2$		

APPENDICE A.

RIASSUNTO DELLE EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO.

N. 1 – TEOREMA DI GAUSS IN FORMA DIFFERENZIALE.

Sia \vec{E}_0 il campo elettrico generato nel vuoto da n cariche puntiformi Q_1, Q_2, \dots, Q_n .

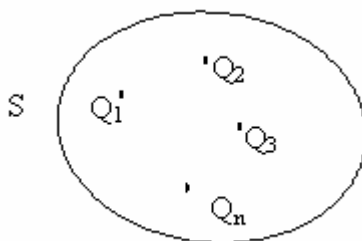


Figura A-1

Il flusso del vettore \vec{E}_0 attraverso una superficie chiusa S è dovuto solo alle cariche interne alla superficie ed è dato dalla formula

$$(1) \quad \Phi_S(\vec{E}_0) = \int_S \vec{E}_0 \times \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \quad ;$$

in questa formula si riassume il teorema di Gauss.

Se la superficie S racchiude una distribuzione continua di cariche di densità $\rho(x, y, z)$ ed indichiamo con V il volume della porzione di spazio racchiuso da S , la formula di Gauss diventa:

$$(2) \quad \Phi_S(\vec{E}_0) = \int_S \vec{E}_0 \times \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) \, dV \quad .$$

Ma per il teorema della divergenza il primo integrale si può trasformare in un integrale di volume, cioè

$$(3) \quad \int_S \vec{E}_0 \times \vec{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E}_0 \, dV \quad ;$$

eguagliando membro a membro le (2), (3) si ottiene:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}_0 \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) \, dV \quad .$$

Poiché questa espressione vale qualunque sia il volume di integrazione V , possiamo uguagliare gli integrandi e scrivere:

$$(4) \quad \operatorname{div} \vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z) \quad \text{o anche} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z) \quad .$$

La (4) costituisce la prima equazione di Maxwell ed esprime il teorema di Gauss in forma differenziale.

La (4) è una equazione locale perché lega grandezze fisiche diverse calcolate in uno stesso punto. Essa è di importanza fondamentale perché ci permette di porre un problema di elettrostatica in termini molto generali e matematicamente efficaci.

Ricordiamo ora che un campo elettrostatico \vec{E}_0 si può esprimere come gradiente del potenziale V_0 , cioè:

$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_0 \quad .$$

Sostituendo nella prima equazione di Maxwell si ha :

$$\operatorname{div}(-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \text{e quindi}$$

$$(5) \quad \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_0) = \nabla^2 V_0 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad .$$

La (5) è detta equazione di Poisson; essa è valida per un campo elettrico qualsiasi, anche non statico.

N. 2 – Principio di conservazione della carica elettrica ed equazione di continuità.

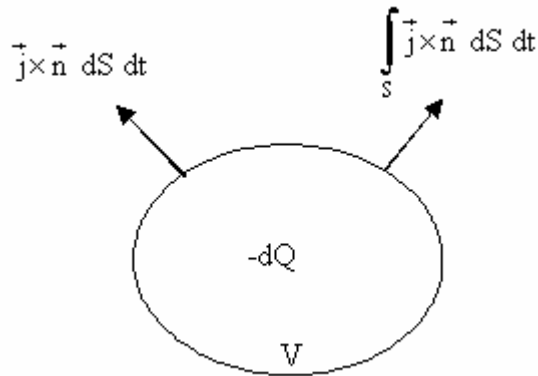


Figura A-2

Consideriamo una superficie chiusa S in cui, all'istante t , sia racchiusa la carica totale $Q(t)$. Se nell'intervallo di tempo dt la carica $Q(t)$ diminuisce di una certa quantità dQ , dobbiamo pensare, per il teorema di conservazione dell'elettricità, che la carica dQ è uscita dalla superficie S . Se indichiamo con \vec{j} il vettore densità di corrente sulla superficie S si avrà:

$$-dQ = \int_S \vec{j} \times \vec{n} dS dt \rightarrow (1) \quad -\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{j} \times \vec{n} dS .$$

Dall'altra parte se $\rho(x, y, z, t)$ è la densità della carica elettrica si ha:

$$(2) \quad Q(t) = \int_V \rho(x, y, z, t) dV ,$$

ove V è il volume della porzione di spazio racchiusa dalla superficie S . Derivando la (2) rispetto al tempo, e tenendo presente che la superficie S che racchiude la porzione di spazio di volume V è invariabile, si ha:

$$(3) \quad \frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV .$$

Osserviamo che Q dipende solo dal tempo e quindi la sua derivata rispetto a t è una derivata totale; al contrario la densità di carica ρ è funzione di x, y, z, t e pertanto la sua derivata temporale è una derivata parziale. Confrontando le (1), (3) si ha:

$$(4) \quad \int_S \vec{j} \times \vec{n} dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV .$$

Applicando al flusso del vettore \vec{j} il teorema della divergenza la (4) diventa:

$$(5) \quad \int_V \text{div} \vec{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV .$$

Questa relazione deve essere valida qualunque sia il valore V della porzione di spazio su cui abbiamo condotto i calcoli; quindi l'eguaglianza degli integrali implica l'uguaglianza degli integrandi. Si ottiene così l'equazione differenziale

$$(6) \quad \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{o se si vuole} \quad \vec{\nabla} \times \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

La (6) è detta equazione di continuità della corrente elettrica ed esprime, in forma locale, il principio di conservazione della carica elettrica. Tornando alla (5) ha il seguente significato fisico:

“se la carica contenuta all'interno del volume V varia nel tempo, questa variazione è dovuta alla corrente elettrica che fluisce nel tempo dt attraverso la superficie chiusa S che delimita il volume stesso”.

Quando il sistema fisico è in condizioni stazionarie, tutte le grandezze elettriche sono indipendenti dal tempo, quindi $\partial \rho / \partial t = 0$; ne segue che l'integrale di superficie che figura nella (4) è nullo, ossia

$$(7) \quad \int_S \vec{j} \times \vec{n} \, dS = 0 \quad .$$

La (7) dice che: “**in condizioni stazionarie il flusso della densità di corrente \vec{j} attraverso una superficie chiusa S è nullo**”.

Ricordiamo che il vettore \vec{j} ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore \vec{E} . Nel caso di un conduttore ohmico si ha:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{ove } \sigma \text{ è detto conducibilità elettrica del conduttore.}$$

N. 3 – Densità di corrente e velocità di deriva degli elettroni.

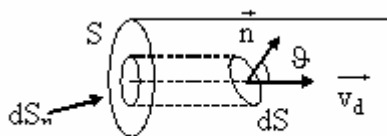


Figura A-3

Consideriamo un conduttore percorso da una corrente di intensità i ; sia n il numero degli elettroni per unità di volume, \vec{v}_d la loro velocità di deriva e $q = -e$ la loro carica; ovviamente il vettore \vec{v}_d è opposto al campo elettrico \vec{E} . Nel caso di elettroliti i portatori di cariche elettriche sono ioni positivi e negativi: gli ioni $+$ hanno velocità di deriva concorde al campo elettrico \vec{E} ; gli ioni negativi hanno velocità di verso contrario. Dentro il conduttore consideriamo un tubo di flusso elementare del campo vettoriale \vec{v}_d e sia dS una sua generica sezione.

La quantità di carica dq che nel tempo dt attraversa la sezione dS è:

$$(1) \quad dq = n \, q \, \vec{v}_d \times \vec{n} \, dS \, dt = n \, q \, v_d \, dS \, dt \quad ,$$

ove $dS_n = dS \cos \theta$ è una sezione normale del tubo di flusso.

Alla quantità

$$(2) \quad \vec{j} = n q \vec{v}_d ,$$

si dà il nome di densità della corrente elettrica.

L'intensità di corrente che passa nel tubo di flusso è:

$$di = \frac{dq}{dt} = n q \vec{v}_d \times \vec{n} dS \quad \rightarrow \quad (3) \quad di = \vec{j} \times \vec{n} dS .$$

Per trovare l'intensità di corrente i che attraversa il conduttore basta integrare su una intera sezione S del conduttore stesso; si ottiene:

$$(4) \quad i = \int_S \vec{j} \times \vec{n} dS .$$

Possiamo pensare che la densità di corrente \vec{j} sia costante in ogni punto del conduttore; allora se S_n è una sezione normale del conduttore, dalla (4) si ricava:

$$i = j S_n \quad \rightarrow \quad (5) \quad i = n q v_d S_n .$$

PROBLEMA DI APPLICAZIONE.

Calcolare la velocità media di deriva v_d degli elettroni di conduzione in un filo di rame cilindrico di raggio $r = 1 \text{ mm}$ percorso da una corrente avente l'intensità di 1 Ampère.

Possiamo applicare la formula

$$i = n q v_d S_n$$

ove $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$ (carica dell'elettrone)

$$S_n = \pi r^2 = \pi (10^{-3})^2 \text{ m}^2 = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 .$$

Calcoliamo ora il valore di n , cioè il numero di elettroni di conduzione per unità di volume; a tale scopo teniamo presente che in un buon conduttore per ogni atomo c'è almeno un elettrone libero di conduzione. Per trovare tale numero n basta risolvere la proporzione;

$$P_{\text{cu}} : N = d_{\text{cu}} : n ; \quad \text{ove}$$

$$\begin{array}{ll} P_{\text{cu}} = 63,5 & \text{peso atomico del rame} \\ N = 6,02 \cdot 10^{23} & \text{atomi/grammo atomo} \\ \mu_{\text{cu}} = 8,9 \text{ gr} & \text{massa di } 1 \text{ cm}^3 \text{ di rame .} \end{array}$$

Si ricava,

$$n = \frac{N \cdot \mu_{\text{cu}}}{P_{\text{cu}}} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 8,9}{63,5} = 0,84 \cdot 10^{23} \text{ elettroni / cm}^3 ,$$

quindi

$$n = 8,4 \cdot 10^{22} \cdot 10^6 \text{ elettroni / m}^3 = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / m}^3 .$$

Ricavando v_d dalla (5) si ha:

$$v_d = \frac{i}{n q \pi r^2} = \frac{1}{8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}} = 0,024 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$v_d = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (\text{velocità di deriva degli elettroni}).$$

Come si vede la velocità di deriva degli elettroni è molto piccola; la velocità di agitazione termica v_t , al contrario, è molto elevata ed ha un valore dell'ordine $v_t \div 10^5 \text{ m/s}$.

N. 4 – Forma differenziale della legge di Neumann.

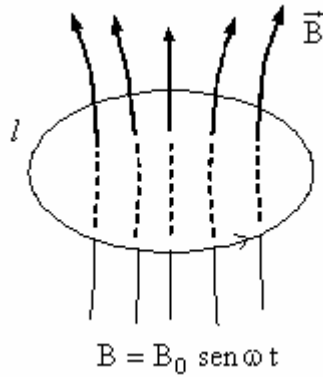


Figura A-4

Consideriamo un circuito chiuso ℓ immerso in un campo magnetico variabile concatenato con esso; supponiamo dapprima che nel circuito non sia inserito alcun generatore di f.e.m. costante (vedi fig. 6-4).

La variazione di flusso genera in ogni elemento del circuito un campo elettrico indotto \vec{E}_i e una f.e.m. elementare

$$df_i = \vec{E}_i \times d\vec{\ell} \quad .$$

Ne segue che nel circuito si ha una f.e.m.

totale data dall'integrale:

$$(1) \quad f_i = \oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} \quad .$$

Essa è legata alla variazione di flusso del vettore induzione magnetica \vec{B} dall'equazione di Faraday-Neumann.

$$(2) \quad f_i = \oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad .$$

Se poi nel circuito è presente anche un generatore di f.e.m. costante, il conduttore diventa sede di un campo elettrostatico \vec{E}_s , ed essendo esso conservativo si ha:

$$\oint_{\ell} \vec{E}_s \times d\vec{\ell} = 0 \quad .$$

Indicando con $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$ la somma dei due campi la (2) diventa:

$$f_i = \oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \times \vec{n} \, dS \quad .$$

Possiamo trasportare la derivata sotto il segno di integrale, poiché le due operazioni sono indipendenti e così si ottiene:

$$(3) \quad \oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{n} \, dS \quad .$$

Se applichiamo il teorema di Stokes alla circuitazione del vettore \vec{E} si ottiene:

$$(4) \quad \int_S \text{rot} \vec{E} \times \vec{n} \, dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{n} \, dS \quad .$$

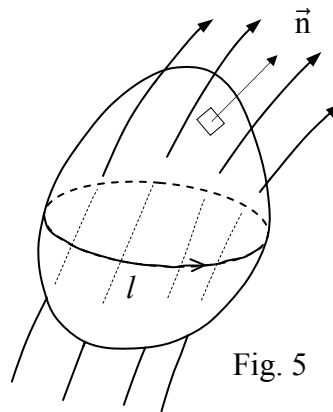
Poiché la (4) è valida qualunque sia la superficie S , possiamo eguagliare i due integrandi e così si ottiene:

$$(5) \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad .$$

La (5) esprime in forma differenziale la legge di Faraday-Neumann. Essa dice: “**nelle regioni di spazio dove esiste un campo magnetico variabile esiste necessariamente un campo elettrico non conservativo**” (vedi L. Lovitch – S. Rosati Fisica II pag. 212 – Casa Ed. Ambrosiana).

N. 5 – Proprietà del vettore induzione magnetica \vec{B} .

Sappiamo che le linee di flusso del vettore induzione magnetica \vec{B} sono sempre linee chiuse; ne segue che il flusso del vettore \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo (fig. 6-5). Possiamo quindi scrivere:



$$(1) \quad \Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \times \vec{n} \, dS = 0 \quad .$$

Il vettore \vec{n} è perpendicolare alla superficie S ed è orientato in modo tale che il versore stesso, personificato, veda che il verso fissato sulla linea ℓ è il verso antiorario.

Sia V il volume della regione di spazio racchiusa dalla superficie S ; applicando il teorema della divergenza dalla (1) si ha:

$$(2) \quad \int_S \vec{B} \times \vec{n} \, dS = \int_V \text{div} \vec{B} \, dV = 0 \quad .$$

Poiché la regione di volume V , racchiusa dalla superficie S , può essere piccola a piacere, si ha:

$$(3) \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad ,$$

cioè il campo magnetico è solenoidale.

N. 6 – Teorema della circuitazione di Ampère.

Consideriamo il campo di induzione magnetica \vec{B}_0 generato da n correnti di intensità i_1, i_2, \dots, i_n e sia ℓ una linea chiusa tracciata nel campo e concatenata con r di esse ($r \leq n$). Fissiamo un verso positivo sulla linea ℓ ; diremo che la corrente i_1 è positiva se la corrente stessa, personificata, vede che il verso fissato sulla linea ℓ è antiorario; diremo invece che la corrente i_1 è negativa in caso contrario. Faremo la stessa convenzione per le altre correnti.

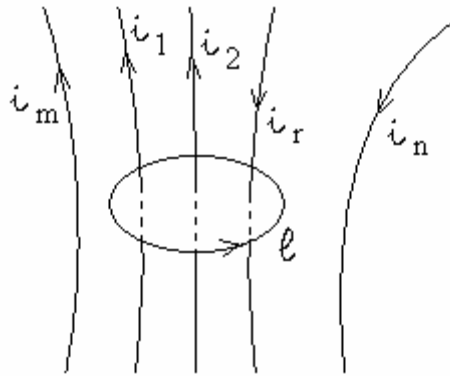


Figura A-6

Ciò premesso, il teorema di Ampère dice che **”La circuitazione del vettore \vec{B}_0 lungo la linea chiusa ℓ è uguale al prodotto della costante μ_0 per la somma algebrica delle sole correnti concatenate con la linea ℓ ”**, cioè:

$$(4) \quad \oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{k=1}^r i_k .$$

Consideriamo ora una superficie S avente per contorno la linea ℓ e consideriamo come pagina positiva quella per cui il versore personificato \vec{n} , normale a S , vede che il verso fissato come positivo sulla linea ℓ è antiorario.

Indichiamo poi con \vec{j} la densità di corrente attraverso la superficie S .

Possiamo scrivere allora la (4) sotto un'altra forma, cioè:

$$(5) \quad \oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j} \times \vec{n} \, dS .$$

Ma, per il teorema di Stokes, per l'integrale circolare si ha:

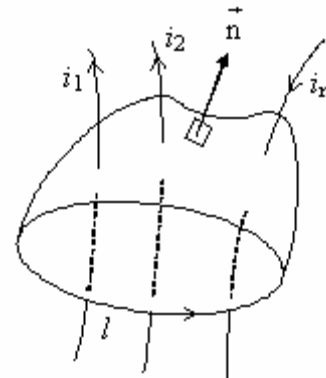


Figura A-7

$$(6) \quad \oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{B}_0 \times \vec{n} \, dS \quad .$$

Eguagliando membro a membro le (5), (6) si ha:

$$(7) \quad \int_S \text{rot} \vec{B}_0 \times \vec{n} \, dS = \mu_0 \int_S \vec{j} \times \vec{n} \, dS \quad .$$

Poiché questa relazione è valida qualunque sia la superficie S , possiamo eguagliare gli integrandi; si ottiene così:

$$(8) \quad \text{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} \quad \text{o anche} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} \quad .$$

In particolare nel vuoto si ha $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$, ove \vec{H}_0 è il vettore intensità del campo magnetico, e la (8) diventa:

$$\text{rot} \vec{H}_0 = \vec{j} \quad .$$

La (8) è la quarta equazione di Maxwell, e rappresenta la forma differenziale del teorema della circuitazione di Ampère.

È facile mostrare che la (8) è valida solo nel caso stazionario; infatti prendendo la divergenza di ambo i membri dell'equazione si ha:

$$\text{div}(\text{rot} \vec{B}_0) = \mu_0 \text{div} \vec{j} \quad .$$

Ma la divergenza di un rotore, se esiste, è sempre nulla, ne segue che si ha:

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad .$$

Confrontando con l'equazione di continuità della corrente elettrica, cioè con l'equazione

$$\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad ,$$

si ricava che la (8) è valida solo se si ha $\partial \rho / \partial t = 0$, cioè se il sistema elettrico si trova in condizioni stazionarie.

N. 7 – La quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario.

Vediamo come deve essere trasformata l'equazione di Maxwell,

$$(1) \quad \text{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} \quad ,$$

nel caso non stazionario.

Supponiamo dunque che il campo elettrico e il campo magnetico non siano costanti, ma variabili nel tempo. Ci riferiremo esplicitamente al caso del vuoto, ma le conclusioni a cui arriveremo sono valide anche nel caso in cui lo spazio sia riempito da un mezzo omogeneo e isotropo: in tal caso basta sostituire le costanti ϵ_0 e μ_0 del vuoto con le costanti ϵ e μ del mezzo. Ora nel caso non stazionario la prima equazione di Maxwell, che esprime il teorema di Gauss in forma differenziale, diventa:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z, t) \quad \rightarrow \quad (1) \quad \rho(x, y, z, t) = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} \quad .$$

Riprendiamo l'equazione di continuità della corrente elettrica,

$$(2) \quad \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ,$$

e sostituiamo a ρ l'espressione data dalla (1). Si ottiene:

$$\text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{E}) = 0 \quad .$$

Poiché la divergenza è una operazione di derivazione rispetto a x, y, z , nella relazione scritta possiamo invertire l'ordine di derivazione; si ottiene così:

$$\text{div} \vec{j} + \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad ,$$

ossia (3)
$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad .$$

Si conclude che nei casi non stazionari il vettore $\vec{j} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ ha sempre divergenza nulla; ciò ci suggerisce di trasformare la quarta equazione di Maxwell con l'equazione più generale

(4)
$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

o anche
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) ;$$

(vedi Mencuccini-Silvestrini, Fisica II pag. 285, Editore Liguori).

Osserviamo subito che nei casi stazionari la (4) è perfettamente valida. Infatti prendendo la divergenza di ambo i membri si ha:

1° membro)
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad ,$$

2° membro) trascurando il fattore μ_0 e ricordando che $\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho(x, y, z, t)$ (prima equazione di Maxwell), si ha:

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad .$$

Nei casi stazionari, ricordando l'equazione di continuità della corrente elettrica si ha:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad .$$

Ne segue che la (4) è perfettamente valida perché la divergenza di ambo i membri porta all'identità $0 = 0$.

Ma l'equazione di Maxwell (4) è valida anche nei casi non stazionari; in tal caso, come ha intuito Maxwell, il termine $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ fa da complemento alla densità di corrente \vec{j} nei tratti del circuito in cui questo viene a mancare e per questo motivo il termine $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ si dice densità di corrente di spostamento.

VEDIAMO LA SPIEGAZIONE.

Consideriamo un circuito costituito da un condensatore C, da una resistenza R e da un generatore di f.e.m. alternata (fig.A-8).

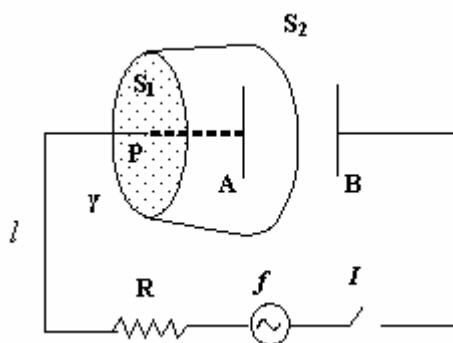


Figura A-8

Sia γ una linea chiusa concatenata con il filo conduttore ℓ ed S_1, S_2 due superfici aventi per contorno la linea γ : S_1 interseca il conduttore in un punto P, mentre S_2 passa fra le armature del condensatore.

Sia \vec{B} il vettore di induzione magnetico generato dalla corrente che percorre in conduttore ℓ e calcoliamo la circuitazione del vettore \vec{B} lungo la linea chiusa γ .

Se scegliamo la superficie S_1 , per il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \times d\vec{s} = \int_{S_1} \text{rot} \vec{B} \times \vec{n} dS_1 .$$

Poiché in questo caso $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, sostituendo nel secondo integrale si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \times d\vec{s} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{j} \times \vec{n} dS_1 = \mu_0 i \quad ,$$

e ciò va d'accordo con il teorema della circuitazione di Ampère.

Scegliamo ora come superficie, avente per contaroni la linea γ , la superficie S_2 che passa attraverso le due armature del condensatore. Se vogliamo che fra le due armature debba essere ancora valida la relazione $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, poiché in questo caso $\vec{j} = 0$ si ha:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \times d\vec{s} = \int_{S_2} \text{rot} \vec{B} \times \vec{n} dS_2 = \mu_0 \int_{S_2} \vec{j} \times \vec{n} dS = 0 \quad .$$

I due diversi valori della circuitazione lungo la stessa linea chiusa γ indicano che la relazione

$$(1) \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad ,$$

non può essere ritenuta valida nei processi dipendenti dal tempo. Questa assurdità, come abbiamo visto, si elimina sostituendo a \vec{j} l'espressione

$$\vec{j}_t = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ;$$

essa è detta densità di corrente totale generalizzata.

N. 8 – Introduzione della densità di corrente di spostamento.

Abbiamo visto che Maxwell ha modificato la forma differenziale del teorema di Ampère.

$$(1) \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_t \quad ,$$

con la formula più generale

$$(2) \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) ,$$

che è valida anche nei casi non stazionari. Abbiamo anche dato una giustificazione matematica della (2).

La considerazione fisica che portò Maxwell a formulare la (2) è la seguente. Come la variazione di un campo magnetico genera un campo elettrico non conservativo, cioè

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,$$

così si deve ammettere, per simmetria, che nei casi non stazionari il campo di induzione magnetico \vec{B} venga generato sia da correnti di conduzione di intensità \vec{j} , sia da campi elettrici variabili.

Di conseguenza, nel caso generale, la relazione riguardante il campo di induzione magnetica

$$\text{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} ,$$

deve essere sostituita dalla relazione

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) .$$

In questo modo viene rimossa ogni incongruenza matematica; infatti, prendendo la divergenza di ambo i membri dell'equazione si ha:

$$\text{div} (\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \left[\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] .$$

Tenendo conto che $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0$, si ha:

$$(3) \quad \mu_0 \left[\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad .$$

Semplifichiamo anzitutto per μ_0 e nel secondo termine scambiamo l'ordine di derivazione; si ottiene

$$(3) \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}) = 0 \quad .$$

Ricordiamo ora che per il teorema di Gauss si ha:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho(x, y, z, t) \quad ;$$

sostituendo nella (3) si ottiene:

$$(4) \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad .$$

La (4) è esatta perché rappresenta l'equazione di continuità della corrente elettrica [vedi la (6) del parag. N. 2]; quindi anche la formula (2), da cui essa scaturisce, è esatta.

La quantità $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ha le dimensioni di una densità di corrente e fu chiamata da Maxwell densità di corrente di spostamento.

La corrente di spostamento crea un campo magnetico, come una qualsiasi corrente di conduzione. Ciò fornisce una piena validità al teorema della circuitazione di Ampère, cioè al calcolo del vettore \vec{B} lungo una linea chiusa, in quanto la corrente di spostamento che si genera fra le armature del condensatore considerato fornisce una continuazione della corrente di conduzione.

L'ipotesi di Maxwell rimuove quindi ogni difficoltà nella trattazione dei fenomeni elettromagnetici e permetterà inoltre di prevedere l'esistenza teorica delle onde elettromagnetiche.

Le conferme dovute agli esperimenti di Hertz consentono di trasformare l'ipotesi di Maxwell in una proprietà fondamentale del campo elettromagnetico.

Può sembrare strano che mentre l'esperienza di laboratorio era giunta, con Faraday, a mettere in evidenza la creazione di un campo elettrico da parte di un campo magnetico variabile, essa invece, non era riuscita a scoprire il processo inverso.

Ciò è dipeso, in gran parte, dal fatto che nei più comuni esperimenti in cui fluiscono correnti di spostamento sono presenti anche correnti di conduzione, e finché queste correnti variano lentamente (conduzioni quasi statiche) il campo magnetico in un punto dovuto alle correnti di conduzione è di gran lunga maggiore di quello dovuto alle correnti di spostamento. Solo quando la frequenza delle correnti diviene tanto grande che la lunghezza delle onde elettromagnetiche diviene confrontabile con le dimensioni del dispositivo sperimentale, allora gli effetti delle due correnti divengono nettamente separabili.

APPENDICE B.

REGOLE DI CALCOLO VETTORIALE.

N. 1 – Prodotto scalare di due vettori \vec{A} e \vec{B} .

Siano A e B i moduli dei due vettori, (A_x, A_y, A_z) , (B_x, B_y, B_z) le loro componenti cartesiane e ϑ l'angolo da essi determinato. Si dice prodotto scalare dei due vettori l'espressione:

$$(1) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \vartheta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ;$$

questo prodotto è una grandezza scalare.

N. 2 – Prodotto vettoriale dei due vettori \vec{A} e \vec{B} .

È il vettore così definito:

$$(1) \quad \vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(A_y B_z - B_y A_z) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - B_x A_y)$$

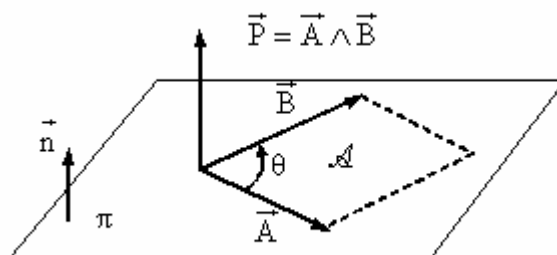


Figura B-1

Il verso del vettore $\vec{A} \wedge \vec{B}$ è quello indicato in figura; il modulo è uguale all'area A del parallelogramma, quindi $\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin \vartheta \text{ vers } \vec{n}$.

N.3 – Operatore “nabla” = $\vec{\nabla}$.

È un operatore differenziale vettoriale, indicato con la scrittura $\vec{\nabla}$, che può essere applicato sia a grandezze scalari che a grandezze vettoriali; esso è così definito:

$$(1) \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} .$$

Se si applica l’operatore “nabla” a una funzione scalare $U(x, y, z)$ del punto $P(x, y, z)$, continua e derivabile, si ottiene il vettore:

$$\vec{\nabla} U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{cioè} \quad (2) \quad \vec{\nabla} U = \overrightarrow{\text{grad } U} .$$

Ne segue che applicando l’operatore $\vec{\nabla}$ ad una funzione scalare $U(x, y, z)$ otteniamo il gradiente della funzione stessa.

N.4 – Divergenza di un vettore \vec{A} .

È una funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ così definita:

$$(1) \quad \text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \varphi(x, y, z) .$$

È immediato verificare che si ha:

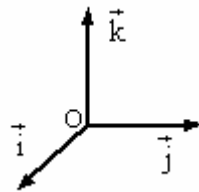
$$(2) \quad \text{div} \vec{A} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z) = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

Quindi l'operatore divergenza coincide con l'operatore $\vec{\nabla} \cdot$ e possiamo scrivere $\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Se in ogni punto del campo si ha $\text{div} \vec{A} = 0$ il campo \vec{A} si dice solenoidale.

N. 5 – Rotore di un vettore \vec{A} .

E' un vettore così definito

$$(1) \quad \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$



$$= \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Si verifica facilmente che si ha:

$$(2) \quad \text{rot} \vec{A} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge (\vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

Infatti ricordiamo che si ha:

$$(3) \quad \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} ; \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} ; \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} ;$$

$$\text{e in generale} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}.$$

Sviluppando i calcoli del prodotto vettoriale (2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\text{rot} \vec{A} &= \cancel{\vec{i} \wedge \vec{i}} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \vec{i} \wedge \vec{j} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \vec{i} \wedge \vec{k} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \\
&= \vec{j} \wedge \vec{i} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \cancel{\vec{j} \wedge \vec{j}} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \vec{j} \wedge \vec{k} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \\
&= \vec{k} \wedge \vec{i} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \vec{k} \wedge \vec{j} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \cancel{\vec{k} \wedge \vec{k}} \frac{\partial A_z}{\partial z} .
\end{aligned}$$

Tenendo presenti i prodotti vettoriali (3) si ha:

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{k} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial A_z}{\partial x} - \vec{k} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \vec{i} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \vec{j} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \vec{i} \frac{\partial A_y}{\partial z} ,$$

e quindi

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) .$$

Risulta così verificato che:

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} .$$

Quindi l'operatore $\vec{\nabla} \wedge$ è l'operatore rotore.

Un campo vettoriale \vec{A} per ogni punto del quale si abbia $\text{rot} \vec{A} = 0$ si dice **irrotazionale**.

N. 6 – Verificare l'identità.

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0 .$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Eseguendo le derivate si ha la somma di sei termini opposti a due a due, quindi

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$$

2^a Dimostrazione. Ricordando che l'operatore divergenza coincide con l'operatore $\vec{\nabla} \times$ e che l'operatore rotore coincide con l'operatore $\vec{\nabla} \wedge$ possiamo scrivere:

$$(1) \quad \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) .$$

Se ora ricordiamo le regole di calcolo della matrice di un prodotto misto di tre vettori si ha

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}) .$$

Ma l'operatore $\vec{\nabla}$ è formalmente un vettore, quindi $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}$ rappresenta il prodotto di due vettori paralleli e per esso si ha:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} = 0 .$$

Si conclude che:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}) = 0 .$$

N. 7 – Significato del simbolo ∇^2 , detto “nabla quadro” o anche “operatore laplaciano”.

Ricordando che :

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

si ha (1)

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Esso può essere applicato sia ad un vettore che ad uno scalare, quindi si ha:

(2)

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} ,$$

(3) e

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} .$$

Se ora ricordiamo che $\vec{\text{grad}}\varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, per definizione di divergenza si ha:

$$\text{div } \vec{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) ,$$

quindi (4)

$$\text{div } \vec{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi .$$

N. 8 – Identità vettoriale.

Sia $\varphi(x, y, z)$ una grandezza scalare definita in un campo A dello spazio (xyz) e supponiamo che essa sia dotata di derivata seconde miste.

Vogliamo dimostrare l'identità

$$(1) \quad \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = 0$$

1^a Dimostrazione. Il vettore $\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}\varphi}$ fornisce un campo vettoriale conservativo; ne segue che il vettore \vec{H} è irrotazionale, ossia:

$$\text{rot}\vec{H} = \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = 0 \quad .$$

2^a Dimostrazione. Posto $\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}\varphi}$, possiamo indicare $\text{rot}\vec{H}$ per mezzo dell'operatore vettoriale “nabla”, precisamente:

$$(2) \quad \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = \text{rot}\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \quad .$$

Ma anche $\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}\varphi}$ si può esprimere per mezzo dell'operatore “nabla” e si ha:

$$(3) \quad \vec{H} = \vec{\nabla}\varphi \quad .$$

Sostituendo nella (15) si ha:

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = 0 \quad ;$$

infatti il prodotto vettoriale è nullo perché i vettori $\vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla}\varphi$ sono paralleli.

3^a Dimostrazione. Tenendo presente che $\overrightarrow{\text{grad}\varphi} = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ si ha:

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix},$$

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = \vec{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \right] + \vec{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] +$$

$$+ \vec{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \right],$$

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = \vec{i} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial y} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} \right) +$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial x} \right).$$

La somma delle due derivate miste che figurano in ogni coppia di parentesi è nulla per il teorema di Schwartz, e quindi si ha:

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}\varphi}) = 0 \quad \text{o, con altri simboli,} \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = 0.$$

Altre regole di calcolo vettoriale.

N. 9 – Seconda identità vettoriale.

Vogliamo dimostrare l'identità:

$$(1) \quad \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \times \text{rot}\vec{E} - \vec{E} \times \text{rot}\vec{H}.$$

Ricordando che per un generico vettore \vec{A} si ha:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

la relazione (1) si può anche scrivere nella forma:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \quad .$$

Dimostrazione.

Ricordiamo che le componenti del vettore $\vec{E} \wedge \vec{H}$ secondo gli assi x, y, z si possono ricavare dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad \text{e si ottengono le componenti}$$

$$E_y H_z - E_z H_y \quad E_z H_x - E_x H_z \quad E_x H_y - E_y H_x \quad .$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) &= \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x - E_x H_z) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y - E_y H_x) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) &= \frac{\partial E_y}{\partial x} H_z + E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} H_y - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial E_z}{\partial y} H_x + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} H_z - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial E_x}{\partial z} H_y + E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} H_x - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad . \end{aligned}$$

Quindi (a) $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) =$

$$H_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + H_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + H_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) +$$

$$-E_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Ricordiamo ora che:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} ;$$

ne segue (b) $\vec{H} \times \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \times \text{rot} \vec{H} =$

$$H_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + H_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + H_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) +$$

$$-E_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Confrontando le (a) e (b) si ottiene effettivamente l'identità:

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \times \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \times \text{rot} \vec{H} .$$

N. 10 – Terza identità vettoriale.

Vogliamo ora dimostrare l'identità vettoriale:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) = \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} .$$

Ricordando il significato dell'operatore laplaciano ∇^2 , possiamo anche scrivere:

$$(1) \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) = \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) + \nabla^2 \vec{H} .$$

Essa è importante perché ci permette di ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche a partire dalle equazioni di Maxwell.

1^a Dimostrazione. Poiché $\text{rot}\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$ si ha

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) .$$

Tenendo presente l'identità vettoriale

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{d}) \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{d} .$$

si ha

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \vec{H} .$$

Poiché

$$(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \vec{\nabla} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ,$$

$$\text{si ha} \quad (2) \quad \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} .$$

Come abbiamo detto nel parag. N. 1, l'operatore $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ coincide con l'operatore $\text{div}\vec{H}$, che rappresenta una funzione scalare. Ne segue che $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{H})$ è l'operatore “nabla” applicato alla funzione scalare $\text{div}\vec{H}$ e come tale esso è il gradiente della funzione stessa, vedi la (2) N. 3; pertanto possiamo dire:

$$(3) \quad \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{H}) .$$

Sostituendo la (3) nella (2) si ottiene:

$$\text{rot}(\text{rot} \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{H}) - \nabla^2 \overrightarrow{H} ,$$

$$\text{da cui} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{H}) = \text{rot}(\text{rot} \overrightarrow{H}) + \nabla^2 \overrightarrow{H} \quad \text{c.v.d.}$$

N. 11 – Espressione cartesiana di un operatore differenziale.

Trovare l'espressione cartesiana di $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{H})$.

$$\text{Ricordiamo che} \quad \text{div} \overrightarrow{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} ,$$

$$\text{e che} \quad \overrightarrow{\text{grad}} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} .$$

Combiniamo questi due operatori applicando l'operatore $\overrightarrow{\text{grad}}$ alla grandezza scalare $\text{div} \overrightarrow{H}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{H}) &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) . \end{aligned}$$

Si ricava quindi l'espressione

$$(1) \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) = \vec{i} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \right) + \\ + \vec{j} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) .$$

N. 12 – Relazione fra gradiente, rotore e nablà.

Altra dimostrazione dell'identità vettoriale.

$$(1) \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) = \text{rot rot}\vec{H} + \nabla^2 \vec{H} ;$$

come già detto, essa è importante perché ci permette di ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche a partire dalle equazioni di Maxwell.

Dimostrazione.

Dal N. 11 già conosciamo l'espressione cartesiana di $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H})$.

Troviamo ora l'espressione cartesiana del secondo membro della (1). Ricordiamo anzitutto che:

$$\text{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \\ + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Ne segue:

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = & \vec{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \vec{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \vec{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = & \vec{i} \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} \right) + \\ & \vec{j} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} \right) + \\ & \vec{k} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned}$$

Nella prima espressione tra parentesi aggiungiamo e togliamo il termine

$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}$; nella seconda espressione il termine $\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}$ e nella terza

espressione aggiungiamo e togliamo il termine $\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}$. Si ottiene (2):

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = & \\
= \vec{i} \left(\frac{\partial H_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial H_y^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H_z^2}{\partial x \partial z} \right) - \vec{i} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) + & \\
\vec{j} \left(\frac{\partial H_x^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial H_y^2}{\partial y^2} + \frac{\partial H_z^2}{\partial y \partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) + & \\
\vec{j} \left(\frac{\partial H_x^2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial H_y^2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial H_z^2}{\partial z^2} \right) - \vec{k} \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) &
\end{aligned}$$

La somma dei termini che figurano nella prima colonna della (2) ci dà l'espressione cartesiana di $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H})$, come si vede dalla (1) del N. 11.

Ne segue che si ha si ha:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) + & \\
- \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) & .
\end{aligned}$$

Subito si ottiene:

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) - \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} ,$$

$$\text{ossia (3)} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) = \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} ,$$

$$\text{o se si vuole (3)}_1 \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) = \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) + \nabla^2 \vec{H} .$$

APPENDICE C

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

N. 1 – Traiettoria di un punto mobile

Sia γ la traiettoria di un punto mobile avente le equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

ove t è un parametro che varia in un intervallo base (a,b) dell'asse t .

Se fissiamo su γ una ascissa curvilinea s , possiamo esprimere le coordinate dei punti della traiettoria per mezzo del parametro s e le equazioni parametriche della curva diventano

$$(2) \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Diremo che γ è una porzione di curva regolare se una almeno delle derivate delle funzioni che figurano al secondo membro delle equazioni (1) o (2) è diversa da zero per ogni valore del parametro t o del parametro s in un intervallo assegnato.

Per le nostre necessità supporremo che le funzioni (2) siano derivabili fino al terzo ordine.

Ricordiamo ora che il vettore

$$(3) \quad \frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(s + \Delta s) - \vec{P}(s)}{\Delta s} = \vec{t}(s)$$

è un vettore unitario che ha la direzione della tangente alla curva nel punto $P(s)$ ed è orientato nel verso delle s crescenti. Esso si indica anche con la lettera \vec{t} ed è detto versore tangente a γ nel punto P .

Poiché al punto P corrisponde il vettore posizione

$$P = O + x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

si ha
$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}$$

e
$$|\vec{t}|^2 = \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) + \dot{z}^2(s) = 1 \quad .$$

Per la velocità del punto P all'istante t si ha:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \quad ,$$

e in modulo
$$v = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \quad .$$

Per il vettore \vec{v} possiamo trovare una notevole espressione; infatti si ha:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad ,$$

cioè
$$\vec{v} = \dot{s} \vec{t} \quad .$$

N. 2 – Curvatura di una linea

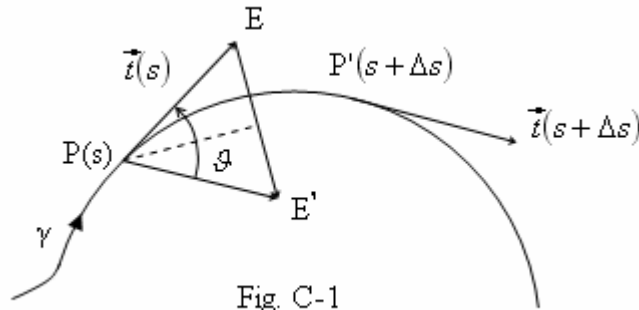
Sia γ la traiettoria di un punto che si muove nello spazio xyz .

Se fissiamo su γ una ascissa curvilinea s possiamo esprimere le coordinate dei punti della traiettoria per mezzo del parametro s e le equazioni parametriche della curva diventano

$$(1) \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s) \quad .$$

Vogliamo ora definire in ogni punto $P(s)$ di γ un numero che indichi di quanto, in prossimità di P , la curva si discosti dall'andamento rettilineo

Consideriamo un altro punto $P'(s+\Delta s)$ di γ e siano $\vec{t}(s)$ e $\vec{t}(s+\Delta s)$ i versori tangenti alla curva in questi punti (fig. C-1).



Come sappiamo, essi sono orientati nel verso delle s crescenti e si ha:

$$(2) \quad \vec{t} = \frac{d\vec{P}}{ds}, \quad \text{quindi} \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}.$$

$$\text{Si ha inoltre} \quad \vec{t}(s + \Delta s) = \vec{t}(s) + \overrightarrow{EE'}.$$

$$\text{Da cui} \quad \vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s) = \overrightarrow{EE'}.$$

Sia ora θ l'angolo compreso fra i due versori tangenti, espresso come sempre in radianti; esso si dice angolo di contingenza relativo all'arco $\widehat{PP'}$ di γ e risulta $0 \leq \theta \leq \pi$. L'angolo θ si annulla identicamente solo quando γ è una retta o un segmento.

A parità di lunghezza dell'arco compreso fra i due punti, quanto più grande è θ tanto più l'arco si discosta dall'andamento rettilineo, ossia tanto più esso deve ritenersi incurvato.

Questa considerazione induce a misurare la curvatura dell'arco $\widehat{PP'}$ mediante il rapporto

$$(3) \quad \frac{\theta}{|\Delta s|}.$$

Possiamo quindi assumere come curvatura della linea γ il limite:

$$(4) \quad c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta}{|\Delta s|}.$$

Facciamo vedere che tale limite esiste finito. A tale scopo immaginiamo di applicare nel punto $P(s)$ i versori tangenti $\vec{t}(s)$ e $\vec{t}(s + \Delta s)$ relativi ai punti P e P' e poniamo

$$(5) \quad |\overrightarrow{EE'}| = |\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)|.$$

Poiché l'angolo compreso fra i due versori è l'angolo ϑ si ha:

$$(6) \quad |\overrightarrow{EE'}| = 2|\overrightarrow{PE}| \sin \frac{\vartheta}{2} = 2|\vec{t}| \sin \frac{\vartheta}{2} = 2 \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Per la curvatura c possiamo allora scrivere

$$(7) \quad c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vartheta}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vartheta}{|\overrightarrow{EE'}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{EE'}|}{|\Delta s|},$$

$$c = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\vartheta/2}{\sin \vartheta/2} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)|}{|\Delta s|},$$

ove abbiamo tenuto presente che quando $\Delta s \rightarrow 0$ anche l'angolo di contingenza ϑ tende a zero. Dalla (7) si ricava:

$$(8) \quad c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \right|,$$

quindi :

$$c = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}.$$

Se γ è una circonferenza di raggio R si ha $|\Delta s| = R\vartheta$;

quindi (9):

$$c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vartheta}{|\Delta s|} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\vartheta}{R\vartheta}, \quad \text{ossia} \quad c = \frac{1}{R}.$$

In generale la lunghezza $\rho = \frac{1}{c}$ prende il nome di raggio di curvatura.

Dalla (4) possiamo vedere che, essendo ϑ una grandezza senza dimensioni, la curvatura c ha la dimensione ℓ^{-1} .

Notiamo che il vettore $d\vec{t}/ds$ è normale al corrispondente versore \vec{t} .

Infatti, derivando l'identità $\vec{t} \times \vec{t} = 1$ si ottiene:

$$2 \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{t} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t}.$$

Faremo vedere che il vettore $d\vec{t}/ds$ è diretto verso l'interno della traiettoria, che esso giace nel piano osculatore della curva γ nel punto P e quindi è orientato come il versore \vec{n} , normale alla curva. Con questa premessa, se teniamo presente che in modulo si ha $|d\vec{t}/ds| = c$, possiamo scrivere:

$$(10) \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = c \vec{n}, \quad \text{da cui} \quad \vec{n} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d^2 \vec{P}}{ds^2}.$$

Soffermiamoci un poco sulla (10) per mostrare che essa ci permette di dare una forma notevole all'accelerazione del punto che si muove sulla curva γ .

Infatti, se partiamo dalla formula $\vec{v} = \dot{s} \vec{t}$ della velocità si ottiene:

$$(i) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{t}) = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s} \frac{d\vec{t}}{ds} \dot{s} = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s}^2 \frac{d\vec{t}}{ds},$$

$$\text{ossia} \quad \vec{a} = \ddot{s} \vec{t} + v^2 \frac{d\vec{t}}{ds}.$$

E poiché $d\vec{t}/ds = c\vec{n}$ si ottiene:

$$(11) \quad \vec{a} = \ddot{s} \vec{t} + cv^2 \vec{n}.$$

La (11) ci dice che l'accelerazione del punto mobile è la somma di due componenti;

$\ddot{s} \vec{t}$ è detta accelerazione tangenziale e si pone $\ddot{s} \vec{t} = \vec{a}_t$

$cv^2\vec{n}$ è detta accelerazione normale e si pone $cv^2\vec{n} = \vec{a}_n$.

Ne segue che si ha: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$.

Facciamo ora vedere che il vettore $d\vec{t}/ds$ giace nel piano osculatore della curva γ nel punto $P(s)$ ed è rivolto verso l'interno della traiettoria.

Possiamo distinguere due casi.

Primo caso. Supponiamo che la curva γ descritta dal punto mobile, o la parte di essa che stiamo considerando, giaccia su un piano α . Allora i versori tangenti $\vec{t}(s)$ e $\vec{t}(s + \Delta s)$ nei punti $P(s)$ e $P(s + \Delta s)$ giacciono su tale piano (fig. C-2);

Giacciono sul piano α anche il vettore differenza

$$\overrightarrow{EE'} = \vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)$$

e il vettore (12) $\Delta\vec{t}/\Delta s$.

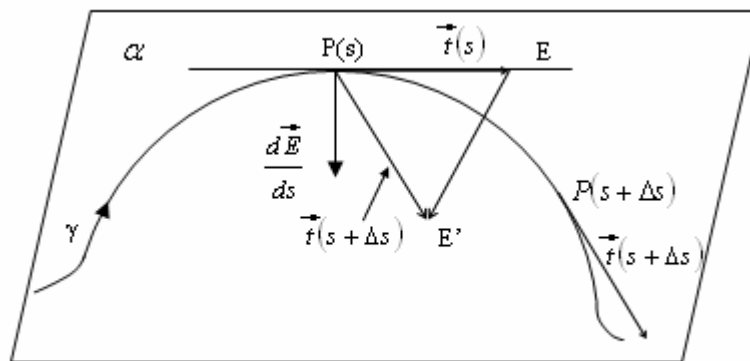


Fig. C-2

Dalla costruzione grafica si vede anche che essi sono diretti verso l'interno della traiettoria.

Passando al limite per $\Delta s \rightarrow 0$, il rapporto incrementale (12) dà origine al vettore derivato $d\vec{t}/ds$. Per quanto abbiamo fatto notare, esso giace sul piano α della curva, è rivolto verso la concavità della traiettoria ed è perpendicolare al versore tangente $\vec{t}(s)$.

Possiamo allora dire che il vettore $d\vec{t}/ds$ è orientato come il versore \vec{n} normale alla traiettoria e quindi possiamo dire che si ha $\frac{d\vec{t}}{ds} = c \vec{n}$.

Secondo caso. Supponiamo che la curva γ giaccia in parte sul piano α e che dopo il punto $P(s)$ essa cominci a distaccarsi da tale piano.

Sia $\vec{t}(s)$ il versore tangente a γ nel punto $P(s)$ e $\vec{t}(s + \Delta s)$ il versore tangente in un punto $P(s + \Delta s)$ della seconda parte della curva.

Questi due versori, applicati in punti diversi, sono sghembi fra di loro; ma diventano complanari quando facciamo la differenza vettoriale

$$\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s) = \overrightarrow{EE'};$$

infatti, quando facciamo tale operazione, trasportiamo il vettore $\vec{t}(s + \Delta s)$ nel punto $P(s)$ in cui è applicato l'altro vettore.

Indichiamo con $\bar{\omega}$ il piano individuato dai due versori e quindi dai tre punti $P(s)$, E , E' : ovviamente questo piano passa per la tangente τ alla curva γ .

Quando $\Delta s \rightarrow 0$, il punto $P(s + \Delta s)$ tende al punto $P(s)$ muovendosi sulla traiettoria (è bene notare questa concomitanza), il piano $\bar{\omega}$ ruota attorno alla tangente τ e assume una posizione limite ω che ci dà il “piano osculatore della curva γ nel punto $P(s)$ ”. Ovviamente esso è il piano in cui giace il vettore derivato

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{EE'}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{t}}{ds}.$$

Concludendo, il vettore $d\vec{t}/ds$ giace nel piano osculatore della traiettoria nel punto $P(s)$; per le solite considerazioni, inoltre, esso è diretto verso la concavità della traiettoria ed è normale al versore tangente $\vec{t}(s)$. Indicando con \vec{n} il versore di tale vettore e ricordando la relazione (8), che ci dà il modulo del vettore $d\vec{t}/ds$, possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = c \vec{n}.$$

N. 3 – Triedro principale

Sia γ una porzione di curva regolare avente le equazioni parametriche

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

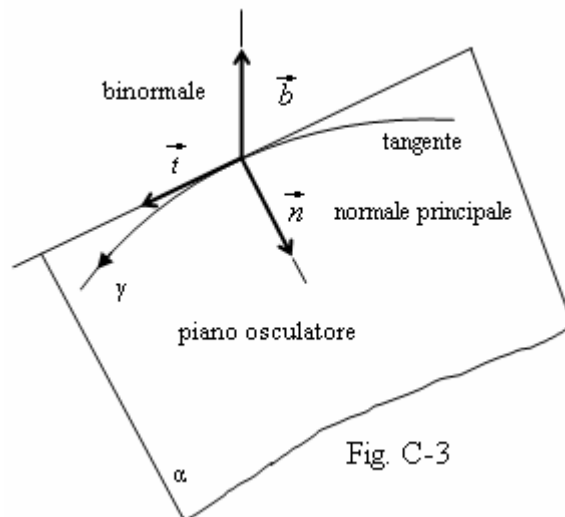
ove s è una ascissa curvilinea distesa sulla traiettoria.

Come sappiamo, preso un punto $P(s)$ sulla curva, si dice versore tangente \vec{t} il versore della tangente alla curva nel punto $P(s)$ orientata nel verso delle ascisse curvilinee crescenti.

Ricordiamo anche che si dice versore normale principale \vec{n} il versore della retta orientata n che risulta normale alla curva nel punto P , che giace nel piano osculatore della curva nel punto stesso e che è orientata verso la concavità della curva.

Detto ciò, si chiama versore binormale \vec{b} alla curva nel punto P il versore della retta orientata b che risulta normale ai versori \vec{t} ed \vec{n} , e quindi normale al piano osculatore da essi individuato, e che è orientato in modo tale che il triedro formato dai versori $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, spiccati dal punto P , sia equiverso al triedro formato dai versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ del riferimento cartesiano, che in generale risulta destrorso.

In altre parole, il versore \vec{b} è orientato in modo tale che il versore stesso, personificato, vede che \vec{t} si sovrappone ad \vec{n} dopo una rotazione di un angolo retto in senso antiorario (fig.C-3).



I tre versori $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ si possono rappresentare anche per mezzo dei loro coseni direttori; in tal caso si ha:

$$\vec{t}(\alpha, \beta, \gamma), \quad \vec{n}(\xi, \eta, \zeta), \quad \vec{b}(\lambda, \mu, \nu) .$$

Poiché i tre versori sono mutuamente ortogonali, per il loro prodotto misto si ha

$$\vec{t} \times \vec{n} \wedge \vec{b} = 1 ,$$

da cui

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1 .$$

Ogni elemento di questo determinante è uguale al suo complemento algebrico; infatti, considerato che si ha, per esempio, $\vec{t} = \vec{n} \wedge \vec{b}$, si ottiene:

$$\alpha = \eta\nu - \zeta\mu , \quad \beta = \zeta\lambda - \xi\nu , \quad \gamma = \xi\mu - \eta\lambda .$$

N. 4 – Torsione (o seconda curvatura) di una linea

Consideriamo nello spazio una curva γ le cui equazioni parametriche siano espresse in funzione di una ascissa curvilinea s definita sulla linea. Le sue equazioni parametriche sono del tipo

$$(1) \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) .$$

Vogliamo definire in ogni punto $P(s)$ di γ un numero che indichi di quanto, in prossimità di P , la curva si scosti dall'andamento piano.

Considerato un altro punto $P_1(s + \Delta s)$ di γ , siano ω e ω_1 i piani osculatori nei punti P e P_1 e diciamo φ l'angolo formato da questi due piani; come sempre l'angolo φ è misurato in radianti. Evidentemente si hanno i limiti $0 \leq \varphi \leq \pi$ e si ha $\varphi = 0$ solo nel caso di una curva piana.

E' da notare che l'angolo φ è uguale all'angolo formato dai versori binormali \vec{b} e \vec{b}_1 nei due punti considerati.

A parità di lunghezza dell'arco Δs di curva compreso fra i due punti, quanto più grande è φ tanto più l'arco si discosta dall'andamento piano, ossia tanto più aumenta la torsione della curva. Questa considerazione induce a misurare la torsione dell'arco $\widehat{PP_1}$ mediante il rapporto

$$(2) \quad \frac{\varphi}{|\Delta s|} .$$

Possiamo quindi assumere come torsione della curva nel punto $P(s)$ il limite

$$(3) \quad |\tau| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|} .$$

In altre parole, la torsione della curva è la velocità di deviazione angolare dal piano osculatore per $\Delta s \rightarrow 0$ (E. Martinelli, Geometria II, pag. 570). Nella definizione (3) si è considerato il valore assoluto di τ , ma poi vedremo si può dare un segno a questa grandezza,

Ragionando come abbiamo fatto per la curvatura di una linea, si trova:

$$|\vec{b}_1 - \vec{b}| = 2 \sin \frac{\varphi}{2} .$$

Possiamo quindi scrivere:

$$(4) \quad |\tau| = \frac{\varphi}{|\Delta s|} = \frac{\varphi}{|\vec{b}_1 - \vec{b}|} \cdot \frac{|\vec{b}_1 - \vec{b}|}{|\Delta s|} ,$$

e quindi
$$|\tau| = \frac{\varphi/2}{\sin \varphi/2} \cdot \left| \frac{\vec{b}(s + \Delta s) - \vec{b}(s)}{\Delta s} \right|.$$

Passando al limite per $P_1 \rightarrow P$, cioè per $\Delta s \rightarrow 0$ e per $\Delta \varphi \rightarrow 0$, si ha:

$$(5) \quad |\tau| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi/2}{\sin \varphi/2} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta s} \right|.$$

Poiché il primo limite ha valore 1 si ottiene:

$$(6) \quad |\tau| = \left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right|.$$

Deriviamo ora l'identità vettoriale $\vec{b} \times \vec{b} = 0$; si ottiene :

$$2 \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{b} = 0, \quad \text{quindi : (7)} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}.$$

Deriviamo anche l'identità vettoriale $\vec{b} \times \vec{t} = 0$ e ricordiamo che $d\vec{t}/ds = c \vec{n}$; si ha

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times c \vec{n} = 0.$$

Ma si ha $\vec{b} \times c \vec{n} = 0$, poiché $\vec{b} \perp \vec{n}$. Si ricava così che:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} = 0, \quad \text{ossia: (8)} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{t}.$$

Le (7), (8) ci dicono che il vettore $\frac{d\vec{b}}{ds}$ è perpendicolare sia al versore \vec{b} che al versore \vec{t} : ne segue che questo vettore ha la direzione del versore \vec{n} e possiamo scrivere, indicando con k un coefficiente di proporzionalità,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = k \vec{n} .$$

Tenendo presente che $|\vec{db}/ds| = |\tau|$ si ricava che $k = |\tau|$ e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = |\tau| \vec{n} .$$

Possiamo precisare il segno della torsione τ assumendo che sia

$$(9) \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \tau \vec{n} .$$

La quantità dotata di segno $T = \frac{1}{\tau}$ si dice raggio di torsione.

Per ottenere un'espressione cartesiana della torsione τ , moltiplichiamo scalarmene la (9) per il versore normale \vec{n} ; si ha:

$$\tau = \vec{n} \times \frac{d\vec{b}}{ds} .$$

Essendo $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ si ottiene:

$$\tau = \vec{n} \times \frac{d}{ds} (\vec{t} \wedge \vec{n}) = \vec{n} \times \left(\frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} \right) ,$$

$$\tau = \vec{n} \times \left(\frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \vec{n} \right) + \vec{n} \times \left(\vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} \right) .$$

Poiché $\frac{d\vec{t}}{ds} = c \vec{n}$ si ottiene

$$\tau = \vec{n} \times (c\vec{n} \wedge \vec{n}) - \vec{t} \times \left(\vec{n} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} \right) .$$

Poiché $\vec{n} \wedge \vec{n} = 0$ si ha :

$$(10) \quad \tau = -\vec{t} \times \vec{n} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} .$$

Se ora teniamo presente che $\vec{n} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{t}}{ds}$ possiamo scrivere:

$$\tau = -\vec{t} \times \left[\frac{1}{c} \frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{d\vec{t}}{ds} \right) \right],$$

$$\tau = -\frac{1}{c^2} \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{t}}{ds^2}.$$

Poiché $\vec{t} = \frac{d\vec{P}}{ds}$ si ottiene:

$$(11) \quad \tau = -\frac{1}{c^2} \frac{d\vec{P}}{ds} \times \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \wedge \frac{d^3\vec{P}}{ds^3}.$$

L'espressione cartesiana della (11) è:

$$(12) \quad \tau = -\frac{1}{c^2} \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

Possiamo scrivere la (12) indicando simbolicamente una sola colonna; si ha:

$$(13) \quad \tau = -\frac{1}{c^2} \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

Notiamo che la torsione τ dipende dalle derivate fino al 3° ordine delle funzioni parametriche della curva. Ciò era prevedibile a priori osservando che il piano osculatore dipende dalle derivate fino al 2° ordine e quindi le variazioni del piano osculatore dipendono dalle derivate fino al 3° ordine.

N. 5 – Formule di Frenet

Come è noto, ogni vettore può esprimersi come combinazione lineare di tre vettori non complanari, come $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$. Vogliamo esprimere le derivate rispetto ad s dei versori $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ per mezzo dei vettori stessi.

Le derivate dei vettori \vec{t} e \vec{b} già le conosciamo; sappiamo infatti che si ha:

$$(1) \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = c \vec{n}, \quad (2) \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \tau \vec{n}.$$

Rimane da esprimere la derivata $\frac{d\vec{n}}{ds}$ per mezzo dei tre versori indicati e

ciò si può fare facilmente. Infatti, poiché $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\vec{b} \wedge \vec{t}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds}, \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{n} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge c \vec{n}. \end{aligned}$$

Ma $\vec{n} \wedge \vec{t} = -\vec{b}$ e $\vec{b} \wedge \vec{n} = -\vec{t}$; si ottiene pertanto

$$(3) \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\tau \vec{b} - c \vec{t}.$$

Le (1), (2), (3) sono le formule di Frenet.

N. 6 – Piano osculatore ad una curva

Si dice piano osculatore ad una curva γ in un punto P la posizione limite del piano $\bar{\omega}$ passante per la tangente alla curva γ nel punto P e per un altro punto P_1 della curva, quando P_1 tende al punto P muovendosi su γ .

Vogliamo dimostrare che se Q è un generico punto del piano osculatore, la sua equazione vettoriale è:

$$(1) \quad (Q - P) \times \dot{P} \wedge \ddot{P} = 0.$$

Dimostrazione (G. Moretti- Analisi Matematica, vol II, p. 2^a, pag. 181- Hoepli).

Supponiamo che il punto P che descrive la curva γ sia funzione di un generico parametro t , quindi $P = P(t)$. Allora il vettore $d\vec{P} = \vec{P}' dt$ ci dà la direzione (e il verso) della tangente alla traiettoria nel punto P .

Ne segue che il piano $\bar{\omega}$ sopra detto è il piano individuato da questa tangente e dal punto P_1 , ossia è il piano passante per P e parallelo ai due vettori $d\vec{P}$ e $P_1 - P$.

Se allora prendiamo un punto Q sul piano $\bar{\omega}$, i tre vettori

$Q - P$, $d\vec{P} (= \vec{P}' dt)$ e $P_1 - P$ saranno complanari e pertanto il loro prodotto misto sarà nullo, cioè

$$(2) \quad (Q - P) \times \vec{P}' dt \wedge (P_1 - P) = 0.$$

Ma per il punto P_1 infinitamente vicino al punto P si ha lo sviluppo di Taylor

$$(3) \quad P_1 - P = \vec{P}' dt + \frac{1}{2} \vec{P}'' dt^2 + \vec{R}_2,$$

ove \vec{R}_2 è un infinitesimo per $dt \rightarrow 0$.

Sostituendo nella (2) l'espressione di $P_1 - P$ fornita dalla (3) si ha:

$$(Q - P) \times \vec{P}' dt \wedge (\vec{P}' dt + \frac{1}{2} \vec{P}'' dt^2 + \vec{R}_2).$$

Il terzo termine entro parentesi è trascurabile per $dt \rightarrow 0$, perché esso è un infinitesimo di terzo ordine. Sciogliendo il prodotto si ha:

$$(Q - P) \times \vec{P}' dt \wedge \vec{P}' dt + \frac{1}{2} (Q - P) \times \vec{P}' dt \wedge \vec{P}'' dt = 0.$$

Il primo termine della somma è nullo perché è tale il prodotto vettoriale $\vec{P}' \wedge \vec{P}'$. Si ottiene pertanto:

$$(Q - P) \times \vec{P}' dt \wedge \vec{P}'' dt = 0.$$

Dividendo per dt^3 si ottiene la (1), cioè

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{P}} \wedge \vec{\mathbf{P}} = 0 :$$

essa è l'equazione vettoriale del piano osculatore alla curva nel punto $\mathbf{P}(s)$.
 Se X, Y, Z sono le coordinate correnti di un punto del piano, l'equazione cartesiana del piano osculatore è:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

N. 7 – Centro di curvatura ed evoluta di una curva

Dato nel piano un riferimento cartesiano Oxy, consideriamo la curva γ di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{con} \quad (a \leq t \leq b).$$

Ricordiamo che le coordinate del centro di curvatura relative ad un generico punto $P(x,y)$ della curva e il corrispondente raggio di curvatura sono date dalle formule:

$$(2) \quad X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}$$

$$(3) \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}.$$

L'evoluta della curva è il luogo dei centri di curvatura, quindi essa è rappresentata dalle equazioni parametriche (2).

Consideriamo il caso di un'ellisse di equazioni parametriche

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t \quad \text{con} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Le coordinate del centro di curvatura relative ad un generico punto della curva sono

$$(4) \quad X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad Y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

Le (4) sono anche le equazioni parametriche dell'evoluta della curva.

Il raggio di curvatura relativo ad un generico punto $P(a \cos t, b \sin t)$ è dato dalla formula

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

N. 8 – Evolvente di una curva

Dato nel piano un riferimento cartesiano Oxy, consideriamo la curva γ di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{ove} \quad (a \leq t \leq b) .$$

Ricordiamo, senza darne la dimostrazione (A.Ghizzetti, Esercizi II, pg 443), che l'evolvente della curva ha le equazioni parametriche:

$$(2) \quad \begin{cases} X = x - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \cdot \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt \\ Y = y - \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \cdot \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt \end{cases}$$

ove t_0 è una costante arbitraria .

In particolare, consideriamo una circonferenza e teniamo presente che essa ha le equazioni parametriche

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Subito si ottiene

$$x' = -r \sin t, \quad y' = r \cos t \quad \text{e} \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = r .$$

Sostituendo nelle equazioni del sistema (2) si ha:

$$X = r \cos t - \frac{-r \sin t}{r} \cdot \int_{t_0}^t r \, dt, \quad Y = r \sin t - \frac{r \cos t}{r} \cdot \int_{t_0}^t r \, dt .$$

Si ricava così che le equazioni parametriche dell'evolvente della circonferenza sono :

$$(3) \quad \begin{cases} X = r[\cos t + (t - t_0) \sin t] \\ Y = r[\sin t - (t - t_0) \cos t] \end{cases} .$$

Assumendo $t_0 = 0$ ed $r = 1$ si trova che il grafico dell'evolvente di una circonferenza è quello indicato in fig. C-4.

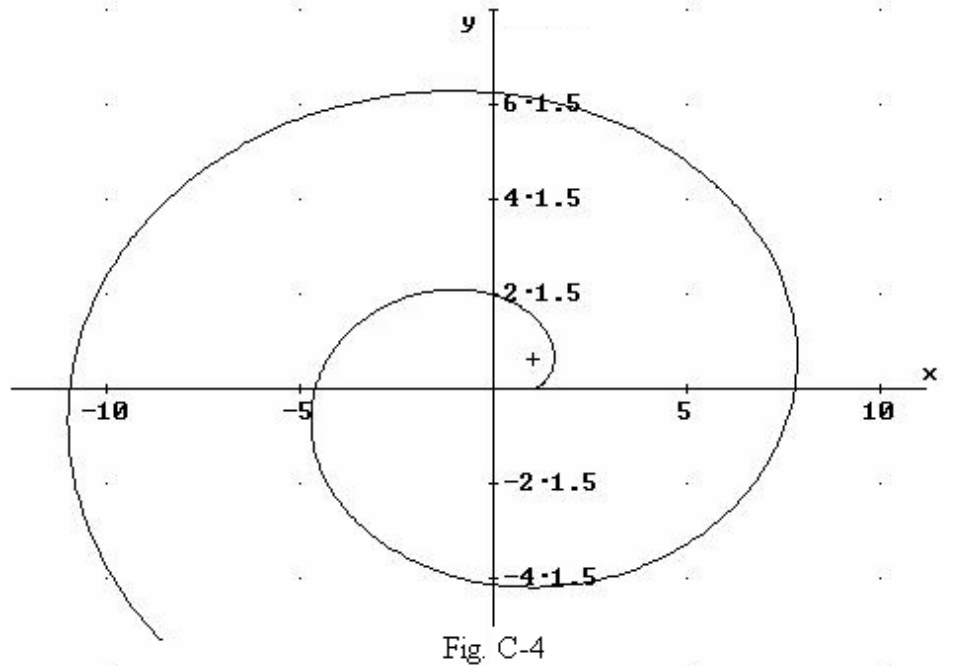


Fig. C-4

Quadrando e sommando le equazioni del sistema (3), dopo aver posto $t_0 = 0$, si ottiene:

$$(4) \quad X^2 + Y^2 = r^2(t^2 + 1) .$$

Questa equazione rappresenta una circonferenza il cui raggio cresce con il tempo. Se ora introduciamo un sistema di coordinate polari (ρ, t) di polo O, la (4) assume la forma

$$(5) \quad \rho = r\sqrt{t^2 + 1} .$$

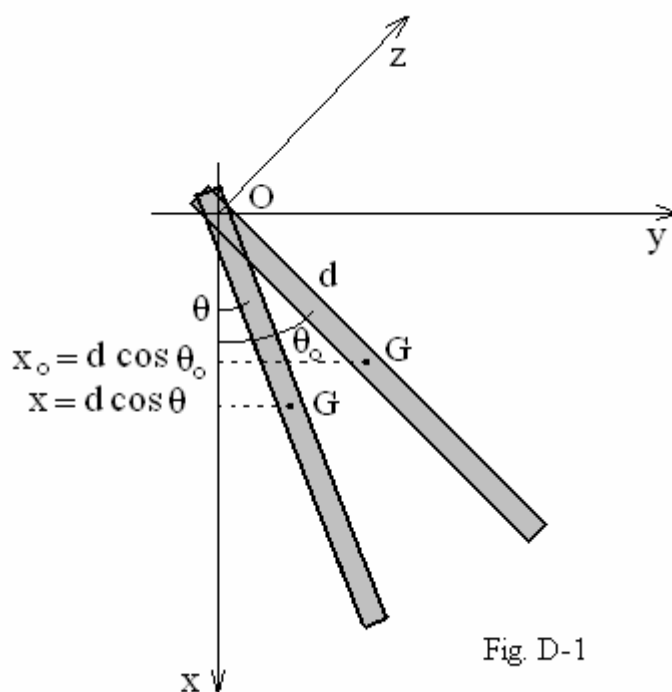
Ne segue che l'evolvente di una circonferenza è una curva aperta a forma di spirale .

APPENDICE D

ARGOMENTI VARI

N. 1 – Equazione del moto di un pendolo composto

Sia S un pendolo composto, ossia un corpo rigido girevole senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per un punto O avente la distanza d dal baricentro G del corpo. Consideriamo un riferimento cartesiano $R \equiv Oxyz$, con l'asse x diretto verticalmente verso il basso e l'asse z orizzontale (fig. D-1).



Possiamo ricavare l'equazione del moto del pendolo per mezzo della 2^a equazione cardinale della dinamica. Prendendo il polo T coincidente con il polo O dell'asse di rotazione si ha:

$$(1) \quad \vec{M}_0^{(e)} = \frac{d\vec{P}_0}{dt}.$$

Essa ci dice che:

“Il derivato rispetto al tempo del momento delle quantità di moto del sistema S coincide, in ogni istante, con il momento risultante di tutte le forze esterne (effettive ed eventuali forze apparenti del moto relativo, se il riferimento non è inerziale), purché il polo O sia fisso o coincida con il baricentro”.

Per l'espressione esplicita del momento polare si ha:

$$(2) \quad \overline{M}_0^{(e)} = \overline{OG} \wedge (\overline{\Phi} + m\vec{g}) = \overline{OG} \wedge m\vec{g} ;$$

infatti, in assenza di attrito, la reazione vincolare $\overline{\Phi}$ è applicata all'asse e quindi il suo momento polare rispetto al punto O è nullo.

Proiettando scalarmente la (2) su una retta orientata \underline{a} , coincidente con l'asse z , si ha:

$$(3) \quad M_a^{(e)} = \frac{dP_a}{dt} .$$

Se indichiamo con ϑ l'angolo che la retta orientata \overline{OG} forma con l'asse x , misurato positivamente in senso antiorario, si ha:

$$(4) \quad M_a^{(e)} = -mgd \cdot \sin\vartheta .$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene, in valore e segno:

$$(5) \quad I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mgd \cdot \sin\vartheta .$$

Per fugare ogni dubbio sulla validità del segno dell'equazione (5) possiamo fare il seguente riscontro.

Quando il pendolo sale a destra dell'asse x si ha:

$$\begin{aligned} \vartheta > 0, \quad \dot{\vartheta} > 0, \quad \ddot{\vartheta} < 0, \quad dP_a/dt = I\ddot{\vartheta} < 0 ; \\ mgd \cdot \sin\vartheta < 0, \quad M_a^{(e)} = -mgd \cdot \sin\vartheta < 0 . \end{aligned}$$

Quando il pendolo sale a sinistra dell'asse si ha:

$$\begin{aligned} \vartheta < 0, \quad \dot{\vartheta} < 0, \quad \ddot{\vartheta} > 0 \quad dP_a/dt = I\ddot{\vartheta} > 0 ; \\ mgd \cdot \sin\vartheta > 0, \quad M_a^{(e)} = -mgd \cdot \sin\vartheta > 0 . \end{aligned}$$

Dalla (5) si ricava

$$(6) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{mgd}{I} \cdot \sin \vartheta = 0 .$$

La (6) è l'equazione del moto del pendolo composto . Per oscillazioni di piccola ampiezza essa diventa

$$(7) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{mgd}{I} \cdot \vartheta = 0 .$$

Ricordiamo brevemente che la (6) si può ricavare anche per mezzo del “teorema delle forze vive”.

Infatti, indicando con $L_{o,t}^{(a)}$ il lavoro delle forze attive nell'intervallo di tempo $(0, t)$ e con $L_{o,t}^{(v)}$ il lavoro delle reazioni vincolari, si ha:

$$(8) \quad T - \cancel{T_0} = L_{o,t}^{(a)} + \cancel{L_{o,t}^{(v)}} .$$

Ma $T_0 = 0$ perché il pendolo parte dalla quiete;

inoltre $L_{o,t}^{(v)} = 0$ perché il lavoro delle reazioni vincolari è nullo. Infatti, quando i vincoli sono privi di attrito, le reazioni vincolari sono sempre normali all'asse e quindi nella rotazione del solido esse compiono un lavoro nullo.

Quando il baricentro del pendolo scende dall'altezza iniziale x_0 alla generica altezza x , dalla (8) si ha:

$$(9) \quad T = L_{o,t}^{(a)} = mg(x - x_0) .$$

Se indichiamo con ϑ_0 e ϑ le ampiezze degli angoli che la retta \overline{OG} forma con l'asse x in queste condizioni, si ha:

$$x_0 = d \cos \vartheta_0, \quad x = d \cos \vartheta .$$

Sostituendo nella (9) si ottiene:

$$T = mgd \cos \vartheta - mgd \cos \vartheta_0 ;$$

$$T - mgd \cos \vartheta = -mgd \cos \vartheta_0 ;$$

$$(10) \quad \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 - mgd \cos \vartheta = E = \text{cost} .$$

Derivando rispetto al tempo, dalla (10) si ha:

$$\frac{1}{2} I \cdot 2 \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + mgd \dot{\vartheta} \sin \vartheta = 0 ;$$

ossia
$$\ddot{\vartheta} + \frac{md}{I} g \cdot \sin \vartheta = 0 ;$$

e per piccole oscillazioni
$$\ddot{\vartheta} + \frac{md}{I} g \cdot \vartheta = 0 , \text{ cioè } \ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \vartheta = 0 .$$

Si ritrova così l'equazione del moto (7) già vista.

La grandezza $\ell = I/md$ si dice “lunghezza ridotta” del pendolo composto.

Essa è uguale alla lunghezza di un pendolo semplice che ha il periodo di oscillazione uguale a quello del pendolo composto.

Problemi di Liceo

Vediamo ora due problemi, che sono un ricordo dei lontani anni del Liceo.

N. 2 - Problema geometrico

In un triangolo rettangolo ABC è inscritta una circonferenza di raggio r ;
determinare i cateti del triangolo sapendo che la misura dell' altezza
relativa all'ipotenusa BC è $\frac{12}{5}r$ (fig.D-2).

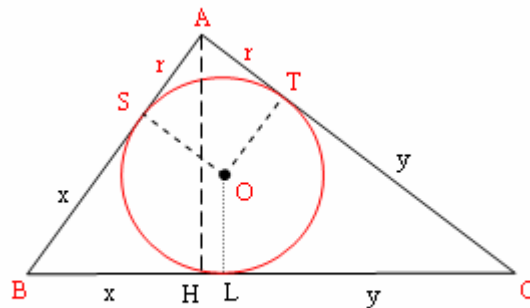


Fig. D-2

Siano $BS = BL$ i segmenti di tangente condotti dal punto B e $CL = CT$ i segmenti di tangente condotti dal punto C .

Poniamo $x = BS = BL$, $y = CL = CT$ e indichiamo con AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sia infine A l'area del triangolo .
Date queste indicazioni si ha:

$$2A = \overline{AB} \times \overline{AC} , \quad 2A = \overline{BC} \times \overline{AH} ;$$

da cui
$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AH} ,$$

ossia
$$(x + r) \cdot (y + r) = (x + y) \cdot \frac{12}{5}r .$$

Si ricava: (1)
$$xy + (x + y) \cdot r + r^2 = (x + y) \frac{12}{5}r .$$

Applicando al triangolo il teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

$$(x + y)^2 = (x + r)^2 + (y + r)^2 ,$$

da cui: (2) $xy = (x + y) \cdot r + r^2 .$

Sostituendo la (2) nelle (1) si ha:

$$2(x + y)r + 2r^2 = (x + y) \cdot \frac{12}{5} r ,$$

$$x + y + r = \frac{6}{5}(x + y), \rightarrow : \quad (3) \quad x + y = 5r .$$

Riunendo le due equazioni (2) , (3) si ha il sistema risolvibile

$$\begin{cases} x + y = 5r \\ xy = r(x + y) + r^2 . \end{cases}$$

Si tratta di un sistema simmetrico di 2° grado che ha le due soluzioni simmetriche

$$x = 2r, \quad y = 3r \quad \text{e} \quad x = 3r, \quad y = 2r.$$

Per i cateti del triangolo si ha:

$$\overline{AB} = x + r = 3r, \quad \overline{AC} = y + r = 4r$$

e $\overline{AB} = 4r, \quad \overline{AC} = 3r .$

N. 3 – Un problema sulle età di due persone

Un individuo A ha il doppio dell'età che un altro individuo B aveva quando A aveva l'età che B ha adesso; e quando B avrà l'età che A ha adesso, allora essi avranno insieme 90 anni. Trovare le età delle due persone.

Sia x l'età attuale di A, e y l'età attuale di B . Possiamo dire:

* A aveva l'età che B ha adesso (cioè l'età y) $x - y$ anni fa,
e allora B aveva l'età $y - (x - y)$, cioè $2y - x$.

Abbiamo quindi la prima equazione

$$x = 2(2y - x) .$$

* B avrà l'età che A ha adesso (cioè l'età x) fra $x - y$ anni,
e allora A avrà l'età $x + (x - y)$, cioè $2x - y$.

Abbiamo quindi la seconda equazione:

$$x + (2x - y) = 90 .$$

Riducendo le due equazioni a forma normale si ottiene il sistema:

$$(a) \quad \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - y = 90 . \end{cases}$$

Si ottiene subito la soluzione: $x = 40$ anni, $y = 30$ anni .