Nazario Magnarelli

GEOMETRIA

Generazione proiettiva delle superfici rigate

PREFAZIONE

Questo lavoro di Geometria è diviso in tre parti. Nella prima parte sono presentati gli elementi essenziali della Teoria delle quadriche e delle superfici algebriche e, in particolare, delle superfici rigate. Alcuni esercizi consentono di avere una comprensione più profonda di questa teoria.

Nelle altre due parti sono svolti vari problemi che riguardano la generazione proiettiva delle superfici rigate. Essi sono stati assegnati nelle Prove d'Esame presso l'università "La Sapienza", di Roma, nel corso degli anni passati e sono veramente interessanti perché richiedono conoscenze generali e capacità di trasferirle sul piano operativo.

Lo studio delle superfici, e più in generale della Geometria Proiettiva, è trascurato da anni dall'insegnamento universitario, poiché la Disciplina è stata da tempo superata dai nuovi sviluppi della matematica. Del resto, non sono mai stati pubblicati libri specifici dedicati alla trattazione di esercizi analoghi a quelli presentati in questo lavoro. La risoluzione dei problemi riportati nel presente libro è motivo di soddisfazione per il suo Autore, che ha potuto ricavare suggerimenti solo dalla risoluzione di sei problemi riportati nella pubblicazione O.R.U.R.

Il nostro piccolo Eserciziario vuole salvare dall'oblio la parte più significativa di una disciplina che, in passato, ha avuto tanto rispetto.

Latina, Giugno 2005

L'autore

Nazario Magnarelli

BIBLIOGRAFIA

1) **E. Martinelli, Geometria II – Libreria M. Bozzi, Genova;**
2) **G. Vaccaro, Teoria delle Curve e Superfici – Libreria Veschi, Roma;**
3) **F. Conforto, Geometria Analitica – Edizioni Docet, Roma;**
4) **F. Conforto, Geometria Descrittiva – Edizioni Docet, Roma;**
5) **O.R.U.R. Esercizi di Geometria Descrittiva – La Goliardica, Roma.**
6) **R. Ghinelli – R. Mazzocco, Esercizi di Geometria; Mediterranean Press ;**
7) **N. Magnarelli , Teorema di Désargues sul quadrangolo completo; QDL N. 31 – Centro ricerche Ugo Morin; Paderno del Grappa (TV).**

INDICE

PARTE PRIMA

ELEMENTI DI TEORIA DELLE QUADRICHE E DELLE SUPERFICI

CAPITOLO PRIMO

ELEMENTI DI TEORIA DELLE QUADRICHE

N. 1 – Classificazione delle quadriche in base alla loro sezione con il piano improprio $x_4 = 0$.

Consideriamo una quadrica in coordinate omogenee e troviamo la sua conica all'infinito C_∞ intersecandola con il piano improprio $x_4 = 0$ (F. Conforto, Geometria I, pg. 230):

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ +2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0 , \qquad x_4 = 0 . \end{cases}$$

L'equazione della C_∞ è

$$(2) \qquad C_\infty = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \ ;$$

in coordinate non omogenee si ha:

$$(3) \qquad C_\infty = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \ .$$

La C_∞ è una conica degenere se e solo se si ha

$$(4) \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Ciò premesso, una quadrica che non contenga come parte il piano improprio si dirà ellissoide, paraboloide o iperboloide a seconda che la sua sezione con il piano improprio (cioè C_∞) sia rispettivamente una conica non degenere totalmente immaginaria, una conica degenere o una conica non degenere e dotata di punti reali (ovviamente infiniti).
Ora la C_∞ è una conica degenere se e solo se il suo determinante A_{44} è nullo. Si conclude:
" condizione necessaria e sufficiente perché una quadrica sia un paraboloide è che il suo determinante sia nullo, cioè che si abbia $A_{44} = 0$.

N. 2 – Sezione piana di una quadrica
Ricordiamo il teorema: " Ogni piano dello spazio interseca una quadrica secondo una conica, escluso il caso in cui il piano faccia parte per intero della quadrica ". Senza mancare di generalità, possiamo dimostrare il teorema intersecando la quadrica con il piano xy $(z=0)$. Consideriamo il sistema:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ +2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \;, \qquad\qquad z = 0 \;. \end{cases}$$

Si ha (2) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \;;$$

la (2) è appunto l'equazione di una conica del piano $z = 0$.

Se poi intersechiamo la quadrica con il piano improprio $x_4 = 0$, si ottiene l'equazione

$$(3) \qquad a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}{x_3}^2 = 0 \;.$$

Interpretando x_1, x_2, x_3 come coordinate omogenee sul piano improprio $x_4 = 0$, la (3) rappresenta l'equazione della conica all'infinito C_∞ della quadrica.
In coordinate non omogenee la (3) si scrive

$$(4) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0 \;.$$

La (4) rappresenta, per conto suo, una quadrica: Poiché la (4) è omogenea in x,y,z essa è un <u>cono quadrico</u>. Possiamo concludere dicendo:

"Eguagliando a zero il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione di una quadrica, si ottiene il cono quadrico che dall'origine proietta la conica all'infinito della quadrica".

N. 3 – Classificazione delle quadriche in quadriche a punti ellittici, parabolici, iperbolici

Ricordiamo che ogni piano dello spazio interseca una quadrica secondo una conica, escluso il caso in cui la quadrica sia degenere e il piano faccia parte totalmente di essa.
Ciò premesso, sia F una quadrica ed α un piano ad essa tangente in un suo punto P non doppio. Come abbiamo detto, il piano interseca la quadrica secondo una conica C passante per il punto P.
Tutte le rette del piano α passanti per il punto P hanno due intersezioni con la F, e quindi con la conica C, assorbite nel punto P. Ne deriva che la conica C ha

in P tangente indeterminata, sicché la C è una conica degenere in due rette per P. Si può quindi enunciare:
" I piani tangenti ad una quadrica (ovvero passanti per un suo punto doppio) la intersecano secondo coniche degeneri".
Inversamente: " Un piano che intersechi una quadrica secondo una conica degenere è un piano ad essa tangente (ovvero passante per un suo punto doppio).

Da quanto precede risulta che da ogni punto di una quadrica escono due rette, per guisa che le quadriche sono superfici rigate. Si badi bene, però, che esse possono non apparire rigate dal punto di vista reale. Tale è ad es. il caso della sfera.
Concludendo:
" Se si esclude il caso della quadrica spezzata in due piani, da ogni punto non doppio di una quadrica F escono due sole rette di F che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate. Nei tre casi rispettivi il punto P si dice iperbolico, parabolico o ellittico".

Sussiste il seguente teorema che ci limitiamo a ricordare:
" I punti non doppi di una quadrica sono tutti della stessa specie e precisamente o tutti iperbolici, o tutti parabolici o tutti ellittici. Le tre alternative si verificano a seconda che il determinante A della quadrica sia $>, =, < 0$. In corrispondenza le quadriche si possono classificare in quadriche a punti iperbolici, parabolici o ellittici ".

N. 4 – Equazione del piano tangente ad una quadrica in un suo punto

Consideriamo l'equazione generale di una quadrica in coordinate omogenee

$$(1)\qquad \begin{aligned}&a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ &+2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0\end{aligned}.$$

L'equazione del piano tangente alla quadrica in un suo punto $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ è:

$$(2)\qquad \begin{aligned}&(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4')x_1 + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4')x_2 + \\ &+(a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4')x_3 + (a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4')x_4 = 0.\end{aligned}$$

La (2) è anche l'equazione del piano polare del punto $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ rispetto alla quadrica. In particolare, l'equazione del piano polare del punto improprio $P(\ell, m, n)$ rispetto alla quadrica è:

$$(3)\qquad \begin{aligned}&(a_{11}\ell + a_{12}m + a_{13}n)x_1 + (a_{21}\ell + a_{22}m + a_{23}n)x_2 + \\ &+(a_{31}\ell + a_{32}m + a_{33}n)x_3 + (a_{41}\ell + a_{42}m + a_{43}n)x_4 = 0.\end{aligned}$$

Ora le coordinate omogenee del punto improprio dell'asse z sono $Z_\infty(0,0,1,0)$, quindi $\ell = m = 0$, $n = 1$. Il piano polare di questo punto rispetto alla quadrica ha un'equazione che subito si ricava dalla (3):

(4) $$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 = 0 .$$

N. 5 – Equazioni cartesiane di quadriche notevoli

Consideriamo le equazioni:

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 , \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 , \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 ,$$
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 , \qquad ax^2 = y \; .$$

Queste equazioni rappresentano un cilindro con le generatrici parallele all'asse z, soltanto che la curva direttrice sul piano xy
1) nel primo caso è una ellisse (cilindro ellittico),
2) nel secondo e nel terzo caso è un'iperbole (cilindro iperbolico),
3) nel quarto caso è una ellisse immaginaria (cilindro ellittico immaginario),
4) nel quinto caso è una parabola (cilindro parabolico).

Consideriamo anche le equazioni:

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \;\; (A<0,\ A_{44}\neq 0), \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \;\; (A>0,\ A_{44}\neq 0),$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \;\; (A>0,\ A_{44}\neq 0), \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \;\; (A<0,\ A_{44}\neq 0),$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \;\; (A<0,\ A_{44}00) \; , \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-=2z \;\; (A>0,\ A_{44}\neq 0) \; .$$

Esse rappresentano rispettivamente le seguenti quadriche:
1) ellissoide reale a punti ellittici,
2) ellissoide immaginario,
3) iperboloide a punti iperbolici o ad una falda,
4) iperboloide a punti ellittici o a due falde,
5) paraboloide a punti ellittici o paraboloide ellittico,
6) paraboloide a punti iperbolici o a sella.

Possiamo proseguire l'elenco con le seguenti quadriche degeneri.
Se $A = 0$, $A_{44} \neq 0$, si ha un cono irriducibile ;

se $A=0$, $A_{44}=0$, si ha un cilindro.
Teniamo presente che se $A_{44}=0$, la C_∞ è una conica spezzata in due che possono essere rette reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate: il cilindro risulta rispettivamente iperbolico, parabolico o ellittico.

Ricordiamo anche che: ogni cubica sghemba irriducibile appartiene a qualche quadrica, precisamente a ∞^2 quadriche.

N. 6 – Esempi di quadriche

Esempio 1) Studiare la quadrica $x^2+y^2-2xy-z^2+z=0$;
possiamo anche scrivere $(x-y)^2-z^2+z=0$.

L'origine è un punto semplice avente come piano tangente il piano $z=0$.
Questo piano interseca la quadrica secondo la conica $(x-y)^2=0$, che si spezza in due rette reali e coincidenti: pertanto la quadrica è a punti parabolici e per essa si ha $A=0$. Quando $A=0$ la quadrica, se non è spezzata in due piani, è un cono se $A_{44}\neq 0$, è un cilindro se $A_{44}=0$. Calcoliamo il discriminante:

$$A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1+1=0. \tag{1}$$

Concludiamo che <u>la quadrica è un cilindro</u>; i suoi punti sono ovviamente parabolici.

Possiamo trovare lo stesso risultato attraverso lo studio della C_∞. Indicando con t la quarta coordinata omogenea, si ha il sistema:

$$C_\infty=\begin{cases}(x-y)^2-z^2+zt=0\\ t=0 \quad .\end{cases}$$

Si vede subito che la C_∞ è una conica degenere, spezzata nelle rette :

$$\begin{cases}x-y\pm z=0\\ t=0 \quad .\end{cases} \tag{2}$$

Ne segue che la quadrica è un cilindro e per essa si ha $A_{44}=0$; come è ovvio, i suoi punti sono parabolici: e infatti si ha $A=0$.

Esempio 2) Si studi la quadrica $x^2-3y^2-2xy-z^2+2z=0$.

(1) $$A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1(-1)=+1>0\ ;$$

(2) $$A_{44}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=3+1=4.$$

La quadrica è un iperboloide a punti iperbolici, o iperboloide ad una falda.

Esempio 3) Si studi la quadrica $x^2+y^2-z^2+2z=0$.

(1) $$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\quad ,\qquad A_{44}=-1\neq 0\ .$$

Quindi $A<0$ e $A_{44}\neq 0$. Fino a questo punto la quadrica può essere un ellissoide reale o un iperboloide a due falde. Ma se osserviamo la conica all'infinito della quadrica

$$C_\infty=x^2+y^2-z^2=0$$

vediamo che essa è una conica non degenere dotata di infiniti punti reali; per es. $(\pm\lambda,0,\pm\lambda,0)$ o $(0,\pm\lambda,\pm\lambda,0)$. Pertanto la quadrica è un iperboloide a punti ellittici o a due falde.

Esempio 4) Studiare la quadrica Q: $3xy-4xz+y=0$.

La quadrica passa semplicemente per l'origine O delle coordinate ove è tangente al piano $y=0$. Tale piano interseca la quadrica secondo la conica sezione

(1) $$C_s:\qquad xz=0,$$

che è una conica degenere spezzata in due rette reali e distinte $x=0$, $y=0$.
Ne segue che la quadrica è a punti iperbolici .

Passiamo ora a coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 e intersechiamo la Q con il piano improprio $x_4 = 0$. Si ha la conica all'infinito

(2) $$C_\infty: \; x_1(3x_2 - 4x_3) = 0 \; .$$

Poiché la C_∞ è spezzata in due rette reali e distinte, la quadrica è un parabolide. Riunendo i due risultati, possiamo dire che la quadrica è un parabolode a punti. iperbolici, o a sella .

Esempio 5) Studiare la quadrica Q: $x^2 + z^2 - 2yz + 2y = 0$.

Se intersechiamo la quadrica con il piano $y = 0$ (tangente nell'origine O), si ha la conica sezione $$C_s: \; x^2 + z^2 = 0.$$

Poiché la conica è spezzata in due rette immaginarie coniugate, possiamo dire che la quadrica è a punti ellittici.

Passiamo ora a coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 e intersechiamo la Q con il piano improprio $x_4 = 0$. Si ha la conica all'infinito

(2) $$C_\infty: \; x_1^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = 0 \; , \quad x_4 = 0.$$

Essa è una conica non degenere e possiede (infiniti) punti reali; ne segue che la quadrica è un iperboloide.
Riunendo i due risultati, possiamo dire che la quadrica è un iperboloide a punti ellittici, o a due falde.

NOTA. Diamo alcuni punti reali della C_∞, tenendo presente che per essi si ha sempre $x_4 = 0$: (0,0,0) – (0,k,0) – (k,k,k) – (3,5,1) – (3,5,9) – (3,17,5) – (4,5,2) - (5,13,1)- (5,17,3), ecc.

Esempio 6) Studiare la quadrica Q: $x^2 - y^2 - 2yz + 2z = 0$.

Calcoliamo il determinante A e il discriminante A_{44} della quadrica. Si ha:

(1) $$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad ,$$

(2) $$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ .$$

La quadrica è a punti iperbolici e non può essere un parabolode, essendo $A_{44} \neq 0$.

Se osserviamo la conica all'infinito della quadrica

(2) $$C_\infty : \ x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - 2x_2x_3 = 0 \ , \quad x_4 = 0 ,$$

vediamo che essa non è degenere e possiede punti reali; esempio: $(0,2,-1)$, $(5,1,12)$. Si conclude che la quadrica Q è un iperboloide ad una falda.

Esempio 7) In un riferimento cartesiano Oxyz, è data la quadrica di equazione

(1) $$Q: \ 2x^2 + (y-z)^2 = 2 ;$$

riconoscere che essa rappresenta un cilindro.

Possiamo scrivere $\quad Q: \ 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2 = 0$.

Calcoliamo il determinante A e il discriminante A_{44} della quadrica. Si ha:

(2) $$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2A_{44} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(+2-2) = 0 \ .$$

Quindi $\quad A = 0$, $\quad$ la quadrica è a punti parabolici.
Poiché $A = 0$, $\quad A_{44} = 0$, $\quad$ la quadrica è un cilindro, e precisamente un cilindro ellittico , dato che la sua intersezione con il piano xy è una ellisse.

Poiché la quadrica è un cilindro ellittico, la sua conica C_∞ deve essere spezzata in due rette complesse coniugate. E infatti si ha:

(3) $$C_\infty : \begin{cases} 2x^2 + (y-z)^2 - 2t^2 = 0 \\ t = 0 \ , \end{cases}$$

da cui $\qquad C_\infty: \quad (y-z)^2 = -2x^2.$

Come si vede, la C_∞ è effettivamente spezzata nelle rette complesse coniugate:

(4) $$y - z = \pm i\sqrt{2}\cdot x\,.$$

Si vede subito che il punto P(1,1,1) appartiene al cilindro; vogliamo trovare la generatrice passante per tale punto.
A tale scopo, consideriamo la generica retta passante per il punto P e imponiamo la condizione che essa soddisfi l'equazione del cilindro.

Retta per P $$\frac{x-1}{\ell} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{n} = k \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + k\ell \\ y = 1 + km \\ z = 1 + kn \ . \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione (1) si ha:

(5) $$2(1+k\ell)^2 + (km - kn)^2 - 2 = 0\,,$$

(*) $$2 + 2k^2\ell^2 + 4k\ell + k^2m^2 + k^2n^2 - 2k^2mn - 2 = 0\,,$$

(6) $$k^2(2\ell^2 + m^2 + n^2 - 2mn) + 4k\ell = 0\,.$$

L'equazione (6) è identicamente soddisfatta per qualsiasi valore di k se si ha:

(7) $$\begin{cases} \ell = 0 \\ 2\ell^2 + m^2 + n^2 - 2mn = 0\ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \ell = 0\,, \quad (m-n)^2 = 0\ .$$

Poiché i coefficienti ℓ, m, n sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo dire che la soluzione del sistema (7) è:

(8) $$\ell = 0\,, \qquad m = 1\,, \qquad n = 1\,.$$

La generatrice del cilindro passante per il punto P(1,1,1) ha quindi le equazioni:

(*) $$x = 1\,, \qquad y = 1 + k\,, \qquad z = 1 + k\ , \qquad \text{ossia}$$

(9) $$x = 1\,, \qquad y = z\ .$$

N. 7 – Superfici particolari (F. Conforto, Geometria analitica, pg. 212)

Consideriamo l’equazione di una superficie del tipo

(1) $$f(x,y)=0,$$

e siano p,q due numeri qualsiasi tali che $f(p,q)=0$.

Ne segue che qualunque punto della retta

(2) $$\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases},$$

cioè qualunque punto di coordinate (p,q,z), con la z arbitraria, soddisfa l’equazione (1). Ciò ci dice che la superficie è costituita da rette parallele all’asse z e si riduce cosi ad un cilindro con le generatrici parallele a detto asse. L’equazione $f(x,y)=0$ è la sezione di tale cilindro con il piano $z=0$ (piano xy) e si può considerare come la direttrice del cilindro su questo piano.
Come caso particolare, se la $f(x,y)=0$ è del tipo

(3) $$ax+by+c=0,$$

essa rappresenta nello spazio un piano parallelo all’asse z.

N. 8 – Superfici di rotazione (F. Conforto, Esercizi di Geometria, pg. 279)

Sia λ una linea qualsiasi dello spazio data dall'intersezione di due superfici, e sia

(1) $$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

la sua equazione. Se facciamo ruotare questa linea attorno ad una retta fissa s (detta asse) con la quale essa sia rigidamente collegata, otteniamo una superficie di rotazione, cioè rotonda (fig. 1).

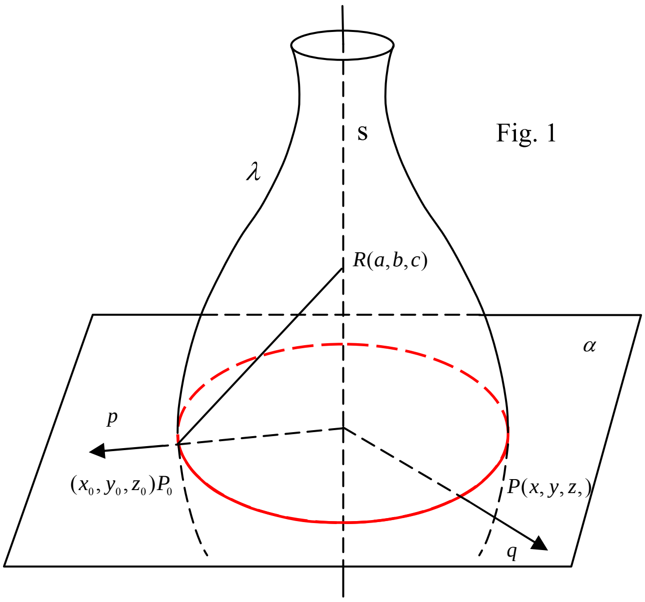


Fig. 1

Ogni punto della linea λ descrive una circonferenza, detta parallelo, che giace in un piano perpendicolare all'asse. I piani passanti per l'asse, invece, intersecano la superficie secondo curve tutte uguali fra loro, simmetriche rispetto all'asse, le quali sono dette meridiani. Indicheremo questi meridiani con la lettera C e non li dobbiamo confondere con la linea λ, che in generale è sghemba (fig.1).

Se ℓ, m, n sono i parametri direttori della retta s ed R(a,b,c) è un suo punto, la retta s avrà le equazioni:

(2) $$\frac{x-a}{\ell}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}\quad .$$

Ora, sia P(x,y,z) un punto generico della superficie rotonda; esso proverrà dalla rotazione intorno ad s di un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ della curva λ. Ne segue che il vettore $\overrightarrow{P_oP}$ giace in un piano α perpendicolare al vettore $\vec{v}(\ell, m, n)$ e si avrà il prodotto scalare nullo $\overrightarrow{P_oP} \times \vec{v} = 0$; ne segue che il piano α ha l'equazione:

(3) $$\ell(x - x_o) + m(y - y_o) + n(z - z_o) = 0 .$$

Ma per ogni punto R(a,b,c) dell'asse di rotazione s si ha $\overline{RP} = \overline{RP_o}$; di conseguenza fra le coordinate dei punti P e P_o si ha non soltanto la relazione (3), ma anche la relazione

(4) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (x_o - a)^2 + (y_o - b)^2 + (z_o - c)^2 .$$

Le (3), (4) sono due relazioni che debbono essere soddisfatte da ogni punto della superficie di rotazione. Per ogni punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ della curva λ si ha inoltre:

(5) $$\begin{cases} f(x_o, y_o, z_o) = 0 \\ \varphi(x_o, y_o, z_0) = 0 \end{cases} .$$

Eliminando x_o, y_o, z_o fra le quattro relazioni (3),(4),(5), si ottiene un'unica relazione fra le variabili x,y,z, soddisfatta da tutti i punti della superficie di rotazione, e che è l'equazione cartesiana della superficie stessa.

N. 8 – Problema sulle superfici di rotazione

Una linea Γ ha le equazioni parametriche

(1) $$x = t , \qquad y = 2t , \qquad z = t^2 .$$

Trovare l'equazione della superficie rotonda generata dalla rotazione della linea Γ attorno alla retta s di equazioni

(2) $$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

<u>Soluzione</u>. Dalla (2) si ha $x = -(y - 1)$, $z = 0$; da cui

(3) $$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1}, \qquad z = 0 .$$

Ne segue che i parametri direttori della retta s sono

(*) $\ell = 1, \qquad m = -1, \qquad z = 0.$

Del resto questi parametri si ottengono dai minori, con segno alterno, della matrice formata con i coefficienti delle incognite dei due piani che generano la retta (2); cioè:

(4) $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Da essa si ottengono i minori:

(*) $$\ell = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad m = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

E' facile notare che la linea Γ è data dall'intersezioni delle due superfici:

(5) $$\Gamma: \begin{cases} z - x^2 = 0 \\ y - 2x = 0\ ; \end{cases} \qquad \text{ciò ci ricorda il sistema} \quad \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0\ . \end{cases}$$

Γ è una linea piana perché si ottiene intersecando un cilindro (con le generatrici parallele all'asse y) con il piano $y - 2x = 0$ (che passa per l'asse z).

Come punto R(a,b,c) dell'asse s possiamo prendere il punto R(1,0,0).
L'equazione della superficie di rotazione si ottiene eliminando x_o, y_o, z_o dalle quattro equazioni del sistema:

(A) $$\begin{cases} (6) \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = (x_o - 1)^2 + {y_o}^2 + {z_o}^2 \\ (7) \quad 1(x - x_o) - 1(y - y_o) = 0 \\ (8) \quad y_o = 2x_o, \quad z_o = {x_o}^2\ . \end{cases}$$

Dalle (7), (8) si ricava

(*) $x - y = x_o - y_o, \quad \to \quad x - y = x_o - 2x_o, \quad x_o = y - x\ .$

Possiamo cos' esprimere x_o, y_o, z_o in funzione di x,y,z: si ha

(9) $x_o = y - x\ , \qquad y_o = 2(y - x), \qquad z_o = (y - x)^2.$

Sostituendo le espressioni di x_o, y_o, z_o nella prima equazione del sistema (6) si ricava in successione:

(8) $$(x-1)^2+y^2+z^2=(y-x-1)^2+4(y-x)^2+(y-x)^4,$$

(*) $$(y-x)^2+1-2(y-x)+4(y-x)^2+(y-x)^4=(x-1)^2+y^2+z^2,$$

(*) $$\begin{gathered}\cancel{y^2}+\cancel{x^2}-2yx+1-2y+2x+4y^2+4x^2-8yx+(y-x)^4= \\ =\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+z^2 \quad ,\end{gathered}$$

e quindi:

(9) $$(y-x)^4+4x^2+4y^2-z^2-10xy+4x-2y=0.$$

La (9) è l'equazione della superficie di rotazione che si voleva trovare.

CAPITOLO SECONDO

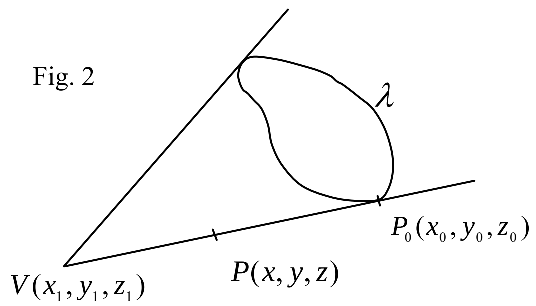
PROBLEMI SU CONI E CILINDRI

Problema N. 1 - Cono di cui è assegnato vertice e direttrice.

Scrivere l'equazione del cono che dal punto V(0,0,2) dell'asse z proietta la curva λ di equazione

(1) $$\begin{cases} x^2 - 2xz + y - 1 = 0 \\ 2x + z = 0\ . \end{cases}$$

Fig. 2



Spieghiamo, una volta per tutte, il procedimento che ci permette di risolvere problemi di questo tipo sul cono e problemi analoghi sul cilindro.

Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del vertice V e sia P(x,y,z) un punto qualunque del cono, distinto da V. La generatrice PV si appoggerà in un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ della direttrice λ (fig. 2), sicché l'equazione della retta PV sarà:

(2) $$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}\ .$$

Se la linea λ è data come intersezione di due superfici, il punto $P(x_o, y_o, z_o)$ dovrà inoltre soddisfare le due relazioni

(3) $$f(x_o, y_o, z_o) = 0\,, \qquad \varphi(x_o, y_o, z_o) = 0\,.$$

Le equazioni (2), (3) formano allora un sistema di quattro equazioni fra le sei variabili x,y,z, e x_o, y_o, z_o. Eliminando le variabili x_o, y_o, z_o tra di esse, si ottiene una equazione tra le sole x,y,z che è soddisfatta da tutti i punti del cono e quindi essa rappresenta l'equazione cartesiana del cono (F. Conforto, Geometria Analitica, pg. 282).

Nel nostro caso si ha il sistema:

$$(4) \qquad \begin{cases} (4) \quad \dfrac{x}{x_o}=\dfrac{y}{y_o}=\dfrac{z-2}{z_o-2} \\ (5) \quad {x_o}^2-2x_oz_o+y_0-1=0, \qquad (6)\ \ 2x_o+z_o=0\ . \end{cases}$$

Dalla (4) si ricava $\dfrac{x}{x_o}=\dfrac{z-2}{z_o-2}$, $\dfrac{y}{y_o}=\dfrac{x}{x_o}$.

E poiché $z_o=-2x_o$, possiamo scrivere:

$$(*) \qquad x=\frac{(z-2)x_o}{-2x_o-2}\ , \quad \rightarrow \quad x=\frac{(2-z)x_o}{2x_o+2},$$

$$(*) \qquad 2x_ox+2x=2x_o-zx_o, \qquad 2x_o-zx_o-2x_ox=2x\ , \qquad \text{da cui}$$

$$(5) \qquad x_o=\frac{2x}{2-z-2x}\ .$$

Poiché $z_o=-2x_o$ si ricava la relazione:

$$(6) \qquad x_o=\frac{-4x}{2-z-2x}\ .$$

Se ora consideriamo la relazione $y_o=yx_o/x$, la (5) ci permette di ricavare anche y_o. Si ha:

$$(*) \qquad y_o=\frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{2-z-2x}\ , \qquad \text{e quindi}$$

$$(7) \qquad y_o=\frac{2y}{2-z-2x}.$$

Sostituiamo i valori di x_o, y_o, z_o dati dalle (5),(6),(7) nella relazione

$$(*) \qquad {x_o}^2-2x_oz_o+y_o-1=0 \qquad \text{si ottiene:}$$

(*) $$\frac{4x^2}{(2-z-2x)^2}-2\cdot\frac{2x}{(2-z-2x)}\cdot\frac{(-4x)}{(2-z-2x)}+\frac{2y}{2-z-2x}-1=0\,,$$

(*) $$4x^2+16x^2+2y(2-z-2x)-(2-z-2x)^2-1=0\,, \quad \text{da cui}$$

(8) $$16x^2-z^2-4xy-4xz-2yz+8x+4y+4z-4=0\,.$$

L'equazione (8) è soddisfatta da tutti i punti P(x,y,z) del cono e quindi rappresenta l'equazione cartesiana del cono stesso.

Problema N. 2 - Cono di cui è assegnato vertice e direttrice.

Trovare l'equazione cartesiana del cono avente il vertice nel punto V(0,2,0) e la curva

(1) $$x+y=0\,, \qquad x^2-z^2+8x+8=0$$

come direttrice.

Soluzione. Sia $P_o(x_o, y_o, z_o)$ un punto qualsiasi della direttrice (1) e P(x,y,z) un punto della generatrice VP_o. L'equazione del cono si ottiene eliminando le variabili x_o, y_o, z_o fra le quattro equazioni del sistema:

(2) $$\begin{cases} \dfrac{x-0}{x_o-0}=\dfrac{y-2}{y_o-2}=\dfrac{z-0}{z_o-0} \\ x_o+y_o=0, \qquad x_o^2-z_o^2+8x_o+8=0\,. \end{cases}$$

Poiché $y_o=-x_o$ subito si ottiene:

(3) $$\frac{x}{x_o}=\frac{y-2}{-x_o-2} \qquad \text{e} \qquad (4) \quad \frac{x}{x_o}=\frac{z}{z_o}\,.$$

Dalla (3), si ricava:

(*) $$-xx_o-2x-x_oy+2x_o=0\,, \quad \rightarrow \quad x_o(2-x-y)=2x \quad \text{e quindi}$$

(5) $$x_o=\frac{2x}{2-y-x}\,.$$

Dalla (4) si ha $\quad z_o = \frac{z}{x} \cdot x_o \quad$ e quindi

(6) $$z_o = \frac{2z}{2-y-x} \; .$$

Sostituendo le espressioni di x_o, z_o nella relazione $x_o^2 - z_o^2 + 8x_o + 8 = 0$ si ha:

(*) $$\frac{4x^2}{(2-y-x)^2} - \frac{4z^2}{(2-y-x)^2} + \frac{16x}{2-y-x} + 8 = 0 \, , \qquad \text{da cui}$$

(*) $$x^2 - z^2 + 4x(2-y-x) + 2(2-y-x)^2 = 0 \, ,$$

(*) $$x^2 - z^2 + \cancel{8x} - \cancel{4xy} - 4x^2 + 8 + 2y^2 + 2x^2 - \cancel{8x} + \cancel{4xy} = 0 \, ,$$

(*) $$-x^2 + 2y^2 - z^2 - 8y + 8 = 0 \, ,$$

(*) $$x^2 - 2y^2 + 8y - 8 + z^2 = 0 \, , \qquad \text{infine}$$

(7) $$x^2 - 2(y-2)^2 + z^2 = 0 \, .$$

La (7) è un'equazione omogenea nelle variabili $x, \; y-2, \; z$. Si ritrova così che essa rappresenta un cono di vertice V(0,2,0).

La superficie (7) è una superficie di rotazione; essa, infatti ,se consideriamo la curva $f(x, y) = x - \sqrt{2}(y-2) = 0$ e al posto di x poniamo $\sqrt{x^2 + z^2}$ si ottiene la superficie

(8) $$\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{2}(y-2) = 0 \, .$$

Questa equazione rappresenta la superficie che si ottiene facendo ruotare la curva attorno all'asse y.

La traccia della superficie (7) sul piano $y = 0$ (piano xz) è la circonferenza

(*) $$x^2 + z^2 - 8 = 0 \, .$$

Ciò ci conferma che l' equazione (7) rappresenta un cono rotondo avente per asse l'asse y.

Problema N. 3 - Cilindro di cui è assegnata la direttrice e la direzione delle generatrici

Trovare l'equazione cartesiana del cilindro con le generatrici parallele alla retta

(1) $$x = z\,, \qquad y = 2z$$

e la cui direttrice, sul piano xy, è la conica:

(2) $$xy - x - y = 0\,, \qquad z = 0\,.$$

Soluzione. Le generatrici del cilindro hanno i parametri direttori

(3) $$\ell = 1\,, \qquad m = 2\,, \qquad n = 1\,.$$

Ciò premesso, sia $P_o(x_o, y_o, z_o)$ un punto qualsiasi della direttrice (2) e P(x,y,z) un punto qualsiasi della generatrice VP_o. L'equazione del cilindro si ottiene eliminando le variabili x_o, y_o, z_o fra le quattro equazioni del sistema

(4) $$\begin{cases} \dfrac{x - x_o}{1} = \dfrac{y - y_o}{2} = \dfrac{z - z_o}{1} \\ x_o y_o - x_o - y_o = 0, \qquad z_o = 0 \end{cases}.$$

Poiché $z_o = 0$ subito si ottiene:

(*) $$x - x_o = z\,, \qquad y - y_o = 2z\,, \qquad \text{da cui}$$

(5) $$x_o = x - z\,,$$ (6) $$y_o = y - 2z\,.$$

Sostituendo le (5), (6) nella relazione $x_o y_o - x_o - y_o = 0$ si ottiene:

(*) $$(x - z)\cdot(y - 2z) - (x - z) - (y - 2z) = 0$$

(*) $$(x - z)\cdot(y - 2z) - (x + y - 3z) = 0\,, \qquad \text{e quindi}$$

(7) $$2z^2 + xy - 2xz - yz - x - y + 3z = 0\,.$$

Intersecando con il piano xy, $z = 0$, si riscontra che la direttrice sul piano stesso è l'iperbole

(8) $$xy - x - y = 0\,.$$

Problema N. 4 - Cono circoscritto ad una sfera data

Trovare l'equazione del cono avente il vertice nel punto V(0,0,1) e circoscritto alla sfera di centro C(2,0,0) e raggio $r = 1$.

Possiamo dire che la sfera è poggiata sul piano orizzontale $z = -1$ e tocca il piano nel punto $T(2,0,-1)$.

Equazione della sfera $\quad (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1, \quad$ ossia

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3 = 0 .$$

Il cono è costituito dalle ∞^1 rette per V(0,0.1) che sono tangenti alla sfera.
La retta per il punto V ha le equazioni:

(*) $$\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z-1}{1}; \qquad \text{si ricava}$$

(2) $$x = \ell(z-1), \qquad y = m(z-1).$$

Troviamo la relazione che deve intercedere tra ℓ ed m perché la retta sia una generatrice del cono. Eliminando x, y tra le equazioni della sfera e della retta si ha:

(*) $$\ell^2(z^2 - 2z + 1) + m^2(z^2 - 2z + 1) + z^2 - 4\ell(z-1) + 3 = 0,$$

(3) $$(\ell^2 + m^2 + 1)z^2 - 2(\ell^2 + m^2 + 2\ell)z + \ell^2 + m^2 + 4\ell + 3 = 0 .$$

Le radici di questa equazione sono le z dei punti comuni alla retta (2) 2 alla sfera. Se vogliamo che la retta sia tangente, il discriminante dell'equazione (3) deve essere nullo, quindi:

(*) $$(\ell^2 + m^2 + 2\ell)^2 - (\ell^2 + m^2 + 1)\cdot(\ell^2 + m^2 + 4\ell + 3) = 0,$$

(*) $$\cancel{\ell^4} + \cancel{m^4} + 4\ell^2 + \cancel{2\ell^2 m^2} + \cancel{4\ell^3} + 4m^2\ell - \cancel{\ell^4} - \cancel{\ell^2 m^2} - \cancel{4\ell^3} + \\ - 3\ell^2 - \cancel{\ell^2 m^2} - \cancel{m^4} - 4m^2\ell - 3m^2 - \ell^2 - m^2 - 4\ell - 3 = 0 ,$$

(*) $$4\ell^2 - 3\ell^2 - \ell^2 - 3m^2 - m^2 - 4\ell - 3 = 0,$$

(4) $$4m^2 + 4\ell + 3 = 0 .$$

Per un punto del cono debbono essere così soddisfatte le tre relazioni date dal sistema:

(5) $$\begin{cases} x = \ell(z-1), \qquad y = m(z-1) \\ 4m^2 + 4\ell + 3 = 0 \ . \end{cases}$$

Eliminando ℓ, m fra queste tre relazioni si ottiene un'altra relazione tra le sole incognite x,y,z. Questa relazione, dovendo essere soddisfatta da tutti i punti del cono, ne rappresenta l'equazione cartesiana. Procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$\ell = \frac{x}{z-1} \ , \qquad m = \frac{y}{z-1} .$$

Sostituendo nella relazione $4m^2 + 4\ell + 3 = 0$ si ha:

(*) $$\frac{4y^2}{(z-1)^2} + \frac{4x}{z-1} + 3 = 0 \, , \qquad \text{infine}$$

(6) $$4y^2 + 4x(z-1) + 3(z-1)^2 = 0 \ .$$

La (6) è l'equazione cartesiana del cono circoscritto alla sfera e, come si vede, essa è un'equazione omogenea di $2°$ grado.

Problema N. 5 - Sezioni di un cono circoscritto ad una sfera

Trovare l'equazione del cono avente il vertice nel punto V(0,0,2) e circoscritto alla sfera di centro C(1,0,0) e raggio $r = 1$ (Fig. 3).

Equazione della sfera $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1$, ossia

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 .$$

Il cono è costituito dalle ∞^1 rette per V(0,0.2) che sono tangenti alla sfera.
La retta per il punto V ha le equazioni:

(*) $$\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z-2}{1} ; \qquad \text{si ricava}$$

(2) $$x = \ell(z-2) \, , \qquad y = m(z-2) \, .$$

Troviamo la relazione che deve intercedere tra ℓ ed m perché la retta sia una generatrice del cono. Eliminando x, y tra le equazioni della sfera e della retta si ha:

(*) $$\ell^2(z^2-4z+4)+m^2(z^2-4z+4)+z^2-2\ell(z-2)=0\,,$$

(3) $$(\ell^2+m^2+1)z^2-2(2\ell^2+2m^2+\ell)z+4\ell^2+4m^2+4\ell=0\ .$$

Le radici di questa equazione sono le z dei punti comuni alla retta (2) e alla sfera. Se vogliamo che la retta sia tangente, il discriminante dell'equazione (3) deve essere nullo, quindi:

(*) $$(2\ell^2+2m^2+\ell)^2-(\ell^2+m^2+1)\cdot(4\ell^2+4m^2+4\ell)=0\,,$$

(*) $$\cancel{4\ell^4}+\cancel{4m^4}+\ell^2+\cancel{8\ell^2m^2}+\cancel{4\ell^3}+4m^2\ell-\cancel{4\ell^4}-\cancel{4\ell^2m^2}-\cancel{4\ell^3}+ \\ -\cancel{4\ell^2m^2}-\cancel{4m^4}-4m^2\ell-4\ell^2-4m^2-4\ell=0\ \ ,$$

(*) $$\ell^2-4\ell^2-4m^2-4\ell=0\,,$$

(4) $$3\ell^2+4m^2+4\ell=0\,.$$

Per un punto del cono debbono essere così soddisfatte le tre relazioni date dal sistema:

(5) $$\begin{cases} x=\ell(z-2), \qquad y=m(z-2) \\ \quad 3\ell^2+4m^2+4\ell=0\ \ . \end{cases}$$

Eliminando ℓ, m fra queste tre relazioni si ottiene un'altra relazione tra le sole incognite x,y,z. Questa relazione, dovendo essere soddisfatta da tutti i punti del cono, ne rappresenta l'equazione cartesiana. Procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$\ell=\frac{x}{z-2}\ ,\qquad m=\frac{y}{z-2}\,.$$

Sostituendo nella relazione $3\ell^2+4m^2+4\ell=0$ si ha:

(*) $$\frac{3x^2}{(z-2)^2}+\frac{4y^2}{(z-2)^2}+\frac{4x}{z-2}=0\,,$$ infine

(6) $$3x^2+4y^2+4x(z-2)=0$$

La (6) è l'equazione cartesiana del cono circoscritto alla sfera e, come si vede, essa è un'equazione omogenea di 2° grado **.**

Intersechiamo ora la superficie conica con il piano β perpendicolare all'asse x e passante per il punto (2,0,0); tale piano, quindi, è parallelo alla generatrice del cono coincidente con l'asse z:

$$(7) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 4x(z-2) = 0 \\ x = 2\ , \end{cases}$$

$$(*) \qquad 12 + 4y^2 + 8z - 16 = 0\,, \qquad\qquad (*) \qquad 4y^2 + 8z - 4 = 0\,,$$

$$(8) \qquad z = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\ .$$

Per il fuoco della parabola ($z = ay^2 + by + c$) si trova :

$$(*) \qquad y_F = -\frac{b}{2a} = 0\,, \qquad\qquad z_F = \frac{1-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{1-4/4}{-4/2} = 0\,,$$

quindi (9): $\qquad F(2,0,0)\,.$

Concludiamo che la parabola ha il fuoco nel punto di tangenza del del piano della parabola stessa con la superficie sferica.

Vogliamo ora trovare l'equazione della generatrice VT del cono, ossia della generatrice che giace nel piano xz .
La retta generica del piano xz condotta dal punto V(0,0,2) è $z = mx + 2$, quindi:

$$(10) \qquad mx - z + 2 = 0\,.$$

Equazione della circonferenza γ di centro C(1,0) e raggio $r = 1$ del piano xz:

$$(*) \qquad (x-1)^2 + z^2 = 1\,, \quad \rightarrow (11) \qquad x^2 + z^2 - 2x = 0\,.$$

Se la retta $mx - z + 2 = 0$ è tangente alla circonferenza γ, la sua distanza dal centro C(1,0) deve essere uguale al raggio $r = 1$:

$$(*) \qquad r = \frac{|ax_o + bz_o + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \quad \rightarrow \qquad \frac{|m - 0 + 2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1\,, \quad |m+2|^2 = m^2 + 1\,,$$

$$(*) \qquad m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1\,, \qquad\qquad 4m = -3\,.$$

Per il coefficiente angolare della retta m della retta VT, generatrice del cono, si trova $m=-3/4$ e quindi la sua equazione è

$$z=-\frac{3}{4}x+2. \tag{12}$$

Intersechiamo la circonferenza γ con la generatrice VT, ad essa tangente, e troveremo le coordinate del punto di tangenza T. Si ha:

$$\begin{cases} x^2+z^2-2x=0 \\ z=-\dfrac{3}{4}x+2\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad x^2+\left(-\frac{3}{4}x+2\right)^2-2x=0\,, \tag{13}$$

(*) $$x^2+\frac{9}{16}x^2-3x+4-2x=0\,, \rightarrow \quad 25x^2-80x+64=0\,,$$

(*) $$(5x-8)^2=0\ , \qquad x=8/5\ ;$$

L'ordinata del punto di tangenza è $z=-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}+2=-\frac{6}{5}+2=\frac{4}{5}$.

Il punto di tangenza è $T(\frac{8}{5};\frac{4}{5})$.

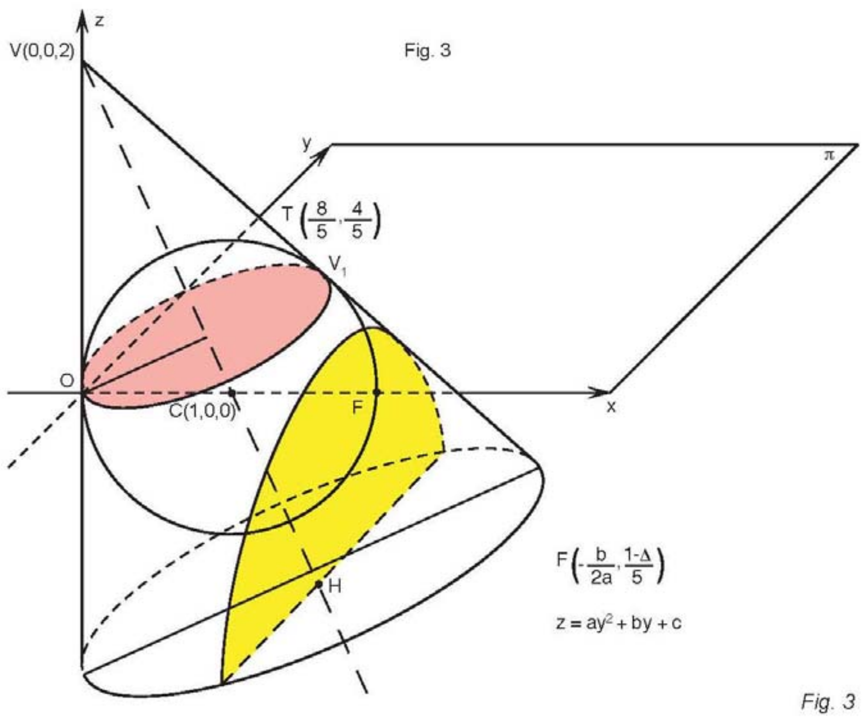


Fig. 3

Problema N. 6 - Cono circolare con un dato angolo di apertura

Dato un riferimento cartesiano Oxyz, trovare l'equazione del cono circolare che ha il vertice nell'origine O(0,0,0), per asse la retta r': $x = y = z$ e l'angolo di apertura di 30^o.

Una generica retta r per il vertice O ha le equazioni:

(1) $$x = \ell z \ , \qquad y = mz .$$

Questa retta deve formare con l'asse r': $x = y = z$ l'angolo di 30^o; quindi

(2) $$\cos\widehat{rr'} = \frac{\ell\ell' + mm' + nn'}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{\ell'^2 + m'^2 + n'^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Poiché $\ell' = m' = n' = 1$ e anche $n = 1$, dalla (2) si ha:

(*) $$\frac{\ell + m + 1}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$ da cui

(3) $$2(\ell + m + 1) = 3 \cdot \sqrt{\ell^2 + m^2 + 1}$$ e quindi

(*) $$4(\ell + m + 1)^2 = 9(\ell^2 + m^2 + 1) .$$

Poiché $\ell = \frac{x}{z}$, $m = \frac{y}{z}$, come si ricava dalle (1), ne segue:

(*) $$4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1\right)^2 = 9\left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1\right),$$

(*) $$\frac{4(x+y+z)^2}{\cancel{z^2}} = \frac{9(x^2+y^2+z^2)}{\cancel{z^2}} ,$$

(*) $$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8xy + 8xz + 8yz = 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 \ .$$

Si ricava da qui che il cono di rotazione ha l'equazione:

(4) $$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz = 0 \ .$$

Problema N. 7 - Cono circolare con un angolo di apertura di 45°

Dato un riferimento cartesiano Oxyz, trovare l'equazione del cono circolare che ha il vertice nell'origine O(0,0,0), per asse la retta r': $x = y$, $z = 0$ e l'angolo di apertura di 45^{o}.

Una generica retta r per il vertice O ha le equazioni:

(1) $$x = \ell z \ , \qquad y = mz\,.$$

Questa retta deve formare con l'asse r': $x = y$, $z = 0$ l'angolo di 45^{o}; quindi

(2) $$\cos\widehat{rr'} = \frac{\ell\ell' + mm' + nn'}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}\cdot\sqrt{\ell'^2 + m'^2 + n'^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Poiché $\ell' = m' = 1$, $n' = 0$ ed $n = 1$, dalla (2) si ha:

(*) $$\frac{\ell + m}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + 1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$ da cui

(3) $$\ell + m + = \frac{2}{2}\cdot\sqrt{\ell^2 + m^2 + 1}$$ e quindi

(*) $$(\ell + m)^2 = \ell^2 + m^2 + 1.$$

Poiché $\ell = \frac{x}{z}$, $m = \frac{y}{z}$, come si ricava dalle (1), ne segue:

(*) $$\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2 = \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1,$$

(*) $$\frac{(x+y)^2}{\cancel{z^2}} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\cancel{z^2}},$$

(*) $$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + z^2\ .$$

Si ricava da qui che il cono di rotazione ha l'equazione:

(4) $$z^2 - 2xy = 0\ .$$

CAPITOLO TERZO

ELEMENTI DI TEORIA DELLE SUPERFICI

N. 1 – Nozioni generali sulle superfici dello spazio. Coordinate curvilinee.

Una superficie Σ si può rappresentare analiticamente mediante una relazione $f(x, y, z) = 0$ tra le coordinate cartesiane x,y,z di un punto dello spazio. In molte questioni riesce però utile avere una rappresentazione parametrica della superficie (o di una sua conveniente porzione limitata); ciò si ottiene assegnando le coordinate cartesiane x,y,z di un punto variabile sulla superficie in funzione di due parametri u, v:

(1) $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Al variare dei due parametri u, v indipendentemente l'uno dall'altro il punto $P(x, y, z)$ assume una doppia infinità di posizioni e descrive la superficie Σ. Si intende che le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ debbono soddisfare a tutte quelle ipotesi di regolarità (continuità, derivabilità, ecc), in modo che il luogo descritto dal punto P(x,y,z) abbia tutte quelle proprietà che intuitivamente si attribuiscono ad una superficie.

Se nelle (1) si dà ad una delle due variabili, ad es. alla v, un valore costante $v = v_1$, le equazioni

(2) $$x = x(u, v_1), \quad y = y(u, v_1), \quad z = z(u, v_1)$$

rappresentano una linea della superficie, che si dice linea $v = v_1$.
Variando con continuità il parametro v_1 anche la linea $v = v_1$ varia con continuità e descrive la superficie Σ. Si ottiene in tal modo sulla superficie un sistema ∞^1 di linee dette linee $v = \text{costante}$ o linee v.
Similmente si avrà un secondo sistema ∞^1 di linee u, ciascuna delle quali si ottiene dando alla u un valore costante; anche tale sistema ricoprirà tutta la superficie. Per ogni punto P della superficie Σ passa in generale una e una sola linea $u = u_1$ ed una e una sola linea $v = v_1$. Per ogni punto P della superficie rimangono così determinati i due valori u_1, v_1 che si dicono coordinate curvilinee di P, mentre le linee $u = \text{costante}$ e $v = \text{costante}$ si dicono linee coordinate.
Si ha così una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie e le coppie di coordinate (u_1, v_1).
Le coordinate curvilinee cosi introdotte sono dette anche coordinate di Gauss, poiché Gauss per primo ne fece un sistematico uso.
Dobbiamo osservare che, eliminando i parametri u, v tra le equazioni parametriche (1) si ottiene una relazione del tipo $f(x, y, z) = 0$ che è l'equazione cartesiana della superficie.

L'equazione del piano tangente alla superficie Σ nel punto P(x,y,z) è

(3) $$(X-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P+(Y-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P+(Z-z)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P=0,$$

ove X,Y,Z sono coordinate correnti.

Il piano tangente si può ritenere individuato dal punto P e dai due punti P_u, P_v infinitamente vicini a P e posti rispettivamente sulle linee $u=$ costante e $v=$ costante passanti per il punto P. Nel passaggio da P a P_u si ha $du=0$, e così nel passaggio da P a P_v si ha $dv=0$. Le coordinate dei punti P_u e P_v sono:

(*) $$P_u\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}dv, y+\frac{\partial y}{\partial v}dv, z+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right),$$

(*) $$P_v\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du, y+\frac{\partial y}{\partial u}du, z+\frac{\partial z}{\partial u}du\right).$$

L'equazione del piano tangente sarà allora

(4) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0.$$

Infatti tale piano passa per i punti P, P_u, P_v, come si può verificare sostituendo a X, Y, Z le coordinate dei punti detti.

Passiamo a coordinate omogenee; sia $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ l'equazione della superficie e $P(x_1',x_2',x_3',x_4')$ un punto di essa. L'equazione del piano tangente alla superficie in tal punto è

(5) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P x_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P x_3+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_P x_4=0.$$

N. 2 – Superfici algebriche

Si dice superficie algebrica di ordine n una superficie che si ottiene eguagliando a zero un polinomio $f(x,y,z)$ di grado n nelle variabili x, y, z, cioè

(1) $$f(x,y,z)=\sum_{0\le p+q+r\le n} a_{pqr}x^p y^q z^r=0.$$

Indicheremo una superficie di questo tipo con il simbolo F^n o Σ^n (E. Martinelli, Geometria II, pg. 530).

Se invece ci riferiamo a coordinate cartesiane o proiettive omogenee, l'equazione della superficie algebrica è del tipo

(2) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

dove f è un polinomio omogeneo, o forma.

La superficie F si dirà riducibile se il polinomio si può scomporre nel prodotto di due polinomi, si dirà irriducibile nel caso contrario.
Il grado complessivo del polinomio f nell'equazione (1) o nella forma (2) si dice ordine della superficie
Le quadriche sono superfici algebriche del secondo ordine.
Ricordiamo anche che: ogni cubica sghemba irriducibile appartiene a qualche quadrica, precisamente a ∞^2 quadriche.

Annullando i termini di grado massimo dell'equazione di una Σ^n si ha il cono, di ordine n, che dall'origine proietta la curva sezione di Σ^n con il piano improprio. In particolare, un cono algebrico di ordine n è intersecato da un piano non passante per il suo vertice V secondo una curva algebrica C^n che ha anch'essa l'ordine n; possiamo quindi pensare che il cono si ottenga proiettando la C^n dal vertice V.
Se il piano passa per il vertice V, la C^n si spezza in n rette per V (E. Martinelli, Geometria II, pg. 532).

Monoide: una Σ^n (superficie algebrica di ordine n) con un punto $(n-1)\cdot$plo si dice monoide. Una quadrica non degenere è un monoide; una Σ^3 con un punto doppio è un monoide. Un monoide è una superficie razionale, cioè le coordinate dei suoi punti si possono esprimere come funzioni razionali di due parametri.
Affinché un punto P sia s-plo per una superficie algebrica di ordine n di equazione $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ occorre e basta che in esso si annullino tutte le derivate di ordine $s-1$ del polinomio $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e che sia $\neq 0$ almeno una delle derivate di ordine s.

N. 3 – Punti semplici e multipli di una superficie algebrica

Sia $P(x_o, y_o, z_o)$ un punto di una superficie Σ^n

(1) $$f(x, y, z) = \sum_{0 \le p+q+r \le n} a_{pqr} x^p y^q z^r = 0.$$

Il punto si dirà <u>semplice, doppio</u>, o in generale s-plo per Σ^n, se una retta generica per esso ha una due, o s intersezioni con Σ^n coincidenti in P. Sviluppando il polinomio della (1) con la formula di Taylor nell'intorno del punto P e tenendo conto che $f(x_o, y_o, z_o) = 0$, si ha:

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \cdot (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o \cdot (y - y_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o \cdot (z - z_o)\right\} +$$

(2)
$$+\frac{1}{2!}\left\{(x - x_o)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o + (y - y_o)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o + (z - z_o)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o\right\}^2 f(x, y, z) + ... +$$

$$\frac{1}{n!}\left\{(x - x_o)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o + (y - y_o)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o + (z - z_o)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o\right\}^n f(x, y, z) = 0$$

Ora una retta generica per il punto P ha l'espressione

(3) $$y - y_o = \lambda(x - x_o), \qquad z - z_o = \mu(x - x_o);$$

essa interseca la Σ^n in <u>n</u> punti, le cui ascisse sono le radici dell'equazione

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o\right](x - x_o) +$$

(3)
$$+\frac{1}{2!}\left[\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o + \mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_o\right\}^2 f(x, y, z)\right](x - x_o)^2 + ... +$$

$$+\frac{1}{n!}\left[\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o + ...\right\}^n f(x, y, z)\right](x - x_o)^n = 0 \ .$$

Questa equazione ci dice che affinché una retta generica per il punto P abbia una sola intersezione con la superficie Σ^n nel punto stesso occorre e basta che non si annullino simultaneamente le tre derivate parziali prime

(4) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o \ .$$

In questa ipotesi, P si dice un punto semplice per la Σ^n (E. Martinelli, Geometria II, pg. 533) mentre le ∞^1 per le quali si ha

(5) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o = 0$$

hanno due intersezioni (almeno)con la Σ^n riunite nel punto P. Queste rette si dicono <u>rette tangenti</u> a Σ^n nel punto semplice P. Eliminiamo λ, μ tra le relazioni (3), (5) e facciamo vedere che queste rette tangenti riempiono un piano. Infatti si ha:

(6) $$\lambda = \frac{y-y_o}{x-x_o}, \qquad \mu = \frac{z-z_o}{x-x_o} \;;$$

Sostituendo nella (5) si ottiene

(*) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o \frac{y-y_o}{x-x_o} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o \frac{z-z_o}{x-x_0} = 0,$$

da cui (7) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o (x-x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o (y-y_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o (z-z_o) = 0.$$

Il piano così ottenuto si dice <u>piano tangente</u> alla superficie Σ^n nel punto semplice P. Si ritrova così la formula ottenuta nello studio dell'Analisi matematica.

Questo piano tangente interseca la superficie Σ^n secondo una curva algebrica C^n che ha, in generale, un punto doppio nel punto di contatto.A seconda che il punto P sia per C^n un punto doppio isolato, una cuspide o un nodo reale, il punto stesso dicesi per Σ^n rispettivamente un punto ellittico, parabolico o iperbolico. Il caso delle quadriche è ben noto. <u>Nel caso delle quadriche la curva di intersezione è una C^2</u>, che si riduce ad una conica degenere.

Le tangenti principali a C^n nel punto P si dicono <u>tangenti asintotiche</u> della superficie Σ^n in P. E' ovvio che le tangenti asintotiche hanno almeno tre intersezioni con la C^n assorbite nel punto P.

Supponiamo ora che il punto $P(x_o, y_o, z_o)$ sia un punto doppio per la Σ^n, cioè che la retta generica per P abbia due intersezioni con la superficie Σ^n riunite nel punto stesso. Perché ciò accada occorre che si annullino le tre derivate parziali prime della funzione $f(x, y, z)$ nel punto P, cioè:

(8) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o = 0.$$

Ne segue che le ∞^1 rette per cui si ha

(9) $$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o\lambda+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_o\mu\right\}^2 f(x,y,z)=0$$

hanno almeno tre intersezioni con la Σ^n in P.

Eliminando i parametri λ, μ tra l'equazione (9) e le rette

(*) $$y-y_o=\lambda(x-x_o)\ , \qquad z-z_o=\mu(x-x_o),$$

si ottiene la relazione:

(10) $$\left\{(x-x_o)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o+(y-y_o)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o+(z-z_o)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_o\right\}^2 f(x,y,z)=0\,.$$

Si ottiene così che le rette che hanno tre intersezioni con la Σ^n nel punto doppio P riempiono un <u>cono quadrico</u> che si dice <u>cono tangente in P</u>.

Il cono (10) può essere irriducibile, spezzato in due piani distinti o in due piani sovrapposti; in corrispondenza il punto P si dice per Σ^n un <u>punto doppio conico, punto doppio biplanare o uniplanare</u> (E. Martinelli; Geometria II, pg. 535).

Avvertiamo inoltre che un punto doppio di Σ^n può essere isolato, ma appartenere anche ad una linea luogo di punti doppi, detta <u>linea doppia</u>. Questa circostanza già si presenta per una Σ^n riducibile, la quale ha ovviamente una linea doppia costituita dalla linea secondo cui si intersecano le due superfici componenti.

E' immediata l'estensione di quanto detto al caso di un punto s-plo per Σ^n. Il punto $P(x_o,y_o,z_o)$ è s-plo se in esso si annulla la funzione $f(x,y,z)$ e tutte le derivate sino all'ordine $s-1$, ma non tutte le derivate di ordine s. Le rette per il punto s-plo P che hanno con Σ^n <u>più di s</u> intersezioni riunite in P riempiono un cono tangente di ordine s di equazione

(*) $$\left\{(x-x_o)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_o+(y-y_o)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_o+(z-z_o)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_o\right\}^s f(x,y,z)=0\,.$$

Esercizio di applicazione (Martinelli, Geometria; pg. 539)

<u>Si scriva l'equazione di una Σ^4 avente gli assi x,y,z come rette doppie</u>.

Soluzione. La curva sezione di Σ^4 con il piano $z=0$ deve ridursi alla coppia degli assi x, y contati due volte; perciò, se $f(x,y,z)=0$ è l'equazione della Σ^4, deve essere $f(x,y,0)=\ell x^2y^2$.
Analogamente, intersecando con gli altri piani coordinati deve risultare

(*) $$f(0,y,z)=my^2z^2 \quad , \qquad f(x,0,z)=nx^2z^2 \ .$$

Ne segue che il polinomio

(*) $$f(x,y,z)-(\ell x^2y^2+mx^2z^2+ny^2z^2)$$

si annulla per $x=0$, per $y=0$ e per $z=0$, cioè è divisibile per il fattore xyz. Quindi esso è della forma $xyz(ax+by+cz+d)$.

Si conclude che l'equazione richiesta è:

(1) $$\ell x^2y^2+mx^2z^2+ny^2z^2+xyz(ax+by+cz+d)=0\,;$$

essa rappresenta la cosiddetta superficie romana di Steiner. L'origine $O(0,0,0)$ è un punto triplo triplanare; cioè il cono delle tangenti in O si spezza nei tre piani $x=0,\ y=0,\ z=0$.

N. 4 – Generalità sulle superfici rigate

Una superficie F si dice rigata se essa è il luogo di ∞^1 rette, che si dicono le sue generatrici. In altre parole, una superficie rigata è generata dal moto continuo di una retta (generatrice), che assume ∞^1 posizioni distinte nello spazio. Si deduce che per un punto generico di una rigata passa una e una sola generatrice del sistema ∞^1 di rette che formano la rigata stessa (F. Conforto; Geometria pg. 212).
Esempi di rigate sono i coni e i cilindri; essi sono costituiti da ∞^1 rette passanti per uno stesso punto, detto vertice del cono o del cilindro e che risulta un punto proprio o improprio, a seconda che si tratti di un cono o di un cilindro. I cilindri appaiono così come coni con il vertice improprio, le cui generatrici hanno tutte la stessa direzione.
Una linea γ tracciata su una rigata F si dice direttrice se essa è intersecata da ogni generatrice in uno e un sol punto, che evidentemente varia al variare della generatrice.
Sopra una rigata F vi sono infinite direttrici: tali sono infatti le sezioni piane generiche che si ottengono intersecando la F con i piani non passanti per alcuna generatrice.

Tre direttrici qualunque dello spazio individuano una e una sola rigata, per guisa che le generatrici della rigata sono ∞^1 rette che si appoggiano simultaneamente alle tre curve date (F. Conforto; Geometria D. – pg. 212).
Infatti, siano C_1, C_2, C_3 le tre direttrici e P un punto su C_1. I coni di vertice P e proiettanti C_2 e C_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare del punto P su C_1, queste rette descrivono la rigata (G. Vaccaro, Le superfici; pg. 58).

Anche una superficie algebrica può essere una superficie rigata; in tal caso essa si dice rigata algebrica. Se le tre direttrici che individuano una rigata sono algebriche, anche la rigata è algebrica .
L'iperboloide ad una falda e il paraboloide a sella sono superfici algebriche rigate dal punto di vista reale; queste quadriche, infatti, posseggono due sistemi ∞^1 di rette che giacciono per intero su di esse. Due rette distinte dello stesso sistema sono sempre sghembe fra di loro; mentre due rette di sistemi diversi hanno un punto in comune. Le quadriche rigate (non coni) ed i piani sono le sole superfici che posseggono più di un sistema ∞^1 di rette.
Per un punto generico di una rigata, che non sia una quadrica rigata dal punto di vista reale, passa una e una sola retta generatrice.
Se da un punto P di una rigata escono s generatrici della rigata, P è un punto s-plo della superficie considerata (F. Conforto; Geometria D. – pg. 328).

La sezione di una rigata con il piano improprio costituisce la direttrice all'infinito della rigata.
Il cono che proietta da un punto V qualunque la direttrice all'infinito (cioè il luogo delle parallele per V alle generatrici della rigata) si chiama cono direttore della rigata.

Quando la direttrice all'infinito è rettilinea, il cono direttore si riduce ad un piano direttore, costituito da un fascio di rette di centro V. In tal caso, se la rigata possiede un'altra direttrice rettilinea propria, essa si dice conoide (E. Martinelli; Geometria II, pg. 552). In particolare il conoide si dice retto se questa direttrice è perpendicolare al piano direttore.
Ricordiamo il conoide retto di PlücKer: $(x^2+y^2)z-2rxy=0$,
e il conoide retto di Wallis (detto cono cuneo): $k^2y^2=x^2(r^2-z^2)$.

N. 5 – Rigate sviluppabili e rigate sghembe

Il piano tangente ad una rigata in un suo punto P contiene la generatrice g della rigata per il punto stesso. Quando il punto P si sposta su questa generatrice, il piano tangente in P o resta sempre fisso o varia descrivendo un fascio di piani aventi per asse la generatrice g considerata.

La retta g si dice in tal caso generatrice singolare e i piani del fascio si possono porre in corrispondenza proiettiva con i corrispondenti punti di tangenza.
Ne segue che quando si considera una rigata, due punti distinti di una generatrice possono avere piani tangenti coincidenti solo se tutti i punti della generatrice hanno lo stesso piano tangente, che rimane sempre fisso al variare del punto di contatto: una generatrice g lungo la quale il piano tangente è fisso si dice a carattere sviluppabile.
Precisamente, il piano tangente ad una rigata nei punti di una generatrice è variabile o resta fisso a seconda che la generatrice infinitamente vicina alla generatrice considerata sia sghemba o complanare con questa. Nel secondo caso, il piano tangente è il piano delle due generatrici infinitamente vicine.
Se tutte le generatrici della rigata sono a carattere sviluppabile, la rigata si dice sviluppabile. In caso contrario la rigata si dice sghemba o gobba.

Concludendo, una rigata è sviluppabile allora e allora soltanto che ogni sua generatrice sia complanare con la generatrice infinitamente vicina. Esempi di rigate sviluppabili sono i coni o i cilindri. Un esempio più significativo è offerto dalla rigata circoscritta ad una curva sghemba λ: in tale superficie due generatrici infinitamente vicine sono complanari.
I coni, i cilindri e le superfici sviluppabili circoscritte alle curve sghembe esauriscono la classe delle rigate sviluppabili, nel senso che ogni rigata sviluppabile appartiene ad uno di questi tre tipi.
Due generatrici infinitamente vicine di una rigata circoscritta ad una curva sghemba γ stanno sul piano osculatore alla γ nel punto di contatto della prima generatrice, per modo che i piani osculatori alla curva γ appaiono come i piani tangenti alla rigata sviluppabile circoscritta alla curva γ stessa.
Giova infine osservare che le rigate sviluppabili possiedono soltanto ∞^1 piani tangenti, al contrario di quanto succede per le rigate gobbe e per le superfici non rigate, per le quali i piani tangenti sono sempre ∞^2. L'origine della denominazione di rigata sviluppabile proviene dal fatto che queste superfici, quando sono immaginate flessibili e in estensibili, possono essere distese sopra un piano senza rotture né sovrapposizioni.

Una rigata sviluppabile è costituita dalle tangenti ad una curva sghemba, oppure si riduce ad un cono o ad un cilindro. Questa curva sghemba, la quale risulta naturalmente tracciata sulla rigata, si dice spigolo di regresso della rigata.

N. 6 – Teoremi notevoli

1) Teorema di Chasles .
Se g è una generatrice di una rigata sghemba (cioè non avente carattere sviluppabile) e ad ogni punto P di g si fa corrispondere il piano tangente alla rigata in P, si genera tra la punteggiata g ed il fascio di piani di asse g una corrispondenza biunivoca che è una proiettività.
Questo teorema si può dimostrare per via analitica.

2) Teorema di Salmon.

Siano C_1, C_2, C_3 tre curve algebriche, piane o sghembe, di ordini n_1, n_2, n_3. La rigata algebrica luogo delle rette che si appoggiano a queste tre curve ha in generale l'ordine $2n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, se le curve non hanno punti in comune.

Se poi le coppie di curve (C_1, C_2), (C_1, C_3), (C_2, C_3) hanno in comune un numero di punti pari a s_{12}, s_{13}, s_{23}, l'ordine della rigata si abbassa e diviene esattamente

(*) $$n = 2n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 - s_{12} \cdot n_3 - s_{13} \cdot n_2 - s_{23} \cdot n_1 \ .$$

CAPITOLO QUARTO

ESERCIZI DI APPLICAZIONE

ESERCIZIO n. 1 (D. Ghinelli, Esercizi di Geometria; pg. 196)

Nello spazio affine ampliato è data la curva

(1) $\qquad C: \; x = t+1, \quad y = t^2+2, \quad z = t^3 \quad (\; t = \text{parametro}).$

Verificare che essa è sghemba e determinare il luogo L dei punti impropri delle tangenti a C; riconoscere che L è una conica e precisarne il tipo proiettivo.

Soluzione. Consideriamo l'equazione di un generico piano dello spazio e sostituiamo le coordinate di un generico punto della curva:

(2) $$a(t+1)+b(t^2+2)+c(t^3)+d=0\,.$$

L'equazione (2) non è identicamente soddisfatta per qualsiasi valore del parametro t e quindi la curva C non giace su un piano, ossia essa è una curva sghemba.

Ora, la tangente alla curva C in un generico punto $P(t+1, t^2+2, t^3)$ ha i parametri direttori

(3) $$x'(t)=1, \qquad y'(t)=2t, \qquad z'(t)=3t^2.$$

Queste espressioni individuano un punto improprio le cui coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 sono ad esse proporzionali,quindi:

(*) $$x_1=\rho, \qquad x_2=2t\rho, \qquad x_3=3t^2\rho \quad (\rho\neq 0) \qquad (x_4=0).$$

Si ricava $\quad t=\dfrac{x_2}{2x_1}$, e quindi $\quad x_3=3\left(\dfrac{x_2}{2x_1}\right)^2 x_1\,.$

Ne segue che il luogo dei punti impropri delle tangenti alla curva ha le equazioni:

(4) $$3x_2^2 - 4x_1x_3 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

o se si vuole $$3y^2 - 4xz = 0 \quad \text{e} \quad x_4 = 0.$$

Sul piano improprio, la (4) rappresenta una conica generale , dato che la matrice ad essa associata non è singolare.

ESERCIZIO n. 2 (D. Ghinelli, Esercizi di Geometria; pg. 197)

Nello spazio affine è data la curva C di equazioni parametriche

(1) $$x = t^2 - 1, \qquad y = t^3, \qquad z = t + 1 \ .$$

Dimostrare che essa è sghemba. Scrivere equazioni parametriche per la superficie rigata che ha C come direttrice, e come generatrice per $P \in C$ la retta tangente a C nello stesso punto P.

<u>Soluzione</u>. Il piano $ax + by + cz + d = 0$
contiene C se e solo se l'equazione in t

(*) $$a(t^2 - 1) + bt^3 + c(t + 1) + d = 0$$

risulta identicamente soddisfatta; ciò richiede che sia identicamente soddisfatta l'equazione:

(2) $$bt^3 + at^2 + ct - a + c + d = 0.$$

Deve quindi avere una soluzione non tutta nulla il sistema:

(3) $$b = 0, \quad a = 0, \quad c = 0, \quad -a + c + d = 0.$$

Poiché si ha la soluzione tutta nulla $a = b = c = d = 0$, concludiamo che non esiste alcun piano che contenga C, ossia questa curva è sghemba.

Ora, si richiede che i parametri direttori della generatrice per il generico punto $P \in C$ siano quelli della tangente nel punto stesso, e questi sono:

(*) $$x'(t) = 2t, \qquad y'(t) = 3t^2, \qquad z'(t) = 1.$$

Pertanto le equazioni parametriche della superficie rigata proposta sono:

(4) $$\begin{cases} x = t^2 - 1 + 2tv \\ y = t^3 + 3t^2 v \\ z = t + 1 + v \; . \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 3 (D. Ghinelli, Esercizi di Geometria; pg. 198)

Scrivere, nello spazio affine, le equazioni parametriche della superficie rigata Σ che ha come direttrice la curva

(1) $$C: \; x = u, \qquad y = 0, \qquad z = u^2,$$

($u =$ parametro reale) e come generatrice nel generico punto P di C la retta di parametri direttori

(2) $$\ell(u) = 0, \qquad m(u) = 1, \qquad n(u) = u^2 - u.$$

Ricavare l'equazione cartesiana di Σ nella forma $z = \varphi(x, y)$. Trovare infine le equazioni cartesiane della generatrice passante per il punto $P(1,1,1)$ di Σ.

Soluzione. Le equazioni parametriche della superficie Σ si ottengono facendo una combinazione lineare delle coordinate della direttrice (1) e dei parametri direttori (2). Si ottiene:

(3) $$x = u, \qquad y = v, \qquad z = u^2 + v(u^2 - u).$$

Se nella terza equazione sostituiamo u,v con x,y si ottiene l'equazione cartesiana richiesta:

(4) $$z = x^2 y + x^2 - xy.$$

Come suggerisce l'esercizio precedente, le equazioni parametriche della generatrice per P si ottengono dalle equazioni parametriche di Σ ponendo

(*) $$x = u = 1, \qquad y = v, \qquad z = 1.$$

Ne segue che la generatrice ha le equazioni cartesiane:

(5) $$x = 1, \qquad z = 1.$$

Possiamo trovare le equazioni della generatrice passante per il punto P(1,1,1) anche per mezzo dell'equazione del piano tangente in tal punto. Poiché

(*) $$\Sigma: \ f(x,y,z) = x^2y + x^2 - xy - z = 0 \quad \text{si ha:}$$

(*) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -1.$$

Da esse si ha: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = 3 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = 0 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P = -1$.

Quindi l'equazione del piano tangente in P è

(*) $$3(x-1) - 1(z-1) = 0, \quad \text{ossia} \quad 3x - z - 2 = 0 \ .$$

Intersechiamo la superficie Σ con questo piano. Scriviamo il sistema:

(*) $$\begin{cases} x^2y + x^2 - xy - z = 0 \\ z = 3x - 2 \ . \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione

(*) $$x^2y + x^2 - xy - 3x + 2 = 0.$$

Essa ha la sola soluzione reale $x = 1$; ne segue che la generatrice per il punto P ha le equazioni

(*) $$x = 1, \qquad z = 1.$$

La superficie è rigata perché è costituita dalle ∞^1 rette che si appoggiano alla direttrice data.

ESERCIZIO n. 4 (D. Ghinelli, Esercizi di Geometria; pg. 198)

(Spazio affine, RA-Oxyz). Sia Σ una superficie rigata avente per direttrice la curva D di equazioni parametriche:

(1) $$x = \alpha(u), \qquad y = \beta(u), \qquad z = \gamma(u) \quad (u = \text{parametro}).$$

Detti $\ell(u), m(u), n(u)$ i parametri direttori della generatrice di Σ per $P(u) \in D$, si trovino le equazioni parametriche di Σ.

Soluzione. La generatrice per il punto P(u) di D ha le equazioni parametriche:

(2) $$x = x(u) + v \cdot \ell(u), \quad y = y(u) + v \cdot m(u), \quad z = z(u) + v \cdot n(u),$$

con v parametro. Se nelle equazioni sopra scritte interpretiamo sia u che v come parametri, esse ci dànno le equazioni parametriche della superficie Σ.

Supponiamo per esempio che la generatrice passante per il suddetto punto P sia la tangente nel punto stesso; allora i parametri direttori della generatrice sono quelli della tangente, ossia sono le derivate $\alpha'(u), \beta'(u), \gamma'(u)$. Possiamo allora dire che le equzioni parametriche della superficie Σ sono:

(3) $$\begin{cases} x(u) = \alpha(u) + v \cdot \alpha'(u) \\ y(u) = \beta(u) + v \cdot \beta'(u) \\ z(u) = \gamma(u) + v \cdot \gamma'(u) \ , \end{cases} \qquad \text{con } u,v \text{ parametri}.$$

ESERCIZIO n. 5 (D. Ghinelli, Esercizi di Geometria; pg. 250)

Scrivere l'equazione cartesiana del cono Γ di vertice O avente come direttrice all'infinito la curva di equazioni parametriche (in coordinate affini omogenee):

(1) $$C_\infty: \ x_1 = t, \qquad x_2 = t^3, \qquad x_3 = t^2, \qquad x_4 = 0 \quad (t \in R).$$

Verificare che tutti i punti semplici di Γ sono parabolici.

Soluzione. Poiché C_∞ è la conica all'infinito del cono Γ, i parametri direttori della generatrice generica sono

(*) $$(t, t^3, t^2),$$

e quindi le equazioni parametriche del cono richiesto sono:

(2) $$x = tv, \qquad y = t^3 v, \qquad z = t^2 v.$$

Eliminando i parametri v e t si ottiene l'equazione cartesiana del cono.

A tale scopo, ricaviamo il parametro v dalla 1^a e dalla 3^a equazione. Si ha:

(3) $$v = \frac{x}{t},$$ (4) $$v = \frac{z}{t^2}.$$ Eguagliando si ottiene:

(*) $$\frac{x}{t} = \frac{z}{t^2},$$ da cui (5) $$t = \frac{z}{x}.$$

Sostituendo nella (3) e riunendo le espressioni si ha:

(6) $$v = \frac{x^2}{z}, \quad \text{e} \quad t = \frac{z}{x}.$$

Sostituendo le espressioni di v e t nella 2^a equazione del sistema (2) si ha l'equazione cartesiana del cono Γ:

(*) $$y = \frac{z^3}{x^3} \cdot \frac{x^2}{z}$$ e quindi: (7) $$xy = z^2.$$

Poiché il determinante della quadrica (7) è nullo, tutti i suoi punti sono parabolici.

Alto procedimento per stabilire il tipo dei punti del cono.

Consideriamo il determinante hessiano della funzione $y = \frac{z^2}{x}$ e calcoliamolo in un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$. Si ha:

(8) $$H(x_o, z_o) = \begin{vmatrix} \varphi^o_{xx} & \varphi^o_{xz} \\ \varphi^o_{zx} & \varphi^o_{zz} \end{vmatrix}.$$

Il punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ è iperbolico, parabolico o ellittico a seconda che sia

(9) $$H(x_o, z_o) < 0, \quad H(x_o, z_o) = 0, \quad H(x_o, z_o) > 0.$$

Nel nostro caso, per tutti i punti semplici del cono si ha:

$$\text{(10)} \qquad H(x_o, z_o) = \begin{vmatrix} \dfrac{2z^2}{x^3} & -\dfrac{2z}{x^2} \\ -\dfrac{2z}{x^2} & \dfrac{2}{x} \end{vmatrix} = \frac{4z^2}{x^4} - \frac{4z^2}{x^4} = 0 \ ;$$

dunque tutti i punti semplici del cono sono parabolici.

PROBLEMA 6 A (Problema su un noto teorema di Chasles)

Vogliamo illustrare con un problema il seguente teorema di Chasles:
“ Il piano tangente ad una superficie rigata in un punto P contiene la generatrice g passante per il punto stesso. Inoltre, mentre il punto P descrive la generatrice, il piano tangente in tal punto varia nel fascio di piani di asse g, corrispondendo proiettivamente a P. Se poi la generatrice è a carattere sviluppabile, il piano tangente rimane fisso al variare del punto”.

Per semplicità, consideriamo come superficie rigata una quadrica di equazione

(1) $$x^2 - 2xy - xz - 2y + z = 0\,;$$

essa passa per l’origine O(0,0,0) del riferimento cartesiano dove è tangente al piano $z = 2y$. Intersechiamo la quadrica con questo piano tangente; si ha:

(2) $$\begin{cases} x^2 - 2xy - xz - 2y + z = 0 \\ z = 2y\,, \end{cases} \qquad \text{da cui}$$

(*) $$x^2 - 2xy - 2xy = 0\,, \quad \rightarrow \quad x^2 - 4xy = 0\,,$$

quindi $$C_s: \quad x(x-4y) = 0\,.$$

La C_s è la proiezione della conica sezione sul piano xy ed è una conica degenere spezzata nelle rette $x = 0,\ x = 4y$.
Per il punto O passano quindi due rette,appartenenti alla quadrica, di equazioni

(3) $$g: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y\,, \end{cases} \qquad h: \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y\,. \end{cases}$$

Possiamo già dire che la quadrica (1) è a punti iperbolici, e quindi per il suo determinante A risulta $A > 0$. Le rette g ed h sono due generatrici della quadrica stessa.

Intersechiamo ora la (1) con il piano improprio $t = 0$. Passando a coordinate omogenee si ha il sistema:

(4) $$\begin{cases} x^2 - 2xy - xz - 2yt + zt = 0 \\ t = 0\,. \end{cases}$$

La sezione è la conica all’infinito

(5) $$C_\infty: \quad x^2 - 2xy - xz = 0\,, \quad \text{cioè} \quad C_\infty: \quad x(x - 2y - z) = 0\,.$$

La conica C_∞ si spezza in due rette reali e distinte; ne segue che la quadrica (1) è un paraboloide e per essa il discriminante è $A_{44}=0$.
Concludendo: la quadrica è un paraboloide a punti iperbolici o a sella, il quale è una superficie rigata dal punto di vista reale.

Consideriamo ora una delle due rette della quadrica passanti per il punto O e che costituiscono le generatrici passanti per il punto stesso. Prendiamo la retta:

(5) $$h: \begin{cases} x=0 \\ z=2y\ . \end{cases}$$

Dando a y i valori $y=-1,0,1,2,...$ otteniamo i punti

(6) $$A(0,-1,-2),\quad O(0,0,0),\quad B(0,1,2),\quad C(0,2,4).$$

Troviamo i piani tangenti alla quadrica in questi punti. Ricordiamo che il piano tangente in un generico punto $P(x_o,y_o,z_o)$ ha l'equazione:

(7) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P(x-x_o)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P(y-y_o)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P(z-z_o)=0.$$

Scriviamo la funzione $f(x,y,z)$ e le sue derivate parziali. Si ha:

(*) $$\begin{gathered} f(x,y,z)=x^2-2xy-xz-2y+z=0, \\ f_x=2x-2y-z,\quad f_y=-2x-2,\quad f_z=-x+1\ . \end{gathered}$$

Per ogni punto della generatrice h scriviamo ora il valore di y e l'equazione del piano tangente. Si ha:

1) $$\begin{gathered} A(0,-1,-2),\qquad y=-1, \\ f_x(A)=+2+2=4,\quad f_y(A)=-2,\quad f_z(A)=1, \\ 4(x-0)-2(y+1)+1(z+2)=0, \\ \alpha:\quad 4x-2y+z=0. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} O(0,0,0),\qquad y=0, \\ f_x(O)=0,\quad f_y(O)=-2,\quad f_z(O)=1, \\ -2(y-0)+1(z-0)=0, \\ \omega:\quad -2y+z=0. \end{gathered}$$

3) $B(0,1,2)$, $y = 1$

$$f_x(B) = -2 - 2 = -4 \ , \qquad f_y(B) = -2 \, , \qquad f_z(B) = 1 \, ,$$

$$-4(x-0) - 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \, ,$$

$$\beta: \qquad -4x - 2y + z = 0 \, .$$

4) $C(0,2,4)$, $y = 2$

$$f_x(C) = -4 - 4 = -8 \ , \qquad f_y(C) = -2 \ , \qquad f_z(C) = 1 \ ,$$

$$-8(x-0) - 2(y-2) + 1(z-4) = 0 \ ,$$

$$\gamma: \qquad -8x - 2y + z = 0 \, .$$

Tutti questi piani passano per i punti A,O,B,C della generatrice g, nonostante che questi punti siano distinti fra di loro.

Consideriamo ora il fascio di piani individuato dai piani della generatrice h:

(8) $\lambda x + \mu(2y - z) = 0$, o anche

(8') $kx + 2y - z = 0$, ove $k = \lambda/\mu$.

Notiamo quanto segue:

1') Per $\lambda = 4$, $\mu = -1$, cioè per $k = -4$, si ha il piano

$$4x - 1(2y - z) = 0 \, , \text{ ossia}$$

$$\alpha: \quad 4x - 2y + z = 0 \ ,$$

ed α è il piano tangente nel punto $A(0,-1,-2)$.

2') Per $\lambda = 0$, $\mu = -1$, cioè per $k = 0$, si ha il piano

$$-1(2y - z) = 0 \, , \text{ ossia}$$

$$\omega: \quad -2y + z = 0 \ ,$$

ed ω è il piano tangente nel punto $O(0,0,0)$.

3') Per $\lambda = -4$, $\mu = -1$, cioè per $k = 4$, si ha il piano

$$-4x - 1(2y - z) = 0 \, , \text{ ossia}$$

$$\beta: \quad -4x - 2y + z = 0 \ ,$$

e β è il piano tangente nel punto $B(0,1,2)$.

4') Per $\lambda = -8$, $\mu = -1$, cioè per $k = 8$, si ha il piano

$$-8x - 1(2y - z) = 0\text{, ossia}$$
$$\gamma: \quad -8x - 2y + z = 0 \ ,$$
e γ è il piano tangente nel punto $C(0,2,4)$.

Come si vede, esiste una corrispondenza biunivoca algebrica tra le forme di prima specie date dai punti della direttrice h e dai piani del fascio di asse h, tangenti nei punti stessi; tra di esse esiste quindi una proiettività.
Se prendiamo due terne di valori corrispondenti dei parametri y e k, collegati a queste due forme, possiamo scrivere l'equazione della proiettività eguagliando due birapporti:

(9) $$(-1,0,1,y) = (-4,0,4,k) \ .$$

Si ricava:

(*) $$\frac{(-1,0,1)}{(-1,0,y)} = \frac{(-4,0,4)}{(-4,0,k)} ,$$

(*) $$\frac{1+1}{1-0} : \frac{y+1}{y-0} = \frac{4+4}{4-0} : \frac{k+4}{k-0} \ ,$$

(*) $$\frac{2y}{y+1} = \frac{8k}{4(k+4)}, \quad \to \quad \frac{y}{y+1} = \frac{k}{k+4}$$

(*) $$y(k+4) = k(y+1) \ , \quad \text{infine}$$

(10) $$k = 4y \ .$$

La (10) è l'equazione della proiettività tra i punti della generatrice h e i corrispondenti piani del fascio aventi per asse la generatrice, che risultano tangenti alla quadrica nei punti stessi.

Verifichiamo che l'equazione della proiettività è esatta.
Infatti, per $y = 2$ si ha il punto C(0,2,4) della generatrice h, con il piano tangente

(*) $$\gamma: \quad -8x - 2y + z = 0 \ .$$

Ma quando $y = 2$, per k si ha il valore $k = 8$,

cioè $\lambda/\mu = 8$ e quindi $\lambda = -8$, $\mu = -1$.

Sostituendo questi valori di λ e μ nell'equazione del fascio di piani di asse h, che per comodità ricordiamo: (8) $\lambda x + \mu(2y - z) = 0$, si ha:

(11) $$\gamma: \quad -8x - 2y + z = 0 \ .$$

Ma la (11) è proprio l'equazione del piano tangente alla quadrica nel punto C; questa volta, però, essa è stata ottenuta non con la nota formula dell'Analisi Matematica, ma per mezzo dell'equazione della proiettività.
La verifica svolta conferma perfettamente il teorema di Chasles sulle superfici rigate.

Seconda parte.
Verifichiamo ora il teorema di Chasles anche per la generatrice g uscente dal punto O:

(1) $$g: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \ . \end{cases}$$

Dando ad y i valori $y = -1, 0, 1, 2$ otteniamo i punti
(2) $$A(-4,-1,-2), \quad O(0,0,0), \quad B(4,1,2), \quad C(8,2,4) .$$

Troviamo i piani tangenti alla quadrica in questi punti. Ricordiamo che il piano tangente in un generico punto $P(x_o, y_o, z_o)$ ha l'equazione:

(3) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (z - z_o) = 0 .$$

Scriviamo la funzione $f(x, y, z)$ e le sue derivate parziali. Si ha:

(*) $$\begin{gathered} f(x,y,z) = x^2 - 2xy - xz - 2y + z = 0, \\ f_x = 2x - 2y - z, \quad f_y = -2x - 2, \quad f_z = -x + 1 \ . \end{gathered}$$

Per ogni punto della generatrice g scriviamo ora il valore di y e l'equazione del piano tangente. Si ha:

1) $$A(-4,-1,-2), \qquad y = -1 ,$$

$$\begin{gathered} f_x(A) = -8 + 2 + 2 = -4 , \qquad f_y(A) = 8 - 2 = 6 , \qquad f_z(A) = 5 , \\ -4(x+4) + 6(y+1) + 5(z+2) = 0 ; \end{gathered}$$

piano tangente $$\alpha: \quad -4x + 6y + 5z = 0 .$$

2) $O(0,0,0)$, $y=0$,

$$f_x(O)=0\,,\qquad f_y(O)=-2\,,\qquad f_z(O)=1\,,$$
$$-2(y-0)+1(z-0)=0\,;$$

piano tangente $\omega:\quad -2y+z=0\,.$

3) $B(4,1,2)$, $y=1$

$$f_x(B)=8-2-2=4\;,\qquad f_y(B)=-8-2=-10\,,\qquad f_z(B)=-3\,,$$
$$4(x-4)-10(y-1)-3(z-2)=0\,;$$

piano tangente $\beta:\quad -4x-2y+z=0\,.$

4) $C(8,2,4)$, $y=2$

$$f_x(C)=16-4-4=8\;,\qquad f_y(C)=-16-2=-18\;,\qquad f_z(C)=-7\;,$$
$$8(x-8)-18(y-2)-7(z-4)=0\;,$$
$$8x-18y-7z-64+36+28=0\,;$$

piano tangente $\gamma:\quad 8x-18y-7z=0\,.$

Consideriamo ora il fascio di piani individuato dai piani della generatrice g:

(4) $\lambda(x-4y)+\mu(z-2y)=0\,,$ o anche

(4') $k(x-4y)+\mu(2y-z)=0\,,$ ove $k=\lambda/\mu$.

Notiamo quanto segue:

1') Per $\lambda=-4$, $\mu=-5$, cioè per $k=4/5$, si ha il piano

$$-4(x-4y)-5(2y-z)=0\,,$$
$$-4x+16y-10y+5z=0\;,\ \text{ossia}$$
$$\alpha:\quad -4x+6y+5z=0\,,$$

ed α coincide con il piano tangente nel punto $A(-4,-1,-2)$.

2’) Per $\lambda = 0$, $\mu = -1$, cioè per $k = 0$, si ha il piano

$$-1(2y - z) = 0 \text{, ossia}$$
$$\omega: \quad -2y + z = 0 \ ,$$

ed ω coincide con il piano tangente nel punto $O(0,0,0)$.

3’) Per $\lambda = 4$, $\mu = 3$, cioè per $k = 4/3$, si ha il piano

$$4(x - 4y) + 3(2y - z) = 0 \ ,$$
$$4x - 16y + 6y - 3z = 0 \ , \quad \text{ossia}$$
$$\beta: \quad 4x - 10y - 3z = 0 \ ,$$

e β coincide con il piano tangente nel punto $B(4,1,2)$.

4’) Per $\lambda = 8$, $\mu = 7$, cioè per $k = 8/7$, si ha il piano

$$8(x - 4y) + 7(2y - z) = 0 \ ,$$
$$8x - 32y + 14y - 7z = 0 \ , \quad \text{ossia}$$
$$\gamma: \quad 8x - 18y - 7z = 0 \ ,$$

e γ coincide con il piano tangente nel punto $C(8,2,4)$.

Come si vede, esiste una corrispondenza biunivoca algebrica tra le forme di prima specie date dai punti della direttrice g e i piani del fascio aveni per asse questa direttrice e tangenti nei punti stessi; tra queste due forme esiste quindi una proiettività.
Se prendiamo due terne di valori corrispondenti dei parametri y e k, collegati a queste forme, possiamo scrivere l’equazione della proiettività eguagliando due birapporti:

(5) $$(-1,0,1,y) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{3}, k) \ .$$

Per non avere formule ingombranti calcoliamo preventivamente i valori dei due birapporti. Si ha:

(*) $$(-1,0,1,y) = \frac{(-1,0,1)}{(-1,0,y)} = \frac{1+1}{1-0} : \frac{y+1}{y-0} \ ,$$

quindi (6) $$(-1,0,1,y)=\frac{2y}{y+1}\ .$$

(*) $$\left(\frac{4}{5},0,\frac{4}{3},k\right)=\frac{\left(\frac{4}{5},0,\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5},0,k\right)}=$$

$$=\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{4}{3}-0\right)\right]:\left[\left(k-\frac{4}{5}\right):(k-0)\right]=$$

$$=\left(\frac{8}{15}:\frac{4}{3}\right):\left(\frac{5k-4}{5}:k\right)=\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}:\frac{5k-4}{5k}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5k}{5k-4}$$

quindi (7) $$\left(\frac{4}{5},0,\frac{4}{3},k\right)=\frac{2k}{5k-4}\ .$$

Eguagliando i valori dei due birapporti si ha:

$$\frac{2y}{y+1}=\frac{2k}{5k-4},\quad \text{da cui}$$

(*) $$y(5k-4)=k(y+1)\ ,\quad \text{infine}$$

(8) $$4ky-4y-k=0\,.$$

La (8) è l'equazione della proiettività tra i punti della generatrice g e i corrispondenti piani del fascio di asse g, tangenti alla quadrica nei punti stessi.

Verifichiamo che l'equazione della proiettività è esatta.

Infatti, per $y=2$ si ha il punto C(8,2,4) della generatrice g, con il piano tangente

(*) $$\gamma:\ 8x-18y-7z=0\,.$$

Ma quando si pone $y=2$ nell'equazione della proiettività, si ottiene

(*) $$8k-k-8=0\,,\quad \text{da cui}$$

(*) $$k = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{7} \ , \quad \text{quindi} \quad \lambda = 8 \, , \quad \mu = 7 \ .$$

Sostituendo questi valori di λ e μ nell'equazione del fascio di piani di asse g, che per comodità ricordiamo: (9) $\lambda(x-4y)+7(2y-z)=0$, si ha:

(*) $$8(x-4y)+7(2y-z)=0 \, ,$$

(*) $$8x-32y+14y-7z=0 \ , \quad \text{quindi}$$

(10) $$\gamma: \quad 8x-18y-7z=0 \ .$$

Ma la (10) è proprio l'equazione del piano tangente alla quadrica nel punto C; questa volta, però, essa è stata ottenuta non con la nota formula dell'Analisi Matematica, ma per mezzo dell'equazione della proiettività.
La verifica svolta conferma perfettamente il teorema di Chasles sulle superfici rigate.

PROBLEMA 7 A (Su un noto teorema di Chasles)

Vogliamo illustrare con un problema il seguente teorema di Chasles:

" Il piano tangente ad una superficie rigata in un punto P contiene la generatrice g passante per il punto stesso. Inoltre, mentre il punto descrive la generatrice, il piano tangente in tal punto varia nel fascio di piani di asse g, corrispondendo proiettivamente a P. Se poi la generatrice è a carattere sviluppabile, il piano tangente rimane fisso al variare del punto".

Riferiamoci per semplicità ad una quadrica rigata dal punto di vista reale, per esempio al paraboloide a punti iperbolici (o a sella) di equazione

(1) $$x^2 - 2xy - xz - 2y + z = 0 .$$

La (1) è un paraboloide perché si ha determinante $A > 0$, discriminante $A_{44} = 0$. Il piano $z = 2y$, tangente nell'origine O(0,0,0), interseca il paraboloide secondo una conica degenere le cui rette sono due generatrici di equazioni:

(2) $$g: \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}, \qquad h: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}.$$

Consideriamo la generatrice g. Dando a y i valori $y = -1, 0, 1, 2, \ldots$ otteniamo i punti (3) $A(0,-1,-2)$, $O(0,0,0)$, $B(0,1,2)$, $C(0,2,4)$.

Troviamo i piani tangenti alla quadrica in questi punti. Ricordiamo che il piano tangente in un generico punto $P(x_o, y_o, z_o)$ ha l'equazione:

(4) $$f_x(P)\cdot(x - x_o) + f_y(P)\cdot(y - y_o) + f_z(P)\cdot(z - z_o) = 0 .$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$f(x,y,z) = x^2 - 2xy - xz - 2y + z = 0,$$
$$f_x = 2x - 2y - z, \quad f_y = -2x - 2, \quad f_z = -x + 1 .$$

Si trova che i piani tangenti nei punti suddetti sono

(*) $$\alpha: \quad 4x - 2y + z = 0, \qquad \omega: \quad -2y + z = 0,$$
$$\beta: \quad -4x - 2y + z = 0, \qquad \gamma: \quad -8x - 2y + z = 0 .$$

Tutti questi piani passano per i punti A,O,B,C della generatrice g, nonostante che questi punti siano distinti fra di loro.

Ora, i piani che ci danno la generatrice g permettono di costruire il fascio:

(5) $\lambda x + \mu(2y - z) = 0$, per il quale si pone $k = \lambda/\mu$.

Si può verificare subito quanto segue:

1') Per $\lambda = 4$, $\mu = -1$, cioè per $k = -4$, si ha il piano

$$4x - 1(2y - z) = 0 \,,$$

che coincide con il piano tangente nel punto $A(0.-1,-2)$.

2') Per $\lambda = 0$, $\mu = -1$, cioè per $k = 0$, si ha il piano

$$\omega: \ -2y + z = 0 \ ,$$

che coincide con il piano tangente nel punto $O(0,0,0)$.

3') Per $\lambda = -4$, $\mu = -1$, cioè per $k = 4$, si ha il piano

$$\beta: \ -4x - 2y + z = 0 \ ,$$

che coincide con il piano tangente nel punto $B(0,1,2)$.

4') Per $\lambda = -8$, $\mu = -1$, cioè per $k = 8$, si ha il piano

$$\gamma: \ -8x - 2y + z = 0 \ ,$$

che coincide con il piano tangente nel punto $C(0,2,4)$.

Come si vede, esiste una corrispondenza biunivoca algebrica tra i valori di y e i corrispondenti valori di k e quindi si ha una proiettività tra i punti P della direttrice h e i piani del fascio tangenti alla quadrica nei punti stessi.
Prese due terne di valori corrispondenti l'equazione della proiettività si ottiene dall'eguaglianza di birapporti:

(6) $$(-1,0,1,y) = (-4,0,4,k) \,.$$

Procedendo nei calcoli , si ha: (*) $\dfrac{(-1,0,1)}{(-1,0,y)} = \dfrac{(-4,0,4)}{(-4,0,k)}$,

(*) $$\frac{1+1}{1-0} : \frac{y+1}{y-0} = \frac{4+4}{4-0} : \frac{k+4}{k-0} \,, \quad \rightarrow \quad \frac{y}{y+1} = \frac{k}{k+4} \,,$$

infine (*) $$k = 4y \,.$$

Possiamo subito verificare l'esattezza di questa formula.

Per $y = 2$ si ha $k = 8$, cioè $\lambda = -8$, $\mu = -1$.
Nel fascio di piani $\lambda x + \mu(2y - z) = 0$, a questi due valori di λ e μ corrisponde il piano $-8x - 2y + z = 0$. Ma questa equazione ci dà esattamente il piano tangente nel punto C(0,2,4) della generatrice, che avevamo ottenuto con i metodi dell'Analisi Matematica.

PROBLEMA 8 A (Quadrica individuata da tre rette; Dispense I)

Determinare l'equazione della quadrica che contiene le tre rette sghembe
$r_1: \ x=0, \ y=0, \qquad r_2: \ x=1, \ y=z, \qquad r_3: \ x=-1, \ y=2z$.

Poiché le tre rette si possono riguardare come direttrici della quadrica, risolviamo il problema con i procedimenti validi per una superficie rigata avente per direttrici tre curve qualsiasi, che possono essere anche gobbe.
La risoluzione si basa sul seguente teorema: " Se P è un punto di r_1, i coni di vertici P e proiettanti r_2 ed r_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare di P su r_1 queste rette descrivono la rigata ".

Ricordiamo che l'equazione della retta passante per due punti P_o e P_1 è:

(1) $$\frac{x-x_o}{x_1-x_0}=\frac{y-y_o}{y_1-y_0}=\frac{z-z_o}{z_1-z_0} .$$

Prendiamo sulle rette r_1, r_2, r_3 rispettivamente i punti $P(0,0,k)$, $N(1,u,u)$, $Q(-1,2t,t)$. Allora:

(2) retta PN $$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{u-0}=\frac{z-k}{u-k} ,$$

(3) retta PQ $$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-0}{2t-0}=\frac{z-k}{t-k} ,$$

L'equazione della quadrica si ottiene eliminando i parametri k,u,t dal sistema costituito dalle rette (2), (3):

(4) $$\frac{x}{1}=\frac{y}{u}=\frac{z-k}{u-k} \wedge -\frac{x}{1}=\frac{y}{2t}=\frac{z-k}{t-k} .$$

Spezziamo il sistema: $$\begin{cases} (5) \quad x=\dfrac{y}{u}, \qquad (6) \quad x=\dfrac{z-k}{u-k}, \\ (7) \quad -x=\dfrac{y}{2t}, \qquad (8) \quad -x=\dfrac{z-k}{t-k} . \end{cases}$$

Subito si ricava: (9) $$u=y/x .$$

Dalle relazioni (5), (7) si ha: $$\frac{y}{u}=-\frac{y}{2t} ,$$

da cui (10) $u=-2t$. Tenendo conto della (9) si ha:

(*) $\frac{y}{x} = -2t$, e quindi (11) $t = -\frac{y}{2x}$.

Ora, dall'equazione (6) si ha:

(*) $x(u-k) = z-k$, ove $u = \frac{y}{x}$. Sostituendo si ha:

(*) $x\left(\frac{y}{x} - k\right) = z - k$, $\rightarrow$ $y - kx = z - k$, $y - z = k(x-1)$;

da cui : (12) $k = \frac{y-z}{x-1}$.

Consideriamo la relazione non ancora utilizzata

(*) $-x = \frac{z-k}{t-k}$; da essa si ha: $-x(t-k) = z-k$, quindi:

(13) $-xt + xk = z - k$.

Sostituendo nella (13) le espressioni di t e k date dalle (11), (12) si ha:

(*) $-x(-\frac{y}{2x}) + x \cdot \frac{y-z}{x-1} = z - \frac{y-z}{x-1}$,

(*) $\frac{y}{2} + \frac{xy - xz}{x-1} = \frac{zx - \cancel{z} - y + \cancel{z}}{x-1}$,

(*) $y(x-1) + 2(xy - xz) = 2(zx - 2y)$,

(*) $yx - y + 2xy - 2xz = 2xz - 2y$, infine:

(14) $3xy - 4xz + y = 0$.

La (14) rappresenta un paraboloide a punti iperbolici, o a sella.
Infatti, il piano $y = 0$, tangente nell'origine O, interseca la quadrica secondo la conica sezione C_S : $4xz = 0$, che è spezzata in due rette reali e distinte; quindi la quadrica è a punti iperbolici. Se poi passiamo a coordinate omogenee e intersechiamo la quadrica con il piano improprio $t = 0$, abbiamo la conica all'infinito C_∞ : $3xy - 4xz = 0$, che è spezzata in due rette reali e distinte; quindi la quadrica è un paraboloide (per il discriminante si ha $A_{44} = 0$) . I due fatti ci dicono che la (14) è un paraboloide a punti iperbolici , o a sella.

PROBLEMA 9 A.1 (Superficie rigata individuata da tre direttrici)

Determinare l'equazione della superficie rigata che ha le tre direttrici seguenti:

D_1: la parabola $x = z$, $y^2 - z - 1 = 0$,

D_2: la retta $y = 0$, $z = 0$ (asse x),

D_3: la retta $x = 0$, $t = 0$ (retta impropria del piano yz).

Soluzione . Consideriamo una generica retta r di equazioni

(1) $$x = \ell z + p, \qquad y = mz + q$$

e imponiamo che essa si appoggi alla parabola

(2) $$\begin{cases} x = z \\ y^2 - z - 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni (1) nell'equazione della parabola si ha :

(3) $$\begin{cases} z = \ell z + p \\ (mz + q)^2 - z - 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Sviluppando la 2^a equazione del sistema si ha:

(*) $$m^2 z^2 + 2mqz + q^2 - z - 1 = 0 \,.$$

Ma dalla (3_1) si ha: $z - \ell z = p$, quindi (4): $z = \dfrac{p}{1-\ell}$;

sostituendo nella precedente si ricava la condizione:

(*) $$m^2 \frac{p^2}{(1-\ell)^2} + 2mq\frac{p}{1-\ell} - \frac{p}{1-\ell} + q^2 - 1 = 0, \quad \text{ossia}$$

(4) $$m^2 p^2 + q^2 (1-\ell)^2 + 2mpq(1-\ell) - p(1-\ell) - (1-\ell)^2 = 0 \,.$$

Imponiamo ora che la retta r si appoggi all'asse x ; basta scrivere il sistema:

(5) $$\begin{cases} x = \ell z + p, & y = mz + q, \\ y = 0, & z = 0 \,; \end{cases}$$ si ricava (6): $q = 0$.

Imponiamo quindi che la retta r si appoggi alla retta $x = 0$, $t = 0$, cioè alla retta impropria del piano yz: deve aversi:

(7) $$\begin{cases} x = \ell z + pt, & y = mz + qt, \\ x = 0, & t = 0\ . \end{cases}$$

Poiché l'equazione $x = \ell z + pt$ deve essere verificata per qualsiasi valore di z si ricava la condizione (8): $\ell = 0$.

Tenendo presenti le condizioni $q = 0$, $\ell = 0$, la condizione (4) diventa:

(9) $$m^2p^2 - p - 1 = 0\,,$$

mentre,in coordinate non omogenee, il sistema (7) si riduce a:

(10) $$\begin{cases} x = p \\ y = mz\ , \end{cases}$$

da cui: (11) $$p = x\ , \qquad m = \frac{y}{z}\ .$$

Sostituendo le (11) nella (9) si ha:

(*) $$x^2\,\frac{y^2}{z^2} - x - 1 = 0\,, \qquad \text{da cui}$$

(12) $$x^2y^2 - xz^2 - z^2 = 0\,.$$

La (12) è l'equazione della rigata costituita dalle rette che si appoggiano alle tre direttrici date, D_1, D_2, D_3. Essa è una superficie del 4° ordine che indicheremo con il simbolo F^4.

Dobbiamo osservare che per l'ordine della F^4 possiamo scrivere:
(*) $$n = 2n_1n_2n_4 = 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 4\,.$$

Dal teorema di Salmon, allora, si ricava che le tre direttrici non hanno alcun punto in comune fra di loro.

Facciamo vedere che l'asse x è una retta doppia per la rigata. Consideriamo una generica retta uscente dal punto Q(h,0,0) dell'asse e intersechiamo la superficie:

(*) $$\begin{cases} y = m(x - h), \qquad y = n(x - h), \\ x^2y^2 - xz^2 - z^2 = 0\ . \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene:

(*) $$m^2x^2(x-h)^2 - n^2x(x-h)^2 - n^2(x-h)^2 = 0\ ,$$ da cui

(13) $$(x-h)^2 \cdot (m^2x^2 - n^2x - n^2) = 0\,.$$

Si ricava la soluzione doppia (h,0,0) e quindi l'asse x è una retta doppia della superficie rigata.

Si può fare una diversa dimostrazione.
Intersechiamo la superficie F^4 con un piano generico passante per l'asse x:

(14) $$\begin{cases} x^2y^2 - xz^2 - z^2 = 0 \\ y = \lambda z\ ; \end{cases}$$ si ottiene

(*) $$\lambda^2x^2z^2 - xz^2 - z^2 = 0\,.$$

Si ha la C^4 $$z^2(\lambda^2x^2 - x - 1) = 0\,.$$

La curva C^4 si spezza nella retta $y = 0,\ z = 0$ (asse x) contata due volte e nella conica degenere

(15) $$\begin{cases} y = \lambda z \\ \lambda^2x^2 - x - 1 = 0\ . \end{cases}$$

PROBLEMA 9 A.2 (Superficie rigata individuata da tre direttrici)

Determinare l'equazione della superficie rigata che ha le tre direttrici seguenti:

D_1: la parabola $x = z$, $y^2 - z - 1 = 0$,

D_2: la retta $y = 0$, $z = 0$ (asse x),

D_3: la retta $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ (retta impropria del piano yz).

Soluzione. Sia N(k,0,0) un punto qualsiasi della direttrice D_2 (asse x). I coni che dal punto N proiettano le altre due direttrici D_1 e D_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare di N su D_2, queste rette descrivono la superficie rigata che ha per direttrici le curve date.

Nel nostro caso siano:

- N(k,0,0) un punto della direttrice D_2: $x = 0$, $y = 0$ (asse x);
- $P(t^2 - 1,\ t,\ t^2 - 1)$ un punto della direttrice D_1 (la parabola);
- Q(0,1,h,0) un punto della direttrice D_3: $x_1 = 0$, $x_4 = 0$.

Ricordiamo subito che i parametri direttori della retta NQ sono proporzionali ai numeri 0,1,h; possiamo porre

(1) $\ell = 0$, $m = 1$, $n = h$. Allora:

retta NP: (2) $$\frac{x-k}{t^2-1-k} = \frac{y-0}{t} = \frac{z-0}{t^2-1}.$$

Retta NQ: (3) $$\frac{x-k}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{h}.$$

Mettiamo a sistema le equazioni delle generatrici dei due coni:

(A) $$\begin{cases} (4) & \dfrac{x-k}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{h} \\ (5) & \dfrac{x-k}{t^2-1-k} = \dfrac{y-0}{t} = \dfrac{z}{t^2-1} \end{cases}.$$

Consideriamo l'equazione (4). La frazione $\frac{x-k}{0}$ deve essere indeterminata: si ricava

(6) $x - k = 0$, ossia $x = k$.

Consideriamo ora l'equazione (5). Anche la frazione $\frac{x-k}{t^2-1-k}$ deve essere indeterminata, cioè il denominatore t^2-1-k deve essere nullo. Infatti, se fosse nullo solo il numeratore $x-k$, nell'equazione (5) dovrebbe essere $y=0$ e $z=0$. In tal caso la soluzione del sistema (A) si ridurrebbe a

(C) $\qquad x=k, \qquad y=0, \qquad z=0;$

ma questa soluzione rappresenta una retta (asse x) , non una superficie.

Questa conclusione assurda ci spinge a ritenere che sia:

(*) $\qquad t^2-1-k=0, \qquad$ e quindi (7): $\qquad x=t^2-1.$

Dalla (5) si ricava $\frac{z}{y}=\frac{t^2-1}{t}$. Tenendo conto della (7) si ha:

(*) $\qquad \frac{z}{y}=\frac{x}{t}, \qquad$ da cui : (8) $\qquad t=\frac{xy}{z}.$

Innalzando al quadrato i due termini della (8) si ottiene:

(9) $$t^2-1=\frac{x^2y^2}{z^2}-1 .$$

Confrontando le (7), (9) si ha:

(10) $$\frac{x^2y^2}{z^2}-1=x$$

Dalla (10) si ricava:

(11) $$x^2y^2-xz^2-z^2=0.$$

Si ottiene così una superficie rigata del 4° ordine, la cui equazione è perfettamente uguale a quella ottenuta, con altro procedimento, nel problema precedente.

PROBLEMA 9 A.3 (Superficie rigata individuata da tre direttrici)

Determinare l'equazione della superficie rigata che ha le tre direttrici seguenti:

D_1: la parabola $x = z$, $y^2 - z - 1 = 0$,

D_2: la retta $y = 0$, $z = 0$ (asse x),

D_3: la retta $x = 0$, $x_4 = 0$ (retta impropria del piano yz).

Si tratta del problema n. 12-2 . Vogliamo risolvere il problema partendo dai cilindri che dal punto Q(0,1,h,0) della retta impropria del piano yz proiettano le direttrici D_1 e D_2.
Le generatrici di questi due cilindri hanno i parametri direttori $\ell = 0$, $m = 1$, $n = h$.
Ciò porta a considerare:

a) le rette che escono dai vari punti N(k,0,0) dell'asse x con i parametri direttori 0,1,h;
b) le rette che escono dai vari punti $P(t^2 - 1;\ t;\ t^2 - 1)$ della parabola D_1 con gli stessi parametri direttori.

Possiamo quindi scrivere il sistema:

(A)
$$\begin{cases} \dfrac{x-k}{0} = \dfrac{y}{t} = \dfrac{z}{h} \\ \dfrac{x-(t^2-1)}{0} = \dfrac{y-t}{1} = \dfrac{z-(t^2-1)}{h} \end{cases} .$$

Da questo sistema si ricava che deve essere $x - k = 0$ e $x - (t^2 - 1) = 0$,

cioè le frazioni $\dfrac{x-k}{0}$ e $\dfrac{x-(t^2-1)}{0}$ debbono essere indeterminate. Infatti, se fossero nulli solo i numeratori la soluzione del sistema si ridurrebbe alla retta

$$x = k, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \qquad \text{(asse } x\text{ , } D_2\text{)}$$

e alla parabola $x = t^2 - 1$, $y = t$, $z = t^2 - 1$ (direttrice D_1) .

Poiché nessuna di esse rappresenta una superficie, deve essere necessariamente

(1)
$$x = k = t^2 - 1 .$$

Pertanto, il sistema (A) si riduce alle equazioni

(2)
$$y = z/h , \qquad z - (t^2 - 1) = yh - th .$$

Si ricava

(*) $$h = \frac{z}{y}, \qquad z - x = y \cdot \frac{z}{y} - t \cdot \frac{z}{y}, \quad \rightarrow \quad t \cdot \frac{z}{y} = x \ .$$

Riassumendo, per le variabili h e t si ha:

(3) $$h = \frac{z}{y}, \qquad t = \frac{xy}{z} \ .$$

Sostituiamo nell'equazione

(*) $$y - t = \frac{z - (t^2 - 1)}{h}, \text{ cioè } \quad (4) \qquad hy - ht = z + 1 - t^2 \ ;$$

si ottiene $$\frac{z}{y} \cdot y - \frac{z}{y} \cdot \frac{xy}{z} = z + 1 - \frac{x^2 y^2}{z^2},$$

(*) $$\cancel{z} - x = \cancel{z} + 1 - \frac{x^2 y^2}{z^2} \ ,$$

(*) $$\frac{x^2 y^2}{z^2} - x - 1 = 0 \ , \qquad \text{e infine}$$

(*) $$x^2 y^2 - z^2 x - z^2 = 0 \ .$$

Si ottiene così una superficie del 4° ordine; la sua equazione coincide perfettamente con quella ottenuta con gli altri procedimenti visti.

PROBLEMA 10 A (Esercizio n° 6, Dispense ORUR, pg. 49)

In un riferimento cartesiano Oxyz è dato un fascio di rette $y = mx$ ed un fascio di circonferenze tangenti nell'origine all'asse y (fig. 5). Si scriva l'equazione della proiettività che alle rette

(1) $y = 0$, $x = 0$, $y = x$

fa corrispondere ordinatamente le tre circonferenze seguenti:

(2) la prima con il centro nel punto (1,0), la seconda di raggio nullo, la terza con raggio $r = \infty$.

Si scriva poi l'equazione del luogo descritto dal punto di intersezione P di curve corrispondenti.

Soluzione.

Indichiamo i coefficienti angolari delle tre rette:

a) $y = 0$ (asse x) : $m = 0$,

b) $x = 0$ (asse y) : $m = \infty$,

c) $y = x$ (bisettrice del 1° q): $m = 1$.

Le circonferenze corrispondenti sono:

a') Prima circonferenza, centro C(1,0) e raggio $r = 1$;

b') seconda circonferenza, centro O(0,0) e raggio $r = 0$;

c') terza circonferenza, si riduce all'asse y , raggio $r = \infty$.

L'equazione della proiettività tra le due forme geometriche è data dall'eguaglianza di birapporti:

(3) $$(r_1, r_2, r_3, r) = (m_1, m_2, m_3, m) .$$

Nel nostro caso si ha:

(4) $$(1, 0, \infty, r) = (0, \infty, 1, m), \quad \text{ossia}$$

(*) $$(0, 1, r, \infty) = (1, m, 0, \infty), \quad \text{da cui}$$

(*) $$(0, 1, r) = (1, m, 0), \ \rightarrow \quad \frac{r-0}{r-1} = \frac{0-1}{0-m} .$$

Ne segue $\dfrac{1}{m} = \dfrac{r}{r-1}$, $\quad r - 1 = r \cdot m$, $\quad r - r \cdot m = 1$.

Si trova così che l'equazione della proiettività è:

(5) $$r = \frac{1}{1-m} .$$

Il luogo descritto dai punti di intersezione di curve corrispondenti è dato dal sistema:

(6)
$$\begin{cases} x^2 - 2rx + y^2 = 0 \\ y = mx, \qquad\qquad r = 1/(1-m) \end{cases},$$

ove $x^2 - 2rx + y^2 = 0$ e la generica circonferenza di centro $C(r,0)$ e raggio r (fig. 4) .

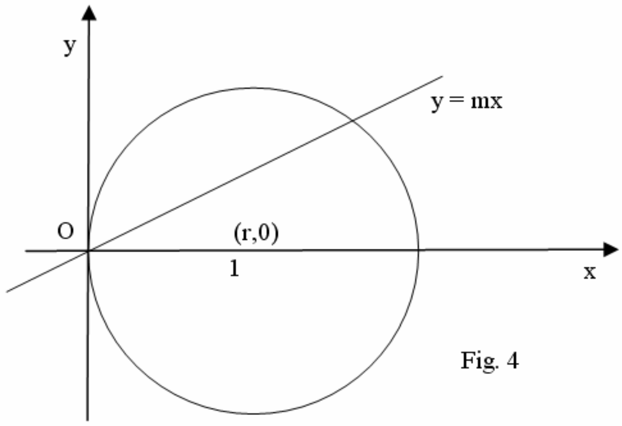


Fig. 4

Si ricava $\quad x^2 - \dfrac{2}{1-m}x + y^2 = 0 \quad$ ed $\quad m = \dfrac{y}{x}$.

Sostituendo si ha:

(7)
$$x^2 - \frac{2x}{1-\dfrac{y}{x}} + y^2 = 0 \quad , \qquad x^2 - \frac{2x^2}{x-y} + y^2 = 0,$$

(8)
$$(x-y)\cdot(x^2+y^2) - 2x^2 = 0 .$$

La (8) è l'equazione del luogo proposto.

PROBLEMA 11 A (Dispense ORUR, pg. 49)

In un riferimento cartesiano Oxyz è data una stella di rette passanti per l'origine O

(1) $$\frac{x}{\lambda_1}=\frac{y}{\lambda_2}=\frac{z}{\lambda_3},$$

ed una stella di piani passanti per il punto P(0,1,0)

(2) $$\mu_1 x+\mu_2(y-1)+\mu_3 z=0 \ .$$

I) Determinare la proiettività che alle rette

(3) $$y=z=0, \qquad x=z=0, \qquad x=y=0, \qquad x=y=z$$

fa corrispondere rispettivamente i piani

(4) $$z=0, \qquad x=0, \qquad y=1, \qquad x+y-1-z=0 \ .$$

II) Detto P il punto di intersezione fra una retta e il piano corrispondente in detta proiettività, si determini l'equazione cartesiana della superficie descritta dal punto P al variare della coppia di elementi corrispondenti.

Quesito I)

I parametri direttori delle rette sono:

1) $y=0,\ z=0$, asse x : $\lambda_1=1, \quad \lambda_2=0, \quad \lambda_3=0;$

2) $x=0,\ z=0$, asse y : $\lambda_1=0, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=0;$

3) $x=0,\ y=0$, asse z: $\lambda_1=0, \quad \lambda_2=0, \quad \lambda_3=1;$

4) $x=y=z$, bisettrice 1° q. $\lambda_1=1, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=1.$

I coefficienti dei piani del fascio sono:

1') piano $z=0$: $\mu_1=0, \quad \mu_2=0, \quad \mu_3=1,$

2') piano $x=0$: $\mu_1=1, \quad \mu_2=0, \quad \mu_3=0,$

3') piano $y-1=0$: $\mu_1=0, \quad \mu_2=1, \quad \mu_3=0,$

4') piano $x+y-1-z=0$: $\mu_1=1, \quad \mu_2=1, \quad \mu_3=-1.$

Diamo il quadro dei dati:

(5) $$\begin{array}{ccc} (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) & \longleftrightarrow & (\mu_1,\mu_2,\mu_3) \\ (1,0,0) & \longleftrightarrow & (0,0,1) \\ (0,1,0) & \longleftrightarrow & (1,0,0) \\ (0,0,1) & \longleftrightarrow & (0,1,0) \\ (1,1,1) & \longleftrightarrow & (1,1,-1) \ . \end{array}$$

Ricordiamo che l'equazione generale della proiettività tra due forme di seconda specie è:

(6)
$$\begin{cases} \rho\lambda_1 = a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + a_{13}\mu_3 \\ \rho\lambda_2 = a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + a_{23}\mu_3 \\ \rho\lambda_3 = a_{31}\mu_1 + a_{32}\mu_2 + a_{33}\mu_3 \quad . \end{cases}$$

Con i dati della tabella (5) si ha:

(7)
$$\begin{cases} \rho_1 = 0 + 0 + a_{13} & 0 = 0 + a_{12} + 0 \\ 0 = 0 + 0 + a_{23} & 0 = 0 + a_{22} + 0 \\ 0 = 0 + 0 + a_{33} & 0 = 0 + a_{32} + 0 \\ 0 = a_{11} + 0 + 0 & \rho_4 = \cancel{a_{11}} + \cancel{a_{22}} - a_{13} \\ \rho_2 = a_{21} + 0 + 0 & \rho_4 = a_{21} + \cancel{a_{22}} - \cancel{a_{23}} \\ 0 = a_{31} + 0 + 0 & \rho_4 = \cancel{a_{31}} + a_{32} - \cancel{a_{33}} \quad . \end{cases}$$

Si ricava (8): $a_{23} = a_{33} = 0$, $a_{11} = a_{31} = 0$, $a_{12} = a_{22} = 0$.

Rimane il sistema più piccolo:

(9)
$$\begin{cases} \rho_1 = a_{13} & \rho_4 = -a_{13} \\ \rho_2 = a_{21} & \rho_4 = a_{21} \\ \rho_3 = a_{32} & \rho_4 = a_{32} \quad . \end{cases}$$

Poiché i coefficienti ρ_k e a_{ik} sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità $\neq 0$, poniamo $\rho_1 = 1$. Si ottiene:

(*) $a_{13} = 1$, $\rho_4 = -1$, $a_{21} = -1$, $a_{32} = -1$;

In conclusione si ha:

(10) $a_{13} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{31} = -1$.

Tenendo conto dei valori dei coefficienti a_{ik} date dalle (8) , (10), possiamo dire che le equazioni della proiettività tra la stella di rette e la stella di piani sono:

(11) $$\begin{cases} \rho\lambda_1 = \mu_3 \\ \rho\lambda_2 = -\mu_3 \\ \rho\lambda_3 = -\mu_2 \ . \end{cases}$$

Se teniamo conto che i coefficienti λ_k e μ_k (ove $k = 1,2,3$) sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità, possiamo dire che le equazioni della proiettività sono:

(12) $$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_3 \\ \lambda_2 = -\mu_1 \\ \lambda_3 = -\mu_2 \ . \end{cases}$$

Quesito II)
Determiniamo ora il luogo descritto dal punto di intersezione P fra una retta e il piano corrispondente nella proiettività.

Mettiamo a sistema le equazioni della retta, del piano e della proiettività:

(13) $$\begin{cases} \dfrac{x}{\lambda_1} = \dfrac{y}{\lambda_2} \qquad \dfrac{x}{\lambda_1} = \dfrac{z}{\lambda_3} \\ \mu_1 x + \mu_2 (y-1) + \mu_3 z = 0 \\ \mu_1 = -\lambda_2 \qquad \mu_2 = -\lambda_3 \qquad \mu_3 = \lambda_1 \ . \end{cases}$$

Eliminando le due terne di parametri omogenei fra queste sei equazioni avremo una sola relazione fra le variabili x,y,z; essa rappresenta l'equazione cartesiana del luogo descritto dal punto P.

Dalle due ultime righe del sistema si ha:

(*) $$-\lambda_2 x - \lambda_3 (y-1) + \lambda_1 z = 0 ,$$

(*) $$\lambda_2 x + \lambda_3 (y-1) - \lambda_1 z = 0 ,$$

(14) $$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} x - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} z + y - 1 = 0 .$$

Dalla prima riga del sistema si ha:

(15) $$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{x}{z} , \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{y}{x} \ ;$$

quindi $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\cdot\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{\cancel{x}}{z}\cdot\dfrac{y}{\cancel{x}}$, ossia (16) $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}=\dfrac{y}{z}$.

Sostituendo nella (14) i valori di λ_1/λ_3 e λ_2/λ_3 dati dalle (15), (16) si ha:

(*) $$\frac{y}{z}\cdot x-\frac{x}{z}\cdot z+y-1=0 \ ,$$ da cui

(17) $$xy-xz+yz-z=0 \ .$$

La (17) è l'equazione di una quadrica Q passante per l'origine O(0,0,0), dove è tangente al piano $z=0$. Intersecando la quadrica con questo piano si ha la conica sezione

(*) $$C_s: \quad xy=0 \, .$$

La conica C_s è spezzata in due rette reali e distinte, quindi la quadrica Q è a punti parabolici.

Passando a coordinate omogenee, l'equazione della quadrica è:

(*) $$Q: \quad xy-xz+yz-zt=0 \, .$$

Il piano improprio $t=0$ interseca la Q secondo la conica C_∞ :

(*) $$xy-xz+yz=0 \ .$$

La conica C_∞ è non degenere e contiene punti reali; ne segue che la Q è un iperboloide a punti iperbolici , o ad una falda.

Vediamo alcuni punti (x,y,z) che soddisfano la C_∞ : $(-2,2,1)$, $(2,-2,1)$,
$(8,6,24)$, $(2,6,-\frac{8}{3})$, $\left(2,9,-\frac{18}{7}\right)$.

PROBLEMA 12 A (Estate 1953, 1° app.- Dispense ORUR, pg. 55)

Dato nello spazio un riferimento cartesiano Oxyz, si trovi l'equazione della superficie algebrica rigata avente come direttrici D_1, D_2, D_3 le tre curve algebriche seguenti:
1) l'asse x;
2) la retta di equazione $x = y - 1 = 2z$;
3) la conica all'infinito del cono $xy = z^2$.
Determinare poi la generatrice della superficie passante per l'origine O del riferimento.

Soluzione.

Sia N un punto qualsiasi della direttrice D_1 (asse x). I coni di vertice N che proiettano le direttici D_2 e D_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare del punto N sull'asse x queste rette descrivono la rigata.

1) L'asse x ha le equazioni $y = 0,\ z = 0$; un suo punto proprio generico è

(1) $$N(\lambda, 0, 0) \ .$$

2) La direttrice D_2 ha le equazioni cartesiane $x = 2z$, $y = 2z + 1$; le sue equazioni parametriche sono

(*) $$x = 2t\,, \quad y = 2t + 1\,, \quad z = t\,;$$

un suo generico punto è

(2) $$P(2t, 2t + 1, t) \ .$$

3) Sia C_∞ la conica all'infinito della quadrica $xy = z^2$; le coordinate cartesiane omogenee di un generico punto della conica sono:

(*) $$x_1 = k^2, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = k\,, \quad x_4 = 0\,.$$

Il generico punto improprio della C_∞ è:

(*) $$Q_\infty(k^2, 1, k, 0)\,, \qquad \text{o meglio}$$

(3) $$Q_\infty(k, \frac{1}{k}, 1, 0)\,.$$

I parametri direttori della retta che proietta questo punto improprio sono

(*) $$\ell = k\,, \quad m = 1/k\,, \quad n = 1\,.$$

Equazione della retta NP:

$$(*)\qquad \frac{x-\lambda}{2t-\lambda}=\frac{y-0}{2t+1-0}=\frac{z-0}{t-0},\qquad \text{ossia}$$

$$(4)\qquad \frac{x-\lambda}{2t-\lambda}=\frac{y}{2t+1}=\frac{z}{t}\ .$$

Equazione della retta NQ_∞ :

$$(*)\qquad \frac{x-\lambda}{k}=\frac{y-0}{1/k}=\frac{z-0}{1}\ ,\qquad \text{ossia}$$

$$(5)\qquad \frac{x-\lambda}{k}=ky=z\,.$$

Mettiamo a sistema le equazioni delle due rette, spezzando le eguaglianze; eliminando i parametri λ, t, k otteniamo l'equazione cartesiana della rigata:

$$(S)\qquad \begin{cases} (6)\quad \dfrac{x-\lambda}{2t-\lambda}=\dfrac{z}{t}, & (7)\quad \dfrac{y}{2t+1}=\dfrac{z}{t} \\ (8)\quad \dfrac{x-\lambda}{k}=z, & (9)\quad ky=z\ . \end{cases}$$

Dalle (8) ,(9) è facile ricavare λ. Infatti si ha:

$$(*)\qquad k=\frac{z}{y},\quad x-\lambda=kz\,,\quad \lambda=x-\frac{z^2}{y},\quad \text{quindi:}$$

$$(10)\qquad \lambda=\frac{xy-z^2}{y}\ .$$

Ora, dalle (7), (6) possiamo ricavare prima la variabile t e poi λ . Si ha:

$$(*)\qquad yt=2zt+z\,,\quad yt-2zt=z\,,\quad \text{quindi}$$

$$(11)\qquad t=\frac{z}{y-2z}\,.$$

Dalla (6) si ha: $\quad tx-t\lambda=2zt-\lambda z\,,\quad \lambda z-\lambda t=t\cdot(2z-x)\,,$

$$(*)\qquad \lambda\cdot\left(z-\frac{z}{y-2z}\right)=\frac{z(2z-x)}{y-2z}\,,$$

(*) $$\frac{\cancel{z}\lambda\cdot(y-2z-1)}{y-2z}=\frac{\cancel{z}\cdot(2z-x)}{y-2z}; \quad \text{si ricava così}$$

(12) $$\lambda=\frac{2z-x}{y-2z-1} \ .$$

Eguagliando i due valori di λ dati dalle (10), (12) si ha:

(*) $$\frac{xy-z^2}{y}=\frac{2z-x}{y-2z-1}, \qquad \text{da cui}$$

(*) $$(xy-z^2)\cdot(y-2z-1)=2yz-xy,$$

(*) $$xy^2-2xyz-\cancel{xy}-z^2y+2z^3+z^2=2yz-\cancel{xy} \quad , \quad \text{infine}$$

(13) $$2z^3-z^2y+xy^2-2xyz+z^2-2yz=0, \quad \text{o anche}$$

(14) $$z^2(2z-y)-xy(2z-y)+z(z-2y)=0.$$

Come si vede, abbiamo ottenuto una superficie del 3° ordine, F^3. Ovviamente, essa è una superficie rigata ,essendo luogo di infinite rette.

Determiniamo ora l'equazione della generatrice passante per il punto O, imponendo che la retta
(*) $$x=\ell z, \qquad y=mz$$
appartenga alla superficie F^3. Sostituendo nella (14) si ha:

(*) $$z^2(2z-mz)-\ell mz^2(2z-mz)-z(2mz-z)=0,$$

(*) $$z^3(2-m-2\ell m+\ell m^2)-z^2(2m-1)=0 \ .$$

Semplificando, si ottiene l'equazione di primo grado:

(15) $$z(\ell m^2-2\ell m-m+2)-(2m-1)=0.$$

Affinché questa equazione sia identicamente soddisfatta, cioè soddisfatta per qualsiasi valore si z, deve avere una soluzione il seguente sistema:

(16) $$\begin{cases} \ell m^2-2\ell m-m+2=0 \\ m=1/2 \ . \end{cases}$$

Dalle equazioni del sistema si ha:

(*) $$\frac{\ell}{4}-2\ell\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2=0\,,\qquad \frac{\ell}{4}-\ell+\frac{3}{2}=0\,,\qquad -3\ell+6=0\,;$$

Quindi: (17) $$\ell=2\,,\qquad m=\frac{1}{2}\ .$$

Le equazioni della generatrice passante per l'origine O sono pertanto:

(18) $$x=2z\,,\qquad y=\frac{1}{2}z\ .$$

Sostituendo le (18) nell'equazione (14) della superficie F^3 si verifica subito che si ottiene una identità.

PROBLEMA 13 A (testo di G. Vaccaro, Le superfici, pg. 101)

In un riferimento cartesiano Oxyz si ponga tra l'asse z e il fascio F di rette $y = \lambda x$, $z = 0$ la proiettività che ai punti O(0,0,0), (0,0,1), $(0,0,-1)$ fa corrispondere rispettivamente le rette $y = z = 0$; $y = x,\ z = 0$; $y = -x,\ z = 0$. Detto P il punto variabile sull'asse delle z ed $\underline{r}$ la retta del fascio F che corrisponde a P nella suddetta proiettività, si determini l'equazione della superficie S luogo dei cerchi passanti per P e tangenti alla retta $\underline{r}$ nell'origine O. Riconoscere che la superficie S ha come unico punto doppio il punto O e determinare il suo tipo.

Soluzione

Il generico punto dell'asse z è P(0,0,k). I punti (0,0,0), (0,0,1), $(0,0,-1)$ si ottengono rispettivamente per i valori $k = 0$, $k = 1$ e $k = -1$.

La generica retta del fascio F ha l'equazione $y = \lambda x,\ z = 0$. Ne segue che:

- alla retta $y = 0,\ z = 0$ corrisponde il valore $\lambda = 0$,
- alla retta $y = x,\ z = 0$ corrisponde il valore $\lambda = 1$,
- alla retta $y = -x,\ z = 0$ corrisponde il valore $\lambda = -1$.

Ne segue che l'equazione della proiettività tra le due forme geometriche di prima specie è data dall'eguaglianza di birapporti:

(1) $$(0,1,-1,k) = (0,1,-1,\lambda).$$

Si ricava subito la relazione $k = \lambda$; ne segue che al punto P(0,0,2k) corrisponde la retta $y = 2kx,\ z = 0$.

La circonferenza passante per il punto P(0,0,2k) e tangente nel punto O alla retta suddetta si può ottenere come intersezione di una sfera opportuna con il piano $y = 2kx$, passante per la retta e parallelo all'asse z.. Ciò si capisce subito dal sistema:

(*) $$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-k)^2 = k^2 \\ y = 2kx \ , \end{cases}$$ da cui (2) $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2zk = 0 \\ k = \dfrac{y}{2x} \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di k nella prima equazione de sistema si ha:

(*) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2z\frac{y}{2x} = 0,$$ e quindi

(3) $$x(x^2 + y^2 + z^2) - zy = 0.$$

L'equazione (3) ci dice che la S è una superficie del 3° ordine (la indicheremo con F^3), che ha un punto doppio nell'origine O(0,0,0). Ne segue che la F^3 è un monoide in quanto essa ha un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto all'ordine (tre) della superficie. Un monoide è ovviamente una superficie razionale.

Il cono delle tangenti principali in O ha l'equazione $zy = 0$, e quindi esso si spezza in due piani distinti. Ne segue che O è un punto doppio biplanare.

Vediamo se la superficie $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + xz^2 - zy = 0$ ha altri punti doppi. Consideriamo il sistema che si ottiene eguagliando a zero la funzione f(x,y,z) e le sue derivate parziali prime. Si ha:

$$(*) \qquad \begin{cases} x^3 + xy^2 + xz^2 - zy = 0, & f_x = 3x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ f_y = 2xy - z = 0, & f_z = 2xz - y = 0 \ . \end{cases}$$

Dalle due ultime equazioni si ricava

$$(4) \qquad z = 2xy, \qquad\qquad (5) \qquad 4x^2y - y = 0 \ .$$

Dalla (5) si ricava $y = 0$ e $x = \pm\frac{1}{2}$.

Da $y = 0$ si ottiene subito $z = 0$ e $x = 0$; si ritrova così che O è un punto doppio.

Da $x = \pm 1/2$ si ricava $z = \pm y$, ma questi valori non annullano la f_x.

Si conclude così che la F^3 ha un solo punto doppio.

PROBLEMA 14 A (Esami febbraio 1951; Dispense ORUR, pg. 57)

Tra i punti della cubica C^3 di equazioni parametriche

(1) $$x_1 = h^2, \quad x_2 = h^3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2h^2$$

e i punti $P'_\infty(k,1,0,0)$ della retta r $x_3 = x_4 = 0$ (retta impropria del piano xy) si ponga una proiettività tale che ai punti

(*) $$(1,1,1,2), \quad (0,0,1,0), \quad (0,1,0,0)$$

della cubica C^3 corrispondano rispettivamente i punti della retta r di coordinate

(*) $$(1,1,0,0), \quad (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0).$$

I) Trovare l'equazione della proiettività e determinare l'equazione della superficie S luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti della cubica C^3 e della retta r nella proiettività assegnata.

II) Determinare i punti multipli della S.

III) Verificare che le curve C^4

(*) $$x_1 = cu^3, \quad x_2 = u, \quad x_3 = c^2u^4, \quad x_4 = 1$$

(con c costante arbitraria) formano un sistema di linee asintotiche della S.

Soluzione

Possiamo scrivere il punto P della cubica C^3 in due modi diversi:

(2) $$P(h^2, h^3, 1, 2h^2) \quad \text{o} \quad P\left(\frac{1}{h}, 1, \frac{1}{h^3}, \frac{2}{h}\right).$$

Da essi si vede che:

- per $h = 1$ si ha il punto (1,1,1,2);
- per $h = 0$ si ha il punto (0,0,1,0);
- per $h = \infty$ si ha il punto (0,1,0,0).

Passiamo alla retta impropria r $x_3 = x_4 = 0$. Se poniamo $k = \frac{1}{\lambda}$ possiamo scrivere anche il punto P'_∞ in due modi diversi:

(3) $$P'_\infty(k,1,0,0) = P'_\infty\left(\frac{1}{\lambda},1,0,0\right) \quad \text{o} \quad P'_\infty(1,\lambda,0,0).$$

Da essi si vede che:

- per $k=1$ si ha il punto (1,1,0,0);
- per $\lambda=0$, cioè per $k=\infty$, si ha il punto (1,0,0,0);
- per $k=0$ si ha il punto (0,1,0,0).

I) L'equazione della proiettività tra le due forme geometriche è data dall'eguaglianza di birapporti:

(*) $$(1,0,\infty,h)=(1,\infty,0,k),$$ ossia

(*) $$(0,1,h,\infty)=(0,k,1,\infty),$$ da cui

(4) $$(0,1,h)=(0,k,1).$$ Sviluppando si ha:

(*) $$\frac{h-0}{h-1}=\frac{1-0}{1-k}, \quad \to \quad \frac{h}{h-1}=\frac{1}{1-k},$$

(*) $$h(1-k)=h-1, \quad \to \quad \cancel{h}-hk=\cancel{h}-1.$$

Si trova che l'equazione della proiettività è

(5) $$hk=1, \quad \text{o anche} \quad k=\frac{1}{h}.$$

Dalla (5) si ricava che una generica coppia di punti corrispondenti nella proiettività è:

(6) $$P(h^2,h^3,1,2h^2) \longleftrightarrow P'_\infty(\frac{1}{h},1,0,0).$$

In coordinate omogenee, il punto $P(h^2,h^3,1,2h^2)$ si può scrivere in altro modo:

(*) $$P\left(\frac{1}{2},\frac{h}{2},\frac{1}{2h^2},1\right);$$

e passando a coordinate non omogenee possiamo scrivere:

(7) $$P\left(\frac{1}{2},\frac{h}{2},\frac{1}{2h^2}\right).$$

La retta che da questo punto P proietta il punto improprio corrispondente $P'_\infty(\frac{1}{h},1,0,0)$ ha le equazioni:

(*) $$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{h}}=\frac{y-\frac{h}{2}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2h^2}}{0}.$$

Ne segue

(8) $$\frac{2x-1}{2}\cdot h=\frac{2y-h}{2},\quad \text{e} \qquad (9) \quad z=\frac{1}{2h^2}.$$

Dalla (8) si ricava:

(*) $$h(2x-1)-h=2y,\ \rightarrow \quad 2hx=2y, \qquad \rightarrow (10) \quad h=\frac{y}{x}\ .$$

Dalla (9) si ha $2h^2z=1$; poiché $h=\frac{y}{x}$ si ottiene

(*) $$2\frac{y^2}{x^2}z=1, \qquad \text{cioè}$$

(11) $$f(x,y,z)=2y^2z-x^2=0\ .$$

II) Dalla (11) si vede che la S è una superficie del 3^o ordine (la indicheremo con F^3), che ha un punto doppio nell'origine O(0,0,0). Ne segue che la F^3 è un monoide in quanto essa ha un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto all'ordine (tre) della superficie. Un monoide è ovviamente una superficie razionale.
Il cono delle tangenti principali nel punto O ha l'equazione $x^2=0$, e quindi esso si spezza in due piani sovrapposti. Ne segue che O è un punto doppio uniplanare.

I punti doppi della superficie S sono le soluzioni del sistema che si ottiene eguagliando a zero la funzione $f(x,y,z)=2y^2z-x^2$ e le sue derivate parziali prime. Questo sistema è:

(12) $$\begin{cases} 2y^2z-x^2=0, \\ -2x=0, \qquad 4yz=0, \qquad 2y^2=0\ . \end{cases}$$

Il sistema ha la sola soluzione $x=y=z=0$; ne segue che l'unico punto doppio della S è l'origine O(0,0,0).

PARTE SECONDA

GENERAZIONE PROIETTIVA DELLE SUPERFICI RIGATE

PROBLEMA 1 E (Sessione estiva 1949; Dispense ORUR, pg. 8)

I) Scrivere l'equazione della superficie rigata che ha per direttrici:
$C_1 \equiv$ la conica $y^2 - z - 1 = 0,\ \ x = z$; $C_2 \equiv$ l'asse delle x $(y = 0, z = 0)$;
$C_3 \equiv$ la retta impropria del piano yz $(x = 0, t = 0)$ (con t abbiamo indicata la quarta coordinata omogenea dopo x, y, z).

II) Dimostrare che la superficie è una rigata del 4^o ordine e che le due rette C_2 e C_3 sono doppie per essa.

III) Scritte le equazioni delle due generatrici della rigata uscenti da un punto generico Q della retta impropria data (ossia C_3), dimostrare che esse si appoggiano all'asse x in una coppia di punti che, al variare di Q, descrivono una involuzione.

Quesito I)
Sia r la generica retta di equazioni

(1) $\qquad r: \quad x = \ell z + p, \qquad y = mz + q$.

Imponiamo che essa si appoggi alla conica C_1. Per ciò occorre che il sistema

(2) $$\begin{cases} y^2 - z - 1 = 0, & x = z \\ x = \ell z + p, & y = mz + q \end{cases}$$

formato con le equazioni di C_1 ed r sia compatibile.

Si ottiene $\qquad x = \ell x + p, \ \rightarrow \ x(1-\ell) = p\ ,\ \ x = \dfrac{p}{1-\ell}$

e quindi (3) $$x = z = \frac{p}{1-\ell}\ .$$

Da $y = mz + q$ si ottiene: (4) $$y = \frac{mp}{1-\ell} + q\ .$$

Sostituendo le (3), (4) nella prima equazione del sistema (2) si ha:

(5) $$\left(\frac{mp}{1-\ell} + q\right)^2 - \frac{p}{1-\ell} - 1 = 0\ , \quad \text{quindi}$$

(6) $$m^2p^2 + q^2(1-\ell)^2 + 2mpq(1-\ell) - p(1-\ell) - (1-\ell)^2 = 0\ .$$

Imponiamo ora che la retta r dello spazio si appoggi all'asse x; perché ciò accada basta che si verifichi il sistema

(A)
$$\begin{cases} x = \ell z + p, & y = mz + q \\ y = 0, & z = 0 \end{cases} .$$

Si ricava subito (7) $q = 0$.

Imponiamo infine che la generica retta dello spazio si appoggi a C_3 $(x = 0, \ t = 0)$. Perché ciò si verifichi basta che sia compatibile il sistema

(B)
$$\begin{cases} x = \ell z + pt, & y = mz + qt \\ x = 0, & t = 0 \end{cases} .$$

Si ricava subito (8) $\ell = 0$.

La generica retta dello spazio avrà quindi la forma

(9)
$$\begin{cases} x = p \\ y = mz \end{cases} .$$

Sostituendo le (7), (8) nella (6) si ottiene:

(10)
$$m^2 p^2 - p - 1 = 0 .$$

Riprendendo il sistema (9) si ottiene:

(11)
$$p = x, \qquad m = \frac{y}{z} .$$

Sostituendo le espressioni (11) nella relazione (10) si ottiene:

(*)
$$\frac{y^2}{z^2} x^2 - x - 1 = 0 .$$

L'equazione della superficie richiesta è quindi

(12)
$$y^2 x^2 - xz^2 - z^2 = 0 .$$

Come si vede, abbiamo una superficie algebrica del 4^o ordine. La superficie è una rigata perché essa ha tre direttrici e tre direttrici arbitrarie dello spazio individuano una e una sola rigata. L'ordine n della rigata si poteva ricavare anche dal teorema di Salmon, secondo il quale l'ordine n è dato dalla formula:

(13)
$$n = 2 n_1 n_2 n_3 - s_{12} n_3 - s_{13} n_2 - s_{23} n_1 ,$$

ove s_{12} è il numero dei punti comuni a C_1 e C_2,
s_{13} è il numero dei punti comuni a C_1 e C_3,
s_{23} è il numero dei punti comuni a C_2 e C_3,

mentre n_1, n_2, n_3 sono gli ordini rispettivi delle tre direttrici. Poiché queste direttrici non hanno punti in comune ed $n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1$, si ha:

(*) $\quad n = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, cioè $\quad n = 4$.

Quesito II)

Vogliamo ora dimostrare che l'asse x $(y = 0,\ z = 0)$ e la retta impropria del piano yz $(x = 0,\ t = 0)$ sono rette doppie per la rigata.

Per dimostrare che l'asse x è una retta doppia basta intersecare la rigata F^4 con un generico piano passante per esso e far notare che l'asse x è una componente doppia per la curva sezione.

Il piano passante per l'asse x è: $y = \lambda z$.

Intersecando la F^4 con esso si ha la curva C^4 di equazione:

(1) $$\begin{cases} x^2y^2 - xz^2 - z^2 = 0 \\ y = \lambda z\ , \end{cases} \quad \to \quad \lambda^2x^2z^2 - xz^2 - z^2 = 0\ ,$$

da cui (2) $$z^2(\lambda^2x^2 - x - 1) = 0\ .$$

Si ha la soluzione doppia $y = 0,\ z = 0$ (asse x contato due volte) e una residua conica degenere di equazione

(3) $$y = \lambda z, \qquad \lambda^2x^2 - x - 1 = 0\ .$$

Consideriamo ora la retta impropria del piano yz $(x = 0,\ t = 0)$ e facciamo vedere che anche essa è una retta doppia.

Consideriamo l'equazione di un generico piano dello spazio; in coordinate omogenee si ha

(*) $$ax + by + cz + dt = 0\ ;$$

imponiamo ad esso di passare per due punti impropri del piano yz, per esempio

$$Y_\infty(0,1,0,0) \ \text{ e } \ Z_\infty(0,0,1,0):$$

(*) $$\begin{cases} 0 + b + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + c + 0 = 0 \end{cases} \quad \to \text{ soluzione } \quad b = 0, \quad c = 0\ .$$

Il piano passante per la retta impropria del piano yz è quindi $ax + dt = 0$,
ossia (4) $$x = kt\,;$$

l'equazione è esatta perché essa è verificata per $x = 0,\ t = 0$, cioè dalla retta impropria del piano yz.

Intersechiamo la superficie F^4 con il piano $x = kt$; si ha il sistema:

(*) $$\begin{cases} x^2y^2 - xz^2t - z^2t^2 = 0 \\ x = kt\ . \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

(*) $$k^2t^2y^2 - kt^2z^2 - z^2t^2 = 0\,, \quad \rightarrow \quad t^2(k^2y^2 - kz^2 - z^2) = 0\ .$$

La soluzione del sistema è data

c) dalla retta impropria del piano yz $x = 0,\ t = 0$ contata due volte e

d) da una conica degenere residua che possiamo scrivere in coordinate non omogenee

(*) $$\begin{cases} x = k \\ k^2y^2 - z^2(k-1) = 0\ . \end{cases}$$

Quesito III)

Consideriamo ora il generico punto $Q(0,1,h,0)$ della retta C_3 (retta impropria del piano yz).

Le due generatrici uscenti da Q si possono ottenere intersecando F^4 con il piano α che congiunge Q alla direttrice doppia C_2, che è l'asse x $(y = 0,\ z = 0)$.

Trovo l'equazione di questo piano tenendo conto del fatto che esso passa per il punto Q e per due punti $O(0,0,0,1)$, $A(1,0,0,1)$ dell'asse x. Si ha:

(1) $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad \text{da cui}$$

(*) $$x_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & h & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si ricava $-(x_2h - x_3) = 0$, ossia $x_2h - x_3 = 0$.

In coordinate non omogenee l'equazione del piano α è

(2) $$yh - z = 0.$$

Intersechiamo ora la F^4 con il piano α; si ha:

(3) $$\begin{cases} x^2y^2 - xz^2 - z^2 = 0 \\ z = hy \quad , \end{cases}$$

da cui $x^2y^2 - xh^2y^2 - h^2y^2 = 0$, ossia (4) $y^2(x^2 - xh^2 - h^2) = 0$.

Il sistema (3) si spezza così nei sistemi

(A) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ contato due volte, e (B) $\begin{cases} z = hy \\ x^2 - xh^2 - h^2 = 0 \ . \end{cases}$

Il sistema (A) rappresenta l'asse x contato due volte; il sistema (B) ci dà l'equazione complessiva delle due generatrici uscenti dal punto Q.

Per rispondere all'ultima parte del Quesito III), dobbiamo ora trovare le ascisse dei punti di intersezione di queste generatrici con l'asse x. Le ascisse x_1, x_2 di questi punti sono ovviamente le soluzioni dell'equazione

(4) $$x^2 - h^2x - h^2 = 0.$$

Per la somma e il prodotto di queste radici si ha il sistema

(5) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = h^2 \\ x_1x_2 \ = -h^2 \ . \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha l'equazione

(6) $$x_1x_2 + x_1 + x_2 = 0 \ .$$

Questa equazione rappresenta una involuzione; essa, infatti, è bilineare e simmetrica rispetto a x_1 e x_2. Abbiamo così trovato che le coppie di punti corrispondenti descrivono una involuzione.

PROBLEMA 2 E (Autunno 1952, 2° app.; Dispense ORUR, pg. 3)

I) Dato nello spazio un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxyz, si considerino sul piano $z+1=0$ le rette r ed s parallele agli assi x e y e incidenti l'asse z. Detti A e B i punti appartenenti rispettivamente ad r ed s ed aventi dall'asse z distanza uguale in valore e segno, determinare il luogo F delle circonferenze passanti per O,A,B al variare di A e B.
II) Studiare il comportamento della F nell'origine degli assi e all'infinito.
III) Studiare le intersezioni di F con il fascio di piani passanti per la retta impropria del piano xy $(z=\lambda)$.

Quesito I)

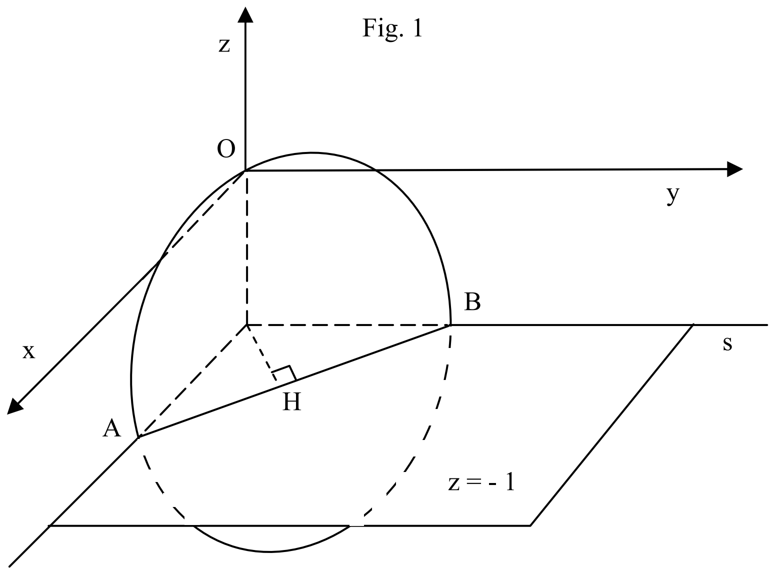
I punti O, A, B hanno le coordinate O(0,0,0) , A(h,0,-1), B(0,h,-1) . Il piano π passante per questi tre punti è:

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h & 0 & -1 & 1 \\ 0 & h & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \rightarrow \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ h & 0 & -1 \\ 0 & h & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Si ricava (1) $\pi: \quad x+y+hz=0$.

Sia γ la circonferenza γ per questi tre punti (fig. 1)

Fig. 1



Essa si può ottenere come intersezione del piano π e di una delle ∞^1 sfere passanti per i punti stessi (fascio di sfere).

Sfera per 0(0,0,0) : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$.

Imponendo il passaggio per i punti A, B si ottiene la soluzione:

(*) $a = b$, $c = h^2 + 1 + ah$;

quindi l'equazione del fascio di sfere è

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 + a(x + y) + (h^2 + ah + 1)z = 0.$$

La presenza del parametro a nell'equazione (2) è dovuta al fatto che tre punti non individuano una sfera, ma un fascio di sfere.
Consideriamo il sistema costituito dalle equazioni (1), (2). Ricavando $x + y$ dall'equazione (1) e sostituendo nella (2) si ottiene l'equazione

(*) $$x^2 + y^2 + z^2 - \cancel{ahz} + h^2 z + \cancel{ahz} + z = 0,$$

ossia $$x^2 + y^2 + z^2 + (h^2 + 1)z = 0 .$$

Si ottiene così il sistema equivalente

(*) $$\begin{cases} (3) \quad x + y + hz = 0 \\ (4) \quad x^2 + y^2 + z^2 + (h^2 + 1)z = 0 , \end{cases}$$

in cui a non compare più.

L'equazione della superficie F richiesta, descritta dalla circonferenza γ al variare di A e quindi di B, si ottiene eliminando il parametro h fra le equazioni (3), (4). Si ottiene

(*) $$h = -\frac{x + y}{z}, \quad \to \quad h^2 + 1 = \frac{(x + y)^2 + z^2}{z^2} .$$

Sostituendo nella (4) si ha:

(*) $$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\cancel{z}[(x + y)^2 + z^2)]}{z^{\cancel{2}}} = 0 .$$

Riducendo a forma intera si ottiene

(5) $$z(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y)^2 + z^2 = 0 .$$

Questa è l'equazione della superficie F; come si vede, essa è una superficie del terzo ordine. Passando a coordinate omogenee possiamo scrivere:

(6) $$x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4(x_1+x_2)^2+x_4x_3^2=0\ .$$

Quesito II)

Osservando che la (5) è priva del termine noto e dei termini di primo grado, si deduce subito che l'origine O è un punto doppio per la F. La superficie è dunque un monoide, in quanto essa è dotata di un punto che ha molteplicità inferiore di una unità rispetto all'ordine (tre) della superficie. Ovviamente la F è una superficie razionale.

Il cono descritto dalle tangenti principali in O alla superficie si ottiene eguagliando a zero il complesso dei termini di II° grado; la sua equazione è

(*) $$(x+y)^2+z^2=0\,.$$

Questa equazione si spezza nei piani

(7) $$x+y+iz=0 \quad e \quad x+y-iz=0 \quad , \quad con \quad i=\sqrt{-1}\ ;$$

pertanto l'origine O è un punto biplanare.

Le rette per O appartenenti alla F si ottengono segando questa superficie con il cono (Esercizi ORUR pag. 5).Esse sono dunque le soluzioni del sistema:

(8) $$\begin{cases} z(x^2+y^2+z^2)+(x+y)^2+z^2=0 \\ (x+y)^2+z^2=0\ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} xyz=0 \\ x+y\pm iz=0\ . \end{cases}$$

Le equazioni delle rette sono quindi:

(a) $\begin{cases} x=0 \\ y\pm iz=0\ , \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y=0 \\ x\pm iz=0\ , \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z=0 \\ x+y=0\ . \end{cases}$

Intersechiamo ora la superficie F con il piano improprio $x_4=0$; si ha il sistema:

(9) $$\begin{cases} x_4=0 \\ x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4(x_1+x_2)^2+x_4x_3^2=0\ . \end{cases}$$

Esso ha le soluzioni:

(10) $\begin{cases} x_4=0 \\ x_3=0\ , \end{cases}$ $\rightarrow$ che è la retta impropria del piano xy ,

(11) $\begin{cases} x_4=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\ , \end{cases}$ $\rightarrow$ che è il circolo assoluto Γ dello spazio.

Che la F contenga il circolo assoluto Γ dello spazio può dedursi anche osservando che essa è il luogo degli ∞^1 cerchi i cui piani di appartenenza descrivono un fascio proprio.

Quesito III)

I piani passanti per la retta impropria del piano xy formano un fascio improprio di equazione $x_3 = \lambda$. Ognuno di essi interseca la superficie F secondo una conica γ data dal sistema:

$$(12) \qquad \begin{cases} x_3 = \lambda \\ x_3(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) + x_4(x_1 + x_2)^2 + x_4 x_3{}^2 = 0 \end{cases} .$$

La proiezione di questa conica sul piano xy ha l'equazione:

$$(*) \qquad \lambda(x^2 + y^2 + \lambda^2) + x^2 + y^2 + 2xy + \lambda^2 = 0 ,$$

ossia (13) $\qquad (\lambda+1)x^2 + 2xy + (\lambda+1)y^2 + \lambda^2(\lambda+1) = 0$.

Questa conica è degenere per tutti e soli i valori di λ per cui si ha:

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè $\qquad \lambda^2(\lambda+1)^3 - \lambda^2(\lambda+1) = 0 \ , \rightarrow \qquad \lambda^2(\lambda+1)\cdot(\lambda^2 + 2\lambda) = 0$.

Questa equazione ammette le soluzioni:

$$(14) \qquad \lambda = -2 \ , \quad \lambda = -1 , \quad \lambda = 0 .$$

Sostituiamo questi valori di λ nelle equazioni (13) e (14); si hanno le coniche degeneri:

$$(15_1) \qquad \alpha \equiv \begin{cases} z = -2 \\ -x^2 + 2xy - y^2 - 4 = 0 \ , \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \alpha \equiv \begin{cases} z = -2 \\ (x-y)^2 + 4 = 0 \ , \end{cases}$$

$$(15_2) \qquad \beta \equiv \begin{cases} z = -1 \\ xy = 0 \ , \end{cases} \qquad \text{e} \quad (15_3) \qquad \gamma \equiv \begin{cases} z = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \ . \end{cases}$$

A queste coniche corrispondono le rette:

(*) $d_1 \equiv \begin{cases} z = -2 \\ x + y + 2i = 0 \end{cases}$, $d_2 \equiv \begin{cases} z = -2 \\ x + y - 2i = 0 \end{cases}$,

(*) $r \equiv \begin{cases} z = -1 \\ x = 0 \end{cases}$, e $s \equiv \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$,

(*) $b_1 \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$, e $b_2 \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

PROBLEMA 3 E (Sessione estiva 1953 ; Dispense ORUR pg. 32)

Nello spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z si considerino
(α) il sistema lineare (S) ∞^2 delle quadriche passanti per la cubica gobba di equazioni parametriche

(1) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$,

(β) la stella S' delle rette passanti per l'origine O delle coordinate

$$\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

I) Si stabilisca tra la S e la stella S' la proiettività nella quale alle quattro seguenti quadriche del sistema S

a) la quadrica contenente l'asse z e il punto $(1,1,0)$,
b) il cono con il vertice nell'origine O
c) la quadrica contenente gli assi x e y,
d) la quadrica passante per i due punti $(-1,-1,1)$ e $(-1,-1,0)$

corrispondano ordinatamente le seguenti quattro rette della stella S':

a') l'asse x, b') l'asse y, c') l'asse z, d') la retta $x = y = z$.

II) Determinare la superficie F^3 (del 3^o ordine) luogo del punto variabile di intersezione di una quadrica del sistema S con la retta della stella S' ad essa corrispondente nella proiettività sopra considerata, quando la quadrica descrive il sistema S stesso.

Esaminare i punti doppi della superficie e dedurre da tale esame che essa non è rigata.

III) la superficie F^3, pur non essendo rigata, contiene alcune rette (in numero finito). Determinare le rette della superficie F^3 passanti per O e indicare un procedimento per trovare altre rette della superficie F^3 non passanti per O.

Quesito I)
Considero le equazioni parametriche della cubica gobba

$$x = t \ , \qquad y = t^2 \ , \qquad z = t^3 \ . \tag{1}$$

Eliminando opportunamente t fra queste equazioni si trovano facilmente tre quadriche passanti per la cubica. Esse sono

$$x^2 = y \ , \qquad xy = z \ , \qquad xz = y^2 \ . \tag{2}$$

Le ∞^2 quadriche passanti per la cubica gobba formano una rete di quadriche avente la seguente equazione

$$S : \lambda(x^2 - y) + \mu(xy - z) + \nu(xz - y^2) = 0 \ . \tag{3}$$

Le ∞^2 rette passanti per l'origine O formano invece una stella S' di equazioni

$$S' : \frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \ . \tag{4}$$

Troviamo i valori di λ, μ, ν corrispondenti alle quadriche dei punti a, b, c, d.

a) La quadrica del fascio S contiene l'asse z $(y = 0, \ x = 0)$ e il punto $(1,1,0)$. In tal caso devono essere soddisfatte le equazioni del sistema

$$\begin{cases} \lambda(0-0) + \mu(0-z) + \nu(0-0) = 0 \\ \lambda(1-1) + \mu(1-0) + \nu(0-1) = 0 \ , \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\mu z = 0 \\ \mu - \nu = 0 \ . \end{cases} \tag{A}$$

Poiché la prima equazione deve essere soddisfatta da qualsiasi valore di z si ha:

$$\mu = 0 \ , \quad \nu = 0 \ , \quad \lambda = 1 \ . \tag{5}$$

b) La quadrica S deve ridursi al cono di vertice O, cioè al complesso dei termini di secondo grado; deve essere quindi

(6) $$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1.$$

c) La quadrica del fascio S deve contenere l'asse x $(y = z = 0)$ e l'asse y $(x = z = 0)$. Affinché ciò si verifichi debbono essere soddisfatte le due equazioni del sistema

(B) $$\begin{cases} \lambda x^2 + \mu(0-0) + \nu(0-0) = 0 \\ \lambda(0-y) + \mu(0-0) + \nu(0-y^2) = 0 \ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda x^2 = 0 \\ \lambda y + \nu y^2 = 0 \ . \end{cases}$$

Tenendo conto che la prima equazione del sistema deve essere identicamente soddisfatta per qualsiasi valore di x, si ricavano i valori

(7) $$\lambda = 0 \ , \quad \mu = 1 \ , \quad \nu = 0 \ .$$

d) La quadrica del fascio S deve contenere i punti $(-1,-1,1)$ e $(-1,-1,0)$.

Affinché ciò si verifichi debbono essere soddisfatte le due equazioni del sistema:

(C) $$\begin{cases} \lambda(1+1) + \mu(1-1) + \nu(-1-1) = 0 \\ \lambda(1+1) + \mu(1-0) + \nu(0-1 = 0 \ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda = 2\nu \\ 2\lambda + \mu - \nu = 0 \ . \end{cases}$$

Ne segue $$2\nu + \mu - \nu = 0 \ , \quad \mu + \nu = 0 \ ;$$

si ricavano così i valori

(8) $$\lambda = 1 \ , \quad \mu = -1 \ , \quad \nu = 1 \ .$$

Considero ora la stella di rette per l'origine $O(0,0,0)$:

(*) $$S' : \ \frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \ .$$

Trovo i valori di ℓ, m, n corrispondenti alle rette a', b', c', d' della stella S'.

a') La retta di S' deve ridursi all'asse x $(y = 0, \ z = 0)$. Deve essere

(5') $$\ell = 1 \ , \quad m = 0, \quad n = 0.$$

b') La retta di S' deve ridursi all'asse y $(x = 0, \ z = 0)$. Deve essere

$(6')$ $\qquad \ell = 0 \ , \quad m = 1 \ , \quad n = 0 \, .$

c') La retta di S' deve ridursi all'asse z $(x = 0, \ y = 0)$. Deve essere

$(7')$ $\qquad \ell = 0 \ , \quad m = 0 \ , \quad n = 1 \ .$

d') La retta di S' deve ridursi alla retta $x = y = z$. Deve essere

$(8')$ $\qquad \ell = 1 \ , \quad m = 1 \ , \quad n = 1 \ .$

Consideriamo ora la proiettività nella quale alle quadriche a), b), c), d) della rete S corrispondono le rette a'), b'), c'), d') della stella S'. Le quattro terne di coordinate proiettive omogenee (λ, μ, ν) ed (ℓ, m, n) che si corrispondono biunivocamente sono:

$$\begin{array}{lcl} (\lambda,\mu,\nu) & \longleftrightarrow & (\ell, m, n) \\ (1,0,0) & \longleftrightarrow & (1,0,0) \\ (0,0,1) & \longleftrightarrow & (0,1,0) \\ (0,1,0) & \longleftrightarrow & (0,0,1) \\ (1,-1,1) & \longleftrightarrow & (1,1,1) \end{array}$$

Sostituiamo questi valori nell'equazione generale di una proiettività:

$$(10) \qquad \begin{cases} \rho\lambda = a_{11}\ell + a_{12}m + a_{13}n \\ \rho\mu = a_{21}\ell + a_{22}m + a_{23}n \\ \rho\nu = a_{31}\ell + a_{32}m + a_{33}n \ . \end{cases}$$

In corrispondenza delle quattro terne si ha il sistema :

$$(11) \qquad \begin{cases} \rho_1 = a_{11} \ , & 0 \ = a_{13} \\ 0 \ = a_{21} \ , & \rho_3 = a_{23} \\ 0 \ = a_{31} \ , & 0 \ = a_{33} \\ 0 \ = a_{12} \ , & \rho_4 = a_{11} + \cancel{a_{12}} + \cancel{a_{13}} \\ 0 \ = a_{22} \ , & -\rho_4 = \cancel{a_{21}} + \cancel{a_{22}} + a_{23} \\ \rho_2 = a_{32}, & \rho_4 = \cancel{a_{31}} + a_{32} + \cancel{a_{33}} \ . \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 12 equazioni in 13 coefficienti incogniti. Poiché questi coefficienti sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo dare ad arbitrio un valore ad uno di essi. Per comodità possiamo porre $\rho_4 = 1$; si ottiene allora un sistema lineare di 12 equazioni in 12 che possiamo risolvere facilmente. Nel nostro caso si ha:

(12) $$a_{12} = a_{13} = 0 \ , \quad a_{21} = a_{22} = 0 \ , \quad a_{31} = a_{32} = 0 .$$

Inoltre, posto $\rho_4 = 1$ si ha:

(13) $$a_{11} = \rho_1 = \rho_4 = 1 \ , \quad a_{23} = \rho_3 = -\rho_4 = -1 \ , \quad a_{32} = \rho_2 = \rho_4 = 1 \ .$$

Le equazioni della proiettività tra il sistema di quadriche e la stella S' di rette sono quindi date dal sistema:

(14) $$\begin{cases} \lambda = \ell \\ \mu = -n \\ \nu = m \ , \end{cases}$$ da cui (15) $$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\ell}{n} \ , \quad \frac{\mu}{\nu} = -\frac{n}{m} \ ,$$

dove abbiamo soppresso il fattore ρ perché le terne (ℓ, m, n) e (λ, μ, ν) sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Quesito II)

Quando la quadrica del sistema S varia, anche la retta del sistema S' ad essa corrispondente varia ed il loro punto di intersezione P descrive il luogo richiesto. Vogliamo trovare l'equazione di questo luogo. Basta eliminare i parametri λ, μ, ν fra le equazioni del sistema

(16) $$\begin{cases} \lambda(x^2 - y) + \mu(xy - z) + \nu(xz - y^2) = 0 \\ \dfrac{x}{\ell} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}, \quad \left(\text{da cui } \dfrac{x}{y} = \dfrac{\ell}{m}, \quad \dfrac{z}{y} = -\dfrac{n}{m} \right) \\ \dfrac{\lambda}{\nu} = \dfrac{\ell}{m}, \quad \dfrac{\mu}{\nu} = -\dfrac{n}{m} \quad . \end{cases}$$

Procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$\frac{\lambda}{\nu}(x^2 - y) + \frac{\mu}{\nu}(xy - z) + xz - y^2 = 0 .$$

Poiché $$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\ell}{m} = \frac{x}{y}$$ e $$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{n}{m} = -\frac{z}{y}$$ si ottiene:

(*) $$\frac{x}{y}(x^2 - y) - \frac{z}{y}(xy - z) + xz - y^2 = 0 \ ,$$ da cui

(*) $$x^3 - xy - \cancel{xy}z + z^2 + \cancel{xy}z - y^3 = 0\,, \qquad \text{infine}$$

(17) $$f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2 - xy = 0\,.$$

Si ottiene così una superficie del 3^o ordine (la indicheremo con F^3), che ha un punto doppio nell'origine $O(0,0,0)$. Ne segue che la <u>F^3 è un monoide</u> in quanto essa ha (almeno) un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto all'ordine (tre) della superficie: Un monoide è ovviamente una superficie razionale.

Il cono delle tangenti principali in O alla F^3 è

(*) $$z^2 - xy = 0\,.$$

Poiché il cono non è degenere, O è un <u>punto doppio conico</u>.

La F^3 non ha altri punti multipli. Possiamo verificare ciò scrivendo la (17) in coordinate omogenee ed eguagliando a zero la funzione $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ e le sue quattro derivate parziali prime. Si ha il sistema:

(*) $$\begin{cases} \qquad\qquad x_1^3 - x_2^3 + x_3^2 x_4 - x_1 x_2 x_4^2 = 0, \\ 3x_1^2 - x_2 x_4^2 = 0, \qquad\qquad -3x_2^2 - x_1 x_4^2 = 0 \\ 2x_3 x_4 = 0, \qquad\qquad x_3^2 - 2x_1 x_2 x_4 = 0\,. \end{cases}$$

Si vede subito che questo sistema che ammette come soluzione solamente il punto $O(0,0,0,1)$.

Conclusione: nella superficie F^3 manca la retta dei punti doppi. Si deduce da ciò che la F^3 non è una superficie rigata, poiché una superficie del 3^o ordine rigata ha sempre una retta direttrice luogo di punti doppi.

Quesito III)

Vogliamo determinare le rette della superficie F^3 passanti per O. Esse si ottengono intersecando la superficie con il cono ad essa tangente nel punto O:

(*) $$\begin{cases} x^3 - y^3 + z^2 - xy = 0 \\ z^2 - xy = 0\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ z^2 - xy = 0 \;; \end{cases} \qquad \text{da cui}$$

(18) $$\begin{cases}(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)=0\\ xy-z^2=0\ .\end{cases}$$

Questo sistema si spezza nei due sistemi

(19) $$\begin{cases}x-y=0\\ xy-z^2=0\ ,\end{cases}$$ (20) $$\begin{cases}x^2+xy+y^2=0\\ z^2=xy\end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene:

(*) $$\begin{cases}x-y=0\\ x^2-z^2=0\ ,\end{cases}$$

quindi esso si spezza nei due sistemi di primo grado

(21) $$\begin{cases}x-y=0\\ x+z=0\end{cases}$$ e (22) $$\begin{cases}x-y=0\\ x-z=0\ .\end{cases}$$

I due sistemi ci danno le rette reali della superficie passanti per il punto O.

Dal sistema (20) si ricavano invece 4 rette complesse, due a due coniugate.

<u>Indichiamo infine un procedimento per trovare le rette della superficie F^3 non passanti per O.</u>

Sia <u>r</u> una di queste rette passante per un punto P della superficie; allora il piano passante per O e per la retta <u>r</u> interseca la F^3 in una cubica degenere che si spezza nella retta <u>r</u> e in una conica avente in O un punto doppio, da cui escono le due rette (21),(22). La retta <u>r</u> deve quindi avere un punto P appartenente ad una delle due rette del punto doppio O.

PROBLEMA 4 E (autunno 1953; Dispense ORUR, pg. 28)

Dato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrici $Oxyz$, si consideri la stella Σ delle rette per l'origine O delle coordinate e la rete Σ_o delle ∞^2 sfere tangenti nell'origine O all'asse z.

I) scrivere l'equazione della proiettività fra Σ e Σ_o tale che:
a) all'asse y corrisponda la sfera passante per i punti $(1,0,0)$ e ((2,0,0) , e quindi spezzata;
b) all'asse delle x corrisponda la sfera passante per i punti $(0,1,0)$ e (0,2,0) ;
c) all'asse delle x corrisponda la sfera di raggio nullo avente il centro in O;
d) alla retta $x = y = z$ corrisponda la sfera avente il cento nel punto $(1,1,0)$.

II) Trovare la superficie F luogo dei punti comuni ad una retta di Σ e alla sfera di Σ_o ad essa corrispondente nella proiettività trovata.

III) Dimostrare che F è una superficie di rotazione.

IV) Determinare i punti doppi di F. Studiare l'intersezione di F con il piano improprio e dedurre geometricamente che esiste un fascio di piani secante (al finito) la superficie F in circonferenze.

<u>Soluzione</u>. Consideriamo le sfere della rete Σ_o passanti per il punto $O(0,0,0)$ e intersechiamo con l'asse z:

(1) $$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0 \\ y=0, \quad x=0 , \end{cases}$$ da cui (2) $$z^2+cz=0 \ .$$

La (2) avrà una radice doppia $z = 0$ se e solo se $c = 0$.
Ne segue che la rete delle sfere tangenti nell'origine all'asse z ha l'equazione

(3) $$x^2+y^2+z^2+ax+by=0 \ .$$

Se usiamo parametri omogenei, la rete delle sfere ha l'equazione

(4) $$\Sigma_0 : \lambda(x^2+y^2+z^2)+\mu x+\nu y=0 \ .$$

Per la stella Σ delle rette passanti per l'origine O si ha l'equazione

(5) $$\Sigma: \ \frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}\ .$$

Quesito I)
Esaminiamo le condizioni che ricorrono per le varie sfere.

a) Sfera della rete (4) passante per i punti $(1,0,0)$, $(2,0,0)$: si ha:

(A) $\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ 2\lambda+\mu=0.\end{cases}$ Si ricava subito (6) $\lambda=0,\ \ \mu=0,\ \ \nu=1$.

b) Sfera passante per i punti $(0,1,0)$ e $(0,2,0)$; si ha:

(B) $\begin{cases}\lambda+\nu=0\\ 4\lambda+2\nu=0\ .\end{cases}$ Si ricava subito (7) $\lambda=0,\ \ \mu=1,\ \ \nu=0$.

c) Sfera di raggio nullo avente il centro in $O(0,0,0)$; dalla (4) subito si ottiene:

(7) $\lambda=1,\quad \mu=0,\quad \nu=0$.

d) Sfera avente il centro nel punto $(1,1,0)$ e tangente in O all'asse z; per le coordinate (α,β,γ) del centro della sfera l'equazione (4) ci dà::

(*) : $$\alpha=-\frac{a}{2}=-\frac{\mu}{2\lambda},\qquad \beta=-\frac{b}{2}=-\frac{\nu}{2\lambda},\qquad \gamma=-\frac{c}{2}=0\,.$$

Quindi si ha: $$-\frac{\mu}{2\lambda}=1\ ,\qquad -\frac{\nu}{2\lambda}=1\,.$$

Si ricava (8) $\lambda=1,\quad \mu=-2,\quad \nu=-2$.

Consideriamo ora l'equazione della stella Σ di rette passanti per il punto O:

(*) $$\Sigma\ :\qquad \frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

e imponiamo le condizioni dettate dal problema.

a') La retta di Σ si riduce all'asse y $(x=0,\ z=0)$;si ha

(6') $\ell=0,\quad m=1,\quad n=0$.

b') La retta di Σ si riduce all'asse x $(y=0,\ z=0)$; si ha

(7') $\ell=1\ ,\quad m=0,\quad n=0$.

$c')$ La retta di Σ si riduce all'asse $z \quad (x=0, y=0)$; si ha

$$(8') \qquad \ell = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 1 .$$

$d')$ La retta di Σ si riduce alla retta $\quad x = y = z$; si ha:

$$(9') \qquad \ell = 1, \qquad m = 1, \qquad n = 1 .$$

In definitiva abbiamo quattro terne di valori ℓ, m, n e λ, μ, ν che si corrispondono biunivocamente come è indicato nel seguente quadro:

$$(Q) \qquad \begin{array}{lcl} (\ell, m, n) & \longleftrightarrow & (\lambda, \mu, \nu) \\ (0,1,0) & \longleftrightarrow & (0,0,1) \\ (1,0,0) & \longleftrightarrow & (0,1,0) \\ (0,0,1) & \longleftrightarrow & (1,0,0) \\ (1,1,1) & \longleftrightarrow & (1,-2,-2) . \end{array}$$

Scriviamo ora le equazioni di una proiettività fra due forme di 2^a specie in coordinate omogenee. Si ha:

$$(10) \quad) \qquad \begin{cases} \rho\ell \; = a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu \\ \rho m = a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu \\ \rho n \; = a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu . \end{cases}$$

I valori del quadro Q ci permettono di trovare i valori dei coefficienti incogniti a_{ik} e ρ_k. Essi si ottengono dal seguente sistema:

$$(11) \qquad \begin{cases} 0 \; = a_{13} , & 0 \; = a_{11} \\ \rho_1 = a_{23} , & 0 \; = a_{23} \\ 0 \; = a_{33} , & \rho_3 = a_{33} \\ \rho_2 = a_{12} , & \rho_4 = \cancel{a_{11}} - 2a_{12} - \cancel{2a_{13}} \\ 0 \; = a_{22} , & \rho_4 = \cancel{a_{21}} - 2\cancel{a_{22}} - 2a_{23} \\ 0 \; = a_{32}, & \rho_4 = a_{31} - \cancel{2a_{32}} - 2\cancel{a_{33}} . \end{cases}$$

Riassumendo si ha:

$$(12) \qquad a_{11} = a_{13} = 0 , \qquad a_{21} = a_{22} = 0 , \qquad a_{32} = a_{33} = 0 .$$

Poiché i coefficienti del sistema sono omogenei, cioè sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $a_{12} = 1$.

Si ricava $\rho_4 = -2$ e si hanno le altre soluzioni

(12') $$a_{31} = -2\,, \qquad -2a_{23} = -2 \;\; (a_{23} = 1)\,.$$

Le equazioni della proiettività sono date quindi dal seguente sistema:

(13) $$\begin{cases} \rho\ell = \mu \\ \rho m = \nu \\ \rho n = -2\lambda\ . \end{cases}$$

Poiché i coefficienti ℓ, m, n sono determinati a meno di un comune fattore non nullo, possiamo porre $\rho = -2$ e le equazioni della proiettività diventano:

(*) $$\begin{cases} \lambda = n \\ \mu = -2\ell \\ \nu = -2m\ , \end{cases} \qquad \text{da cui si ha:} \quad \frac{\mu}{\lambda} = -2\frac{\ell}{n}\ , \qquad \frac{\nu}{\lambda} = -2\frac{m}{n}\ .$$

Quesito II)
Quando la sfera del sistema Σ varia, anche la retta del sistema Σ_o ad essa corrispondente varia ed il loro punto di intersezione $P(x, y, z)$ descrive una superficie F, luogo del punto P.
Vogliamo trovare l'equazione cartesiana di questo luogo. Basta eliminare λ, μ, ν ed ℓ, m, n fra le equazioni del sistema

(14) $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{\mu}{\lambda}x + \dfrac{\nu}{\lambda}y = 0 \\ \dfrac{x}{\ell} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}, \qquad \dfrac{\mu}{\lambda} = -2\dfrac{\ell}{n}, \qquad \dfrac{\nu}{\lambda} = -2\dfrac{m}{n}\ . \end{cases}$$

Si ricava $$\frac{\ell}{n} = \frac{x}{z}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{y}{z}\ ,$$

(15) $$\frac{\mu}{\lambda} = -2\frac{x}{y}\ , \qquad \frac{\nu}{\lambda} = -2\frac{y}{z}\ .$$

Sostituendo le espressioni (15) nella prima equazione del sistema (14) si ottiene il luogo richiesto:

(*) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\frac{x}{z} - 2y\frac{y}{z} = 0\,,$$

ossia (16) $$F: \quad z(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2 - 2y^2 = 0\ .$$

L'equazione della superficie F si può mettere sotto un'altra forma:

(*) $$z(x^2+y^2)+z^3-2(x^2+y^2)=0\ ,\qquad \text{e quindi}$$

(17) $$F:\qquad (x^2+y^2)\cdot(z-2)+z^3=0\,.$$

Come si vede la F è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con F^3; essa ha un punto doppio nell'origine $O(0,0,0)$. Ne segue che F^3 è un monoide in quanto essa ha (almeno) un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto all'ordine (tre) della superficie. Un monoide è ovviamente una superficie razionale.

Quesito III)

La F^3 è una superficie di rotazione: infatti essa che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la curva del piano xz che ha l'equazione:

(18) $$C:\qquad x^2(z-2)+z^3=0\ .$$

A questo proposito ricordiamo la regola:

" Data nel piano yz una curva di equazione $f(x,z)=0$, sostituendo nella $f(x,z)=0$ al posto di x il radicale $\sqrt{x^2+y^2}$ si ottiene l'equazione della superficie rotonda generata dalla rotazione della line data attorno all'asse z".

I piani $z=k$ intersecano la F^3 secondo le curve

(*) $$k(x^2+y^2)+k^3-2x^2-2y^2=0\ .$$

Si ottengono le circonferenze di centro O

(19) $$x^2(k-2)+y^2(k-2)+k^3=0\,.$$

Si ha così una nuova dimostrazione che F^3 è una superficie di rotazione intorno all'asse z.

Quesito IV)

L'origine $O(0,0,0)$, come abbiamo detto, è un punto doppio. Il cono delle tangenti principali in O è

(*) $$x^2+y^2=0,\quad\rightarrow\quad (x+iy)\cdot(x-iy)=0\,;$$

ne segue che O è un punto doppio biplanare.

Intersecando F^3 con il cono delle tangenti subito si ottiene $z^3 = 0$: ciò vuol dire che le rette $x + iy = 0$, $x - iy = 0$ hanno tre intersezioni con la F^3 assorbite nel punto O .

Troviamo i punti doppi della F^3. A tale scopo scriviamo l'equazione (16) in coordinate omogenee e annulliamo le quattro derivate parziali prime della funzione che compare al primo membro della (16). Si ha:

(*) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1^2x_4 - 2x_2^2x_4 = 0 ,$$

(20) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^3 - 2x_1^2x_4 - 2x_2^2x_4 = 0 ;$$

(21) $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_3 - 4x_1x_4 , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2x_3 - 4x_2x_4 ,$$

(21) $$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4} = -2x_1^2 - 2x_2^2 .$$

Consideriamo il sistema:

(22) $$\begin{cases} x_1x_3 - 2x_1x_4 = 0, & x_2x_3 - 2x_2x_4 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 = 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 . \end{cases}$$

Si vede subito che esso ha la soluzione

(*) $$x_1 = 0 , \quad x_2 = 0 , \quad x_3 = 0 , \quad x_4 = 1 .$$

Se poi si pone $x_1 = 1$ si ha $x_2 = \pm i$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

La F^3 ha quindi tre punti doppi; essi sono:

(23)
$(0,0,0,1) =$ che è l'origine delle coordinate ,

$(1,i,0,0)$, $(1,-i;0,0)$ che sono i punti ciclici dei piani $z = k$.

Ne segue che la superficie F^3 non è rigata, perché le superfici rigate del 3^o ordine posseggono una retta doppia.

Intersechiamo ora la superficie F^3 con il piano improprio:

$$(24) \qquad \begin{cases} x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1^2x_4 - 2x_2^2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Si ottiene una C^3 degenere che si spezza nelle due curve

$$(25) \qquad \gamma_1 \equiv \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \ , \end{cases} \qquad \gamma_2 \equiv \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

La prima curva rappresenta la retta impropria del piano $z = k$, parallelo al piano xy; la seconda curva rappresenta il circolo assoluto A_∞ dello spazio .

PROBLEMA 5 E (Dispense ORUR , pg. 41)

I) Data la parabola $x^2 - y = 0$ del piano $z = 0$ e la cubica gobba di equazioni parametriche $x = t + t^2$, $y = t^2$, $z = t^3$, si ponga fra le due curve la proiettività che fa corrispondere al vertice della parabola se stesso,
al punto $U(1,1,0)$ il punto $U'(2,1,0)$,
e al punto improprio della parabola il punto improprio della cubica gobba.

II) Scrivere l'equazione della superficie rigata F (del 3^o ordine) luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in questa proiettività.

III) Determinare i punti doppi della superficie F e il suo comportamento nell'origine degli assi.

IV) Verificare che l'asse x e la retta impropria del piano $x = 0$ sono rette della F a carattere sviluppabile.

V) Trovare un sistema di equazioni parametriche per la F e mediante esse determinare le due tangenti asintotiche alla superficie nel punto $U(1,1,0)$.

Quesito I)
In coordinate omogenee l'equazione della parabola è $x_1^2 - x_2 x_3 = 0$; ponendo $x_3 = 0$ si trova che il suo punto improprio è $P_\infty(0,1,0)$.
Ora la parabola si può rappresentare parametricamente con le equazioni
(1) $x = s$, $y = s^2$, $z = 0$ (equazione del piano xy) .

Ponendo $s = 1/\sigma$ e passando a coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 dello spazio, le equazioni (1) diventano:

(2) $$\frac{x_1}{x_4} = s = \frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma^2}, \qquad \frac{x_2}{x_4} = s^2 = \frac{1}{\sigma^2} , \qquad \frac{x_3}{x_4} = 0 = \frac{0}{\sigma^2} .$$

Le equazioni parametriche della parabola, in coordinate omogenee, si possono allora scrivere nel seguente modo:

(3) $$x_1 = \sigma , \quad x_2 = 1 , \quad x_3 = 0 , \quad x_4 = \sigma^2 .$$

In coordinate omogenee, il punto improprio della parabola $y = x^2$, $z = 0$ è $P_\infty(0,1,0,0)$: cioè ad esso corrisponde il valore 0 del parametro σ e quindi il valore ∞ del parametro $s = 1/\sigma$.

Possiamo dire pertanto che , nella parabola, il vertice $V(0,0,0)$, il punto unità $U(1,1,0)$ e il punto improprio $P_{\infty}(0,1,0)$ corrispondono rispettivamente ai valori $0,\ 1$ e ∞ del parametro s.

Passiamo alla cubica gobba di equazioni $x = t + t^2\ ,\ \ y = t^2\ ,\ \ z = t^3\ .$

I punti della cubica $V(0,0,0)$ e $U'(2,1,1)$ corrispondono rispettivamente ai valori $t = 0$ e $t = 1$ del parametro t.

Per trovare le coordinate del punto improprio P'_{∞}, passiamo a coordinate omogenee e scriviamo le equazioni parametriche nel modo seguente

(*) $$\frac{x_1}{x_4} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{\tau + 1}{\tau^2}\ ,\qquad \frac{x_2}{x_4} = \frac{1}{\tau^2}\ ,\qquad \frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{\tau^3}\ ,\quad \text{e quindi}$$

(4) $$\frac{x_1}{x_4} = \frac{\tau^2 + \tau}{\tau^3}\ ,\qquad \frac{x_2}{x_4} = \frac{\tau}{\tau^3}\ ,\qquad \frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{\tau^3}\ .$$

La cubica gobba ha quindi le equazioni parametriche:

(5) $$x_1 = \tau^2 + \tau\ ,\quad x_2 = \tau\ ,\quad x_3 = 1\ ,\quad x_4 = \tau^3\ .$$

Facendo $\tau = 0$, cioè $t = \infty$, si ottiene il punto improprio della curva.
Esso è $P'_{\infty}(0,0,1,0)$.

Riassumendo, per quanto riguarda la cubica gobba

(*) $$x = t + t^2\ ,\ \ y = t^2\ ,\ \ z = t^3\ ,$$

i punti $V(0,0,0)$, $U'(2,1,0)$ della curva e il punto improprio $P'_{\infty}(0,0,1,0)$ corrispondono rispettivamente ai valori $0,1,\infty$ del parametro t.

In conclusione, ai valori $0,1,\infty$ del parametro s corrispondono rispettivamente i valori $0,1,\infty$ del parametro t, usato per indicare la cubica, e quindi l'equazione della proiettività è

(*) $(0,1,\infty,s) = (0,1,\infty,t)$, cioè (6) $s = t$.

Quesito II)
Le equazioni delle due curve che si corrispondono nella proiettività sono quindi:

parabola $\gamma(t): \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}$, cubica gobba $\gamma'(t): \begin{cases} x = t + t^2 \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$.

La retta che unisce due punti corrispondenti $P(t)$ e $P'(t)$ delle due curve ha quindi le equazioni:

(*) $$\frac{x - t}{t + t^2 - t} = \frac{y - t^2}{t^2 - t^2} = \frac{z - 0}{t^3 - 0} \ ,$$ ossia:

(7) $$\frac{x - t}{t^2} = \frac{z}{t^3} \quad \text{e} \quad y - t^2 = 0 \ .$$

Semplificando, si ricava che le equazioni parametriche della retta che unisce punti corrispondenti delle due curve sono date dal sistema

(8) $$\begin{cases} x - t = \dfrac{z}{t} \\ y = t^2 \end{cases} .$$

Ponendo $\frac{z}{t} = u$, si ottengono le equazioni parametriche della rigata F, luogo delle rette che uniscono punti corrispondenti della parabola e della cubica gobba:

(9) $$\begin{cases} x = t + u \\ y = t^2 \\ z = t\,u \end{cases} .$$

L'equazione cartesiana della superficie F, luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti nella proiettività, si ottiene eliminando i parametri $\underline{t}$ ed $\underline{u}$ fra le equazioni del sistema (9). Si ottiene:

(*) $y + z = t^2 + tu$, da cui $y + z = t(t + u)$, ossia $y + z = t\,x$.

L'ultima relazione ci permette di ricavare $\underline{t}$ in funzione di x, y, z ; si ha:

(10) $$t = \frac{y + z}{x}.$$

Ora dalla prima equazione del sistema (9) si ha : $u = x - t$; sostituendo in essa la relazione (10) si ottiene:

(11) $$u = x - \frac{y+z}{x} \ .$$

Sostituendo ora le espressioni di $\underline{t}$ e di $\underline{u}$ nella terza equazione del sistema (9) si ricava una equazione nelle sole variabili x, y, z; essa è:

(*) $$z = \frac{y+z}{x} \cdot \left(x - \frac{y+z}{x} \right), \qquad \rightarrow \qquad z = y + z - \frac{(y+z)^2}{x^2} \ ,$$

ossia $$y = \frac{(y+z)^2}{x^2} \ .$$

Il luogo delle rette che uniscono punti corrispondenti delle due curve è quindi una superficie F di equazione:

(12) $$x^2 y = (y+z)^2 \ .$$

Come si vede la F è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con il simbolo F^3; essa ha un punto doppio nell'origine $O(0,0,0)$. Ne segue che la F^3 è un monoide in quanto essa ha (almeno) un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto all'ordine (tre) della superficie. Un monoide è ovviamente una superficie razionale.

La superficie F^3 è una superficie rigata perché è il luogo delle ∞^1 rette che uniscono gli ∞^1 punti della parabola γ_1 con gli ∞^1 punti corrispondenti della cubica gobba. Poiché le coppie di punti corrispondenti sono distinte, anche le rette che li uniscono sono distinte, cioè per un punto generico della superficie passa una e una sola generatrice : questa è una prova in più che la superficie F^3 è rigata.

Quesito III)

Come abbiamo detto, l'origine $O(0,0,0)$ è un punto doppio di F^3. Il cono delle tangenti principali in O è:

(13) $$(y+z)^2 = 0 \ ;$$

esso contiene le rette che hanno tre intersezioni con la F^3 assorbite nel punto O. Poiché il cono si spezza in due piani sovrapposti $y + z = 0$, l'origine O è un punto doppio uniplanare.

Vogliamo trovare i punti doppi della superficie F^3. A tale scopo scriviamo l'equazione (12) in coordinate omogenee e annulliamo le quattro derivate parziali prime della funzione che compare al primo membro dell'equazione:

(*) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2 - (x_2 + x_3)^2 x_4 = 0 \ , \quad \text{ossia}$$

(14) $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1{}^2x_2-x_2{}^2x_4-x_3{}^2x_4-2x_2x_3x_4=0 \ .$$

Calcoliamo le derivate parziali prime della funzione f; si ha:

(21) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1x_2 \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1{}^2-2x_2x_4-2x_3x_4 \ ,$$

(21) $$\frac{\partial f}{\partial x_3}=-2x_3x_4-2x_2x_4 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_4}=-(x_2+x_3)^2 \ .$$

Consideriamo il sistema:

(23) $$\begin{cases} x_1{}^2x_2-(x_2+x_3)^2x_4=0, \quad x_1x_2=0, \quad x_1{}^2-2(x_2+x_3)x_4=0 \ , \\ (x_2+x_3)x_4=0, \qquad (x_2+x_3)^2=0 \ . \end{cases}$$

Si vede subito che il sistema ha la soluzione $x_1=x_2=x_3=0, \quad x_4=1$
e la soluzione $x_1=0, \quad x_2+x_3=0$.

La F^3 ha quindi il punto doppio $O(0,0,0)$ (evidente fin dall'inizio) e la retta luogo di punti doppi $x=0, \quad y+z=0$, che è una retta del piano yz passante per il punto O.
Poiché la F^3 contiene una retta luogo di punti doppi, essa è una rigata (G.Vaccaro, Teoria delle superfici; pg. 105).

Quesito IV)
Vogliamo ora verificare che l'asse x e la retta impropria del piano yz ($x=0$, $t=0$), sono rette della F^3 a carattere sviluppabile .
Per verificare che l'asse x è una retta di F^3 a carattere sviluppabile, consideriamo il punto generico di esso $Q(h,0,0,0)$ e il piano tangente in esso: procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$f(x,y,z)=x^2y-y^2-z^2-2yz=0 \, ,$$

(*) $$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-2y-2z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=-2z-2y \, ,$$

(*) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_Q=0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_Q=h^2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_Q=0 \ .$$

L'equazione del piano tangente nel punto $Q(h,0,0)$ è:

(*) $h^2(y-0)=0$, ossia (24) $y=0$.
Poiché nell'equazione del piano non figura l'ascissa h del generico punto Q dell'asse x, concludiamo che questo asse è una retta a carattere sviluppabile della superficie.

Consideriamo ora la retta impropria del piano $x=0$ (piano yz): le equazioni della retta sono $x_1=0,\ x_4=0$ e un generico punto M di essa ha le coordinate $M(0,\lambda,\mu,0)$. Vogliamo trovare l'equazione del piano tangente alla superficie in questo punto. L'equazione della superficie F^3 in coordinate omogenee e le derivate parziali prime del polinomio $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ che compare al primo membro già sono state trovate e sono date dalle (14) e (21).
Dalle (21) si ricava:

$$(22)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_M=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_M=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_M=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_M=-(\lambda+\mu)^2\ .$$

L'equazione del piano tangente nel punto improprio M è pertanto:

(*) $-(\lambda+\mu)^2(x_4-0)=0$, ossia (23) $x_4=0$.

Poiché nell'equazione del piano non figurano le coordinate $\lambda,\ \mu$ del punto M, concludiamo che la retta impropria del piano yz ($x_1=0,\ x_4=0$) è una retta a carattere sviluppabile della superficie F^3.

Quesito V)
Abbiamo visto che le equazioni parametriche della F^3 sono date dal sistema:

$$(9)\qquad \begin{cases} x=t+u \\ y=t^2 \\ z=t\,u\ . \end{cases}$$

Da esse possiamo ricavare le linee asintotiche della superficie e la tangente asintotica alla linea passante per il punto U(1,1,0). Per questo studio si rimanda al PROBLEMA 5 E-bis .

PROBLEMA 6 E (Autunno 1954, 1° app.; Dispense ORUR, pg. 64)

I) Nello spazio riferito a ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $O(x, y, z)$ si consideri il fascio F dei piani per l'asse z e si ponga fra i piani e i punti dell'asse z una proiettività in cui ai piani $y = 0$, $x + y = 0$ e $x = 0$ corrispondano rispettivamente il punto improprio dell'asse z, l'origine e il punto unità $(0,0,1)$.

II) Detto α il piano variabile di F , sia A il punto dell'asse z ad esso corrispondente nella proiettività. Detta Q l'intersezione di α con la retta $\underline{r}$ di equazione $x + y = z = 1$, si costruisca la parabola C con l'asse parallelo al piano xy e passante per i punti A,Q,O (si consiglia di rappresentare C come intersezione di α con un cilindro con generatrici parallele ad uno degli assi coordinati).

III) Determinare la superficie S (del 3^o ordine) descritta da C al variare di α nel fascio F. Dimostrare:

1) che l'origine O è un punto doppio biplanare di S e determinare i due piani tangenti principali;
2) che la retta impropria del piano $z = 0$ appartiene alla S e che è una retta a carattere sviluppabile (ossia luogo di punti parabolici);
3) che la superficie S contiene anche l'asse z come retta semplice a carattere non sviluppabile e determinare per il punto variabile di essa l'ulteriore tangente asintotica alla S.

Quesito I)

Fascio di piani passanti per l'asse z . Si ha

(1) F: $x - \lambda y = 0$; ponendo $\lambda = \dfrac{n}{m}$ si ha: $mx - ny = 0$.

(a) Piano $y = 0$; si ha $m = 0,\ n = 1$ quindi $\lambda = \infty$;
(b) piano $x + y = 0$; si ha $m = 1,\ n = -1$ quindi $\lambda = -1$;
(c) piano $x = 0$; si ha $m = 1,\ n = 0$ quindi $\lambda = 0$.

In coordinate omogenee, i punti dell'asse z hanno l'espressione:

(2) $P(0,0,h,t)$; ponendo $k = \dfrac{h}{t}$ possiamo scrivere $P(0,0,k,1)$:

(a') punto $Z_\infty(0,0,1,0)$; si ha $h = 1,\ t = 0$ quindi $k = \infty$;
(b') punto $O(0,0,0,1)$; si ha $h = 0,\ t = 1$ quindi $k = 0$,
(c') punto $U(0,0,1,1)$; si ha $h = t = 1$ quindi $k = 1$.

L'equazione della proiettività tra il fascio di piani e la retta punteggiata (sono forme di prima specie) è data dall'eguaglianza di birapporti:

(*) $\quad (\infty, -1, 0, \lambda) = (\infty, 0, 1, k)$, da cui

(*) $\quad (\lambda, 0, -1, \infty) = (k, 1, 0, \infty)$, cioè $(\lambda, 0, -1) = (k, 1, 0)$.

Ne segue $\quad \dfrac{-1-\lambda}{-1-0} = \dfrac{0-k}{0-1}$; infine si ha:

(3) $\quad \lambda + 1 = k$ equazione della proiettività .

Quesito II)

Si α il piano del fascio F; la sua equazione è:

(*) $\quad x - \lambda y = 0$.

Il punto A dell'asse z ad esso corrispondente nella proiettività è $A(0, 0, \lambda + 1, 1)$; le coordinate non omogenee di questo punto A sono: $A(0, 0, \lambda + 1)$.

Troviamo ora il punto di intersezione Q tra il piano α e la retta di equazioni

(*) $\quad x + y = 1$, $z = 1$. Basta risolvere il sistema:

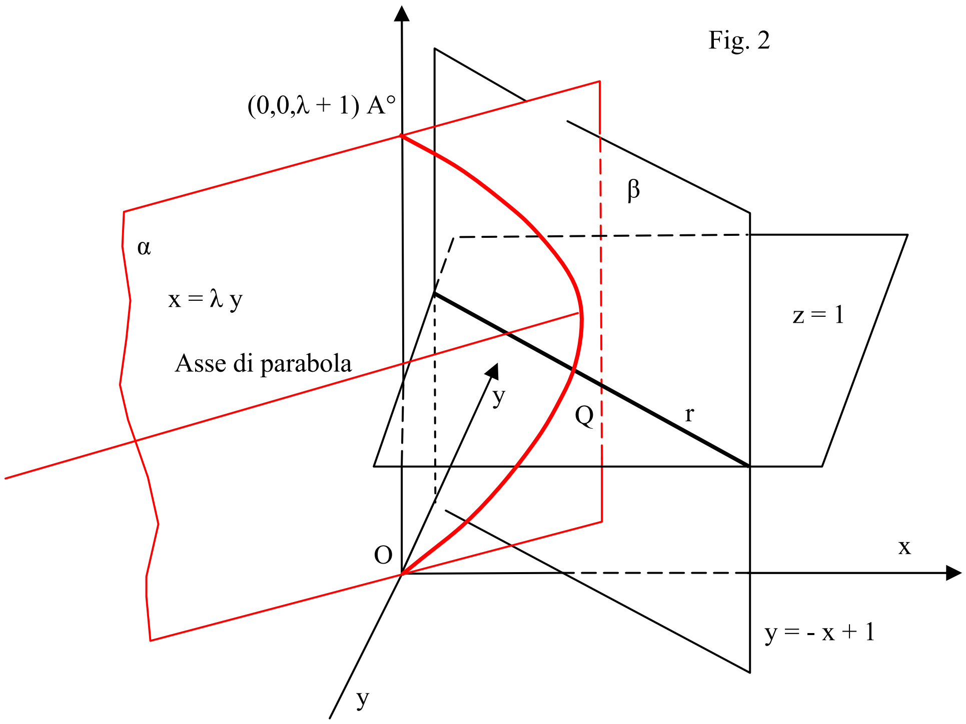
(4) $\quad \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ x + y = 1, \quad z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + \lambda y = 0 \\ \ \ x + y \ = 1 , \end{cases} \rightarrow$ (5) $\quad y(\lambda + 1) = 1$.

Dal sistema (4) si ricava $\quad \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda , \end{cases} \rightarrow$ (6) $\quad x(\lambda + 1) = \lambda$.

Dalle relazioni (4), (5) e dal sistema (4) si ricava che le coordinate del punto Q sono : (7) $\quad Q\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}, \dfrac{1}{\lambda+1}, 1\right)$.

Sia ora C la parabola passante per i punti A, Q, O e avente l'asse parallelo al piano xy (vedi fig. 2). Per trovare le equazioni di questa parabola è opportuno vederla come intersezione del piano α : $x - \lambda y = 0$, passante per l'asse z, con un cilindro parabolico con le generatrici parallele all'asse x e per il quale lo stesso asse x sia una generatrice. E' pacifico che il piano α intersecherà questo

cilindro secondo una parabola γ, alla quale imporremo la condizione di avere l'asse parallelo al pano xy.
A tal fine consideriamo la generica equazione di una quadrica:



$$
(8) \qquad \begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad . \end{aligned}
$$

Affinché essa sia un cilindro con le generatrici parallele all'asse x, basta imporre la condizione che nell'equazione (8) manchino tutti i termini contenti la x .
Pertanto l'equazione del cilindro sarà

$$
(9) \qquad a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad .
$$

NOTA. Nel piano yz (piano $x = 0$) questa equazione rappresenta una conica che deve essere anch'essa una parabola γ . Dalla (9) si vede che abbiamo 6 parametri omogenei, di cui solo 5 sono essenziali. Il passaggio per le proiezioni dei punti A, O, Q sul piano yz dà 3 condizioni lineari. Se imponiamo che l'asse della parabola sia parallelo ad una determinata giacitura (piano xy) abbiamo altre 2 condizioni.
In totale abbiamo 5 condizioni lineari che ci permettono di trovare l'equazione della parabola.

Imponiamo ora le condizioni relative al passaggio per i tre punti.

(*) La conica (9) passa per O(0,0,0); si ha (10) $a_{44} = 0$.

(*) La conica passa per $A(0,0,\lambda+1)$: si ha

* $a_{33}(\lambda+1)^2 + 2a_{34}(\lambda+1) + \cancel{a_{44}} = 0$, $\to$ (11) $2a_{34} = -a_{33}(\lambda+1)$.

(*) La conica passa per $Q\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1}, 1\right)$; si ha:

(12) $$a_{22}\frac{1}{(\lambda+1)^2} + 2a_{23}\frac{1}{\lambda+1} + a_{33} + 2a_{24}\frac{1}{\lambda+1} + 2a_{34} + \cancel{a_{44}} = 0 \ .$$

Se vogliamo che la conica (9) sia una parabola deve essere $a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$. In tal modo l'equazione della conica diventa

(*) $$a_{22}y^2 + 2\sqrt{a_{22}a_{33}}\cdot yz + a_{33}z^2 + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 0 \ ,$$ ossia

(13) $$\left(\sqrt{a_{22}}\cdot y + \sqrt{a_{33}}\cdot z\right)^2 + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 0 \ .$$

Le equazioni dell'asse della parabola sono date dal sistema:

(*) $$\begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ \sqrt{a_{22}}\cdot y + \sqrt{a_{33}}\cdot z + q = 0 \end{cases} .$$

Questa retta ha la giacitura del piano xy, ossia è perpendicolare all'asse z, solo se si ha $a_{22} = 0$.

Pertanto dalla relazione $a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$ si ricava anche che $a_{23} = 0$.

Ricordando che $a_{44} = 0$ la relazione (12) diventa

(*) $$a_{33} + 2a_{24}\frac{1}{\lambda+1} + 2a_{34} = 0 \ .$$

Infine, ricordando la (11) [$2a_{34} = -a_{33}(\lambda+1)$], si ottiene:

(13) $$a_{33} + 2a_{24}\frac{1}{\lambda+1} - a_{33}(\lambda+1) = 0 \ .$$

Poiché i coefficienti di una conica sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $a_{33} = 1$. In tal modo la

(13) diventa (*) $$\cancel{1} + 2a_{24}\frac{1}{\lambda+1} - \lambda - \cancel{1} = 0 \ .$$

Si ricava $\quad 2a_{24} = \lambda(\lambda+1)$, da cui $\quad$ (14) $\quad 2a_{24} = \lambda^2 + \lambda$.

Conosciamo ora tutti i coefficienti della parabola (10); essi sono:

(15) $\quad a_{22} = a_{23} = a_{44} = 0, \quad a_{33} = 1, \quad 2a_{24} = \lambda^2 + \lambda, \quad 2a_{34} = -(\lambda+1)$.

Possiamo allora dire che l'equazione della parabola C è:

(16)
$$\begin{cases} z^2 + (\lambda^2+\lambda)y - (\lambda+1)z = 0 \\ x = \lambda y \ . \end{cases}$$

Al variare del piano α, cioè del parametro λ, la parabola C descrive una superficie S la cui superficie si ottiene eliminando il parametro λ fra le due equazioni del sistema (16). Si ottiene:

(*)
$$z^2 + \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y}\right)\cdot y - \left(\frac{x}{y} + 1\right)\cdot z = 0,$$

(*)
$$z^2 + \frac{x^2}{y} + x - \frac{x}{y}z - z = 0.$$

Si ricava così che l'equazione della superficie S è

(17)
$$z^2y + x^2 + xy - xz - zy = 0,$$

ossia
$$z^2y + x(x+y) - z(x+y) = 0, \quad \text{infine}$$

(18)
$$z^2y + (x+y)\cdot(x-z) = 0 \ .$$

Si osserva subito che la S è una superficie del terzo ordine, che indicheremo con il simbolo F^3.
Poiché la (17) è priva del termine noto e dei termini di primo grado, si deduce subito che l'origine O è un punto doppio per la F^3. La superficie è dunque un monoide, in quanto essa è dotata di un punto che ha molteplicità inferiore di una unità rispetto al suo ordine (tre). Ovviamente la F è una superficie razionale.

1) Come abbiamo già detto, l'origine $O(0,0,0)$ è un punto doppio della superficie e il cono delle tangenti principali in O è:

(19)
$$(x+y)(x-z) = 0.$$

Poiché il cono si spezza in due piani distinti, l'origine O è un punto doppio biplanare.

Le rette per O appartenenti alla F^3 si ottengono intersecando questa superficie con il cono delle tangenti (Esercizi ORUR, pg. 5). Esse sono soluzioni del sistema:

(*) $\begin{cases} z^2y+(x+y)(x-z)=0 \\ (x+y)\cdot(x-z)=0 \ , \end{cases}$ da cui (20) $\begin{cases} z^2y=0 \\ (x+y)(x-z)=0 \ . \end{cases}$

Il sistema (20) si spezza nei sistemi più semplici

(A) $\begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \ , \end{cases}$ (B) $\begin{cases} z=0 \\ x+y=0 \ . \end{cases}$

I due sistemi ci danno le rette della superficie F passanti per O.

2) La retta impropria del piano $z=0$ (piano xy) ha le equazioni $x_3=0$, $x_4=0$. Un punto generico M di essa le coordinate $M(\lambda,\mu,0,0)$.
Vogliamo trovare le equazioni del piano tangente alla superficie F^3 in questo punto. A tale scopo scriviamo l'equazione della F^3 in coordinate omogenee:

(*) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2x_3^2+x_1^2x_4+x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4=0$.

Calcoliamo le derivate parziali prime della funzione $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Si ha:

(21) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1x_4+x_2x_4-x_3x_4$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=x_3^2+x_2x_4-x_3x_4$,

(21) $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}=2x_2x_3-x_1x_4-x_2x_4$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_4}=x_1^2+x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$.

Nel punto $M(\lambda,\mu,0,0)$ queste derivate hanno rispettivamente i valori:

(22) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)_M=0$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)_M=0$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)_M=0$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_4}\right)_M=\lambda^2+\lambda\mu$.

L'equazione del piano tangente in un generico punto $M(x_1',x_2',x_3',x_4')$ della superficie è:

(*) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_M x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_M x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_M x_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_M x_4 = 0\,;$$

Nel nostro caso si ha : $(\lambda^2 + \lambda\mu)x_4 = 0$, ossia (23) $x_4 = 0$.

Poiché nell'equazione del piano tangente non figurano le coordinate λ, μ del punto M concludiamo che la retta impropria del piano xy ($x_3 = 0,\ x_4 = 0$) è a carattere sviluppabile.

Mostriamo che la superficie S contiene l'asse z come retta semplice. A tale scopo intersechiamo la S con una retta generica $y = hx$ passante per l'asse z e facciamo vedere che questa retta è una soluzione semplice. Consideriamo il sistema:

(24) $$\begin{cases} z^2 y + (x+y)(x-z) = 0 \\ y = hx \ . \end{cases}$$

Sostituendo si ha

(*) $\lambda z^2 x + (x + hx)(x - z) = 0\,, \rightarrow$ (*) $\lambda z^2 x + x(1+h)(x-z) = 0$,

quindi: (25) $$x[\lambda z^2 + (1+h)(x-z)] = 0\,.$$

Si ricava così che il sistema ha la soluzione semplice $x = 0,\ y = 0,\ z = q$. Essa ci dà un punto $Q(0,0,q)$ variabile sull'asse z . Questo asse , quindi, è una retta semplice della superficie S.
In coordinate omogenee possiamo scrivere $Q(0,0,q,1)$. Le derivate parziali prime della funzione $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ in tal punto si ricavano subito ricordando le formule (21). Si ha :

(26) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_Q = -q, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_Q = q^2 - q, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_Q = \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_Q = 0\ .$$

Ne segue che l'equazione del piano tangente alla superficie S in tal punto è:

(27) $$-qx_1 + (q^2 - q)x_2 = 0\ .$$

Poiché nell'equazione del piano tangente in un punto Q dell'asse z figurano le coordinate del punto stesso, questo asse non è una retta a carattere sviluppabile della superficie S.

PROBLEMA 7 E (Testo di G. Vaccaro, Le superfici, pg. 120)

Nello spazio riferito ad una terna di assi cartesiani ortogonali Oxyz si consideri la retta r di equazioni $x = 0$, $y = z$ ed il fascio F delle rette del piano xy passanti per l'origine (fig. 3).

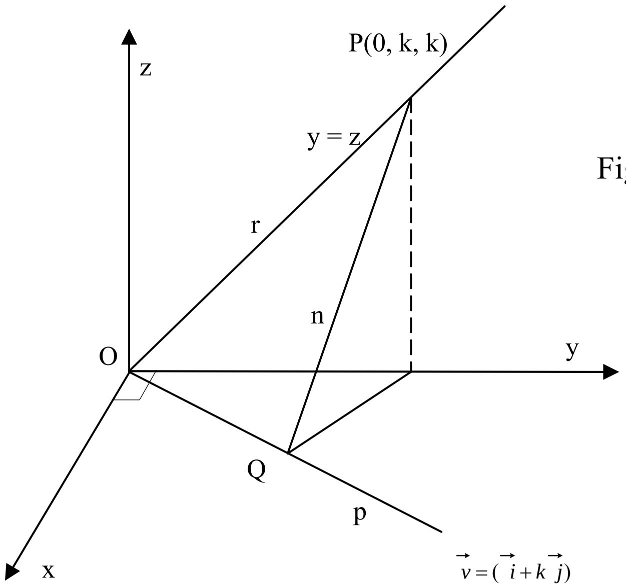


Fig. 3

Si ponga tra r ed F la proiettività in cui ai punti O(0,0,0), U(0,1,1), V(0,-1,-1) corrispondano rispettivamente: l'asse x, la retta $x - y = z = 0$ e la retta $x + y = z = 0$.

Detto P un punto variabile sulla retta r e p la retta ad esso corrispondente nella suddetta proiettività, si consideri la retta n per il punto P e che interseca perpendicolarmente la retta p.

I) Determinare l'equazione della superficie S descritta dalla retta n al variare del punto P su r; essa è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con F^3.

II) Riconoscere che F^3 possiede una retta doppia e scriverne le equazioni.

III) Poiché F^3 è una rigata, trovare altre rette della superficie non passanti per O.

IV) Verificare che la cubica sghemba di equazioni parametriche

$$x = -2t^2, \quad y = 3t, \quad z = 2t^3 + 3t$$

appartiene ad S e ne è una linea asintotica.

V) Determinare i piani tangenti principali in un generico punto M variabile sulla retta doppia (si consiglia di applicare una opportuna traslazione degli assi coordinati).

Gli elementi che si corrispondono nella proiettività sono

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} O(0,0,0) & \longleftrightarrow & y=0, \quad z=0 \quad (\text{asse } x), \\ U(0,1,1) & \longleftrightarrow & x-y=0, \quad z=0 \\ V(0,-1,-1) & \longleftrightarrow & x+y=0, \quad z=0 \, . \end{array}$$

Consideriamo ora la retta r di equazioni $x=0, \ y=z$.
Essa si può rappresentare parametricamente con le equazioni
(2) $$x=0\,, \quad y=k\,, \quad z=k\,;$$

mentre il fascio di rette del piano xy per il punto O si può rappresentare con il sistema

$$(3) \qquad \begin{cases} x+hy=0 \\ z=0\,, \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} h_1x+h_2y=0 \\ z=0\,. \end{cases}$$

I valori dei parametri k ed h che si corrispondono nella proiettività si possono raccogliere nel seguente quadro:

$$(4) \qquad \begin{array}{llllll} 1) & O(0,0,0): & k=0, & y=0, & z=0, & h=\infty \\ 2) & U(0,1,1): & k=1, & x-y=0, & z=0, & h=-1 \\ 3) & V(0,\text{-}1,\text{-}1): & k=-1, & x+y=0, & z=0, & h=+1\,. \end{array}$$

Ora l'equazione generale di una proiettività tra due forme di 1^a specie è:

(*) $$\alpha\, hk+\beta k+\gamma h+\delta=0 \quad \text{con} \quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0\,,$$

ossia (5) $$\alpha\cdot k+\beta\frac{k}{h}+\gamma+\frac{\delta}{h}=0\,.$$

Ricaviamo i coefficienti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ della proiettività.
1') Per $k=0, \quad h=\infty$ si ha $\delta=0$;
2') per $k=1, \quad h=-1$ si ha $\alpha-\beta+\gamma-\delta=0$;
3') per $k=-1, \ h=1$ si ha $-\alpha-\beta+\gamma+\delta=0$.

I dati ricavati da queste condizioni si possono riassumere nel seguente sistema:

$$(6) \qquad \begin{cases} \gamma=0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ -\alpha-\beta+\gamma+\delta=0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui (7)} \qquad \begin{cases} \alpha-\beta-\delta=0 \\ \alpha+\beta-\delta=0\,. \end{cases}$$

Poiché i coefficienti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, subito si ricava che la soluzione del sistema (6) è data dai valori: $\alpha=1\,, \ \delta=1\,, \ \beta=0\,, \ \gamma=0$.

Ne segue che l'equazione della proiettività richiesta è:

(8) $hk+1=0$, ossia (8') $h=-\frac{1}{k}$.

Ricordando che il fascio F di rette ha le equazioni $x+hy=0$, $z=0$, possiamo dire che al punto $P(0,k,k)$ della retta r corrisponderà nel fascio F la retta p (del piano xy) che ha le equazioni

(*) $x-\frac{1}{k}y=0$, $z=0$, o anche (9) $kx-y=0$, $z=0$.

Sia ora Q il piede della normale n abbassata dal punto P sulla retta p, che gli corrisponde nella proiettività. Vogliamo trovare le equazioni della normale n. Consideriamo le equazioni del fascio di piani passanti per la retta p. Esso si ottiene mettendo a sistema le due equazioni del sistema (9), quindi l'equazione del fascio è:

(10) $kx-y+\lambda z=0.$

Il piano $\overline{\alpha}$ del fascio passante per il punto P(0,k,k) deve soddisfare la condizione

(*) $0-k+\lambda k=0$, da cui si ricava $\lambda=1$.

Il piano $\overline{\alpha}$ ha quindi l'equazione (11) $kx-y+z=0$.

Dal punto P(0,k,k) conduciamo il piano perpendicolare alla retta s

(*) $$\frac{x-0}{\ell}=\frac{y-k}{m}=\frac{z-k}{n};$$

la sua equazione è:(12) $\ell(x-0)+m(y-k)+n(z-k)=0$.

Nel nostro caso la retta s è la retta p del piano xy, ossia

p : $kx-y=0$, $z=0$, $\rightarrow$ $\frac{x}{1}=\frac{y}{k}$, $z=0$.

Al posto della (12) avremo quindi l'equazione

(*) $1\cdot(x-0)+k(y-k)=0$, ossia:

(13) $x+ky-k^2=0$.

La normale $n=PQ$ si ottiene mettendo a sistema le due equazioni (11), (13);

quindi (14): $$\begin{cases} kx-y+z=0 \\ x+ky-k^2=0, \end{cases}$$ retta n.

Quesito I)
Possiamo ora trovare l'equazione della superficie S descritta dalla retta $\underline{n}$ al variare del punto P sulla retta $\underline{r}$: basta eliminare il parametro k fra le due equazioni del sistema (14). Si ha:

$$(14') \qquad \begin{cases} k = \dfrac{y-z}{x} \\ x + ky - k^2 = 0 \, . \end{cases}$$

Si ricava in successione:

$$(*) \qquad x + \frac{y-z}{x} y - \frac{(y-z)^2}{x^2} = 0 \, ,$$

$$(*) \qquad x^3 + (y-z)yx - y^2 - z^2 + 2yz = 0 \, ,$$

$$(15) \qquad x^3 + y^2 x - xyz - y^2 - z^2 + 2yz = 0 \, , \quad \text{infine}$$

$$(16) \qquad x^3 + xy(y-z) - (y-z)^2 = 0 \, .$$

La superficie S è una superficie algebrica del 3^o ordine che indicheremo con il simbolo F^3. Possiamo subito verificare, per il momento, che essa passa per il punto $(-1;2;3)$. La superficie è rigata perché è il luogo delle ∞^1 posizioni assunte dalla normale $\underline{n}$.

L'origine O(0,0,0) è un punto doppio della F^3: ne segue che la superficie è un monoide in quanto essa ha un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto al suo ordine (tre). Un monoide è ovviamente una superficie razionale.
Il cono delle tangenti principali nel punto doppio ha l'equazione $(y-z)^2 = 0$. Poiché il cono si spezza in due piani sovrapposti di equazione $y = z$, O è un punto doppio uniplanare.

Quesito II)
Possiamo riconoscere facilmente che la retta $\underline{r}$ giace sulla superficie S. Infatti intersechiamo la superficie con la retta si ha il sistema:

$$(17) \qquad \begin{cases} x^3 + xy(y-z) - (y-z)^2 = 0 \\ y - z = 0, \quad x = 0 \, . \end{cases}$$

Il sistema (17) risulta identicamente soddisfatto; ne segue che la retta $\underline{r}$ giace per intero sulla superficie.
Intersechiamo la superficie S con il fascio di piani passanti per la retta $\underline{r}$ e facciamo vere che questa retta è una retta doppia della superficie. Si ha:

(18) $$\begin{cases} x^3 + xy(y-z) - (y-z)^2 = 0 \\ y - z - \lambda x = 0 \ . \end{cases}$$

Si ricava (*) $x^3 + xy\lambda x - \lambda^2 x^2 = 0$, $\rightarrow$ $x^2(x + \lambda y - \lambda^2) = 0$.

Il sistema (18) si spezza così nei sistemi:

(A) $$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \ , \end{cases}$$ contato due volte, e nel sistema

(B) $$\begin{cases} y - z - \lambda x = 0 \\ x + \lambda y - \lambda^2 = 0 \ . \end{cases}$$

Il generico piano passante avente per asse la retta r interseca la superficie S secondo una curva spezzata in tre rette: una di esse è doppia (la retta r), l'altra è semplice ed è data dal sistema (B).

Quesito III)
Al variare di λ il sistema (B) ci dà alcune rette giacenti sulla superficie S e non passanti per l'origine O.
Quesito IV
Sostituiamo nell'equazione della superficie S le espressioni di x,y,z date dalle equazioni parametriche della cubica gobba. Si ha

(*) $$-8t^6 - 6t^3(\cancel{3t} - 2t^3 - \cancel{3t}) - (\cancel{3t} - 2t^3 - \cancel{3t})^2 = 0 \, ,$$

(*) $$-8t^6 + 12t^6 - 4t^6 = 0 \, , \quad \text{ossia} \quad 0 = 0 \, .$$

L'equazione della superficie è identicamente soddisfatta e pertanto la cubica gobba giace sulla superficie stessa.

PROBLEMA 8 E (testo di G. Vaccaro: Curve e Superfici, pg. 113 n° 6)

Dato un riferimento cartesiano Oxyz, si consideri la rete di quadriche

(1) $\Sigma_1: \quad \lambda_1(2xy-3z^2)+\lambda_2(2x^2-9z)+\lambda_3(xz-3y)=0$,

e la stella di rette per l'origine O del riferimento

(2) $$\Sigma_2: \quad \frac{x}{\mu_1}=\frac{y}{\mu_2}=\frac{z}{\mu_3} \quad .$$

I) Si scrivano le equazioni della proiettività fra la rete di quadriche e la stella di di rette (3) $\lambda_i=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\mu_k \quad$ con $i=1,2,3$,

in modo che:

a) all'asse x corrisponda la quadrica $2xy-3z^2=0$;

b) all'asse y corrisponda la quadrica per cui $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=1$;

c) all'asse z corrisponda la quadrica per cui $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=9$;

d) alla retta $x=y=z$ corrisponda la quadrica per cui $\lambda_1=4$, $\lambda_2=$ -3, $\lambda_3=10$.

II) Determinare l'equazione del luogo dei punti comuni alle rette e alle quadriche corrispondenti.
Si otterrà una superficie S del terzo ordine che indicheremo con il simbolo F^3 $(xyz-y^2-z^3=0)$. Verificare che l'asse x è retta doppia per la S; dedurre che la superficie è rigata e determinare le equazioni delle generatrici.
III) Verificare che la curva $C^3: \quad x=3u, \; y=2u^3, \; z=2u^2$ è curva base della rete di quadriche e inoltre è asintotica della F^3.
IV) Trovare la generatrice della rigata passante per il punto P(2;1;1) e verificare che per i suoi punti vale il Teor. di Chasles (quesito proposto da N. Magnarelli).

Quesito I

a) La retta della stella Σ_2 si riduce all'asse x $[y=0, \; z=0]$ per
$$\mu_1=1, \quad \mu_2=0, \quad \mu_3=0 \; ;$$
b) la retta di Σ_2 si riduce all'asse y $[x=0, \; z=0]$ per
$$\mu_1=0, \quad \mu_2=1, \quad \mu_3=0 \; ;$$
c) la retta di Σ_2 si riduce all'asse z $[x=0, \; y=0]$ per
$$\mu_1=0, \quad \mu_2=0, \quad \mu_3=1 \; ;$$
d) la retta di Σ_2 si riduce alla retta $x=y=z$ per
$$\mu_1=1, \quad \mu_2=1, \quad \mu_3=1 \; .$$

Abbiamo inoltre le seguenti corrispondenze:

a') all'asse x corrisponde la quadrica $2xy - 3z^2 = 0$ quindi

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0;$$

b') all'asse y corrisponde la quadrica per cui si ha

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 1;$$

c') all'asse z corrisponde la quadrica per cui si ha

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 9;$$

d') alla retta $x = y = z$ corrisponde la quadrica per cui si ha

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 10.$$

Riassumendo si hanno le terne di parametri corrispondenti

$$\text{(A)} \qquad \begin{array}{ccc} (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) & \longleftrightarrow & (\mu_1,\mu_2,\mu_3) \\ (1;0;0) & \longleftrightarrow & (1;0;0) \\ (0;-3;1) & \longleftrightarrow & (0;1;0) \\ (1;0;9) & \longleftrightarrow & (0;0;1) \\ (4;-3;10) & \longleftrightarrow & (1;1;1)\ . \end{array}$$

La proiettività fra la rete di quadriche e la stella di rette è una proiettività tra due forme di 2^a specie che, in coordinate omogenee, ha le equazioni

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \rho\lambda_1 = a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + a_{13}\mu_3 \\ \rho\lambda_2 = a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + a_{23}\mu_3 \\ \rho\lambda_3 = a_{31}\mu_1 + a_{32}\mu_2 + a_{33}\mu_3\ , \end{cases} \qquad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0\ .$$

Sostituendo nel sistema (3) le 4 terne di valori si ha un sistema di 12 equazioni (che per comodità scriviamo su due colonne) in 13 incognite, che possiamo determinare a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \rho_1 = a_{11} & \rho_3 = a_{13} \\ 0 = a_{21} & 0 = a_{23} \\ 0 = a_{31} & 9\rho_3 = a_{33} \\ 0 = a_{12} & 4\rho_4 = a_{11} + \cancel{a_{12}} + a_{13} \\ -3\rho_2 = a_{22} & -3\rho_4 = \cancel{a_{21}} + a_{22} + \cancel{a_{23}}\ . \\ \rho_2 = a_{32} & 10\rho_4 = \cancel{a_{31}} + a_{32} + a_{33} \end{cases}$$

Come si vede, si ha $\qquad a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = 0$.

Inoltre, posto $\rho_2 = 1$, si ha : $\quad a_{22} = -3, \quad a_{32} = 1$.

Poiché $-3\rho_4 = a_{22} = -3$, si ricava anche $\rho_4 = 1$.

Rimane così da risolvere il seguente sistema più semplice:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11} = \rho_1, & a_{13} = \rho_3, \quad a_{33} = 9\rho_3 \\ a_{11} + a_{13} = 4, & 1 + a_{33} = 10 \ . \end{cases}$$

Dal sistema (5) si ricava:

$$(*)\qquad a_{33} = 9, \qquad \text{e quindi} \quad \rho_3 = 1, \qquad a_{13} = 1 \ .$$

Infine dall'equazione $a_{11} + a_{13} = 4$ si ricava $a_{11} = 3$.

Riassumendo, per i coefficienti a_{ik} del sistema (3) si trovano i valori:

$$(*)\qquad \begin{array}{lll} a_{11} = 3, & a_{12} = 0, & a_{13} = 1 \\ a_{21} = 0, & a_{22} = -3, & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 0, & a_{32} = 1, & a_{33} = 9 \ . \end{array}$$

La proiettività tra le nostre due forme di 2^a specie è quindi data dal sistema:

$$(6)\qquad \begin{cases} \rho\lambda_1 = 3\mu_1 + 0 + \mu_3 \\ \rho\lambda_2 = 0 - 3\mu_2 + 0 \\ \rho\lambda_3 = 0 + \mu_2 + 9\mu_3 \ . \end{cases}$$

Poiché le coordinate proiettive $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $\rho = 1$; ne segue che per le equazioni della proiettività si ha:

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = 3\mu_1 + \mu_3 \\ \lambda_2 = -3\mu_2 \\ \lambda_3 = \mu_2 + 9\mu_3 \ . \end{cases}$$

Quindi alla retta della stella Σ_2 di coefficienti angolari μ_1, μ_2, μ_3 corrisponde la quadrica della rete Σ_1 i cui coefficienti angolari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono quelli espressi dal sistema (7) .
Pertanto, l'equazione (1) della generica quadrica della rete Σ_1 diventa:

$$(8)\quad (3\mu_1 + \mu_3)\cdot(2xy - 3z^2) - 3\mu_2(2x^2 - 9z) + (\mu_2 + 9\mu_3)\cdot(xz - 3y) = 0 \ .$$

Quesito II)
L'equazione del luogo dei punti comuni alle rette della stella e alle quadriche corrispondenti si trova eliminando i parametri μ_1,μ_2,μ_3 dalle equazioni del sistema:

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(3\dfrac{\mu_1}{\mu_3}+1\right)\cdot(2xy-3z^2)-3\dfrac{\mu_2}{\mu_3}(2x^2-9z)+\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_3}+9\right)\cdot(xz-3y)=0 \\ \dfrac{x}{\mu_1}=\dfrac{y}{\mu_2}=\dfrac{z}{\mu_3}\ . \end{cases}$$

Dal secondo rigo del sistema (9) subito si ottiene

$$(10)\qquad \frac{\mu_1}{\mu_3}=\frac{x}{z}, \qquad \frac{\mu_2}{\mu_3}=\frac{y}{z}\ .$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (9) si ha, in successione:

* $\left(3\dfrac{x}{z}+1\right)\cdot(2xy-3z^2)-3\dfrac{y}{z}(2x^2-9z)+\left(\dfrac{y}{z}+9\right)\cdot(xz-3y)=0$,

* $(3x+z)\cdot(2xy-3z^2)-3y(2x^2-9z)+(y+9z)\cdot(xz-3y)=0$.

Sciogliendo le parentesi e riducendo i termini simili si ha:

(*) $\cancel{6x^2y}-\cancel{9xz^2}+2xyz-3z^3-\cancel{6x^2y}+27yz+xyz-3y^2+\cancel{9xz^2}-27yz=0$,

da cui $\qquad 3xyz-3y^2-3z^3=0$, $\qquad$ infine

$$(11)\qquad f(x,y,z)=y^2-xyz+z^3=0, \qquad \text{da cui}$$

$$(12)\qquad x=\frac{y^2+z^3}{yz}\ .$$

Come si vede, la S è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con il simbolo F^3. Essa ha un punto doppio nell'O(0,0,0); ne segue che la superficie è un monoide in quanto essa ha un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto al suo ordine (tre). Un monoide è ovviamente una superficie razionale.
Il cono delle tangenti principali nel punto doppio ha l'equazione $y^2=0$.
Poiché il cono si spezza in due piani sovrapposti di equazione $y=0$, l'origine O è un punto doppio uniplanare.
Vogliamo vedere se la F^3 ha altri punti doppi. A tale scopo scriviamo l'equazione (11) in coordinate omogenee ed eguagliamo a zero le quattro derivate parziali prime della funzione che compare al primo membro dell'equazione. Si ha:

(13) $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2{}^2x_4-x_1x_2x_3+x_3{}^3=0\ .$$

Calcoliamo le derivate parziali prime della funzione f; si ha:

(D)
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-x_2x_3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2x_4-x_1x_3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=-x_1x_2+3x_3{}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4}=x_2{}^2\ .$$

Eguagliandole a zero si ha il sistema:

(14)
$$\begin{cases} x_2x_3=0, & 2x_2x_4-x_1x_3=0 \\ -x_1x_2+3x_3{}^2=0, & x_2{}^2=0\ . \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ricava $x_2=0$, $x_3=0$, mentre x_1 e x_4 rimangono indeterminati. Ne segue che tutti i punti doppi della superficie hanno l'espressione $P(a;0;0;b)$: essi sono punti dell'asse x. Quindi l'asse x è una retta doppia per la superficie F^3. In particolare, per $a=0$ e $b\neq 0$ si ritrova il punto doppio O(0,0,0); mentre per $a\neq 0$ e $b=0$ si ha il punto improprio dell'asse x, $X_\infty(a,0,0,0)$.

Poiché la F^3 ha una retta doppia, essa è una superficie rigata; infatti una F^3 non rigata può avere al più 4 punti doppi (G. Vaccaro, Curve e Superfici, pg. 91).

Per dimostrare che l'asse x è una retta doppia della superficie, possiamo seguire due procedimenti.

Primo procedimento

Intersechiamo la superficie F^3 : $y^2-xyz+z^3=0$ con un piano passante per l'asse x, cioè con il piano $y=mz$. Se la retta è doppia si deve avere una soluzione doppia $y=0,\ z=0$. Consideriamo il sistema

(A)
$$\begin{cases} y^2-xyz+z^3=0 \\ y=mz\ . \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha:

(*) $$m^2z^2-mxz^2+z^3=0.$$

Il sistema diventa:

(*) $$\begin{cases} z^2(m^2 - mx + z) = 0 \\ y = mz \end{cases}$$

Si ha la soluzione doppia $y = 0,\ z = 0$; ne segue che l'asse x è una retta doppia per la F^3.

Secondo procedimento

Sia $P(h,0,0)$ un punto qualsiasi dell'asse x. Intersecando la F^3 con una generica retta passante per il punto P si ha il sistema:

(B) $$\begin{cases} y^2 - xyz + z^3 = 0 \\ y = k_1(x-h), \qquad z = k_2(x-h) \end{cases} .$$

Sostituendo si ottiene

(*) $$k_1^{\,2}(x-h)^2 - xk_1k_2(x-h)^2 + k_2^{\,3}(x-h)^3 = 0,$$

da cui $$(x-h)^2[k_1^{\,2} - k_1k_2x + k_2^{\,3}(x-h)] = 0$$

Ne segue che il sistema (B) ha la soluzione doppia $x = h,\ y = 0,\ y = 0$; ciò vuol Dire che la generica retta passante per un qualsiasi punto $P(h,0,0)$ dell'asse x ha due intersezioni con la superficie F^3 assorbite nel punto P; quindi ogni punto P dell'asse x è un punto doppio e pertanto l'asse x è una retta doppia per la superficie.

Vogliamo ora trovare una rappresentazione parametrica razionale della F^3. A tale scopo intersechiamo la superficie con una retta generica passante per il suo punto doppio $O(0,0,0)$. Si ha il sistema:

(15) $$\begin{cases} y^2 - xyz + z^3 = 0 \\ x = \ell z, \qquad y = mz \end{cases} .$$

Avremo tre punti di intersezione: due punti sono assorbiti nel punto doppio O, il terzo punto P, al variare del parametro m, descrive la superficie. Le coordinate di questo punto ci daranno le equazioni parametriche della superficie. Si ha

(*) $$m^2z^2 - \ell mz^3 + z^3 = 0, \quad \to \quad z^2(m^2 - \ell mz + z) = 0.$$

Si ha la soluzione doppia $z^2 = 0$, corrispondente al punto doppio O, e

(*) $$z(\ell m - 1) = m^2, \qquad \text{da cui} \qquad z = \frac{m^2}{\ell m - 1} .$$

Ne segue che le coordinate del punto P sono:

$$(16)\qquad x=\frac{\ell m^2}{\ell m-1}\,,\qquad y=\frac{m^3}{\ell m-1}\,,\qquad z=\frac{m^2}{\ell m-1}\ .$$

Ponendo $\ell = u$, $m = v$, possiamo scrivere le equazioni parametriche della superficie nel modo più corrente:

$$(17)\qquad x=\frac{uv^2}{uv-1}\,,\qquad y=\frac{v^3}{uv-1}\,,\qquad z=\frac{v^2}{uv-1}\ .$$

Come si vede, abbiamo equazioni parametriche del tipo:

$$(17')\qquad x = x(u,v)\,,\qquad y = y(u,v)\,,\qquad z = z(u,v)\,.$$

Parte facoltativa. Possiamo vedere che la superficie $y^2 - xyz + z^3 = 0$ passa per i punti P(2;1;1) e C(3;2;2). Troviamo la generatrice passante per il punto P(2;1;1). La generica retta dello spazio passante per tale punto ha l'equazione:

$$(*)\qquad \frac{x-2}{\ell}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}=v\,,\quad \text{da cui}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} x = 2+\ell v \\ y = 1+mv \\ z = 1+nv\ . \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni (18) nella $y^2 - xyz + z^3 = 0$ si ha:

$$(*)\qquad (1+mv)^2-(2+\ell v)(1+mv)(1+nv)+(1+nv)^3=0\,,$$

$$(*)\qquad \begin{aligned} &1+2mv+m^2v^2-(2+2mv+\ell v+\ell mv^2)(1+nv)+\\ &\quad +1+3nv+3n^2v^2+n^3v^3=0\ , \end{aligned}$$

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\cancel{2}+\cancel{2mv}+m^2v^2+3\underline{nv}+3n^2v^2+n^3v^3+\\ &-\cancel{2}-\cancel{2mv}-\ell v-\ell mv^2-2\underline{nv}-2mnv^2-\ell nv^2-\ell mnv^3=0\ , \end{aligned}$$

$$(19)\qquad (n-\ell)v+v^2(m^2+3n^2-\ell m-2mn-\ell n)+v^3(n^3-\ell mn)=0\,.$$

La retta (18) appartiene alla superficie F^3 se l'equazione (19) è identicamente soddisfatta, cioè se per qualsiasi valore di $\underline{v}$ si ha:

(C) $$\begin{cases} n-\ell=0 \\ m^2+3n^2-\ell m-2mn-\ell n=0 \\ n^3-\ell mn=0 \ . \end{cases}$$

Si ricava $\ell=n$ e, supponendo $\ell=n\neq 0$, dalla 3^a equazione del sistema si ha:

(*) $n^3-mn^2=0$, $n^2(n-m)=0$ da cui si ha (20) $m=n$ $(\neq 0)$.

Riassumendo, affinché la retta (18) appartenga alla superficie si deve verificare la condizione

(i) $$m=n=\ell \ .$$

Poiché questi parametri sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre:

(ii) $$\ell=1, \qquad m=1, \qquad n=1 .$$

La generatrice passante per il punto $P(2;1;1)$ ha quindi le equazioni

(20) $$\begin{cases} x=2+v \\ y=1+v \\ z=1+v \ , \end{cases}$$ da cui si ha (20') $$\begin{cases} x=1+z \\ y=z \ . \end{cases}$$

Ponendo successivamente $v=-3,-2,0,1,2,3....$ possiamo ottenere vari punti della generatrice; si ricavano i punti

(*) $A(-1,-2,-2)$, $B(0;-1;-1)$, $P(2,1,1)$, $C(3,2,2)$, $D(4,3,3)$, $E(5,4,4)$….

E' facile verificare che essi appartengono tutti alla nostra superficie.

Vogliamo ora trovare le equazioni dei piani tangenti alla superficie in questi punti. Ricordiamo che l'equazione della S (o F^3) è:

(*) $$f(x,y,z)=y^2-xyz+z^3=0 .$$

L'equazione del piano tangente in un generico punto $P(x_o,y_o,z_o)$ è:

(*) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P (z-z_0)=0 .$$

Calcoliamo le derivate parziali della funzione f(x,y,z); si ha:

(*) $$f_x=yz, \qquad f_y=xz-2y, \qquad f_z=xy-3z^2 \ .$$

Punto A(-1;-2;-2) : $f_x(A) = 4$, $f_y(A) = 6$, $f_z(A) = -10$.

Piano tangente: $4(x+1) + 6(y+2) - 10(z+2) = 0$,

cioè $2(x+1) + 3(y+2) - 5(z+2) = 0$,

infine (*) $\alpha: \quad 2x + 3y - 5z - 2 = 0$.

Punto B(0;-1;-1) ; $f_x(B) = 1$, $f_y(B) = 2$, $f_z(B) = -3$;

Piano tangente: $1(x-0) + 2(y+1) - 3(z+1) = 0$,
ne segue $\beta: \quad x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Punto P(2;1;1) : $f_x(P) = 1$, $f_y(P) = 0$, $f_z(P) = -1$.
Piano tangente: $\pi: \quad (x-2) - 1(z-1) = 0$,
quindi $\pi: \quad x - z - 1 = 0$.

Punto C(3,2,2) : $f_x(C) = 4$, $f_y(C) = 2$, $f_z(C) = -6$.
Piano tangente : $\gamma: \quad 4(x-3) + 2(y-2) - 6(z-2) = 0$,
ossia $2(x-3) + 1(y-2) - 3(z-2) = 0$,
infine $\gamma: \quad 2x + y - 3z - 2 = 0$.

Punto D(4;3;3) $f_x(D) = 9$, $f_y(D) = 6$, $f_z(D) = -15$.
Piano tangente $\delta: \quad 9(x-4) + 6(y-3) - 15(z-3) = 0$,
ossia $3(x-4) + 2(y-3) - 5(z-3) = 0$,
infine $\delta: \quad 3x + 2y - 5z - 3 = 0$.

Riassunto dei punti e dei piani in essi tangenti

	A(-1,-2,-2)	$\alpha: \quad 2x + 3y - 5z - 2 = 0$
	B(0,-1,-1)	$\beta: \quad x + 2y - 3z - 1 = 0$
	P(2,1,1)	$\pi: \quad x - z - 1 = 0$
(*)	C(3,2,2)	$\gamma: \quad 2x + y - 3z - 2 = 0$
	D(4,3,3)	$\delta: \quad 3x + 2y - 5z - 3 = 0$
	E(5,4,4)	$\eta: \quad 4x + 3y - 7z - 4 = 0$.

Ricordiamo preventivamente che il piano tangente ad una rigata in un punto contiene la generatrice passante per il punto.

Facciamo ora vedere che con i dati raccolti è possibile avere una verifica pratica del notevole <u>Teorema di Chasles</u>. Ne ricordiamo l'enunciato:
" I piani tangenti ad una rigata nei punti di una generatrice formano un fascio i cui piani sono in corrispondenza proiettiva con i punti di contatto (oppure essi coincidono tutti con un piano che rimane fisso).

La generatrice passante per il punto P(2;1;1) si può scrivere sia in forma parametrica , che come intersezione di due piani. Ricordiamo in proposito i sistemi (20) e (20'),che è bene riscrivere:

(20) $$\begin{cases} x = 2 + v \\ y = 1 + v \\ z = 1 + v \, , \end{cases} \qquad \text{da cui : (20')} \qquad \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \, . \end{cases}$$

Il fascio di piani passanti per questa generatrice è:

(21) $$\lambda(x - z - 1) + \mu(y - z) = 0 \, .$$

1) Per $\lambda = 2$ e $\mu = 3$ si ottiene
(*) $2(x - z - 1) + 3(y - z) = 0$, ossia $2x + 3y - 5z - 2 = 0$,

che è il piano tangente nel punto A(-1,-2,-2), ottenuto per $v = -3$.

2) Per $\lambda = 1$ e $\mu = 2$ si ottiene
(*) $1(x - z - 1) + 2(y - z) = 0$, ossia $x + 2y - 3z - 1 = 0$,

che è il piano tangente nel punto B(0,-1,-1) , ottenuto per $v = -2$.

3) Per $\lambda = 2$ e $\mu = 1$ si ottiene
(*) $2(x - z - 1) + 1(y - z) = 0$, ossia $2x + y - 3z - 2 = 0$,

che è il piano tangente nel punto C(3,2,2), ottenuto per $v = 1$.

Ora esiste una e una sola proiettività che a tre forme di prima specie fa corrispondere altre tre forme della stessa specie. Essa è data dall'eguaglianza di birapporti:

(22) $$(-3, -2, 1, v) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 2, k\right) , \qquad \text{ove si è posto } \frac{\lambda}{\mu} = k \, .$$

Ne segue
$$\frac{(-3,-2,v)}{(-3,-2,-1)}=\frac{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2},k\right)}{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2},2\right)}\;;$$

da cui
$$\frac{v+3}{v+2}:\frac{1+3}{1+2}=\frac{k-\frac{2}{3}}{k-\frac{1}{2}}:\frac{2-\frac{2}{3}}{2-\frac{1}{2}}\;;$$

si ottiene
$$\frac{v+3}{v+2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3k-2}{3}\cdot\frac{2}{2k-1}:\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3},$$

quindi
$$\frac{v+3}{v+2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3k-2}{2k-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8},\quad\rightarrow\quad\frac{v+3}{v+2}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}=\frac{3k-2}{2k-1}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\,.$$

Possiamo quindi scrivere $\quad (v+3)(2k-1)=(3k-2)(v+2)$,

da cui $\quad 2kv-v+6k-3=3kv+6k-2h-4,\quad$ e infine

(23) $$vk-v-1=0\,.$$

La (23) esprime la corrispondenza proiettiva tra i punti della generatrice e i piani tangenti alla superficie nei punti stessi.

Per $v=3$ le (20) ci danno il punto E(5;4;4) mentre $k=\lambda/\mu$ assume il valore $k=4/3$, da cui $\lambda=4$ e $\mu=3$.

Sostituendo questi valori di λ e μ nell'equazione del fascio di piani si ha:

(*) $$4(x-z-1)+3(y-z)=0\,,$$

cioè (24) $$4x+3y-7z-4=0\,.$$

Si trova così l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto E(5;4;4); si ha così una pregevole verifica del <u>Teorema di Chasles</u>.

Facciamo vedere che possiamo ottenere le equazioni dei piani tangenti nei punti considerati anche usando le equazioni parametriche della superficie; queste ci sono già note, ma riscriviamole per comodità:

(17) $$x=\frac{uv^2}{uv-1}\ ,\qquad y=\frac{v^3}{uv-1},\qquad z=\frac{v^2}{uv-1}\ .$$

Calcoliamo le derivate parziali prime rispetto alle variabili u e v . Si ha:

(a) $$\begin{aligned} x_u &= \frac{v^2(uv-1)-uv^2\cdot v}{(uv-1)^2}, \quad \to \qquad & x_u &= \frac{-v^2}{(uv-1)^2}, \\ x_v &= \frac{2uv(uv-1)-uv^2\cdot u}{(uv-1)^2}, \quad \to \qquad & x_v &= \frac{u^2v^2-2uv}{(uv-1)^2}; \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} y_u &= \frac{0-v^3\cdot v}{(uv-1)^2}, \quad \to \qquad & x_u &= \frac{-v^2}{(uv-1)^2}, \\ y_v &= \frac{3v^2(uv-1)-v^3\cdot u}{(uv-1)^2}, \quad \to \qquad & y_v &= \frac{2uv^3-3v^2}{(uv-1)^2}; \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} z_u &= \frac{0-v^2\cdot v}{(uv-1)^2}, \quad \to \qquad & z_u &= \frac{-v^3}{(uv-1)^2}, \\ z_v &= \frac{2v(uv-1)-v^2\cdot u}{(uv-1)^2}, \quad \to \qquad & y_v &= \frac{uv^2-2v}{(uv-1)^2}\ . \end{aligned}$$

Riassumendo, si ha:

(25) $$\begin{aligned} x_u &= \frac{-v^2}{(uv-1)^2}, \qquad & y_u &= \frac{-v^4}{(uv-1)^2}, \qquad & z_u &= \frac{-v^3}{(uv-1)^2}, \\ x_v &= \frac{u^2v^2-2uv}{(uv-1)^2}, \qquad & y_v &= \frac{2uv^3-3v^2}{(uv-1)^2}, \qquad & z_v &= \frac{uv^2-2v}{(uv-1)^2}\ . \end{aligned}$$

Osservando le equazioni parametriche (17), si vede che:

(*) $$\begin{aligned} &\text{Per } u=0,\ v=1 \qquad && \text{si ha ilpunto} \quad B(0;-1;-1) \\ &\text{per } u=2,\ v=1 \qquad && \text{si ha ilpunto} \quad P(2;1;1)\ . \end{aligned}$$

Ora l’equazione del piano tangente in un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ della superficie S di equazioni parametriche (17) ha la formula:

(26) $$L_o(x-x_o)+M_o(y-y_o)+N_o(z-z_o)=0\ ,$$

ove $L,\ M,\ N$ sono i minori presi con segno alterno della matrice

(*) $$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} \ ,$$

cioè (27) $$\begin{Vmatrix} \dfrac{-v^2}{(uv-1)^2} & \dfrac{-v^4}{(uv-1)^2} & \dfrac{-v^3}{(uv-1)^2} \\ \dfrac{u^2v^2-2uv}{(uv-1)^2} & \dfrac{2uv^3-3v^2}{(uv-1)^2} & \dfrac{uv^2-2v}{(uv-1)^2} \end{Vmatrix} \ .$$

Nel caso del punto $P(2,1,1)$ si ha $u=2,\ v=1$ e la matrice (23) fornisce:

(28) $$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \ .$$

Per i minori di questa matrice si ha:

(29) $$L_o = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\,, \qquad M_o = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad N_o = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ .$$

Ne segue che l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto P è:

(*) $$1(x-2)+0-1(z-1)=0\,, \quad \text{ossia}$$

(30) $$x-z-1=0 \ .$$

Il risultato coincide con quello trovato con i consueti procedimenti dell'Analisi Matematica.

<u>NOTA</u>

Il problema affrontato è molto impegnativo e richiede ampie nozioni di Geometria Proiettiva e la capacità di saperle applicare sul piano operativo. La parte del testo che riguarda l'applicazione del Teorema di Chasles, proposta e risolta da chi scrive, è originale e costituisce una vera innovazione. La soddisfazione di aver saputo risolvere il presente problema nasce dal fatto che di esso è stato solo proposto l'enunciato.

PROBLEMA 9 E (G. Vaccaro, Le Superfici, pg. 96)

Sia dato il fascio F dei piani passanti per l'asse y ($z+\lambda x=0$) ed il fascio F' delle parabole del piano xy di equazione (1) $x^2=ky$ (figg. 4,5).

I) Si trovi l'equazione della proiettività tra F ed F' che ai piani di F

(2) $\qquad x=0, \qquad x+z=0, \qquad x-z=0,$

fa corrispondere ordinatamente le parabole di F' di equazioni

() $\qquad x^2=0, \qquad x^2=y, \qquad x^2=-y$.

II) Siano p e P un piano di F ed una parabola di F' che si corrispondono nella proiettività data e sia C il cilindro che proietta P parallelamente all'asse z.

1) Scrivere l'equazione della superficie S descritta dalla linea intersezione di p con C.
2) Individuare gli eventuali punti multipli di S.
3) Dedurre che S è razionale e scrivere le equazioni parametriche razionali.

Quesito I)

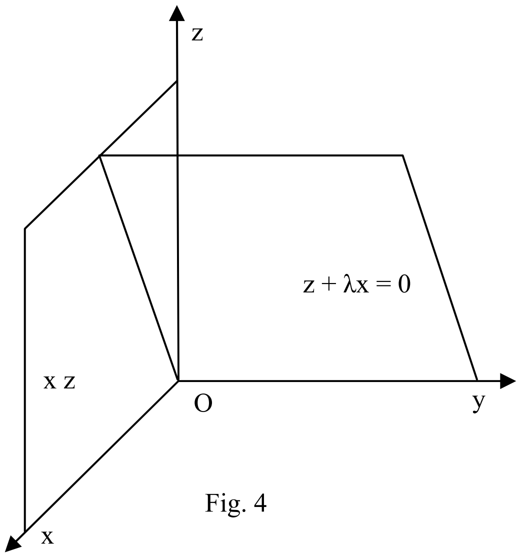


Fig. 4

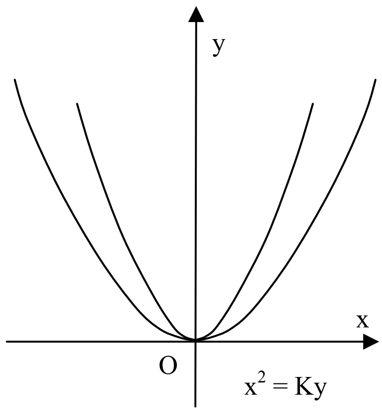


Fig. 5

Il fascio F di piani passanti per l'asse y ha l'equazione:

(f) $$z+\lambda x=0\,.$$

a) Al piano $z=0$ corrisponde il valore $\lambda=0$;
b) al piano $z+x=0$ corrisponde il valore $\lambda=1$;
c) al piano $z-x=0$ corrisponde il valore $\lambda=-1$.

Consideriamo il fascio F' di parabole di equazione

(1) $$ky = x^2$$

(Sono parabole aventi per asse l'asse y e tangenti in O(0,0) all'asse x) .

a') Alla parabola degenere $x^2 = 0$ corrisponde il valore $k = 0$;

b') alla parabola $y = x^2$ corrisponde il valore $k = 1$;

c') alla parabola $-y = x^2$ corrisponde il valore $k = -1$.

L'equazione della proiettività tra il fascio F di piani e il fascio di parabole F' (sono entrambe forme di 1^a specie) è:

(4) $$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) = (k_1, k_2, k_3, k), \quad \text{da cui}$$

(4') $$(0,1,-1,\lambda) = (0,1,-1,k) .$$

Ne segue che l'equazione della proiettività è:

(5) $$\lambda = k .$$

Quesito II

Grazie alla (5), al piano $p: \ z + \lambda x = 0$ corrisponde la parabola

$$P: \quad \lambda y - x^2 = 0, \qquad z = 0 .$$

L'equazione del cilindro che proietta sul piano xy la parabola P parallelamente all'asse z è:

(6) $$C: \quad \lambda y - x^2 = 0 .$$

1) Intersechiamo il cilindro C con il piano p e troviamo la loro linea di intersezione:

(A) $$\begin{cases} \lambda y - x^2 = 0 \\ z + \lambda x = 0 , \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} -\lambda yx + x^3 = 0 \\ \lambda yx + yz = 0 . \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene l'equazione della superficie S descritta dalla linea di intersezione. Essa è:

(7) $$S: \quad f(x,y,z) = x^3 + zy = 0 .$$

Come si vede, la S è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con il simbolo F^3. Essa ha un punto doppio nell'O(0,0,0); ne segue che la superficie è un monoide in quanto essa ha un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto al suo ordine (tre). Un monoide è ovviamente una superficie razionale. Il cono delle tangenti principali nel punto doppio ha l'equazione $zy = 0$. Poiché il cono si spezza in due piani distinti di equazione $y = 0$ e $z = 0$, l'origine O è un punto doppio biplanare.

2) Vogliamo vedere se la F^3 ha altri punti doppi. A tale scopo scriviamo l'equazione (7) in coordinate omogenee ed eguagliamo a zero le quattro derivate parziali prime della funzione che compare al primo membro dell'equazione. Si ha:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2 x_3 x_4 = 0. \tag{7'}$$

Calcoliamo le derivate parziali prime della φ; si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 3x_1^2, &&\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = x_3 x_4, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = x_2 x_4, &&\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} = x_2 x_3 \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Troviamo i punti doppi della superficie risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1^2 = 0, & x_3 x_4 = 0 \ , \\ x_2 x_4 = 0, & x_2 x_3 = 0 \ . \end{cases} \tag{9}$$

Si hanno le soluzioni

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = 1, & & O(0,0,0,1) \ , \\ x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 1, & x_4 = 0, & \text{ossia} & Z_\infty(0,1,0,0) \ , \\ x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_4 = 0, & & Y_\infty(0,0,1,0) \ . \end{array} \tag{10}$$

Quindi la F^3 ha tre punti doppi: l'origine $O(0,0,0,1)$,
il punto improprio dell'asse z $Z_\infty(0,0,1,0)$,
e il punto improprio dell'asse y $Y_\infty(0,1,0,0)$.

3) Vogliamo ora trovare le equazioni parametriche razionali della superficie S; basta intersecare la superficie con una retta generica passante per il punto doppio O:

$$(11) \qquad \begin{cases} x^3 + zy = 0 \\ y = hx, \qquad z = kx \ . \end{cases}$$

Avremo tre punti di intersezione: due punti sono assorbiti nel punto O, il terzo punto M descrive la superficie. Le coordinate di questo punto ci daranno le equazioni parametriche della superficie stessa. Si ha:

$$(*) \qquad x^3 + hkx^2 = 0 , \quad \text{da cui} \qquad x^2(x + hk) = 0 .$$

Si ha la soluzione $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, contata due volte, corrispondente al punto doppio O, e la soluzione $x = -hx$.

Ne segue che le coordinate del punto M, cioè le equazioni parametriche della curva, sono:

$$(*) \qquad x = -hk , \qquad y = -h^2k , \qquad z = -hk^2 .$$

Ponendo $-h = u,\ k = v$, possiamo scrivere le equazioni parametriche della superficie nel modo solito; si ha

$$(12) \qquad x = uv , \qquad y = -u^2v , \qquad z = uv^2 \ .$$

Come si vede, abbiamo equazioni parametriche del tipo

$$(*) \qquad x = x(u, v) , \qquad y = y(u, v) , \qquad z = z(u, v) \ .$$

PROBLEMA 10 E (G. Vaccaro; Le superfici pg. 107).

Dato nello spazio un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxyz, sia F_1 il fascio di rette di centro O del piano xy ($z=0$) ed F_2 il fascio improprio di rette parallele all'asse y del piano yz ($x=0$). Le equazioni dei due fasci sono:

(1) $\quad F_1: \quad z=0, \quad y=mx$, (o anche $ky=hx$),

(2) $\quad F_2: \quad x=0, \quad z=\lambda \quad$ (o anche $x_3=\lambda x_4$).

I) Tra questi due fasci si ponga la proiettività che alle tre rette del fascio F_1
a) $y=z=0$ (asse x, $m_1=0$),
b) $x=z=0$ (asse y, $k=0$, $h\neq 0$ quindi $m_2=\infty$),
c) $x-y=0$, $z=0$ (bisettrice del 1^o e 3^o quadrante del piano xy, $m_3=1$),

fa corrispondere rispettivamente le seguenti tre rette del fascio F_2
a') l'asse y ($x=0$, $z=0$ quindi $\lambda_1=0$, vedi la (2)),
b') la retta impropria del piano yz ($x_1=0$, $x_4=0$, quindi $\lambda_2=\infty$)
c') la retta $x=0$, $z=1$, (quindi $\lambda_3=1$).

II) Sia P_1 il punto (diverso dall'origine), comune alla retta r_1 e alla parabola $C_1: y=x^2$, $z=0$ e P_2 il punto (diverso dal punto improprio), comune alla retta r_2 e alla parabola $C_2: y=z^2-1$, $x=0$ (fig. 6). Al variare delle rette r_1, r_2 i punti P_1, P_2 variano e la retta P_1P_2 varia e descrive una superficie S. Trovare l'equazione di questa superficie.

Quesito I
L'equazione della proiettività tra i due fasci F_1 ed F_2 è data dall'eguaglianza di birapporti

(*) $$(m_1, m_2, m_3, m)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda).$$

Nel nostro caso essa diventa:

(3) $$(0,\infty,1,m)=(0,\infty,1,\lambda).$$

Si ricava subito che l'equazione della proiettività è:

(4) $$m=\lambda.$$

Siano ora r_1 ed r_2 due rette corrispondenti nella proiettività; le loro equazioni

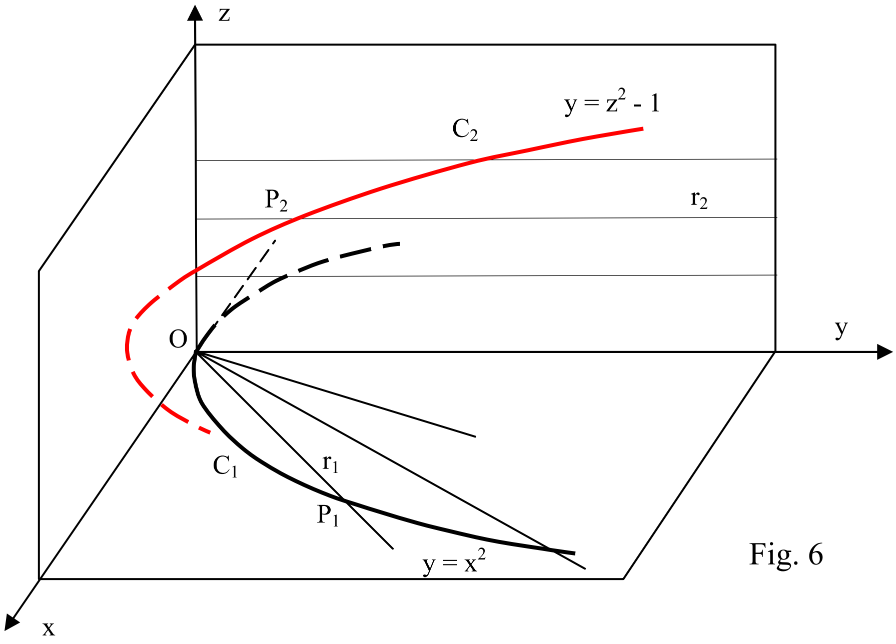


Fig. 6

sono

(5) $\quad r_1 : \ y = mx \quad$ ed $\quad r_2 : \ z = m \quad$ (si è tenuta presente la (4)).

Si intersechi C_1 con r_1 e sia P_1 il loro punto di intersezione diverso dall'origine; si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2, \ \ z = 0 \\ y = mx \ . \end{cases} \tag{6}$$

Si ricava $\quad x^2 = mx \quad$ da cui $\quad x = 0 \ $ (si scarta) $\quad$ e $\quad x = m$.

Ne segue che il punto di intersezione è $\quad P_1(m, m^2, 0)$.

Intersechiamo ora C_2 con r_2 e sia P_2 il loro punto di intersezione diverso dal punto improprio della retta r_2, parallela all'asse y; si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = z^2 - 1, \ \ x = 0 \\ z = m \ . \end{cases} \tag{7}$$

Il punto di intersezione è $\ P_2(0, m^2 - 1, m)$, $\ $ quindi $\ P_2 \neq P_{y\infty}$.

L'equazione della retta P_1P_2 è data dalla formula generale:

(*) $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ ;$$

nel nostro caso si ha: $$\frac{x-m}{0-m}=\frac{y-m^2}{\cancel{m^2}-1-\cancel{m^2}}=\frac{z-0}{m-0}.$$

Si ricava $\dfrac{x-m}{-m}=\dfrac{z}{m}$ e $\dfrac{y-m^2}{-1}=\dfrac{z}{m}$.

Da queste si ottiene rispettivamente:

(8) $\begin{cases} x-m=-z \\ my-m^3=-z\ , \end{cases}$ ossia (9) $\begin{cases} x+z=m \\ my+z=m^3\ . \end{cases}$

Le (9) sono le equazioni parametriche della superficie S che si vuol trovare. Eliminando il parametro $\underline{m}$ fra le due equazioni del sistema (9) si ottiene l'equazione cartesiana della superficie S, cioè del luogo descritto dalla retta P_1P_2. Essa è

(10) $$S:\quad (x+z)^3-(x+z)y-z=0.$$

Come si vede la S è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con il simbolo F^3.

La superficie S passa semplicemente per il punto $O(0,0,0)$ ed ha come piano tangente in tal punto il piano $z=0$ (piano xy).

Intersechiamo la superficie S con il piano $z=0$ e troviamo la curva di intersezione C^3; si ha il sistema:

(11) $$\begin{cases} (x+z)^3-(x+z)y-z=0 \\ z=0\ . \end{cases}$$

Si ottiene $x^3-xy=0$, $\rightarrow$ $x(x^2-y)=0$.

Si ottiene una curva C^3, passante per l'origine O, che si spezza

(*) nella retta $x=0,\ z=0,$ (asse y)
e nella parabola $x^2-y=0$ del piano $z=0$.

Vogliamo ora trovare i punti doppi della F^3. A tale scopo scriviamo la sua equazione (10) in coordinate omogenee; si ha :

(12) $$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)^3 - (x_1 + x_3)x_2x_4 - x_3x_4{}^2 = 0 .$$

Calcoliamo le quattro derivate parziali prime della funzione φ che compare al primo membro dell'equazione ed eguagliamole a zero; si ha:

(*) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 3(x_1 + x_3)^2 - x_2x_4 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -(x_1 + x_3)x_4$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 3(x_1 + x_3)^2 - x_2x_4 - x_4{}^2, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} = -(x_1 + x_3)x_2 - 2x_3x_4 \quad .$$

Quindi :(13) $$\begin{cases} 3(x_1 + x_3)^2 - x_2x_4 = 0, & (x_1 + x_3)x_4 = 0, \\ 3(x_1 + x_3)^2 - x_2x_4 - x_4{}^2 = 0, & (x_1 + x_3)x_2 + 2x_3x_4 = 0 . \end{cases}$$

Escludiamo la soluzione tutta nulla $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Dalla 1^a e dalla 3^a equazione del sistema subito si vede che si ha
(*) $x_4 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, mentre x_2 e x_3 restano indeterminati. Il sistema (13) quindi si riduce alla forma più semplice:

(14) $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 . \end{cases}$$

Si conclude che la superficie F^3 ha una retta doppia data dalla retta $x_1 + x_3 = 0$ del piano improprio $x_4 = 0$. Poiché la F^3 ha una retta doppia, essa è una superficie rigata.

PROBLEMA 11 E (Dispense ORUR, pg. 37)

Nello spazio cartesiano (x,y,z) si considerino le equazioni parametriche

(1) $x = u + v$, $y = 2u - v$, $z = 1 - vu^2$,

al variare dei parametri u, v.

I) Riconoscere che le (1) sono le equazioni parametriche di una superficie rigata Σ (per la quale le generatrici corrispondono ad uno dei due sistemi di linee u e v). Scrivere l'equazione cartesiana di Σ, mostrando che si tratta di una superficie algebrica del 3^o ordine.

II) Σ ha punti multipli al finito?

III) Dimostrare che Σ non è sviluppabile, ma che tuttavia essa possiede una generatrice singolare a carattere sviluppabile al finito; dire quale retta è.

IV)Riesaminare i quesiti posti in I) e II) considerando lo spazio cartesiano ampliato con i punti impropri e dimostrare che la superficie Σ ha una sola retta doppia e che questa è impropria. Tenendo conto di questa retta, dimostrare che la superficie è irriducibile.

Quesito I)
Se nelle equazioni (1) poniamo $u = \bar{u} =$ costante otteniamo le equazioni parametriche di una retta. I due sistemi di linee coordinate della superficie sono quindi costituiti

- l'uno da rette $(u = \cos t)$
- l'altro da cubiche $(v = \cos t)$.

Si deduce che la superficie in esame è una rigata: le curve del 1^o sistema ne sono le generatrici; quelle del 2^o sistema ne sono le direttrici.

L'equazione cartesiana della superficie si ottiene eliminando i parametri u e v dalle equazioni (1). Dalle prime due equazioni subito si ricava:

(*) $u = \dfrac{x+y}{3}$, e sostituendo nella 1^a equazione si ha:

(*) $v = x - \dfrac{x+y}{3}$, da cui (*) $v = \dfrac{2x-y}{3}$.

Sostituendo le espressioni di u e v nella terza equazione del sistema (1) si ha:

(2) $$z = 1 - \frac{(x+y)^2(2x-y)}{27} .$$

Fatte le riduzioni si ha:

(3) $$f(x,y,z) = (x+y)^2(2x-y) + 27z - 27 = 0 \ .$$

Σ è allora una superficie del 3^o ordine, in quanto è rappresentata da una equazione del terzo grado nelle variabili x,y,z.

Quesito II)
La superficie trovata non ha punti multipli al finito, in quanto si ha:

(4) $$\frac{\partial f}{\partial z} = 27 \, ,$$

e condizione necessaria e sufficiente affinché un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ di Σ sia un punto multiplo è che in esso si annullino le derivate parziali prime della funzione $f(x,y,z)$.

Quesito III)
Per dimostrare che la superficie Σ non è sviluppabile, scriviamo l'equazione del piano tangente a Σ in un punto P_o corrispondente ai valori (u_o, v_o) dei parametri u e v. In generale, l'equazione del piano è

(*) $$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_u(P) & y_u(P) & z_u(P) \\ x_v(P) & y_v(P) & z_v(P) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Nel nostro caso si ha

(5) $$\begin{vmatrix} x\text{-}u_o\text{-}v_o & y\text{-}2u_o\text{+}v_o & z\text{-}1\text{+}v_o u_o \\ 1 & 2 & \text{-}2u_o v_o \\ 1 & \text{-}1 & \text{-}{u_o}^2 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

ossia $$\begin{vmatrix} x\text{-}u_o\text{-}v_o & x\text{+}y\text{-}3u_o & z\text{-}1\text{+}v_o u_o \\ 1 & 3 & \text{-}2u_o v_o \\ 1 & 0 & \text{-}{u_o}^2 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

da cui (*): $$(x - u_o - v_0)(-3u_o^2) + (x + y - 3u_o)(-2u_o v_o + u_o^2) + \\ -3(z - 1 + v_o u_o^2) = 0 \ .$$

Riducendo i termini simili, si ha:

(6) $$u_o(x+y)(u_o-2v_o)-3u_ox-3(z-1)=0 \ .$$

Lungo la retta $u=\cos t$ il piano tangente varia al variare di v_o, cioè la rigata <u>non è a carattere sviluppabile</u>.
Se poniamo $u_o=0$, nell'equazione (*) scompare il parametro v_o e la generatrice passante per P_o è a carattere sviluppabile.

Dalle equazioni parametriche (1) della superficie si vede subito che questa generatrice ha le equazioni

(7) $$x+y=0 \ , \qquad z-1=0 \, .$$

Quesito IV)
Consideriamo l'equazione di Σ in coordinate omogenee

(8) $$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2(2x_1-x_2)+27x_3x_4^2-27x_4^3=0 \, ,$$

e il sistema che si ottiene eguagliando a zero le derivate parziali prime di φ:

(9) $$\begin{cases} 2(x_1+x_2)(2x_1-x_2)+2(x_1+x_2)^2=0 \\ 2(x_1+x_2)(2x_1-x_2)-(x_1+x_2)^2=0 \\ 27x_4^2=0, \qquad\qquad 54x_3x_4-81x_4^2=0 \ . \end{cases}$$

Subito si vede che i punti doppi della superficie Σ sono tutti e soli i punti della retta impropria

(10) $$x_1+x_2=0 \, , \qquad\qquad x_4=0 \ .$$

Ultima domanda. Una superficie del 3^o ordine può spezzarsi, a priori, in un piano e in una quadrica, oppure in tre piani .
Nel nostro caso, se la superficie Σ fosse riducibile essa dovrebbe contenere un piano passante per la retta doppia (10), cioè con un piano di equazione

(*) $$\lambda(x_1+x_2)+\mu x_4=0 \, .$$

Intersecando la superficie con questo piano si ha il sistema:

(*) $$\begin{cases} (x_1+x_2)^2(2x_1-x_2)+27x_3x_4^2-27x_4^3=0 \\ x_4=-\dfrac{\lambda}{\mu}(x_1+x_2) \ . \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha:

$$(*) \qquad (x_1+x_2)^2(2x_1-x_2)+27x_3\frac{\lambda^2}{\mu^2}(x_1+x_2)^2+27\frac{\lambda^3}{\mu^3}(x_1+x_2)^3=0\,,$$

$$(11) \qquad (x_1+x_2)^2[\mu^3(2x_1-x_2)+27\mu\lambda^2x_3+27\lambda^3(x_1+x_2)]=0\,.$$

L'equazione (11) non è mai identicamente soddisfatta, a meno che non sia $\lambda=\mu=0$. Ne segue che la superficie Σ non può contenere alcun piano e quindi essa è irriducibile.

PROBLEMA 12 E (Dispense ORUR, pg. 14)

Si consideri la superficie di equazioni parametriche

(A) $$\begin{cases} (1) \quad x = v + u \\ (2) \quad y = 2uv + u^2 \\ (3) \quad z = 3u^2v + u^3 \ . \end{cases}$$

Si determini l'equazione cartesiana della superficie.

<u>Svolgimento</u>.

Dalla (1) si ha $v = x - u$.

Sostituendo nella (2) e nella (3) si ha il sistema:

$$\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \quad \begin{cases} y = 2u(x-u) + u^2 \\ z = 3u^2(x-u) + u^3 \ , \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 2ux - u^2 \\ z = 3u^2x - 2u^3 \ , \end{cases}$$

e quindi (B) $$\begin{cases} (4) \quad u^2 = 2ux - y \\ (5) \quad z = u^2(3x - 2u) \ . \end{cases}$$

Sostituendo la (4) nella (5) si ha:

(*) $$z = (2ux - y)(3x - 2u) \,, \qquad \text{cioè}$$

(6) $$z = 6ux^2 - 3xy + 2uy - 4u^2x \quad .$$

Sostituendo la (4) nell'ultimo termine della (6) si ha:

- $$z = 6ux^2 - 3xy + 2uy - 4x(2ux - y),$$
- $$z = 6ux^2 - 3xy + 2uy - 8ux^2 + 4xy \,,$$
- $$z = xy - 2u(x^2 - y) \,.$$

Ne segue $$2u(x^2 - y) = xy - z \,, \qquad \text{da cui}$$

(7) $$u = \frac{xy - z}{2(x^2 - y)} \quad .$$

Sostituendo la (7) nella (4) potremo avere un'equazione nelle variabili x,y,z. Infatti si ha :

(*) $$\frac{(xy-z)^2}{4(x^2-y)^2}=\frac{\cancel{2}x(xy-z)}{\cancel{2}(x^2-y)}-y \ .$$

Con successivi passaggi si ha:

- $(xy-z)^2=(x^2y-xz)(4x^2-4y)-4y(x^2-y)^2$,
- $x^2y^2+z^2-2xyz=\cancel{4x^2y}-4x^2y^2-4x^3z+4xyz-\cancel{4yx^4}+$ $-4y^3+8x^2y^2$,
- $x^2y^2+z^2-2xyz=4x^2y^2-4x^3z-4y^3+4xyz$,
- $3x^2y^2-4x^3z-4y^2-z^2+6xyz=0,$ infine

(8) $$x^2(3y^2-4xz)+2y(3xz-2y)-z^2=0 \ .$$

La (8) è l'equazione cartesiana della superficie data dalle equazioni parametriche assegnate inizialmente.

PROBLEMA 13 E (Autunno 1949, 2° app. – dispense ORUR, pg. 50)

Tra i punti della conica

(1) $$y = x^2 \,, \qquad z = 0 \,,$$

e i piani del fascio aventi per asse la retta

(2) $$x = 1 \,, \qquad z = 0 \,,$$

si ponga la proiettività tale che ai punti $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(-1,1,0)$ corrispondano ordinatamente i piani

(*) $$x - 1 = 0 \,, \qquad x - z - 1 = 0 \,, \qquad x + z - 1 = 0 \,.$$

Sia A un punto generico della conica, α il piano ad esso corrispondente, $\underline{a}$ la retta parallela all'asse z per A e P il punto di intersezione di $\underline{a}$ con α; determinare l'equazione della curva C descritta da P al variare di A sulla conica. Verificare che C è una cubica gobba.

<u>Svolgimento</u>.

L'equazione cartesiana della parabola è

(*) $$y = x^2 \,, \qquad z = 0 \,;$$

le sue equazioni parametriche sono

(1) $$x = t \,, \qquad y = t^2 \,, \qquad z = 0 \,.$$

La retta r ha le equazioni

(*) $$x = 1 \,, \qquad z = 0 \,,$$

e l'equazione del fascio di piani aventi per asse la retta r è

(2) $$x - 1 + \lambda z = 0 \,.$$

Consideriamo la parabola (1).

Per $t = 0$ si ha il punto $O(0,0,0)$;

per $t = 1$ si ha il punto $(1,1,0)$;

per $t = -1$ si ha il punto $(-1,1,0)$.

Consideriamo il fascio di piani (2).

Per $\lambda = 0$ si ha il piano $x - 1 = 0$ (parallelo al piano xy);

per $\lambda = -1$ si ha il piano $x - z - 1 = 0$:

per $\lambda = 1$ si ha il piano $x + z - 1 = 0$.

Ne segue che tra i punti della parabola e i piani del fascio si ha una proiettività data dall'eguaglianza di birapporti:

(*) $\qquad (0,1,-1,t)=(0,-1,1,\lambda)$. $\qquad$ Si ricava in successione:

(*) $\qquad \dfrac{(0,1,-1)}{(0,1,t)}=\dfrac{(0,-1,1)}{(0,-1,\lambda)}$, $\qquad$ da cui

(*) $\qquad \dfrac{-1-0}{-1-1}:\dfrac{t-0}{t-1}=\dfrac{1-0}{1+1}:\dfrac{\lambda-0}{\lambda+1}$ $\qquad$ e quindi

(*) $\qquad \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t-1}{t}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda+1}{\lambda}$,

(*) $\qquad \dfrac{t-1}{2t}=\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}, \qquad \to \qquad \dfrac{t-1}{t}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}$. Ne segue:

(*) $\qquad \cancel{\lambda t}-\lambda=\cancel{t\lambda}+t$.

Possiamo quindi dire che l'equazione della proiettività è:

(3) $\qquad \lambda=-t$.

Ne segue che al generico punto $A(t,t^2,0)$ della parabola corrisponde, nella proiettività, il piano $\alpha:\ x-1-tz=0$; con più evidenza:

(*) $\qquad$ al punto $A(t,t^2,0)$ $\quad$ corrisponde il piano $\quad \alpha:\ x-1-tz=0$.

La retta a passante per il punto A e parallela all'asse z ha le equazioni:

(*) $\qquad x=t, \qquad y=t^2, \qquad z=k$.

Essa interseca il piano α, corrispondente al punto stesso, nel punto P indicato indicato in fig.7 e avente le coordinate:

(4) $$\begin{cases} x=t, \quad y=t^2, \\ z=\dfrac{t-1}{t} \end{cases} .$$

Le equazioni (4) sono le equazioni parametriche della curva C descritta dal punto P al variare del parametro t.
La C è una curva gobba, ossia essa non giace per intero su un piano

(5) $$ax + by + cz + d = 0 .$$

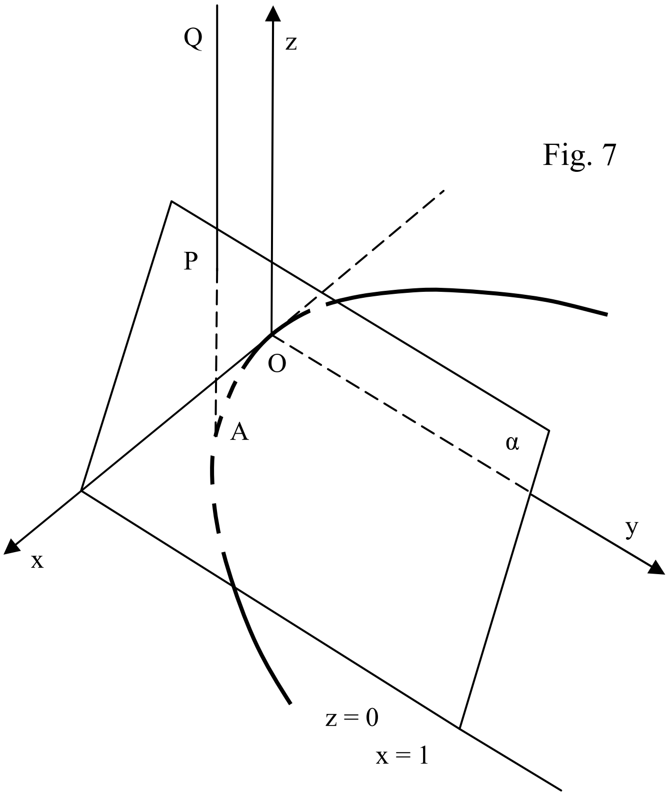


Fig. 7

Infatti, sostituiamo alle variabili x,y,z le coordinate di un generico punto della curva e facciamo vedere che non esistono quattro numeri a,b,c,d non tutti nulli tale che l'equazione sia una identità in t. Si ha:

(*) $$at + bt^2 + c \cdot \frac{(t-1)}{t} + d = 0 ,\quad \text{da cui}$$

(*) $$at^2 + bt^3 + ct - c + dt = 0 , \qquad \text{e quindi}$$

(6) $$bt^3 + at^2 + (c+d)t - c = 0 .$$

Dal sistema $b = 0 ,\quad a = 0 ,\quad c + d = 0 ,\quad c = 0 ,$

si ricava che l'equazione (6) è soddisfatta per qualsiasi valore di t solo se i coefficienti a, b, c, d sono tutti nulli.
Si conclude che non esiste alcun piano che contenga per intero la curva C; pertanto tale curva è sghemba.

Consideriamo ora l'equazione che ci dà la terza coordinata: $z = (t-1)/t$.

Da essa si ha $tz = t-1$, $1 = t - tz$, quindi $t = \dfrac{1}{1-z}$.

Sostituendo nella $y = t^2$ si ha:

$$(7) \qquad y = \frac{1}{(1-z)^2} \ , \quad \text{cioè} \qquad y \cdot (1-z)^2 = 1 \ .$$

La (7) è una curva del 3^o ordine, ossia una cubica. Poiché essa rappresenta la proiezione ortogonale della curva C sul piano yz $(x = 0)$, si deduce che anche la C è una cubica; e precisamente, essa è una cubica sghemba, o gobba.

Inoltre, poiché la (7) è una curva che non passa per l'origine O(0,0,0) del riferimento, lo stesso fatto si deve verificare per la curva di equazioni (4). Infatti, da esse si vede che per $t = 0$ le coordinate x e y sono nulle, ma non la terza coordinata z, come subito possiamo convincerci:

$$(8) \qquad z = \lim_{t \to 0} \frac{t-1}{t} = \lim_{t \to 0} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \infty \ .$$

PROBLEMA 14 E (testo di G. Vaccaro, Teoria delle superfici; pg. 117)

Nello spazio (x,y,z) si consideri (fig. 8) la parabola C di equazioni

(1) $$y-1=0\,, \qquad 4x=z^2$$

(2) e la C_∞ (conica all'infinito) della quadrica $xy=z^2$.

I) Scritte equazioni parametriche razionali di C e C_∞ , si determini l'equazione della proiettività tra C e C_∞ nella quale ai tre punti di C

- $(0,1,0,1)\,, \qquad (1,1,2,1)\,, \qquad (1,0,0,0)$

corrispondano ordinatamente i tre punti di C_∞

- $(0,1,0,0) \qquad (1,1,1,0)\,, \qquad (1,0,0,0)$.

II) Scrivere l'equazione cartesiana della superficie σ (algebrica del 3° ordine) luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti nella proiettività sopra considerata.

III) Dimostrare che la σ ha una retta doppia $\underline{r}$. Esistono su σ altri punti multipli oltre quelli di $\underline{r}$?

IV) Provare che le coniche C e C_∞ sono direttrici della superficie σ, oltre alla retta doppia $\underline{r}$, come è ovvio.

Svolgimento.

I) Le equazioni cartesiane della parabola sono $y=1\,,\ x=\frac{1}{4}z^2$.

Ponendo $z=t$ si ricavano le equazioni parametriche in coordinate non omogenee. Esse sono:

- $x=t^2/4\,, \qquad y=1\,, \qquad z=t\,.$

In coordinate omogenee si ha:

(3) $$x_1=\frac{1}{4}t^2\,, \qquad x_2=1\,, \qquad x_3=t\,, \qquad x_4=1\ .$$

Per $t=0$ si ha il punto $(0,1,0,1)$;

per $\quad t = 2 \qquad$ si ha il punto $\qquad (1,1,2,1)$;

per $\quad t = \infty \qquad$ si ha il punto $\qquad (1,0,0,0)$ (lo vedremo subito).

Per il momento è impossibile vedere il valore del parametro t corrispondente al punto $(1,0,0,0)$ della parabola. Lo possiamo trovare con il seguente ragionamento.

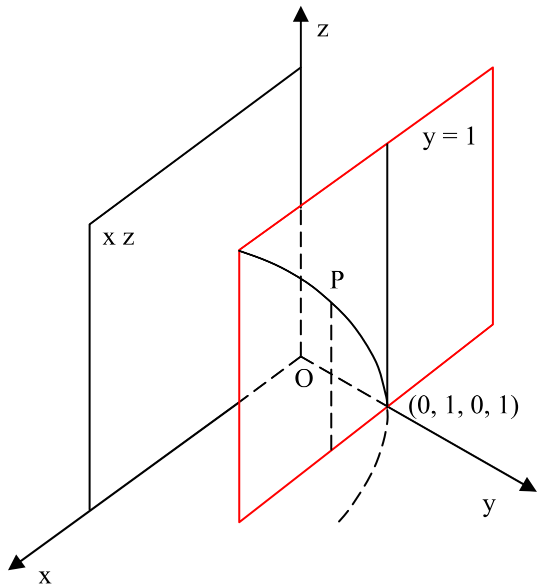


Fig. 8

Poniamo $t = 2/\tau$. In coordinate omogenee, le equazioni parametriche della parabola sono:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_4} = \dfrac{1}{4}t^2 = \dfrac{4}{4\tau^2} = \dfrac{1}{\tau^2}, \qquad \dfrac{x_2}{x_4} = 1 = \dfrac{\tau^2}{\tau^2}, \\ \dfrac{x_3}{x_4} = t = \dfrac{2}{\tau} = \dfrac{2\tau}{\tau^2} \quad . \end{cases}$$

Sotto una forma equivalente, le equazioni parametriche sono:

$$(4) \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = \tau^2, \qquad x_3 = 2\tau, \qquad x_4 = \tau^2 \ .$$

Dalle (4) si vede che per $\tau = 0$, cioè per $t = \infty$, si ha il punto $(1,0,0,0)$, come avevamo anticipato poco sopra.

Consideriamo ora la conica all'infinito C_∞ della quadrica (2) $\qquad xy = z^2$.

In coordinate omogenee le equazioni della conica sono:

$$(5) \qquad x_1 x_2 = x_3^{\,2} \qquad e \qquad x_4 = 0 .$$

Le equazioni parametriche di questa C_∞ sono:

(6) $\quad x_1 = k^2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = k, \quad x_4 = 0,$ o anche

(7) $\quad x_1 = k, \quad x_2 = 1/k \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0.$

Dalle (7) si vede che il generico punto improprio della C_∞ è

(8) $$Q_\infty(k, \frac{1}{k}, 1, 0) \; ;$$

Dalle equazioni (6) si ricava subito che per

per $k = 0$ si ha il punto $(0,1,0,0)$;
per $k = 1$ si ha il punto $(1,1,1,0)$,
per $k = \infty$ si ha il punto $(1,0,0,0)$, lo vedremo subito.

Infatti, dalle (7) si vede che le equazioni parametriche della C_∞ si possono scrivere anche nella forma:

(10) $\quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{k^2}, \quad x_3 = \frac{1}{k}, \quad x_4 = 0,$

e da queste si vede che per $k = \infty$ si ha il punto improprio dell'asse x $(1,0,0,0)$.

Tra i punti delle coniche C e C_∞ possiamo quindi stabilire una proiettività data dall'eguaglianza di birapporti:

- $(0,2,\infty,t) = (0,1,\infty,k),$ ossia
  $(2,0,t,\infty) = (1,0,k,\infty)$.

Dall'ultima relazione si ha l'eguaglianza di rapporti semplici

(*) $$(2,0,t) = (1,0,k) \; .$$

Con successivi passaggi si ottiene:

(*) $$\frac{t-2}{t-0} = \frac{k-1}{k-0}, \quad \rightarrow \quad \frac{t-2}{t} = \frac{k-1}{k},$$

(*) $$k(t-2)=t(k-1)\,, \qquad \cancel{tk}-2k=\cancel{tk}-t\,.$$

Si ricava che l'equazione della proiettività tra i punti delle coniche C e C_∞ è:

(11) $$t=2k\ .$$

II) Ricordando le (7), si vede che il generico punto improprio della C_∞ è

(8) $$Q_\infty(k,\ \frac{1}{k},\ 1,\ 0)\ ;$$

la retta che proietta questo punto ha i parametri direttori

(9) $$\ell=k\,, \qquad m=1/k\,, \qquad n=1\,.$$

Parimenti, per il generico punto proprio della parabola si ha

(*) $$P\left(\frac{1}{4}t^2,\ 1,\ t\right).$$

Ma poiché $t=2k$, come vuole l'equazione della proiettività, possiamo dire che il punto della parabola corrispondente al punto Q_∞ della conica C_∞ è:

(12) $$N(k^2;1;2k)\,.$$

Pertanto, la retta NQ_∞ (che unisce punti corrispondenti nella proiettività) ha equazioni della forma:

(*) $$\frac{x-x_o}{\ell}=\frac{y-y_o}{m}=\frac{z-z_o}{n}\,.$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$\frac{x-k^2}{k}=\frac{y-1}{\frac{1}{k}}=\frac{z-2k}{1}\,, \qquad \text{cioè}$$

(13) $$\frac{x-k^2}{k}=k(y-1)=z-2k\ .$$

La (13) si può spezzare nelle due equazioni

(14) $$\frac{x-k^2}{k}=k(y-1),$$ (15) $$\frac{x-k^2}{k}=z-2k.$$

Dalla (14) si ottiene:

(*) $$x-\cancel{k^2}=k^2y-\cancel{k^2}\ ,$$ da cui (16) $$k^2=\frac{x}{y}\ .$$

Dalla (15) si ha: $x-k^2=zk-2k^2$, ossia

(17) $$x+k^2=zk\,.$$

Sostituendo la (16) nella (17) si ha

(*) $$x+\frac{x}{y}=zk\quad ,\qquad zk=\frac{xy+x}{y}\ ,$$

da cui $k=\dfrac{x(y+1)}{zy}$, e quindi

(18) $$k^2=\frac{x^2(y+1)^2}{z^2y^2}\ .$$

Eguagliano membro a membro la (16) e la (18) si ha:

(*) $$\frac{x}{y}=\frac{x^2(y+1)^2}{z^2y^2},$$ da cui

(19) $$z^2y=x(y+1)^2.$$

La superficie costituita dalle rette che uniscono punti corrispondenti delle due coniche avrà quindi l'equazione:

(20) $$f(x,y,z)=xy^2-z^2y+2xy+x=0.$$

Si tratta di una superficie rigata del 3° ordine che indicheremo con il simbolo σ.

III) Vediamo ora se la superficie (20) ha punti doppi.

Eventuali punti doppi della superficie debbono essere una soluzione del sistema che si ottiene eguagliando a zero la funzione $f(x,y,z)$ e le sue derivate parziali prime. Scriviamo la funzione e le sue derivate:

$$(*)\qquad \begin{gathered} f(x,y,z)=-z^2y+xy^2+2xy+x, \\ \frac{\partial f}{\partial x}=y^2+2y+1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-z^2+2xy+2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-2zy\ . \end{gathered}$$

Si ottiene così il sistema:

$$(21)\qquad \begin{cases} -z^2y+x(y+1)^2=0, & (y+1)^2=0, \\ -z^2+2x(y+1)=0, & zy=0\ . \end{cases}$$

E' evidente che il sistema ha la soluzione doppia

$$(22)\qquad z=0\,, \qquad y+1=0\,,$$

la quale rappresenta una retta doppia $\underline{r}$ della superficie. Si vede anche che non ci sono altri punti doppi.

Verifichiamo con altri metodi che la retta $\underline{r}$ è effettivamente una retta doppia della superficie σ. Infatti, intersechiamo questa superficie con il fascio di piani

$$(23)\qquad y+1=\lambda z\,,$$

passanti per la retta $\underline{r}$. Si ha il sistema

$$(24)\qquad \begin{cases} z^2y=x(y+1)^2 \\ y+1=\lambda z\ . \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene $\qquad z^2y=x\lambda^2z^2\ ,\qquad$ da cui

$$(25)\qquad z^2(y-\lambda^2x)=0\,.$$

Si ricava la soluzione doppia

$$(22)\qquad z=0\,, \qquad y+1=0\ :$$

ciò vuol dire che la (22) è una retta doppia $\underline{r}$ della superficie σ.

IV) Torniamo all'equazione della superficie σ:

(19) $$z^2y = x(y+1)^2.$$

Se in essa poniamo $y=1$, $z^2=4x$ otteniamo l'identità $4x=4x$. Ciò ci dice che la parabola C giace sulla superficie σ ed è una sua direttrice. Ovviamente, anche la retta doppia $\underline{r}$ è una direttrice della superficie σ.

In forma omogenea la (19) si scrive

(20) $$x_3{}^2x_2 = x_1(x_2+x_4)^2 .$$

Si vede subito che questa equazione è soddisfatta dalle equazioni parametriche della C_∞, cioè dalle equazioni

(21) $$x_1 = k^2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = k, \quad x_4 = 0.$$

Ciò ci dice che anche la C_∞ è una direttrice della superficie σ.

PROBLEMA 15 E (inverso del problema 14 E)

Determinare l'equazione della superficie rigata S avente le tre direttici seguenti:

- D_1: la retta $z=0$, $y=-1$;
- D_2: la parabola $y-1=0$, $x=\dfrac{z^2}{4}$;
- D_3: la conica all'infinito del cono $xy=z^2$, cioè
  la conica C_∞: $xy=z^2$, $x_4=0$.

Soluzione

Si tratta dell'inverso del problema 14 E, quindi già sappiamo che l'equazione della superficie deve essere:

(1) $$z^2y = x(y+1)^2.$$

Possiamo indicare i punti generici delle tre direttrici nel modo seguente:

punto della direttrice D_1: $N(h,-1,0)$;

punto della direttrice D_2: $P(\frac{t^2}{4},1,t)$;

punto della direttrice D_3: $Q_\infty\left(k,\frac{1}{k},1,0\right)$.

I coni di vertice N che proiettano le direttrici D_2, D_3 hanno in comune un certo numero dirette. Al variare del punto N sulla direttrice D_1 queste rette descrivono la rigata.

Retta NP
$$\frac{x-h}{\frac{t^2}{4}-h}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-0}{t-0}.$$

Per trovare l'equazione della retta NQ_∞ teniamo presente che i parametri direttori della retta che proiettano il punto improprio Q_∞ sono:

(*) $\qquad \ell=k, \qquad m=1/k, \qquad n=1.$ Pertanto si ha:

retta NQ_∞:
$$\frac{x-h}{k}=\frac{y+1}{1/k}=\frac{z-0}{1}\ .$$

Mettendo a sistema le equazioni dei due coni, si ha:

(A)
$$\begin{cases}\dfrac{x-h}{\frac{t^2}{4}-h}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{t}\\[2ex] \dfrac{x-h}{k}=k(y+1)=z\ .\end{cases}$$

Spezzando le equazioni si ha:

(B)
$$\begin{cases}(2)\quad \dfrac{x-h}{t^2/4-h}=\dfrac{y+1}{2}, & (3)\quad \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{t}\\[2ex] (4)\quad \dfrac{x-h}{k}=k(y+1), & (5)\quad k(y+1)=z\ .\end{cases}$$

Dalla (3) si ha:
$$t=\frac{2z}{y+1};$$

dalla (5) si ha $$k = \frac{z}{y+1}.$$

Trasformando preventivamente la (4) si ha:

(*) $$x - h = k^2(y+1),$$ da cui

(*) $$h = x - k^2(y+1).$$

Sostituendo l'espressione di k data dalla (5) si ha:

(6) $$h = x - \frac{z^2}{y+1}.$$

Consideriamo ora la relazione (2); liberata dai denominatori essa diventa

(7) $$2(x-h) = (y+1)\left(\frac{t^2}{4} - h\right).$$

Sostituendo nella (7) l'espressioni di h e t che abbiamo ricavate si ha:

(*) $$2\left[x - x + \frac{z^2}{y+1}\right] = (y+1)\cdot\left[\frac{\cancel{4}z^2}{(y+1)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}} - x + \frac{z^2}{y+1}\right].$$

Proseguendo nei calcoli si ha:

(*) $$\frac{2z^2}{y+1} = \cancel{(y+1)}\cdot\frac{z^2 - x(y+1)^2 + z^2(y+1)}{(y+1)^{\cancel{2}}},$$

(*) $$2z^2 = z^2 - x(y+1)^2 + z^2y + z^2,$$ e infine

(8) $$z^2y = x(y+1)^2.$$

La (8) è l'equazione della superficie rigata che ha per direttrici le tre curve date.

PROBLEMA 16 E (Autunno 1949, 1° app. Dispense ORUR pg. 48)

I) Determinare l'equazione della superficie rigata che ha le seguenti tre direttrici:

D_1) l'asse z ($x=0,\ y=0$);

D_2) la retta r: $x-1=0$, $z=0$

D_3) la cubica gobba $x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3$.

II) Dimostrare che la retta $x-1=0$, $z=0$ è retta semplice per la superficie, mentre l'asse z è retta tripla.

III) Verificare che l'asse x ($y=0$, $z=0$) appartiene alla rigata ed è generatrice semplice a carattere sviluppabile (cioè il piano tangente in ogni suo punto è sempre lo stesso).

Quesito I)
Sia P(0,0,h) un punto qualsiasi della direttrice D_1 . I coni di vertice P che proiettano le direttrici D_2 e D_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare di P su D_1 , queste rette descrivono la rigata che ha per direttrici le tre curve date.
Ricordiamo che la retta passante per due punti $P(x_o, y_o, z_o)$ e $Q(x_1, y_1, z_1)$ qualsiasi ha le equazioni:

(*) $$\frac{x-x_o}{x_1-x_o}=\frac{y-y_o}{y_1-y_o}=\frac{z-z_o}{z_1-z_o}\ .$$

Nel nostro caso siano:

- P(0,0,h) un punto della direttrice D_1 : $x=0,\ y=0$ (asse z);
- Q(1,u,0) un punto della direttrice D_2 : $x=1,\ z=0$ (retta r);
- $N(t, t^2, t^3)$ un punto della cubica gobba D_3 : $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

Allora:

Retta PQ : (1) $$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{u-0}=\frac{z-h}{0-h}\ ;$$

La (1) è una generatrice del cono che ha il vertice P e la retta r come direttrice.

Retta PN (2): $$\frac{x-0}{t-0}=\frac{y-0}{t^2-0}=\frac{z-h}{t^3-h}\ .$$

La (2) è una generatrice del cono che ha il vertice P e la cubica gobba come direttrice.

Mettiamo a sistema le equazioni dei due coni:

(3)
$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{u} = \dfrac{h-z}{h} \\ \dfrac{x}{t} = \dfrac{y}{t^2} = \dfrac{z-h}{t^3-h} \end{cases} .$$

Spezzando, si ha il sistema:

$$\begin{cases} (4) \quad x = \dfrac{y}{u} \qquad (5) \quad \dfrac{y}{u} = \dfrac{h-z}{h} \\ (6) \quad \dfrac{x}{\cancel{t}} = \dfrac{y}{t^{\cancel{2}}} \qquad \to x = \dfrac{y}{t}, \qquad \to t = \dfrac{y}{x} \\ (7) \quad \dfrac{y}{t^2} = \dfrac{z-h}{t^3-h} \end{cases} .$$

Dalle (4), (6) si ricava:

(8) $\qquad u = \dfrac{y}{x}$, $\qquad$ (9) $\quad t = \dfrac{y}{x}$, $\quad$ e da queste $\qquad u = t$.

Dalle (5) ,(8) si ricava:

(*) $\qquad h - z = \dfrac{y}{u} h$, $\quad$ cioè $\quad h - z = xh$, $\qquad z = h(1-x)$,

e quindi : (10)
$$h = \frac{z}{1-x} .$$

Ricordiamo la relazione $\quad \dfrac{y}{t^2} = \dfrac{z-h}{t^3-h}$; $\quad$ da essa si ha:

(11)
$$y(t^3 - h) = t^2(z-h) .$$

Sostituendo le (9), (10) nella (11) si ottiene:

(*)
$$y\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{z}{1-x}\right) = \frac{y^2}{x^2}\left(z - \frac{z}{1-x}\right),$$

(*) $$\frac{\cancel{y}\cdot(y^3-y^3x-zx^3)}{x^3\,\cancel{(1-x)}}=\frac{y^{\cancel{2}}\cdot(z-zx-z)}{x^2\,\cancel{(1-x)}},$$

(*) $$y^3-y^3x-zx^3=yx\cdot(-zx),\qquad \text{e quindi}$$

(12) $$y^3-y^3x-zx^3+yzx^2=0.$$

Abbiamo ottenuto una rigata del 4^o ordine, che indicheremo con il simbolo F^4, che ha un punto triplo nell'origine O(0,0,0) delle coordinate. Ne segue che F^4 è un monoide in quanto essa ha un punto che ha molteplicità inferiore di uno rispetto all'ordine (quattro) della superficie. Un monoide è ovviamente una superficie razionale.
Il cono asintotico nel punto O ha l'equazione $y^3=0$, quindi esso è spezzato in tre piani coincidenti di equazione $y=0$. L'origine O è pertanto un punto triplo uniplanare.

Quesito II)
Si vede subito che la rigata passa per l'asse z; infatti la sua equazione è soddisfatta per $x=0,\ y=0$.
Un fascio di piani $y=\lambda x$ passante per questo asse interseca la superficie secondo una quartica degenere C^4 che contiene l'asse stesso. Essa è rappresentata dal sistema:

(1) $$\begin{cases} y^3-y^3x-zx^3+yzx^2=0 \\ y=\lambda x \quad , \end{cases}$$

da cui $$\lambda^3x^3-\lambda^3x^4-zx^3+\lambda zx^3=0,$$

(*) $$x^3(\lambda^3-\lambda^3x-z+\lambda z)=0.$$

La C^4 si spezza nella retta semplice

(*) $$\begin{cases} y=\lambda x \\ z(\lambda-1)-\lambda^3x+\lambda^3=0 \end{cases}$$

e nella retta $x=0,\ y=0$ (asse z) contata tre volte; quindi l'asse z è una retta tripla per la rigata F^4.

Verifichiamo ora che la retta $x-1=0,\ z=0$ è una retta semplice per la superficie. Intersechiamo con il fascio di piani $z+\lambda(x-1)=0$ passante per la retta:

(2) $$\begin{cases} y^3 - y^3x - zx^3 + yzx^2 = 0 \\ z = \lambda(1-x) \quad , \end{cases}$$

(*) $$y^3 - y^3x - \lambda(1-x)x^3 + yx^3\lambda(1-x) = 0 \, ,$$

(*) $$y^3 - y^3x - \lambda x^3 + \lambda x^4 + \lambda yx^3 - \lambda yx^4 = 0 \ ,$$

(*) $$y^3(1-x) - \lambda x^3(1-x) + \lambda yx^3(1-x) = 0 \ ,$$

(3) $$(1-x)\cdot[y^3 - \lambda x^3 + \lambda yx^3] = 0 \ .$$

La (3) ci dice che il sistema posto ha la soluzione semplice $x = 1, \ z = 0$. Essa rappresenta una retta semplice appartenente alla superficie.

Quesito III)

E' facile ora verificare che l'asse x è una generatrice della rigata; infatti, tenendo presente che i punti dell'asse x hanno le coordinate $y = 0, \ z = 0$, sostituendo nella equazione della rigata si ha l'identità $0 = 0$.

Facciamo anche vedere che la detta generatrice è una retta semplice. A tale scopo mettiamo a sistema la rigata con il fascio di piani $z = ky$ passante per l'asse x e facciamo vedere che si ha una soluzione semplice. Si ha:

(1) $$\begin{cases} y^3 - y^3x - zx^3 + yzx^2 = 0 \\ z = ky \quad ; \end{cases}$$

(*) $$y^3 - y^3x - kyx^3 + ky^2x^2 = 0 \, ,$$

(2) $$y\cdot[y^2 - y^2x - kx^3 + kyx^2] = 0 \ .$$

Il sistema ha la soluzione semplice $y = 0, \ z = 0$; ciò ci dice che l'asse x è una retta semplice della rigata.

Troviamo infine il piano tangente alla rigata in un punto qualsiasi Q(h,0,0) dell'asse x. L'equazione del piano tangente in un generico punto $P(x_o, y_o, z_o)$ è:

(3) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P (z - z_o) = 0 \, .$$

Calcoliamo le derivate parziali prime della funzione

(4) $$f(x,y,z) = y^3 - y^3x - zx^3 + yzx^2 :$$

(5) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^3 - 3x^2z + 2xyz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3y^2x + zx^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^3 + yx^2 \quad .$$

Calcoliamo il valore delle derivate nel punto Q(h,0,0). Si ha:

(6) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_Q = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_Q = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_Q = -h^3.$$

L'equazione del piano tangente nel punto Q è:

(*) $$-h^3(z-0) = 0 \;,$$

cioè (7): $$z = 0 \;.$$

L'equazione del piano tangente non dipende dal punto Q. Quindi il piano tangente nel punto Q non solo contiene l'asse x, ma rimane anche fisso al variare del punto sull'asse stesso. Ne segue che l'asse x è una generatrice a carattere sviluppabile.

PROBLEMA 17 E (Sessione estiva 1949; Dispense ORUR, pg. 8)

Scrivere l'equazione della superficie rigata che ha per direttrici:
$C_1 \equiv$ la conica $y^2 - z - 1 = 0,\ x = z$; $C_2 \equiv$ l'asse delle x $(y = 0, z = 0)$;
$C_3 \equiv$ la retta impropria del piano yz $(x_1 = 0,\ x_4 = 0)$ (con x_4 abbiamo indicata la quarta coordinata omogenea dopo x_1, x_2, x_3).

Si tratta del **PROBLEMA 1 E** che abbiamo già risolto. Vogliamo ora dare una soluzione diversa di questo problema; essa si basa sul seguente teorema:

" Sia N un punto qualsiasi della direttrice C_2 (asse x). I coni di vertice N che proiettano le direttrici C_1, C_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare del punto N sull'asse x queste rette descrivono una rigata ".

Consideriamo la prima direttrice, $C_1:\ z = y^2 - 1,\ x = z$.
Ponendo $y = t$ si trova che le equazioni parametriche della curva sono:

(1):
$$C_1 = \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t \\ z = t^2 - 1\ ; \end{cases}$$

le coordinate di un punto generico P di essa sono $P(t^2 - 1;\ t;\ t^2 - 1)$.

Le equazioni della direttrice C_2 (asse x) sono $y = 0$, $z = 0$ e le coordinate di un punto generico N di essa sono: N(k,0,0).

Le equazioni della direttrice C_3 (retta impropria del piano yz) sono $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ e le coordinate di un punto generico Q_∞ di essa sono $Q_\infty(0, p, q, 0)$, ossia $Q_\infty(0, 1, u, 0)$.

Ricordiamo che l'equazione generale di una retta P_1P_0 è :

(*)
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\ .$$

Nel nostro caso si ha:

retta NP:
$$\frac{x - k}{t^2 - 1 - k} = \frac{y - 0}{t - 0} = \frac{z - 0}{t^2 - 1 - 0}, \quad \text{ossia}$$

(2)
$$\frac{x - k}{t^2 - 1 - k} = \frac{y}{t} = \frac{z}{t^2 - 1}\ .$$

Retta NQ_∞ : ha i parametri direttori 0,1,u che si ricavano dalle coordinate del punto improprio $Q_\infty(0,1,u,0)$. Ne segue che essa avrà le equazioni:

(*) $$\frac{x-k}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{u};$$

da esse si ricava il sistema

(3) $$\begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{z}{u} \end{cases}.$$

L'equazione della rigata si ottiene eliminando i parametri h, u, t dal sistema costituito dalle (2),(3):

(4) $$\begin{cases} x=k, \quad y=z/u, \\ \dfrac{x-k}{t^2-1-k}=\dfrac{y}{t}=\dfrac{z}{t^2-1}. \end{cases}$$

Spezziamo il sistema: $$\begin{cases} (5)\quad x=k, & (6)\quad y=\dfrac{z}{u}\ , \\ (7)\quad \dfrac{y}{t}=\dfrac{x-k}{t^2-1-k}, & (8)\quad \dfrac{y}{t}=\dfrac{z}{t^2-1}\ . \end{cases}$$

Dalle (5), (6) si ricava:

$$(9)\qquad k=x\ , \qquad\qquad (10)\qquad u=\frac{z}{y}\ .$$

Dalle (7), (8) si ricava il sistema:

(11) $$\begin{cases} y(t^2-1-k)=t(x-k) \\ y(t^2-1)=zt\ . \end{cases}$$

Poiché $h=x$ il sistema diventa: $$\begin{cases} y(t^2-1)=yx \\ y(t^2-1)=zt\ . \end{cases}$$

Da esso subito si ricava $zt=xy$, e quindi

(12) $$t = \frac{xy}{z}\ .$$

Sostituendo l'espressione di t data dalla (12) nella seconda equazione del sistema (11), si ha:

(*) $$y\left(\frac{x^2y^2}{z^2} - 1\right) = z \cdot \frac{xy}{z}\ , \qquad \frac{y(x^2y^2 - z^2)}{z^2} = xy\ , \qquad \frac{x^2y^2 - z^2}{z^2} = x\ ;$$

infine (13) $$x^2y^2 - z^2x - z^2 = 0\ .$$

La (13) è l'equazione della superficie che ha le tre direttrici su indicate; la sua equazione coincide perfettamente con quella trovata a suo tempo.

La (13) rappresenta una rigata per due motivi:

1°) perché la superficie a cui essa si riferisce è il luogo di ∞^1 rette che si appoggiano alle tre direttrici;

2°) perché tre direttrici arbitrarie dello spazio individuano una e una sola rigata (F: Conforto; Geometria Descrittiva, pg. 212).

PARTE TERZA

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE

CAPITOLO PRIMO

PROBLEMI DI VARIO GENERE

PROBLEMA 1 B (Rigata generata da tre direttrici; S. Milani, Pontinia)

Determinare l'equazione cartesiana della superficie rigata Σ che ha le seguenti tre direttrici:

$$D_1: \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = u^2, \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} x = u \\ y = 2 \\ z = 3u^2 - 2u, \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} x = u \\ y = -1 \\ z = u \ . \end{cases}$$

NOTARE. Abbiamo ottenuto queste tre direttrici dalla superficie di equazioni parametriche:

(1) $$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v(u^2 - u) \ , \end{cases}$$

ponendo rispettivamente $v = 0, \ v = 2, \ v = -1$.
Dalla (1) si ricava che l'equazione cartesiana della superficie è:

(2) $$z = x^2 + x^2 y - xy \ .$$

Ne segue che la (2) deve essere l'equazione cartesiana della rigata che cerchiamo.

<u>Soluzione</u>.
Sia $P(t, 0, t^2)$ un punto qualsiasi della direttrice D_1. I coni di vertice P che proiettano le direttrici D_2 e D_3 hanno in comune un certo numero di rette.
Queste rette, al variare di P su D_1, descrivono la rigata che ha per direttrici le curve D_1, D_2 e D_3.
Ricordiamo che l'equazione di una qualsiasi retta P_1P_0 è

(*) $$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \ .$$

Prendiamo sulle direttrici D_2 e D_3 rispettivamente i punti $M(u, 2, 3u^2 - 2u)$ e

$N(u,-1,u)$. Allora

(3) retta PM: $$\frac{x-t}{u-t}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-t^2}{3u^2-2u-t^2}\ ,$$

(4) retta PN: $$\frac{x-t}{u-t}=\frac{y-0}{-1-0}=\frac{z-t^2}{u-t^2}\ .$$

Mettendo a sistema le (3), (4) ed eliminando i parametri t ed u si ottiene l'equazione cartesiana della superficie Σ. Si ha:

(5) $$\begin{cases} \dfrac{x-t}{u-t}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-t^2}{3u^2-2u-t^2} \\ \dfrac{x-t}{u-t}=-y=\dfrac{z-t^2}{u-t^2}\ . \end{cases}$$

Spezzando si ottiene il seguente sistema di quattro equazioni:

(*) $$\begin{cases} (6)\quad \dfrac{x-t}{u-t}=\dfrac{y}{2}, \qquad (7)\quad \dfrac{z-t^2}{3u^2-2u-t^2}=\dfrac{y}{2} \\ (8)\quad \dfrac{x-t}{u-t}=-y, \qquad (9)\quad \dfrac{z-t^2}{u-t^2}=-y\ . \end{cases}$$

Le espressioni (6), (8) ci dicono che la frazione $\dfrac{x-t}{u-t}$ è indeterminata; quindi numeratore e denominatore devono essere nulli:

(*) $\qquad x-t=0, \qquad u-t=0\ , \qquad$ da cui

(10) $\qquad u=x, \qquad$ e $\qquad t=x.$

Sostituendo nella (9) – o nella (7)- i parametri t ed u con i valori (10) si ha:

(11) $$\frac{z-x^2}{x^2-x}=y\ ,$$ e infine

(12) $$z=x^2y-xy+x^2.$$

La (12) è l'equazione cartesiana della superficie Σ.

PROBLEMA 2 B (Proposto per la preparazione ai Concorsi a cattedra)

In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxyz è data la circonferenza di equazioni

(1) $$C: \quad x^2 + y^2 = 1, \qquad z = 0 .$$

I) Si determini il luogo L dei punti dello spazio che proiettano la circonferenza C sul piano yz ($x = 0$) secondo parabole e si studi la totalità delle parabole così ottenute.

II) Si esamini la corrispondenza che si ottiene quando si definiscono corrispondenti due punti del luogo L dai quali la circonferenza è proiettata nella stessa parabola.

Quesito I)

Sia $V(X,Y,Z)$ un punto qualsiasi del luogo L richiesto.

Proiettando da esso i punti della circonferenza C si ottiene un cono di vertice V. Detto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ un punto qualsiasi della C, la retta VP_o è una generatrice del cono. Per trovare l'equazione di questo cono basta eliminare x_o, y_o, z_o fra le quattro equazioni del sistema seguente:

(2) $$\begin{cases} \dfrac{x-X}{x_o-X} = \dfrac{y-Y}{y_o-Y} = \dfrac{z-Z}{z_o-Z}, & \rightarrow \text{ equazione della generatrice ,} \\ x_o^{\,2} + y_o^{\,2} = 1, \quad z_o = 0 & \rightarrow \text{ direttrice del cono .} \end{cases}$$

La (2-1) ci dà le due equazioni:

(3) $$\frac{x-X}{x_o-X} = \frac{z-Z}{-Z} \ , \qquad \frac{y-Y}{y_o-Y} = \frac{z-Z}{-Z} \ .$$

Dalla prima equazione si ha:

(*) $$x - X = \frac{Z-z}{Z}(x_o - X), \ \rightarrow \qquad x - X + \frac{(Z-z)X}{Z} = \frac{(Z-z)x_o}{Z} ,$$

(*) $$xZ - \cancel{XZ} + \cancel{ZX} - zX = (Z-z)x_o \ , \quad \text{da cui si ha}$$

(4) $$x_o = \frac{xZ - zX}{Z - z} \ .$$

In modo perfettamente analogo si ricava y_o. Abbiamo quindi le relazioni:

(5) $$x_o = \frac{Zx - Xz}{Z - z}, \qquad y_o = \frac{Zy - Yz}{Z - z}, \qquad z_o = 0 .$$

Sostituendo le espressioni (5) nell'equazione $x_o{}^2 + y_o{}^2 = 1$ si trova:

(6) $$(Zx - Xz)^2 + (Zy - Yz)^2 - (Z - z)^2 = 0 .$$

Questa è l'equazione del cono quadrico che proietta la circonferenza C del piano xy dal punto $V(X, Y, Z)$ dello spazio.

Il cono (6) è intersecato dal piano $x = 0$ (piano yz) secondo la conica:

$$\Gamma: \quad X^2z^2 + Z^2y^2 - 2YZyz + Y^2z^2 - Z^2 + 2Zz - z^2 = 0, \quad \text{ossia}$$

(7) $$\Gamma: \quad Z^2y^2 - 2YZyz + (X^2 + Y^2 - 1)z^2 + 2Zz - Z^2 = 0 .$$

Affinché la (7) sia una parabola è necessario e sufficiente che si abbia

(*) $a_{12}{}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$, cioè (8) $(YZ)^2 - Z^2(X^2 + Y^2 - 1) = 0$.

Dalla (8) si ottiene

(*) $$Z^2(Y^2 - X^2 - Y^2 + 1) = 0 .$$

Possiamo semplificare per Z^2 , poiché per un punto fuori del piano xy si ha $Z \neq 0$. Si ottiene:

(9) $X^2 - 1 = 0$, da cui (10) $X = \pm 1$.

L'equazione della parabola sul piano yz sarà quindi:

(11) $$Z^2y^2 - 2(YZ)yz + Y^2z^2 + 2Zz - Z^2 = 0 .$$

Possiamo rappresentare la (11) in forma più abituale ponendo $Z = a$, $Y = b$. Si ottiene:

- $a^2y^2 - 2abyz + b^2z^2 + 2az - a^2 = 0$, e quindi

(12) $$(ay - bz)^2 + 2az - a^2 = 0 .$$

La relazione (10) , $X = \pm 1$, ci permette di trarre la seguente conclusione:

“ I punti dello spazio da cui la circonferenza C $x^2+y^2=1$ del piano xy è proiettata in parabole sul piano yz $(x=0)$ hanno le coordinate

(13) P(1,Y,Z) oppure P’(-1,Y’,Z’) con $Z\neq 0$ e $Z'\neq 0$.

Ciò ci dice che questi punti appartengono ai piani $x=1$ e $x=-1$, indicati con le lettere π e π': essi risultano paralleli al piano yz e perpendicolari all’asse x nei punti $A(1,0,0)$ e $B(-1,0,0)$ (vedi fig. 4).

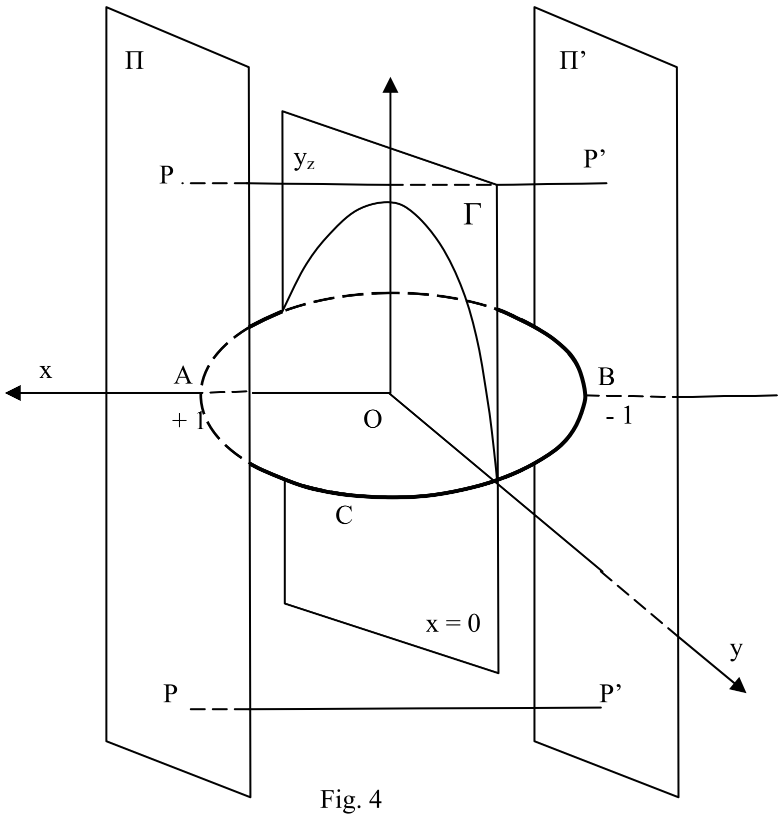


Fig. 4

Evidentemente le due parabole che si ottengono proiettando la circonferenza C da due punti (9) e (9’) dei due piani hanno le equazioni:

(*) $$\Gamma:\quad Z^2y^2-2(YZ)yz+Y^2z^2+2Zz-Z^2=0,$$

(*) $$\Gamma:\quad Z'^2y^2-2(Y'Z')yz+Y'^2z^2+2Z'z-Z'^2=0.$$

Evidentemente queste due parabole coincidono quando i punti P e P’ dei due pani π e π' da cui proiettiamo la circonferenza C sul piano yz $(x=0)$ hanno la stessa ordinata e la stessa quota, ossia quando si ha:

(*) $\quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad X = 1$ e $X' = -1$.

In altre parole, le due parabole coincidono quando i vertici P e P' dei due coni che proiettano la circonferenza C sul piano yz sono gli estremi di un segmento PP' complanare e parallelo all'asse x ed essi appartengono rispettivamente ai piani π e π' (vedi fig. 4).

Lo studio del sistema di parabole

(*) $$(ay - bz)^2 + 2az - a^2 = 0$$

al variare dei parametri a e b, porta a concludere che al sistema stesso appartiene la parabola degenere $z^2 = 0$, che si ottiene ponendo $a = 0$ e $b \neq 0$.

Tale conica si ottiene, al limite, scegliendo il vertice P sulla retta di intersezione del piano xy con il piano π o π'.

PROBLEMA 3 B (Autunno 1953, 2° app. ; Dispense ORUR, pg. 59)

Siano dati nello spazio: la conica Γ di equazioni

(1) $$y(z-1) = z^2, \quad x = 0,$$

e la retta r (2) $\quad x_2 = x_4 = 0 \quad$ (retta impropria del piano xz).

I) Si trovi l'equazione della proiettività fra la conica Γ e la retta r nella quale ai punti di Γ (si usino coordinate omogenee)

(a) $$(0,0,0,1), \quad (0,1,0,0), \quad (0,1,1,0)$$

corrispondano ordinatamente i punti di r

(b) $$(1,0,0,0), \quad (1,0,1,0), \quad (0,0,1,0)$$

(Per stabilire una ascissa proiettiva su Γ si consiglia di riferire i suoi punti alle rette di un fascio che abbia centro in un punto della conica stessa). Ciò fatto, si scriva l'equazione della superficie rigata costituita dalle rette che uniscono punti corrispondenti tra la conica Γ e la retta r nella suddetta proiettività.

II) Si trovino i punti doppi della F^3 e si dimostri che essa ha una retta doppia d.

<u>Soluzione</u>.
I) La Γ è un'iperbole tangente nel punto O(0,0) all'asse z. Essa ha il centro C di coordinate $y = 2,\ z = 1$, quindi C(2,1).
Gli asintoti sono le rette $z = 1$, e $z = y - 1$.

Intersechiamo l'iperbole con la retta $z = k$, parallela all'asintoto orizzontale:

(3) $$\begin{cases} z^2 - yz + y = 0, \quad x = 0 \\ z = k\ . \end{cases}$$ Si ricava

(*) $k^2 = yk - y$, da cui (4) $y = \dfrac{k^2}{k-1}$.

Si ottiene il punto P di coordinate:

(*) $x = 0$, $y = \dfrac{k^2}{k-1}$, $z = k$; quindi $P\left(0, \dfrac{k^2}{k-1}, k\right)$.

In coordinate omogenee possiamo scrivere il punto P in tre modi diversi, che ci daranno giovamento:

(4) $$P\left(0, \frac{k^2}{k-1}, k, 1\right), \rightarrow P(0; k^2; k^2 - k; k - 1), \rightarrow P\left(0; 1; 1 - \frac{1}{k}; \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Dalle (4) si vede che:

- Per $k = 0$ si ha il punto (0,0,0,1);
- per $k = 1$ si ha il punto (0,1,0,0);
- per $k = \infty$ si ha il punto (0,1,1,0).

Consideriamo ora la retta r: $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ (retta impropria del piano xz).
Per le coordinate dei punti della retta possiamo scrivere:

(*) $x_1 = u$, $x_2 = 0$, $x_3 = v$, $x_4 = 0$; quindi

(5) $$(u, 0, v, 0) = (1, 0, \lambda, 0) = (\frac{1}{\lambda}, 0, 1, 0)\ ,$$ ove $\lambda = \dfrac{v}{u}$.

- Per $\lambda = 0$ si ha il punto (1,0,0,0);
- per $\lambda = 1$ si ha il punto (1,0,1,0);
- per $\lambda = \infty$ si ha il punto (0,0,1,0).

La proiettività tra i punti della conica Γ e i punti della retta impropria r è data dall'eguaglianza di birapporti

(6) $$(0,1,\infty,k)=(0,1,\infty,\lambda)\,.$$

Dalla (6) si ottiene che l'equazione della proiettività si riduce alla formula:

(7) $$k=\lambda\,.$$

I punti corrispondenti nella proiettività hanno quindi le coordinate

(8) $$P\left(0;\frac{k^2}{k-1};k;1\right)\qquad P'_\infty(1,0,k,0)\,.$$

I parametri direttori della retta che proiettano il punto P'_∞ sono:

(9) $$\ell=1,\quad m=0,\quad n=k\,.$$

La retta che congiunge i punti corrispondenti P e P'_∞ ha le equazioni:

(*) $$\frac{x-0}{1}=\frac{y-\frac{k^2}{k-1}}{0}=\frac{z-k}{k},$$ ossia

(10) $$x=\frac{z-k}{k},$$ e (11) $$y=\frac{k^2}{k-1}\,.$$

Eliminiamo il parametro k fra le due equazioni. Dalla (10) si ha:

(*) $$kx=z-k,\qquad kx+k=z,$$ e quindi:

(12) $$k=\frac{z}{x+1}\,.$$

Dalla (11) si ha:(13) $$(k-1)y=k^2\,.$$

Sostituendo nella (13) il valore di k dato dalla (12) si ha:

(*) $$\left(\frac{z}{x+1}-1\right)y=\frac{z^2}{(x+1)^2},\quad\rightarrow\quad\frac{y(z-k-1)}{\cancel{x+1}}=\frac{z^2}{(x+1)^{\cancel{2}}},$$

(*) $$(yx+y)\cdot(z-x-1)=z^2,$$

(*) $$xyz-x^2y-xy+yz-xy-y=z^2,$$ e quindi

(14) $$x^2y - xyz + z^2 + 2xy - yz + y = 0\,.$$

La S è una superficie del 3^o ordine che indicheremo con il simbolo F^3.

Passando a coordinate omogenee si ha:

(*) $$\frac{x_1^2 x_2}{x_4^3} - \frac{x_1 x_2 x_3}{x_4^3} + \frac{x_3^2}{x_4^2} + 2\frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} - \frac{x_2}{x_4}\frac{x_3}{x_4} + \frac{x_2}{x_4} = 0\,,$$

(15) $$x_1^2 x_2 - x_1 x_2 x_3 + x_3^2 x_4 + 2x_1 x_2 x_4 - x_2 x_3 x_4 + x_2 x_4^2 = 0\,.$$

Si verifica subito che il punto $(\pm 1, 0, 0, 1)$ soddisfa l'equazione (15) e quindi appartiene alla superficie S.

II) I punti doppi della superficie S sono le soluzioni del sistema che si ottiene eguagliando a zero la funzione $f(x,y,z) = x^2y - xyz + z^2 + 2xy - yz + y$ e le sue derivate parziali prime. Risolviamo quindi il sistema:

(16) $$\begin{cases} x^2y - xyz + z^2 + 2xy - yz + y = 0, \quad 2xy - yz + 2y = 0, \\ \quad x^2 - yz + 2x - z + 1 = 0, \qquad\quad -xy + 2z - y = 0\ . \end{cases}$$

Dalla 2^a e dalla 4^a equazione del sistema (16) si ha:

(17) $$\begin{cases} +2xy - yz + 2y = 0 \\ -2xy + 4z - 2y = 0\ , \end{cases} \quad \text{da cui} \quad 4z - yz = 0\,.$$

Il sistema (17) ha le soluzioni $z = 0$ e $y = 4$.

Dalla radice $z = 0$ si ha $2xy + 2y = 0$, da cui $y = 0$.
Sostituendo nella 3^a equazione del sistema si ha $(x+1)^2 = 0$ e quindi $x = -1$.
La superficie ha quindi il punto doppio $(-1, 0, 0)$.

Prendendo $y = 4$, la 2^a e la 4^a equazione del sistema (16) ci danno:

(18) $$\begin{cases} x^2 - 4z + 2x - z + 1 = 0 \\ -4x + 2z - 4 = 0 \ . \end{cases}$$

Dalla 2^a equazione del sistema (18) si ricava $z = 2x + 2$, e sostituendo nella 1^a equazione si ottiene:

(*) $$x^2 - 4(2x + 2) + 2x - 2x - 2 + 1 = 0 \,,$$

(*) $$x^2 - 8x - 9 = 0 \,, \qquad \to \quad (x - 9)(x + 1) = 0 \,.$$

Dalle radici $x = 9$ e $x = -1$ si ricavano rispettivamente i valori

(*) $$z = \left(2x + 2\right)_{x=9} = 20 \,, \qquad z = \left(2x + 2\right)_{x=-1} = 0 \,.$$

Abbiamo così altri due punti doppi, e precisamente $(-1, 4, 0)$ e $(9, 4, 20)$.

Si verifica facilmente che le coordinate dei tre punti soddisfano le quattro equazioni del sistema (16).

Vogliamo ora trovare la generatrice della superficie passante per il punto $(-1, 4, 0)$. Una generica retta s ha le equazioni:

(*) $$\begin{cases} x = \ell z + p \\ y = mz + q \ . \end{cases}$$

Per la retta che passa per il punto $(-1, 4, 0)$ si ha:

(*) $$\begin{cases} -1 = 0 + p \\ \ \ 4 = 0 + q \ . \end{cases}$$

Ne segue che la retta che passa per il punto $(-1, 4, 0)$ ha le equazioni

(19) $$\begin{cases} x = \ell z - 1 \\ y = mz + 4 \ . \end{cases}$$

Intersecando la superficie S con questa retta si ha:

(20) $$\begin{aligned} (\ell z - 1)^2 (mz + 4) - (\ell z - 1) \cdot (mz^2 + 4z) + (2\ell z - 2)(mz + 4) + \\ - (mz^2 + 4z) + mz + 4 = 0 \ . \end{aligned}$$

Ne segue:

$$(*)\qquad (mz+4)(\ell^2z^2-2\ell z+1)-m\ell z^3-4\ell z^2+\cancel{mz^2}+\cancel{4z}+z^2+$$
$$+2\ell mz^2+8\ell z-\underline{2mz}-8-\cancel{mz^2}-\cancel{4z}+\underline{mz}+4=0\ ;$$

$$(*)\qquad (mz+4)(\ell^2z^2-2\ell z+1)-m\ell z^3-4\ell z^2+z^2+$$
$$+2\ell mz^2+8\ell z-mz-4=0\ ;$$

$$(*)\qquad \ell^2mz^3-\cancel{2\ell mz^2}+\cancel{mz}+4\ell^2z^2-\cancel{8\ell z}+4-m\ell z^3-4\ell z^2+$$
$$+z^2+\cancel{2\ell mz^2}+\cancel{8\ell z}-\cancel{mz}-4=0\ ;$$

$$(*)\qquad \ell^2mz^3-m\ell z^3+4\ell^2z^2-4\ell z^2+z^2=0\ ;\qquad \text{quindi}$$

$$(*)\qquad \ell m(\ell-1)z^3+(4\ell^2-4\ell+1)z^2=0;\qquad \text{infine}$$

$$(21)\qquad \ell m(\ell-1)z^3+(2\ell-1)^2z^2=0\,.$$

La retta $x=\ell z-1$, $y=mz+4$ giace sulla superficie S se l'equazione (21) è soddisfatta per qualsiasi valore di z. Affinché ciò si verifichi deve essere

$$(22)\qquad \begin{cases}\ell m(\ell-1)=0\\ (2\ell-1)^2=0\ .\end{cases}$$

La prima equazione di questo sistema ha le radici $\ell=1$, $\ell=0$, $m=0$. Le prime due radici si scartano poiché esse non verificano la seconda equazione. Resta la sola soluzione $m=0$, $\ell=\dfrac{1}{2}$.

Si conclude che per il punto $P(-1,4,0)$ passa una sola generatrice, come è logico che sia, e che essa ha le equazioni:

$$(23)\qquad \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}z-1\\ y=4\ ,\end{cases}\qquad \text{o anche}\qquad (24)\qquad \begin{cases}z=2x+2\\ y=4\ .\end{cases}$$

Si verifica facilmente che le equazioni (24) soddisfano l'equazione

(14) $$x^2y - xyz + z^2 + 2xy - yz + y = 0$$

della superficie rigata S.

Si verifica con la stessa facilità che l'iperbole Γ e la retta impropria $x_2 = x_4 = 0$ del piano xz sono due direttrici della superficie stessa.

PROBLEMA 4 B (Esami Febbraio 1954; Dispense ORUR, pg. 55)

Nello spazio riferito ad un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ si consideri la cubica gobba C^3 di equazioni parametriche

(1) $$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3$$

e il cilindro quadrico Q che ha le generatrici parallele all'asse z e che contiene la cubica C^3.

Detta n la normale al cilindro Q in un punto generico P della cubica, si scriva l'equazione della superficie rigata S descritta dalla normale n al variare di P su C^3. Si troverà che S è una superficie algebrica F^4 del 4^o ordine.
Dimostrare che la retta r di equazioni

(2) $$x - 2z = 0, \qquad 1 - 2y = 0$$

è tripla per la F^4.
Si verifichi che la superficie S ha come direttrici la cubica gobba C^3, la retta r di cui sopra e la retta $x_3 = 0,\ x_4 = 0$ (retta impropria del piano xy).

Soluzione
Dalle prime due equazioni del sistema (1) si vede che il cilindro che ha le generatrici parallele all'asse z e che contiene la cubica C^3 ha l'equazione

(3) $$x^2 - y = 0.$$

Il piano tangente in un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ di questo è:

(*) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P (z - z_o) = 0,$$

ove $\qquad f_x = 2x\,, \qquad f_y = -1\,, \qquad f_z = 0\,.$

Poiché il punto P appartiene alla cubica gobba si ha $P(t, t^2, t^3)$ e l'equazione del piano è:

(*) $$2t(x-t) - 1(y-t^2) = 0\,, \qquad \text{ossia}$$

(4) $$2tx - y - t^2 = 0\,.$$

La normale n a questo piano ha i parametri direttori

(*) $$\ell = 2t\,, \qquad m = -1\,, \qquad n = 0\,.$$

In particolare, la normale n nel punto $P(t, t^2, t^3)$ ha l'equazione:

(5) $$\frac{x-t}{2t} = \frac{y-t^2}{-1} = \frac{z-t^3}{0}\,.$$

Dalla (5) si ricavano le due equazioni

(6) $z = t^3\,,$ $\qquad$ (7) $x - t = 2t(t^2 - y)\,.$

Dalle (7) si ricava:

(*) $$x - t = 2t^3 - 2ty\,;$$

poiché $t^3 = z$ ne segue $x - t = 2z - 2ty\,,$ $x - 2z = t - 2ty$ e quindi

(*) $$t = \frac{x-2z}{1-2y}\,.$$

Sostituendo nella (6) si trova che la superficie S ha l'equazione

(*) $$z = \frac{(x-2z)^2}{(1-2y)^3}\,, \qquad \text{ossia}$$

(8) $$z \cdot (1-2y)^3 = (x-2z)^3\,.$$

Si vede così che la S è una superficie del 4^o ordine che indicheremo con il simbolo F^4. Essa è una rigata perché è costituita dalle ∞^1 rette che si appoggiano alla cubica gobba e che sono normali (ma non incidenti) all'asse z.

Dalla (8) si vede, senza bisogno di calcoli, che la retta

(*) $$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 1 - 2y = 0 \end{cases}$$

è una retta tripla e una generatrice della superficie rigata F_4.

Ponendo $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ nella (8) si ha:

(*) $$(1 - 2t^2)^3 \cdot t^3 = (t - 2t^3)^3 ,$$ da cui

(*) $$(1 - 2t^2)^3 \cdot t^3 = t^3(1 - 2t^2)^3 .$$

Questa identità mostra che la cubica gobba è una direttrice della superficie S.

Scrivendo la (8) in coordinate omogenee si ha:

(9) $$(x_4 - 2x_2)^3 \cdot x_3 = (x_1 - 2x_3)^3 x_4 .$$

La (9) è soddisfatta per $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Ciò vuol dire che la retta impropria del piano xy è una direttrice della superficie F_4.

PROBLEMA 5 B (Estate 1956, 2° app. ; Dispense ORUR, pg. 66)

I) Scrivere l'equazione della superficie rigata F^4 (del 4° ordine) avente le direttrici D_1, D_2, D_3 seguenti:

D_1) l'asse delle x $(y = 0,\ z = 0)$;

D_2) la parabola $x = y,\ z = y^2$;

D_3) la conica all'infinito del cono rotondo $z^2 = 2xy$.

II) Verificare che i punti multipli costituiscono una retta tripla della superficie.

III) Si determini la generatrice g per il punto (1,1,1) e si riconosca che la corrispondenza che associa ad ogni punto P di g il piano ivi tangente alla superficie F^4 è una proiettività, deducendo da ciò che la generatrice g non è a carattere sviluppabile.

Soluzione

Quesito I) Sia N(h,0,0) un punto qualsiasi della direttrice D_1. I coni di vertice N che proiettano le direttrici D_1 e D_3 hanno in comune un certo numero di rette. Al variare di N su D_2 e D_3 queste rette descrivono la rigata che ha per direttrici le tre curve date.

Ricordiamo che la retta passante per due punti qualsiasi $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ha le equazioni

(*)
$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}\ .$$

Premettiamo che la conica C_∞ del cono $z^2 = 2xy$ ha le equazioni omogenee

$$x_3^2 = 2x_1x_2, \quad x_4 = 0$$

e le equazioni parametriche

(*)
$$x_1 = k^2, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 2k, \qquad x_4 = 0\ .$$

Pertanto possiamo chiamare:

- N(h,0,0) un punto dell'asse x $(y = 0,\ z = 0)$;
- $P(t, t, t^2)$ un punto della parabola $x = y,\ z = y^2$;
- $Q_\infty(k^2, 2, 2k, 0)$ un punto della conica C_∞: $x_3^2 = 2x_1x_2,\ x_4 = 0$.

I parametri direttori della retta che dall'origine O(0,0,0) proiettano il punto improprio Q_∞ coincidono con i numeri k^2, 2, 2k.

Allora

retta NP $\qquad \dfrac{x-h}{t-h}=\dfrac{y-0}{t-0}=\dfrac{z-0}{t^2-0}$;

retta NQ_∞ $\qquad \dfrac{x-h}{k^2}=\dfrac{y-0}{2}=\dfrac{z-0}{2k}$.

Mettiamo a sistema i due coni:

(A)
$$\begin{cases} \dfrac{x-h}{t-h}=\dfrac{y}{t}=\dfrac{z}{t^2} \\ \dfrac{x-h}{k^2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2k} \end{cases} .$$

Spezzando, si ha il sistema

(B)
$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{x-h}{t-h}=\dfrac{y}{t}, \qquad (2) \quad \dfrac{y}{t}=\dfrac{z}{t^2} \\ (3) \quad \dfrac{x-h}{k^2}=\dfrac{y}{2}, \qquad (4) \quad \dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2k} \end{cases} .$$

Dalla (2) si ha $\qquad z=yt$;
dalla (4) si ha $\qquad z=ky$.

Da esse si ricava $\qquad$ (5) $\qquad k=t=\dfrac{z}{y}$.

Dalla (1), con successivi passaggi, si ha:

(*) $\qquad t(x-h)=y(t-h)\,, \quad \rightarrow \quad tx-th=yt-yh\,,$

(*) $\qquad yh-th=yt-tx\,, \quad \rightarrow \quad hy-h\dfrac{z}{y}=t(y-x)\,,$

(*) $\qquad \dfrac{hy^2-hz}{\cancel{y}}=\dfrac{z(y-x)}{\cancel{y}}$. $\qquad$ Si ricava

(6) $$h=\frac{z(y-x)}{y^2-z} .$$

Dalla (3) si ha $\qquad 2x-2h=yk^2$.

Sostituendo in questa le espressioni di h e k date dalle relazioni (5), (6) si ha:

(*) $$2x-\frac{2z(y-x)}{y^2-z}=\cancel{y}\,\frac{z^2}{y^{\cancel{2}}}.$$

Liberando dai denominatori si ha, con successivi passaggi:

(*) $$2xy(y^2-z)-2zy(y-x)=z^2(y^2-z), \qquad \text{da cui}$$

(*) $$2xy^3-\cancel{2xyz}-2zy^2+\cancel{2xyz}=z^2y^2-z^3, \qquad \text{e infine}$$

(7) $$z^2y^2-2xy^3+2zy^2-z^3=0.$$

La (7) è una superficie del 4^o ordine, che indicheremo con il simbolo F^4; essa è una superficie rigata perché è il luogo di ∞^1 rette che si appoggiano alle tre direttrici date.
L'origine O(0,0,0) delle coordinate è un punto triplo e il cono delle tangenti principali in tal punto ha l'equazione:

(*) $$z(2y^2-z^2)=0, \qquad \text{ossia}$$

(*) $$z(\sqrt{2}y-z)(\sqrt{2}y+z)=0;$$

l'origine O è quindi un punto triplanare.

Quesito II) Indichiamo con $f(x,y,z)$ la funzione che compare al primo membro dell'equazione (7), quindi:

(*) $$f(x,y,z)=z^2y^2-2xy^3+2zy^2-z^3.$$

I punti doppi della superficie sono dati dalle soluzioni del sistema che si ottiene eguagliando a zero la funzione f(x,y,z) e le sue derivate parziali prime. Questo sistema è:

(C) $$\begin{cases} z^2y^2-2xy^3+2zy^2-z^3=0, & -2y^3=0 \\ 2z^2y-6xy^2+4zy=0, & 2zy^2+2y^2-3z^2=0 \end{cases}.$$

Si vede subito che esso ha la soluzione

(8) $$y=0, \qquad z=0, \qquad x=h \qquad \text{(con h variabile)},$$

quindi l'asse x è per la superficie una retta che risulta almeno doppia.
Vediamo se esso può essere una retta tripla. In tal caso, se intersechiamo la superficie con un fascio di piani $y = \lambda z$ passanti per l'asse x dobbiamo avere una soluzione tripla $y = z = 0$. Consideriamo il sistema

(D) $$\begin{cases} z^2y^2 - 2xy^3 + 2zy^2 - z^3 = 0 \\ y = \lambda z \ . \end{cases}$$ Si ha:

(*) $$\lambda^2 z^4 - 2x\lambda^3 z^3 + 2\lambda^2 z^3 - z^3 = 0 \,,$$ da cui

(9) $$z^3(\lambda^2 z - 2\lambda^3 x + 2\lambda^2 - 1) = 0 \,.$$

Si conclude che il sistema ha la soluzione tripla $y = z = 0$ e $x = h$, quindi l'asse x è una retta tripla per la superficie F^4.

Quesito III) Osserviamo ora che la superficie S passa per il punto $B(1,1,1)$: <u>vogliamo trovare la generatrice passante per tale punto</u>.
A tale scopo imponiamo alla retta

(*) $$\begin{cases} x = \ell z + p \\ y = mz + q \end{cases}$$

di passare per il punto B. Subito si ottiene

(*) $$p = 1 - \ell \,, \qquad q = 1 - m \,,$$

e quindi le equazioni della retta diventano:

(10) $$\begin{cases} x = \ell z - \ell + 1 \\ y = mz - m + 1 \ . \end{cases}$$

Imponiamo ora alla retta (10) di appartenere alla superficie S, cioè che le espressioni di x e y soddisfino l'equazione

(*) $$z^2y^2 - 2xy^3 + 2zy^2 - z^3 = 0 \,.$$

Procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$z^2(mz - m + 1)^2 - (2\ell z - 2\ell + 2)(mz - m + 1)^3 + 2z(mz - m + 1)^2 - z^3 = 0 \,.$$

Con l'aiuto di un computer si trova:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&m^2(1-2\ell m)z^4+[2\ell m^2(4m-3)-2m^3+2m-1]z^3+\\
&-[6\ell m(2m^2-3m+1)-6m^3+9m^2-2m-1]z^2+\\
&+2[\ell(4m^3-9m^2+6m-1)+(1-m)(3m^2-4m+1)]+\\
&\qquad +2(1-m)(\ell-1)(m^2-2m+1)=0\ .
\end{aligned}
$$

Per $\ell=1$, $m=1/2$ alcuni coefficienti dell'equazione si annullano ed altri no; mentre per $\ell=1/2$, $m=1$ tutti i coefficienti si annullano, quindi l'equazione è identicamente soddisfatta.
Ne segue che la generatrice passante per il punto $B(1,1,1)$ ha le equazioni

$$
(13)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2} \\ y=z\ , \end{cases} \qquad \text{o se si vuole} \quad (14)\qquad \begin{cases} z=2x-1 \\ y=z\ . \end{cases}
$$

Notiamo ora che per $z=-2,-1,1,2$ si hanno i punti $D\left(-\dfrac{1}{2},-2,-2\right)$,

$A(0,-1,-1)$, $B(1,1,1)$, $C\left(\dfrac{3}{2},2,2\right)$.

Troviamo i piani tangenti alla superficie S in questi punti e ricordiamo che il piano tangente in un generico punto $P(x_o,y_o,z_o)$ ha l'equazione

$$
(*)\qquad f_x(P)(x-x_o)+f_y(P)(y-y_o)+f_z(P)(z-z_o)=0\ .
$$

Scriviamo la funzione f(x,y,z) e le sue derivate parziali prime:

$$
(*)\qquad
\begin{aligned}
&f(x,y,z)=y^2z^2-2xy^3+2zy^2-z^3, \qquad f_x=-2y^3\\
&f_y=2yz^2-6xy^2+4zy, \qquad f_z=2zy^2+2y^2-3z^2\ .
\end{aligned}
$$

Possiamo ora trovare le equazioni $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ dei piani tangenti nei punti A,B,C,D.

Punto $A(0,-1,-1)$; $\quad f_x(A)=2$, $\ f_y(A)=2$, $\ f_z(A)=-3$,

$$
\begin{aligned}
&2(x-0)+2(y+1)-3(z+1)=0\,,\\
\alpha:\quad &2x+2y-3z-1=0\,.
\end{aligned}
$$

Punto $B(1,1,1)$; $\quad f_x(B)=-2$, $\ f_y(B)=0$, $\ f_z(B)=1$,

$$
\begin{aligned}
&-2(x-1)+0+1(z-1)=0\,,\\
\beta:\quad &-2x+z+1=0\,.
\end{aligned}
$$

Punto $C(\frac{3}{2},2,2)$ $\quad f_x(C)=-16,\quad f_y(C)=16-36+16=-4,$

$$f_z(C)=16+8-12=12\ ,$$
$$-16(x-3/2)-4(y-2)+12(z-2)=0\,,$$
$$-4(x-3/2)-(y-2)+3(z-2)=0\,,$$
$$\gamma:\qquad -4x-y+3z+2=0\ .$$

Punto $D(-\frac{1}{2},-2,-2)$ $\quad f_x(D)=+16,$

$$f_y(D)=-16+\frac{6}{2}\cdot 4+16=12$$
$$f_z(D)=-4\cdot 4+2\cdot 4-12=-8-12=-20\ ,$$
$$16(x+1/2)+12(y+2)-20(z+2)=0\,,$$
$$4(x+1/2)+3(y+2)-5(z+2)=0\,,$$
$$\delta:\qquad 4x+3y-5z-2=0\ .$$

Si può verificare che questi piani $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ passano per tutti e quattro i punti A,B,C,D ottenuti dalla generatrice g $\begin{cases} z=2x-1 \\ y=z\ . \end{cases}$

Consideriamo ora il fascio di piani avente per asse la generatrice g:

(15) $\qquad \lambda(2x-z-1)+\mu(y-z)=0,\quad$ ove si pone $\frac{\mu}{\lambda}=k\ .$

Per particolari valori di $\lambda,\ \mu$, da questo fascio si ricavano i piani tangenti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ che abbiamo trovati. Dimostrazione.

(a) Per $\lambda=1,\ \mu=2$, cioè per $k=2$, si ha il piano α; infatti si ha

(*) $\qquad 2x-z-1+2y-2z=0,\quad$ ossia

$$\alpha:\qquad 2x+2y-3z-1=0\ .$$

(b) Per $\lambda=-1,\ \mu=0$, cioè per $k=0$, si ha il piano β; infatti si ha

(*) $\qquad -(2x-z-1)-0=0,\quad$ ossia

$$\beta:\qquad -2x+z+1=0\ .$$

(c) Per $\lambda=-2,\ \mu=-1$, cioè per $k=\dfrac{\mu}{\lambda}=2$, si ha il piano γ; infatti si ha

(*) $$-2(2x-z-1)-1(y-z)=0, \qquad \text{ossia}$$
$$\gamma: \qquad -4x-y+3z+2=0\ .$$

Come si vede, esiste una corrispondenza biunivoca algebrica tra i valori di z e i corrispondenti valori del parametro k e quindi si ha una proiettività tra i punti della direttrice g e i piani del fascio tangenti alla quadrica nei punti stessi.
Prese due terne di valori corrispondenti, l'equazione della proiettività si ottiene dall'eguaglianza di birapporti

(16) $$(-1,1,2,z)=(2,0,\frac{1}{2},k). \qquad \text{Ne segue}$$

(*) $$\frac{(-1,1,2)}{(-1,1,z)}=\frac{(2,0,1/2)}{(2,0,k)},$$

(*) $$\frac{2+1}{2-1}:\frac{z+1}{z-1}=\frac{1/2-2}{1/2-0},$$

(*) $$\frac{3(z-1)}{z+1}=(-\frac{3}{2})\cdot 2\cdot\frac{k}{k-2},$$

(*) $$\frac{\cancel{3}\cdot(z-1)}{z+1}=\frac{\cancel{3}k}{2-k}.$$

Procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$(z-1)\cdot(2-k)=k(z+1),$$

(*) $$2z-kz-2+\cancel{k}=kz+\cancel{k}, \qquad \text{da cui}$$

(*) $$2kz-2z+2=0, \qquad \text{semplificando si ha}$$

(17) $$kz-z+1=0.$$

La (17) è l'equazione della proiettività tra la generatrice g e il fascio di piani aventi per asse la generatrice stessa.
In altre parole, è verificato il teorema di Chasles: " Mentre il punto P descrive una generatrice della nostra rigata, il piano tangente in tal punto alla superficie varia nel fascio di piani di asse g, corrispondendo proiettivamente a P. Ne segue che la generatrice non è a carattere sviluppabile; solo quando il piano tangente

rimane fisso al variare del punto P sulla generatrice, questa è a carattere sviluppabile".

Vogliamo verificare l'esattezza della formula (17) della proiettività.
Per $z=-2$ le equazioni (14) della generatrice g ci danno (già lo sappiamo) il punto $D(-1/2,-2,-2)$. Abbiamo visto con i metodi dell'Analisi Matematica che il piano tangente in tal punto ha l'equazione

$$(*) \qquad 4x+3y-5z-2=0\,.$$

Facciamo vedere che questo risultato si può ricavare anche attraverso l'equazione della proiettività.
Infatti, dalla (17) si ricava che il valore di k corrispondente a $z=-2$ è:

$$(*) \qquad -2k+2+1=0\,, \quad \text{da cui si ha} \quad k=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{3}{2}\,.$$

Possiamo porre $\mu=3$, $\lambda=2$, dal momento che essi sono determinati a meno di un fattore non nullo.
Sostituendo questi valori di λ, μ nell'equazione (15) del fascio di piani, si ricava il piano δ tangente alla superficie nel punto D. La sua equazione è:

$$(*) \qquad 2(2x-z-1)+3(y-z)=0\,, \qquad \text{da cui}$$

$$(18) \qquad 4x+3y-5z-2=0\,.$$

Questa equazione del piano δ coincide perfettamente con quella ricavata con i metodi dell'Analisi Matematica. Ciò ci conferma che l'equazione della proiettività è esatta.

Quesito IV) Intersechiamo la superficie F^4 con il piano β tangente nel punto B.
La curva di intersezione è data dal sistema:

$$(19) \qquad \begin{cases} y^2z^2-2xy^3+2zy^2-z^3=0 \\ z=2x-1\,. \end{cases}$$

La proiezione sul piano xy di questa curva è una curva del 4° ordine. Essa è una curva riducibile poiché si riduce al prodotto di due curve:

$$(*) \qquad (y-2x+1)\cdot(4x^2-2xy^2+2xy-4x-y+1)=0\,.$$

PROBLEMA 6 B (Cilindro circolare retto di direttrice data)

Trovare l'equazione del cilindro con le generatrici perpendicolari al piano $2x+y+z=0$ e passante per la circonferenza di equazioni

(1) $$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{e} \quad 2x+y+z=0 .$$

Le (1) rappresentano una circonferenza reale perché il piano $2x+y+z=0$ passa per il centro della sfera. Il cilindro è circolare perché le generatrici sono perpendicolari al piano della circonferenza stessa (F. Conforto, Esercizi di Geometria Analitica, pag. 305).

Daremo due diverse soluzioni del problema: la prima segue un noto procedimento spiegato in teoria; la seconda ha un carattere più intuitivo.

Prima soluzione.
Dal piano sezione della sfera si vede che le generatrici del cilindro hanno i parametri direttori:
(2) $$\ell=2, \qquad m=1, \qquad n=1 .$$

Detto $P(x_o,y_o,z_o)$ un punto della circonferenza, le sue coordinate debbono soddisfare il sistema:

(A) $$\begin{cases} x_o^2+y_o^2+z_o^2=1, \qquad 2x_o+y_o+z_o=0 \\ \dfrac{x-x_o}{2}=\dfrac{y-y_o}{1}=\dfrac{z-z_o}{1} \end{cases} .$$

Dalle ultime tre equazioni si ricava il sistema:

(B) $$\begin{cases} x-x_o=2y-2y_o \\ y-y_o=z-z_o \\ 2x_0+y_o+z_o=0 \end{cases} \quad \text{e ordinando} \quad (3) \quad \begin{cases} x_o-2y_o=x-2y \\ y_o-z_o=y-z \\ 2x_o+y_o+z_o=0 . \end{cases}$$

Dal sistema (3) possiamo ricavare x_o,y_o,z_o in funzione di x,y,z. Procedendo nei calcoli si trova:

(4) $$x_o=\frac{x-z-y}{3}, \qquad y_o=\frac{5y-2x-z}{6}, \qquad z_o=\frac{5z-2x-y}{6} .$$

Sostituendo le espressioni di x_o,y_o,z_o nella prima relazione del sistema (A) si ottiene un'equazione nelle variabili x,y,z. Essa rappresenta l'equazione cartesiana del cilindro. Si ha:

(*) $$\frac{(x-y-x)^2}{9}+\frac{(5y-2x-z)^2}{36}+\frac{(5z-2x-y)^2}{36}=1\ ,$$

(*) $$\begin{aligned}&4x^2+4y^2+4z^2-8xy-8xz+8yz+\\&+25y^2+4x^2+z^2-20xy-10yz+4xz+\\&+25z^2+4x^2+y^2-20xz-10yz+4xy=36\ ,\end{aligned}$$

(*) $$12x^2+30y^2+30z^2-24xy-24xz-12yz=36\,.$$

Semplificando, si ottiene che l'equazione del cilindro proposto è:

(*) $$2x^2+5y^2+5z^2-4xy-4xz-2xy-6=0\,.$$

Seconda soluzione

La direttrice del cilindro ha le equazioni

(1) $$x^2+y^2+z^2=1, \qquad (2)\quad 2x+y+z=0\,.$$

Le generatrici del cilindro sono perpendicolari al piano $2x+y+z=0$ e una generica retta perpendicolare a tale piano ha le equazioni:

(3) $$x=2z+p\,, \qquad y=z+q\,,$$
ove p e q sono parametri indeterminati.

Ricerchiamo la relazione che deve intercedere fra p e q affinché la retta (3) sia una generatrice del cilindro richiesto.
A tale scopo occorre che la retta si appoggi alla circonferenza (1), ossia che il punto comune alla retta (3) e al piano $2x+y+z=0$ appartenga alla sfera $x^2+y^2+z^2=1$. Consideriamo il sistema

(A) $$\begin{cases}(2) \qquad 2x+y+z=0\\(3) \quad x=2z+p, \qquad y=z+q\ .\end{cases}$$

Sostituendo le equazioni (3) nella (2) possiamo ricavare z. Si ha:

(*) $$4z+2p+z+q+z=0\,, \quad \to \quad 6z+2p+q=0\,, \quad \text{da cui}$$

(4) $$z=-\frac{2p+q}{6}\,.$$

Sostituendo nelle espressioni di x e y date dalla (3) si ottiene:

$$(*)\qquad x=-\frac{2(2p+q)}{6}+p\,,\qquad x=\frac{-2p-q+3p}{3}\,,\qquad x=\frac{p-q}{3}\;;$$

$$(*)\qquad y=-\frac{2p+q}{6}+q\,,\qquad y=\frac{5q-2p}{6}\;.$$

Per le coordinate del punto P possiamo quindi scrivere:

$$(5)\qquad P\left(\frac{p-q}{3},\frac{5q-2p}{6},-\frac{2p+q}{6}\right)\;.$$

Imponiamo che tale punto stia sulla sfera. Si ottiene in successione:

$$(*)\qquad \frac{(p-q)^2}{9}+\frac{(5q-2p)^2}{36}+\frac{(2p+q)^2}{36}=1\,,$$

$$(*)\qquad \underline{4p^2}+4q^2-8pq+25q^2+\underline{4p^2}-20pq+\underline{4p^2}+q^2+4pq=36\,,$$

$$(*)\qquad 12p^2+30q^2-24pq=36\;,\qquad \text{e quindi}$$

$$(6)\qquad 2p^2+5q^2-4pq=6\,.$$

Poiché $p=x-2z\,,\quad q=y-z$, sostituendo si ha una relazione tra le variabili x,y,z. Essa rappresenta l'equazione cartesiana del cilindro richiesto:

$$(7)\qquad 2(x-2z)^2+5(y-z)^2-4(x-2z)(y-z)-6=0\,.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$(8)\qquad 2x^2+5y^2+5z^2-4xy-4xz-2yz-6=0\,.$$

Il risultato coincide con quello trovato con il primo procedimento.

Poiché il cilindro trovato è, per costruzione, un cilindro circolare, la sua conica all'infinito C_∞ deve risultare spezzata in due rette complesse coniugate. Infatti questa conica, sul piano improprio $x_4=0$, ha l'equazione:

$$(9)\qquad 2(x-2z)^2-4(x-2z)(y-z)+5(y-z)^2=0\,.$$

Risolvendo rispetto a $(x-2z)$ si ha:

(*) $$x-2z=\left[2(y-z)\pm\sqrt{4(y-z)^2-10(y-z)^2}\right]:2 \ ,$$

(*) $$2(x-2z)=2(y-z)\pm i\sqrt{6}\cdot(y-z)\,, \qquad \text{infine}$$

(10) $$2(y-2z)=(2\pm i\sqrt{6})\cdot(y-z) \quad \text{e} \quad x_4=0\,.$$

Si trova che effettivamente, sul piano improprio, la C_∞ è spezzata in due rette complesse coniugate.

NOTA. Utilizziamo lo spazio di questa pagina per risolvere un piccolo problema sui coni.

<u>Esercizio</u>. Trovare l'equazione del cono che ha il vertice V(1,1,1) e che è tagliato dal piano improprio secondo la conica impropria

(*) $$C_\infty: \ x^2+2y^2-z^2+4xy=0\,, \qquad x_4=0\,.$$

Se ricordiamo che l'equazione di questo cono deve essere omogenea nelle variabili $x-1$, $y-1$, $z-1$ subito si trova l'equazione

(11) $$(x-1)^2+2(y-1)^2-(z-1)^2+4(x-1)(y-1)=0 \ .$$

Con la traslazione di assi di equazioni

(*) $$X=x-1\,, \qquad Y=y-1\,, \qquad Z=z-1$$

l'equazione (11) diventa:

(12) $$X^2+2Y^2-Z^2+4XY=0\,:$$

essa è l'equazione del cono che dall'origine degli assi proietta la conica C_∞.

PROBLEMA 7 B (Testo di G. Vaccaro, Le superfici, pag. 116)

Nello spazio riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche, si considerino:

- l'asse delle z, il fascio F_1 dei piani per detto asse e il fascio F_2 delle circonferenze del piano xy tangenti nell'origine all'asse delle x.

I) Si ponga fra l'asse delle z ed il fascio F_1 la proiettività che ai punti O(0,0,0), $U_3(0,0,1)$ e Z_∞ faccia corrispondere rispettivamente i piani $y=0$, $y=x$ e $x=0$. Inoltre, tra i fasci F_1 ed F_2 si ponga la proiettività che ai suddetti tre piani faccia corrispondere rispettivamente il cerchio spezzato nell'asse delle x e nella retta impropria del piano xy, il cerchio di centro (0,1,0) e quello di raggio nullo.

II) Detto P un punto variabile sull'asse delle z, α il piano corrispondente ad esso nella prima proiettività e C il cerchio corrispondente al piano α nella seconda proiettività, sia Q il punto (distinto dall'origine) secondo cui il piano α interseca la circonferenza C.
Scrivere l'equazione della superficie S (del 3° ordine) luogo della retta PQ al variare di P sull'asse z.

III) Determinare la retta doppia d di S, verificare che il generico punto di essa è doppio biplanare e determinare i piani tangenti principali.

IV) Verificare che la curva le cui equazioni, nel sistema di coordinate associato al dato, sono

(*) $\qquad x_1 = 4u^3, \qquad x_2 = 4u^2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 3u + 2u^3$

appartiene alla superficie S ed è una sua linea asintotica.

V) Dimostrare che per un punto generico della retta doppia d passa una sola generatrice della S distinta da d e dedurre da ciò che la d è l'unica direttrice rettilinea della S.

<u>Soluzione</u>
Quesito I)
Per gli elementi corrispondenti delle prime due forme geometriche (asse z e fascio F_1 di piani passanti per detto asse) si ha il seguente quadro:

(*) Punto dell'asse z	fascio F_1
$P(0,0,h,1) \equiv (0,0,1,\frac{1}{h})$	$y = mx$, o anche $ay = bx$
Per $h = 0$ si ha O(0,0,0);	Per $m = 0$ si ha il piano $y = 0$;
per $h = 1$ si ha $U_3(0,0,1)$;	per $m = 1$ si ha il piano $y = x$;
per $h = \infty$ si ha $Z_\infty(0,0,1,0)$.	Per $m = \infty$ si ha il piano $x = 0$.

L'equazione della proiettività, nella quale ai tre punti dell'asse z corrispondono rispettivamente le tre rette del fascio F_1, è data dall'eguaglianza di birapporti:

(1) $$(0,1,\infty,h)=(0,1,\infty,m).$$

Da essa subito si ricava che la proiettività è data dalla semplice equazione:

(2) $$h=m.$$

Il fascio di circonferenze del piano xy tangenti nell'origine all'asse delle x è dato dall'equazione (*) $(x-0)^2+(y-k)^2=k^2$.

In coordinate omogenee possiamo scrivere:

(4) $x_1^2+x_2^2-2kx_2x_3=0$, e ponendo $k=\mu/\lambda$ si ha

(5) $$\lambda(x_1^2+x_2^2)-2\mu x_2x_3=0.$$

Abbiamo quindi un secondo quadro:

(*) fascio F_1

$y=mx$, o $ay=bx$

Per $m=0$ si ha il piano $y=0$;

per $m=1$ si ha il piano $y=x$;

per $m=\infty$ si ha il piano $x=0$.

Fascio di circonferenze F_2

(*) $x_1^2+x_2^2-2kx_2x_3=0$, o anche $\lambda(x_1^2+x_2^2)-2\mu x_2x_3=0$.

Per $k=\infty$ ($\lambda=0$, $\mu\neq 0$) si ha la crf. degenere $x_2x_3=0$;

per $k=1$ si ha la circonferenza $x^2+y^2-2y=0$;

per $k=0$ si ha circonferenza di raggio nullo $x^2+y^2=0$.

L'equazione della proiettività, nella quale ai tre piani del fascio F_1 corrispondono rispettivamente le tre circonferenze del fascio F_2, è data dall'eguaglianza di birapporti:

(6) $(0,1,\infty,m)=(\infty,1,0,k)$, ossia

(*) $(1,0,m,\infty)=(k,0,1,\infty)$, da cui

(*) $$(1,0,m)=(k,0,1).$$

Sviluppando i rapporti semplici si ha:

(*) $$\frac{m-1}{m-0}=\frac{1-k}{1-0}, \quad \rightarrow \quad k=1-\frac{m-1}{m} .$$

La proiettività tra le due forme geometriche F_1 ed F_2 ha quindi l'equazione:

(7) $$k=\frac{1}{m} .$$

Possiamo concludere dicendo:

al punto $P(0,0,h)$ dell'asse z corrisponde il piano $\alpha \quad y=hx$ passante per esso;
e a questo piano $\alpha : y=hx$ corrisponde la circonferenza C: $x^2+y^2-\frac{2}{h}y=0$.

Quesito II)
Troviamo il punto di intersezione Q del piano α con la circonferenza C, distinto dall'origine del riferimento cartesiano. Si ha il sistema:

(8) $$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{2}{h}y=0 \\ y=hx \ , \end{cases}$$

(*) $x^2+h^2x^2-2x=0$, $\quad x(x+h^2x-2)=0$. Le soluzioni sono:

(*) $x=0$ (si scarta) e $x(1+h^2)=2$, $\quad x_Q=\frac{2}{1+h^2}$.

Le coordinate del punto Q sono quindi

(*) $$x_Q=\frac{2}{1+h^2}, \qquad y_Q=mx_Q=\frac{2h}{1+h^2}, \qquad z_Q=0 .$$

I punti corrispondenti dell'asse z e delle circonferenze del fascio F_2 sono quindi:

(9) $$P(0,0,h), \qquad Q\left(\frac{2}{1+h^2},\frac{2h}{1+h^2},0\right) .$$

Troviamo l'equazione della retta PQ:

(*) $$\frac{x-0}{\frac{2}{1+h^2}-0}=\frac{y-0}{\frac{2h}{1+h^2}-0}=\frac{z-h}{0-h}, \qquad \text{da cui}$$

(10) $$\frac{(1+h^2)x}{2}=\frac{(1+h^2)y}{2h}=\frac{h-z}{h} \; .$$

Le equazioni (10) si riducono al sistema:

(A) $$\begin{cases} \frac{1+h^2}{2}x=\frac{1+h^2}{2}\cdot\frac{y}{h} \\ \frac{(1+h^2)x}{2}=\frac{h-z}{h} \quad , \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \text{(B)} \quad \begin{cases} x=\frac{y}{h}, \quad \rightarrow \quad h=\frac{y}{x} \\ xh(1+h^2)=2(h-z) \; . \end{cases}$$

Poniamo $h=y/x$ nella 2^a equazione del sistema (B). Con successivi passaggi si ha:

(*) $$x\cdot\frac{y}{x}\cdot\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=2\left(\frac{y}{x}-z\right),$$

(*) $$y\cdot\frac{(x^2+y^2)}{x^2}=2\cdot\frac{(y-zx)}{x},$$

(*) $$y(x^2+y^2)=2x(y-zx),$$

(*) $$x^2y+y^3=2xy-2x^2z, \qquad \text{infine}$$

(11) $$f(x,y,z)=x^2y+2x^2z+y^3-2xy=0 \, .$$

La (11) è una superficie del 3^o ordine, che indicheremo con il simbolo F^3. Essa ha nell'origine $O(0,0,0)$ un punto doppio biplanare ed è razionale. La F^3 è una superficie rigata, essendo essa luogo di ∞^1 rette.

Quesito III)
<u>Come superficie rigata del 3° ordine, la S deve avere una retta direttrice, luogo di punti doppi</u>. Questi punti doppi sono le soluzioni del sistema che si ottiene eguagliando a zero la funzione $f(x,y,z)$ e le sue derivate parziali prime. Esaminiamo quindi il sistema

(C) $$\begin{cases} x^2y+2x^2z+y^3-2xy=0 \\ 2xy+4xz-2y=0, \quad x^2+3y^2-2x=0, \quad 2x^2=0 \; . \end{cases}$$

Si ha la soluzione doppia

(12) $$x = 0\,, \qquad y = 0\,, \qquad z = h\,.$$

Ciò ci dice che l'asse z è una retta doppia, e a maggior ragione una generatrice, della superficie F^3. Ricordiamo, inoltre, che la retta doppia di una superficie del 3° ordine è una sua direttrice.

Se l'asse z è una retta doppia della superficie S, intersecando la superficie con un fascio di piani $x = \lambda y$ passante per l'asse stesso si deve ottenere la soluzione doppia $x = 0,\ y = 0,\ z = h$ variabile. Ed effettivamente si ottiene:

(*) $$\lambda^2 y^3 + 2\lambda^2 y^2 z + y^3 - 2\lambda y^2 = 0\,,$$

(*) $$y^2(\lambda^2 y + 2\lambda^2 z + y - 2\lambda) = 0$$

(13) $$y^2[y(\lambda^2 + 1) + 2\lambda^2 z - 2\lambda] = 0\ .$$

Otteniamo la soluzione doppia $y = 0,\ x = 0,\ z = h$ variabile; quindi l'asse z è effettivamente una retta doppia della superficie.

Quesito IV)

Consideriamo ora la curva che, nel sistema di coordinate omogenee associato a quello dato, ha le equazioni parametriche

(14) $$x_1 = 4u^3\,, \qquad x_2 = 4u^2\,, \qquad x_3 = 1\,, \qquad x_4 = 3u + 2u^3\,,$$

e facciamo vedere che essa appartiene alla superficie S.

A tale scopo, scriviamo la superficie S in coordinate omogenee:

(15) $$x_1{}^2 x_2 + 2x_1{}^2 x_3 + x_2{}^3 - 2x_1 x_2 x_3 = 0\,,$$

e facciamo vedere che essa è identicamente soddisfatta dalle (14). Si ha:

(*) $$16u^6 \cdot 4u^2 + 2\cdot 16u^6 \cdot 1 + 64u^6 - 2\cdot 4u^3 \cdot 4u^2(3u + 2u^3) = 0\,,$$

(*) $$16u^8 + 32u^6 + 64u^6 - 32u^5 \cdot (3u + 2u^3) = 0\,,$$

(*) $$\cancel{64u^8} + 32u^6 + 64u^6 - 96u^6 - \cancel{64u^8} = 0\,,$$

(16) $$96u^6 - 96u^6 = 0\,, \qquad \text{ossia} \qquad 0 = 0\,.$$

Quesito V)
Vogliamo ora dimostrare che per un punto generico $P(0,0,h)$ della retta doppia rappresentata dall'asse z passa una sola generatrice della superficie S distinta dall'asse stesso.
A tale scopo, consideriamo una generica retta dello spazio passante per il punto P. Le sue equazioni sono:

(17) $$\begin{cases} x = \ell(z-h) \\ y = m(z-h) \end{cases} ;$$

esse si ottengono imponendo alla retta

(*) $$\begin{cases} x = \ell z + p \\ y = mz + q \end{cases}$$

di passare per il punto $P(0,0,h)$.

Imponiamo a questa retta di appartenere alla superficie

(11) $$x^2y + 2x^2z + y^3 - 2xy = 0 .$$

Con successivi passaggi si ha:

(*) $$\ell^2(z-h)^2 m(z-h) + 2\ell^2(z-h)^2 \cdot z + m^3(z-h)^3 - 2\ell m(z-h)^2 = 0 ,$$

(*) $$\ell^2 m(z-h)^3 + 2\ell^2(z-h)^2 + m^3(z-h)^3 - 2\ell m(z-h)^2 = 0 ,$$

(*) $$(z-h)^2\left[\ell^2 m(z-h) + 2\ell^2 z + m^3(z-h) - 2\ell m\right] = 0 .$$

Semplificando per $z-h$ e ordinando rispetto a z, si ha:

(*) $$\ell^2 mz - \ell^2 mh + 2\ell^2 z + m^3 z - m^3 h - 2\ell m = 0$$

(18) $$(\ell^2 m + 2\ell^2 + m^3)z - m(\ell^2 h + m^2 h + 2\ell) = 0 .$$

I valori di ℓ, m, h che rendono questa equazione soddisfatta per qualsiasi valore di z debbono essere soluzioni del sistema:

(D) $$\begin{cases} \ell^2 m + 2\ell^2 + m^3 = 0 \\ \ell^2 h + m^2 h + 2\ell = 0 . \end{cases}$$

Una soluzione dell'equazione (18), e quindi del sistema (D), è data da $\ell = 0$, $m = 0$, $z = h$ arbitrario; ma essa ci fa ritrovare la retta doppia d data dall'asse z, che già conoscevamo.

Diamo valori particolari alla coordinata h del punto P e vediamo quale è, in corrispondenza, la generatrice della superficie che si appoggia alla direttrice d.

Per $h = 1$ ed $m = -1$ le due equazioni del sistema (D) forniscono le condizioni

(*) $\ell^2 - 1 = 0$, ed $\ell^2 + 2\ell + 1 = 0$; esse danno la soluzione $\ell = -1$.

Si trova così che la generatrice passante per il punto P(0,0,1) è la retta

(21) $$x = -z + 1, \qquad y = -z + 1 .$$

Per $h = -1$, $m = -1$ le due equazioni del sistema (D) forniscono le condizioni

(*) $\ell^2 - 1 = 0$, ed $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$; esse danno la soluzione $\ell = 1$.

Si trova così che la generatrice passante per il punto $P(0, 0, -1)$ è la retta

(22) $$x = z + 1, \qquad y = -z - 1 .$$

Vogliamo trovare una soluzione generale del sistema (D), che per comodità riscriviamo:

(D) $$\begin{cases} \ell^2 m + 2\ell^2 + m^3 = 0 \\ \ell^2 h + m^2 h + 2\ell = 0 . \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava:

(*) $$\ell^2 (m + 2) = -m^3, \qquad \text{da cui} \qquad \ell^2 = \frac{-m^3}{m + 2} .$$

Poiché ℓ^2 è sempre ≥ 0 deve essere soddisfatta la disequazione:

(*) $$\frac{-m^3}{m + 2} \geq 0, \qquad \text{ossia} \qquad (19) \qquad \frac{-m}{m + 2} \geq 0 .$$

La disequazione frazionaria (19) è verificata per $-2 < m \leq 0$.

Se ora moltiplichiamo la prima equazione del sistema (D) per h e la seconda equazione per $-m$ il sistema diventa:

(D')
$$\begin{cases} \ell^2 hm + 2\ell^2 h + m^3 h = 0 \\ -\ell^2 hm - 2\ell m - m^3 h = 0 \ . \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni si ha:

(*) $$2\ell^2 h - 2\ell m = 0 \,, \quad \text{da cui} \quad (20) \quad m = h\ell \,.$$

Sostituiamo l'espressione di m nella relazione $\ell^2 h + 2\ell + m^2 h = 0$ si ha:

(*) $$\ell^2 h + 2\ell + \ell^2 h^3 = 0 \,,$$

(*) $$\ell h + 2 + \ell h^3 = 0 \,, \quad \to \quad \ell(h^3 + h) = -2 \,, \qquad \text{e quindi}$$

(21) $$\ell = \frac{-2}{h(h^2+1)} \ .$$

Sostituendo l'espressione di ℓ data dalla (21) nella (20) si ha:

(22) $$m = \frac{-2}{h^2+1} .$$

Si conclude: le generatrici della superficie S che si appoggiano alla direttrice $x = 0,\ y = 0$ nei punti $P(0,0,h)$ hanno le equazioni

(*) $$x = \ell(z-h) \,, \qquad y = m(z-h) \,,$$

ove i parametri direttori dell'equazione ridotta sono legati fra loro e al valore h dalle condizioni:

(23) $$\ell = \frac{-2}{h(h^2+1)} , \qquad m = \frac{-2}{h^2+1} , \qquad -2 < m \le 0 \,;$$

notiamo che la terza condizione delle (23) si ricava dalla seconda non appena si tenga presente che deve essere $\ell \neq 0$.

Dalle condizioni (23) si vede che, dando ad h valori arbitrari, si ricava la seguente tabella:

$$
(24)\qquad
\begin{array}{llll}
\text{Per}\quad h=1 & \text{si ha} & m=-1, & \ell=-1; \\
\text{per}\quad h=-1 & \text{si ha} & m=-1, & \ell=+1; \\
\text{per}\quad h=2 & \text{si ha} & m=-\dfrac{2}{5}, & \ell=-\dfrac{1}{5}; \\
\text{per}\quad h=-2 & \text{si ha} & m=-\dfrac{2}{5}, & \ell=+\dfrac{1}{5}; \\
\text{per}\quad h=3 & \text{si ha} & m=-\dfrac{1}{5}, & \ell=-\dfrac{1}{15}; \\
\text{per}\quad h=\dfrac{1}{2} & \text{si ha} & m=-\dfrac{8}{5}, & \ell=-\dfrac{16}{5}.
\end{array}
$$

Si ritrova così che le generatrici passanti per i punti $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ hanno le equazioni rispettive:

(25) $\qquad x=-z+1, \qquad y=-z+1;$

(26) $\qquad x=z+1, \qquad y=-z-1.$

Ringraziamo l'amico Gianni Barbato, di Latina, che ha ci ha dato una pregevole risoluzione dell'ultimo quesito di questo problema.

GEOMETRIA : Generazione proiettiva delle superfici rigate.
Nazario Magnarelli - Latina

PROBLEMA 8 B (Testo di G. Vaccaro, Le superfici, pag. 118)

Nello spazio cartesiano Oxyz si considerino le rette

(1) $$p: \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}, \qquad q: \begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases}, \qquad r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Si noti che la prima retta è parallela all'asse x del riferimento Oxyz, la seconda è parallela all'asse y e la terza coincide con l'asse z del riferimento stesso.

I) Tra le rette p, q si ponga la proiettività che ai punti della retta p A(1,0,1), $B(-1,0,1)$, C(0,0,1) fa corrispondere i punti della retta q $D(0,1,-1)$, $E(0,-1,-1)$ e Y_∞ (punto all'infinito dell'asse y).

Tra le rette p, r si ponga la proiettività che ai punti della retta p F(2,0,1), A(1,0,1) e X_∞ (punto all'infinito dell'asse x) fa corrispondere i punti della retta r $G(0,0,-2)$, $H(0,0,-1)$ e Z_∞ (punto all'infinito dell'asse z).

Siano Q, R i punti delle rette q, r che corrispondono al punto P variabile sulla retta p nelle proiettività considerate; siano poi α il piano per la retta PQ parallelo all'asse z e β il piano per il punto R perpendicolare all'asse z. Scrivere il luogo della retta g intersezione dei piani α e β.

II) Determinare i punti doppi della superficie rigata ottenuta e studiare la natura dei punti X_∞, Y_∞ appartenenti ad essa.

<u>Soluzione</u>
Quesito I)
Per gli elementi corrispondenti delle prime due forme geometriche (retta p e retta q) si ha il seguente quadro:

(*) Punto della retta p	punto della retta q
$(h,0,1)=(h,0,1,1)=\left(1,0,\frac{1}{h},\frac{1}{h}\right)$	$(0,k,-1)=(0,k,-1,1)=\left(0,1,-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$
Per $h=1$ si ha il p.to A(1,0,1);	Per $k=1$ si ha il punto $D(0,1,-1)$;
per $h=-1$ si ha $B(-1,0,1)$;	per $k=-1$ si ha $E(0,-1,-1)$;
per $h=0$ si ha il p.to C(0,0,1).	per $k=\infty$ si ha il p.to $Y_\infty(0,1,0,0)$.

L'equazione della proiettività nella quale si corrispondono le due terne di punti delle rette p, q è data dall'eguaglianza di birapporti

(1) $$(1,-1,0,h)=(1,-1,\infty,k)\,.$$

Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando fra loro due elementi qualsiasi e simultaneamente gli altri due, si ha:

(2) $$(1,-1,0,h)=(-1,1,k,\infty)\ ,\qquad \text{da cui}$$

(*) $$(1,-1,0,h)=(-1,1,k)\ ,$$

(*) $$\frac{(1,-1,0)}{(1,-1,h)}=\frac{k+1}{k-1}\,,$$

(*) $$\frac{0-1}{0+1}:\frac{h-1}{h+1}=\frac{k+1}{k-1}\,,\quad\rightarrow\qquad \frac{-1(h+1)}{h-1}=\frac{k+1}{k-1}\,,$$

(*) $$\frac{h+1}{1-h}=\frac{k+1}{k-1}\,,\qquad\rightarrow\quad (h+1)\cdot(k-1)=(k+1)\cdot(1-h)\,,$$

(*) $$hk-\cancel{h}+\cancel{k}-1=\cancel{k}-hk+1-\cancel{h}\ .$$

Si ottiene $$2kh=2\,.$$

Ne segue che la proiettività fra le due rette p, q è data dall'equazione:

(3) $$hk=1\,,\ \text{ossia}\qquad k=\frac{1}{h}\,.$$

Per gli elementi corrispondenti della retta p e della retta r (asse z) si ha il seguente quadro:

(*) Punto della retta p: $$(h,0,1)=(h,0,1,1)=\left(1,0,\frac{1}{h},\frac{1}{h}\right).$$

Per $h=2$ si ha il punto $F(2,0,1)$;
per $h=1$ si ha il punto $A(1,0,1)$;
per $h=\infty$ si ha il punto $X_\infty(1,0,0,0)$.

(*) Punto dell'asse z: $$(0,0,t)=(0,0,t,1)=\left(0,0,1,\frac{1}{t}\right).$$

Per $t=-2$ si ha il punto $G(0,0,-2)$,
per $t=-1$ si ha il punto $H(0,0,-1)$,

per $t = \infty$ si ha il punto $Z_\infty(0,0,1,0)$.
L'equazione della proiettività nella quale si corrispondono le due terne di punti delle rette p, r (asse z) è data dall'eguaglianza di birapporti:

(4) $$(2,1,\infty,h) = (-2,-1,\infty,t) .$$

Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due, si ha:

(5) $$(1,2,h,\infty) = (-1,-2,t,\infty) \ ,$$ da cui

(*) $$(1,2,h) = (-1,-2,t) \ ,$$

(*) $$\frac{h-1}{h-2} = \frac{t+1}{t+2},$$

(*) $$(h-1)\cdot(t+2) = (h-2)\cdot(t+1),$$

(*) $$\cancel{ht} + 2h - t - 2 = \cancel{ht} + h - 2t - 2 .$$

Ne segue che la proiettività fra le due rette p ed r è data dall'equazione:

(6) $$h + t = 2 ,\ \text{ossia} \qquad t = -h .$$

Conclusione: al punto $P(h,0,1)$ della retta $p(\ \parallel \text{asse } x)$
corrisponde proiettivamente il punto $Q\left(0,\frac{1}{h},-1\right)$ della retta $q\ ((\ \parallel \text{asse } y)$
e il punto $R(0,0,-h)$ della retta r (asse z).

Quindi i punti $Q\left(0,\frac{1}{h},-1\right)$ ed $R(0,0,-h)$ sono i punti delle rette q, r che corrispondono al punto P, variabile su p, nelle proiettività considerate.

Sia α il piano passante per la retta PQ e parallelo all'asse z . Possiamo ricavare la sua equazione partendo dall'equazione generale di un piano
(*) $$ax + by + cz + d = 0 .$$

Poiché il piano α è parallelo all'asse z e passa per i punti P e Q si ha:

(7) $$\begin{array}{ll} \parallel \text{asse } z & \\ P(h,0,1) & \\ Q(0,1/h,-1) & \end{array} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ ah + 0 + 0 + d = 0 \\ 0 + b/h + 0 + d = 0 \ . \end{cases}$$

Posto $d = -1$ si ottiene la soluzione $a = 1/h$, $b = h$.

Ne segue che l'equazione del piano α è:

(*) $$\frac{1}{h}x + hy - 1 = 0, \qquad \text{ossia}$$

(8) $$x + h^2 y - h = 0 \; .$$

Il piano β, che è perpendicolare all'asse z e passa per il punto $P(0,0,-h)$ ha l'equazione:

(9) $$z = -h \, .$$

Sia g la retta $\alpha \cap \beta$, cioè la retta di intersezione dei piani α e β. La sua equazione è data dal sistema:

(10) $$\begin{cases} x + h^2 y - h = 0 \\ z = -h \; . \end{cases}$$

Eliminando h fra le due equazioni del sistema si ha l'equazione della superficie S descritta dalla retta g. La sua equazione è:

(11) $$f(x,y,z) = x + z + z^2 y = 0 \, .$$

Quesito II)

L'origine O(0,0,0) è un punto semplice della superficie con piano tangente di equazione $x + z = 0$.

La S è una superficie del 3° ordine, che indicheremo con il simbolo F^3. Essa è una superficie rigata perché è luogo di ∞^1 rette. Come superficie rigata del 3° ordine, la S deve avere una retta direttrice, luogo di punti doppi.

Per trovare questa retta doppia, scriviamo l'equazione della superficie in coordinate omogenee ed eguagliamo a zero il polinomio $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e le sue derivate parziali prime. Si ha il sistema:

(E) $$\begin{cases} \qquad\qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ f_{x_1} = 0, \quad f_{x_2} = 0, \quad f_{x_3} = 0, \quad f_{x_4} = 0 \; . \end{cases}$$

Nel caso specifico si ha:

(12) $$\begin{cases} x_1 x_4{}^2 + x_3 x_4{}^2 + x_2 x_3{}^2 = 0 \\ x_4{}^2 = 0, \quad x_3{}^2 = 0, \quad x_4{}^2 + 2x_3 x_2 = 0, \quad 2x_1 x_4 + 2x_3 x_4 = 0 \; . \end{cases}$$

Si ha la soluzione doppia

(13) $\qquad x_1 = h, \qquad x_2 = k, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0.$

Il punto di coordinate (13) è un punto della retta

(14) $$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 , \end{cases}$$

ossia, è un punto della retta impropria del piano xy. Ne segue che la (14) è una retta doppia delle superficie.

Per dimostrare che la retta impropria del piano xy è una retta doppia della superficie F_3 possiamo seguire un altro procedimento. Si interseca la superficie F^3 con il fascio di piani $x_3 = \lambda x_4$, avente per asse la retta impropria del piano xy e si fa vedere che si ottiene la soluzione doppia $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = k$. Ciò si può vedere risolvendo il sistema:

(F) $$\begin{cases} x_1 x_4{}^2 + x_3 x_4{}^2 + x_2 x_3{}^2 = 0 \\ x_3 = \lambda x_4 \ . \end{cases}$$

Si ottiene:

(*) $$x_1 x_4{}^2 + \lambda x_4{}^3 + \lambda^2 x_2 x_4{}^2 = 0,$$

(*) $$x_4{}^2 (x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda x_4) = 0.$$

Si ricava che il sistema ha la soluzione doppia $x_3 = x_4 = 0$, quindi la retta impropria del piano xy è effettivamente una retta doppia della superficie F^3. Ma una retta doppia di una superbie rigata del 3° ordine è anche una direttrice della superficie stessa. Ne segue che la retta impropria del piano xy è una direttrice della superficie (11).

I punti X_∞, Y_∞ sono punti doppi della superficie F^3; ciò è una conseguenza del fatto che essi appartengono alla retta impropria del piano xy, che è una retta doppia della superficie stessa.

PROBLEMA 9 B (Autunno 1951, 1° app.; Dispense ORUR pg. 53)

Scrivere l'equazione della superficie S avente per direttrici le curve D_1, D_2, D_3 seguenti:

- D_1: $y=0,\ z=1$ (retta s);
- D_2: $x=0,\ z=0$ (asse y);
- D_3: cubica gobba di equazioni parametriche.

$$\text{(1)} \qquad x=\frac{t-1}{t}, \qquad y=\frac{t^2-1}{t}, \qquad z=t^2 .$$

Soluzione

Siano rispettivamente N, P, Q tre punti delle direttrici D_1, D_2, D_3. Possiamo scrivere:

$$\text{(2)} \qquad N(h,0,1), \qquad P(0,k,0), \qquad Q\left(\frac{t-1}{t}, \frac{t^2-1}{t}, t^2\right).$$

Dal punto N della direttrice D_1 proiettiamo le curve D_2, D_3. Otteniamo due coni che hanno in comune un certo numero di rette. Al variare di N su D_1 queste rette descrivono la rigata che ha per direttrici le tre curve date.

Si ricorda che la retta passante per due punti qualsiasi $P(x_o, y_o, z_o)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ ha le equazioni

$$(*) \qquad \frac{x-x_o}{x_1-x_o}=\frac{y-y_o}{y_1-y_o}=\frac{z-z_o}{z_1-z_o}.$$

Nel nostro caso si ha:

retta NP $$\frac{x-h}{0-h}=\frac{y-0}{k-0}=\frac{z-1}{0-1};$$

retta NQ $$\frac{x-h}{\frac{t-1}{t}-h}=\frac{y-0}{\frac{t^2-1}{t}-0}=\frac{z-1}{t^2-1}.$$

Mettiamo a sistema le equazioni dei due coni:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{h-x}{h}=\dfrac{y}{k}=1-z \\[2ex] \dfrac{t(x-h)}{t-1-ht}=\dfrac{yt}{t^2-1}=\dfrac{z-1}{t^2-1} \end{cases} .$$

Spezzando le equazioni si ha il sistema:

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} (3)\quad \dfrac{h-x}{h}=1-z, & (4)\quad \dfrac{y}{k}=1-z\ , \\ (5)\quad \dfrac{t(x-h)}{t-1-ht}=\dfrac{z-1}{t^2-1}, & (6)\quad \dfrac{yt}{\cancel{t^2-1}}=\dfrac{z-1}{\cancel{t^2-1}}\ . \end{cases}$$

Dalla (4) si ha: (7) $k=\dfrac{y}{1-z}$.

Dalla (3) si ha: $h-x=h(1-z)$, $\quad \cancel{h}-x=\cancel{h}-hz$,

e quindi: (8) $h=\dfrac{x}{z}$.

Dalla (6) si ha: (9) $t=\dfrac{z-1}{y}$.

Ora, liberiamo preventivamente la (5) dai denominatori. Si ha:

$$(10)\qquad t(x-h)\cdot(t^2-1)=(z-1)\cdot(t-1-ht)\ .$$

Sostituendo le espressioni di h e t nella (10) , con successivi passaggi si ha:

$$(*)\qquad \frac{\cancel{z-1}}{y}\cdot\left(x-\frac{x}{z}\right)\left[\frac{(z-1)^2}{y^2}-1\right]=\cancel{(z-1)}\cdot\left[\frac{z-1}{y}-1-\frac{x}{z}\cdot\frac{(z-1)}{y}\right],$$

$$(*)\qquad \frac{xz-x}{yz}\cdot\frac{[(z-1)^2-y^2]}{y^2}=\frac{z-1}{y}-1-\frac{xz-x}{zy}\,,$$

$$(*)\qquad \frac{(xz-x)\cdot[(z-1)^2-y^2]}{y^2\cdot\cancel{zy}}=\frac{z^2-z-zy-xz+x}{\cancel{zy}}\,,$$

$$(*)\qquad (xz-x)\cdot(z^2-2z+1-y^2)=z^2y^2-zy^2-zy^3-xzy^2+xy^2\ ,$$

$$(*)\qquad \begin{aligned} &xz^3-\underline{2xz^2}+xz-\cancel{xzy^2}-\underline{xz^2}+2xz+\cancel{xy^2}= \\ &=z^2y^2-zy^2-zy^3-\cancel{xzy^2}+\cancel{xy^2}\,, \end{aligned}$$

$$(*) \qquad xz^3 - 3xz^2 + 3xz - x = z^2y^2 - zy^2 - zy^3 .$$

Si trova così che la superficie rigata ha l'equazione:

$$(11) \qquad xz^3 - z^2y^2 + zy^3 + zy^2 - 3xz^2 + 3xz - x = 0 .$$

Essa è una superficie del 4° ordine, che viene indicata con il simbolo F^4.

Intersecando questa superficie con il fascio di piani $x = \lambda z$, passanti per l'asse y, si vede subito che questo asse è una retta semplice per la superficie.

PROBLEMA 10 B (estate 1953, 2° app. -Dispense ORUR pg. 62)

I) Nello spazio riferito ad un sistema di coordinate omogenee x, y, z, t si considerino i due fasci F^1, F^2 di quadriche:

(1) $$\begin{aligned} &F^1: \ yz - xt = h(yt - z^2) \\ &F^2: \ y^2 - xz = k(yz - xt) \ , \end{aligned}$$

e si ponga tra F^1 ed F^2 la proiettività π in cui alla quadriche di F^1

(2) $\quad yt - z^2 = 0, \qquad yz - xt = 0, \qquad yz - xt = yt - z^2$

corrispondono rispettivamente le quadriche di F^2

(3) $\quad yz - xt = 0 \qquad y^2 - xz = 0, \qquad y^2 - xz = -\frac{1}{4}(yz - xt)$.

II) Determinare la superficie S, che risulta del 4° ordine, luogo delle curve di intersezione di una quadrica di F^1 con la sua corrispondente nella proiettività π.
Si verifichi che la cubica gobba G di equazioni $x = w^3$, $y = w^2$, $z = w$, $t = 1$ fa parte della curva base di entrambi i fasci F^1, F^2.

Soluzione

Quesito I)

Consideriamo le equazioni dei due fasci:

(*) $F^1: \ yz - xt = h(yt - z^2)$; per $h = \frac{n}{m}$ si ha: $F^1: \ m(yz - xt) = n(yt - z^2)$.

(*) $F^2: \ y^2 - xz = k(yz - xt)$; per $k = \frac{q}{p}$ si ha: $F^2: \ p(y^2 - xz) = q(yz - xt)$.

Esaminiamo il fascio F^1.

Per $m = 0$, cioè $h = \infty$, si ha la quadrica $yt - z^2 = 0$;
per $n = 0$, " $h = 0$, si ha la quadrica $yz - xt = 0$;
per $m = n = 1$, " $h = 1$, si ha la quadrica $yt - z^2 = yz - xt$.

Troviamo le quadriche del fascio F^2 ad esse ordinatamente corrispondenti.

Per $p = 0$, cioè $k = \infty$, si ha la quadrica $yz - xt = 0$;
per $q = 0$, " $k = 0$, si ha la quadrica $y^2 - xz = 0$;
per $p = 4$, $q = -1$, " $k = \frac{-1}{4}$, si ha la quadrica $4(yt - z^2) = -(yz - xt)$.

La proiettività tra i due fasci è data dall'eguaglianza di birapporti:

(4) $$(\infty, 0, 1, h) = (\infty, 0, -\frac{1}{4}, k)\,.$$

Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro, e simultaneamente gli altri due, si ha:

(*) $$(h, 1, 0, \infty) = (k, -\frac{1}{4}, 0, \infty)\,, \qquad \text{e quindi}$$

(*) $$(h, 1, 0) = (k, -\frac{1}{4}, 0)\,; \qquad \text{sviluppando si ha:}$$

(*) $$\frac{0-h}{0-1} = \frac{0-k}{0+\frac{1}{4}}\ .$$

Si ricava che la proiettività tra i due fasci è data dall'equazione:

(*) $$h = -4k\,, \quad \text{o se si vuole} \qquad (5) \qquad k = -\frac{h}{4}\,.$$

Le equazioni di due quadriche corrispondenti nella proiettività si possono raggruppare nel sistema:

(6) $$\begin{cases} yz - xt = h(yt - z^2) \\ y^2 - xz = -\frac{h}{4}(yz - xt)\ . \end{cases}$$

Eliminando il parametro h fra le due equazioni si ottiene il luogo delle curve di intersezione di una quadrica del fascio F^1 con la quadrica del fascio F^2 che corrisponde alla prima nella proiettività assegnata. Il parametro h, poi, si può eliminare comodamente dividendo membro a membro le due equazioni del sistema. Si ottiene:

(*) $$\frac{yz - xt}{y^2 - xz} = -\frac{4(yt - z^2)}{yz - xt}\ , \qquad \text{da cui}$$

(*) $$(yz - xt)^2 = (4z^2 - 4yt)\cdot(y^2 - xz)\,.$$

Passando a coordinate non omogenee e procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$(4z^2 - 4y)\cdot(y^2 - xz) = (yz - x)^2,$$

(*) $$4z^2y^2 - 4z^3x - 4y^3 + 4xyz = y^2z^2 + x^2 - 2xyz.$$

La superficie luogo dei punti di intersezione di due quadriche corrispondenti nella proiettività ha l'equazione:

(7) $$3y^2z^2 - 4z^3x - 4y^3 + 6xyz - x^2 = 0.$$

Come si vede, si ha una superficie del 4° ordine che ha nell'origine O(0,0,0) un punto doppio uniplanare.

CAPITOLO SECONDO

GEOMETRIA PROIETTIVA

n. 1 – Birapporto di quattro elementi di un forma di prima specie

Vogliamo ricordare alcune nozioni di geometria proiettiva che risultano di fondamentale importanza per chi si voglia dedicare al suo studio.

Si dice rapporto semplice di tre punti A,B,C di una retta orientata r l'espressione:

(1) $$(ABC) = \frac{AC}{BC},$$

ove AC e BC sono le misure algebriche di segmenti. L'espressione (1), quindi, è un numero reale relativo (fig. 1). La retta r dicesi anche punteggiata .

Consideriamo ora quattro punti propri A,B,C,D della retta orientata r, dei quali almeno tre distinti (fgg. 1,2).

Fig. 1

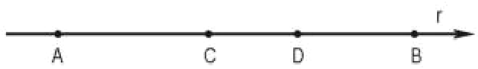


Fig. 2

Si dice birapporto della quaterna ordinata di punti A,B,C,D la quantità

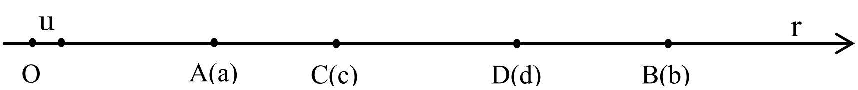
(2) $$\lambda = (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} .$$

Anche il birapporto è un numero reale relativo. Come si vede, il birapporto è definito come rapporto di due rapporti, da qui segue il suo nome.

Dobbiamo ora fare una osservazione. Poiché tre almeno dei punti A,B,C,D sono distinti, solo uno dei quattro segmenti del birapporto può essere nullo, quindi λ può avere eventualmente un valore infinito (ciò succede, per esempio, se il punto B coincide con C), ma non sarà mai indeterminato.

Se le coppie di punti (A,B) e (C,D) si separano (fig. 1), il birapporto è negativo; se invece le due coppie non si separano (fig. 2), il birapporto è positivo.

Stabiliamo ora un riferimento cartesiano sulla retta e indichiamo con a,b,c,d le ascisse dei punti considerati (fig. 3).



Ricordando l'espressione cartesiana della misura di un segmento orientato, si ha:

(3) $$(ABC) = (abc) = \frac{c-a}{c-b}$$

(4) $$(ABCD) = (abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}.$$

Quando il punto D tende al punto improprio D_∞ della retta orientata r si ha:

(*) $$\lim_{D \to D_\infty} (ABCD) = \lim_{d \to \infty} \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \lim_{d \to \infty} \frac{(c-a)\left(1-\frac{b}{d}\right)}{(c-b)\left(1-\frac{a}{d}\right)} = \frac{c-a}{c-b},$$

ossia (5) $$\lim_{D \to D_\infty} (ABCD) = (ABCD_\infty) = (ABC).$$

La (5) esprime una delle fondamentali proprietà di un birapporto. Essa dice:

(a) "Quando il quarto punto di un birapporto tende al punto improprio della retta sulla quale i quattro punti giacciono, allora il birapporto dei quattro punti è uguale al rapporto semplice dei primi tre".

Ricordiamo altre proprietà del birapporto correntemente applicate .

(b) Il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due.

(c) Scambiando i due primi o i due ultimi elementi di un birapporto, il suo valore si muta nell'inverso.

(d) Il birapporto numerico di quattro punti di una retta resta invariato se si opera una trasformazione lineare fratta non degenere sulla ascissa cartesiana x fissata sulla retta stessa.

Diamo un cenno di dimostrazione della proprietà d).

Se x_1, x_2, x_3, x_4 sono le ascisse dei quattro punti, il loro birapporto numerico è:

(6) $$\lambda = (x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{(x_1 x_2 x_3)}{(x_1 x_2 x_4)} = \frac{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}{(x_4 - x_1) \cdot (x_4 - x_2)}.$$

Se ora operiamo una trasformazione lineare fratta non degenere sulla variabile x, otteniamo i valori

(7) $$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \quad \text{con} \quad i = 1,2,3,4 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \ .$$

Passando ai calcoli si può vedere che si ha:

(8) $$(y_1 y_2 y_3 y_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4) \ .$$

n. 2 – Particolari valori di un birapporto

Consideriamo, per semplicità, quattro punti A,B,C,D di una punteggiata.
Possiamo vedere facilmente che se i primi due punti o gli ultimi due coincidono, il birapporto dei quattro punti vale 1. Infatti si ha

(*) $$(AACD) = \frac{(AAC)}{(AAD)} = \frac{AC}{AC} : \frac{AD}{AD} = 1, \qquad (ABCC) = \frac{(ABC)}{(ABC)} = 1.$$

Viceversa, supponiamo che sia $(ABCD) = 1$, e facciamo vedere che o $B \equiv A$ o $D \equiv C$. Infatti, nell'ipotesi posta si ha:

(1) $$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = 1 \ . \qquad \text{Si ricava}$$

(2) $$AC \cdot BD = BC \cdot AD \, .$$

Per la relazione segmentaria di Chasles possiamo scrivere:

(3) $$(AB + BC) \cdot BD = BC \cdot (AB + BD), \qquad \text{da cui}$$

(*) $$AB \cdot BD + \cancel{BC \cdot BD} = BC \cdot AB + \cancel{BC \cdot BD} \, ,$$

(*) $$\cancel{AB} \cdot BD = BC \cdot \cancel{AB} \quad ; \qquad \text{ne segue}$$

(4) $$BD = BC \ , \quad \text{e quindi} \quad D \equiv C \, .$$

Sempre per la relazione segmentarla di Chasles, la (2) fornisce

(5) $$AC \cdot (BC + CD) = BC \cdot (AC + CD) \, .$$

Procedendo come sopra, si ricava che $B \equiv A$.

Se invece coincidono i punti B e D della quaterna di punti A,B,C,D, allora il birapporto è nullo. Infatti si ha:

$$(6) \qquad (\mathrm{ABCB}) = \frac{(\mathrm{ABC})}{(\mathrm{ABB})} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{BB}}{\mathrm{AB}} = 0 \ .$$

n. 3 – Il birapporto come invariante proiettivo

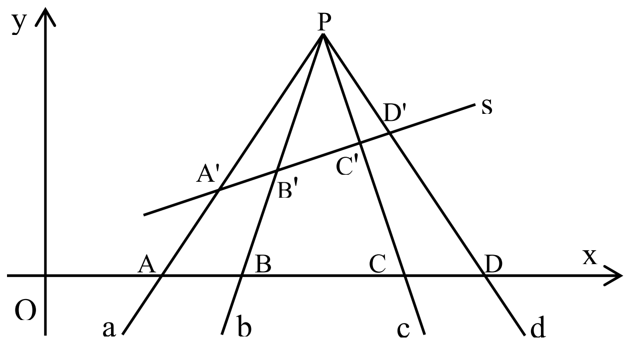
Vogliamo ora far vedere che il birapporto di quattro punti di una retta, o di quattro elementi di una forma di prima specie, non varia per operazioni di proiezioni e sezioni.

Dato un riferimento cartesiano Oxy, consideriamo sull'asse x quattro punti generici $A(x_1), B(x_2), C(x_3), D(x_4)$. Il birapporto dei quattro punti è:

$$(1) \qquad (\mathrm{ABC}) = \frac{(\mathrm{ABC})}{(\mathrm{ABD})} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}{(x_4 - x_1) \cdot (x_4 - x_2)} .$$

Vogliamo far vedere che il birapporto dei quattro punti è uguale al birapporto dei coefficienti angolari delle rette a,b,c,d che li proiettano da un punto $P_o(x_o, y_o)$ del piano (fig. 4).

Fig. 4



A tale scopo consideriamo un fascio di rette di centro P_o e intersechiamo le rette del fascio con l'asse x:

$$(2) \qquad \begin{cases} k(y - y_o) = x - x_o \\ y = 0 \quad (\text{asse } x) , \end{cases} \qquad \rightarrow \quad -ky_o = x - x_o , \quad \rightarrow (3) \quad x = x_o - ky_o \ .$$

Sostituiamo alle ascisse $x_i \quad (i = 1,...,4)$ dei punti A, B, C, D della (1) le espressioni (3), nelle quali compaiono i coefficienti angolari k_1, k_2, k_3, k_4 delle rette del fascio che passano per questi punti. Si ha

(*) $$(ABCD) = \frac{(x_o - k_3 y_o - x_o + k_1 y_o)}{(x_o - k_3 y_o - x_o + k_2 y_o)} \cdot \frac{(x_o - k_4 y_o - x_o + k_2 y_o)}{(x_o - k_4 y_o - x_o + k_1 y_o)} =$$

$$= \frac{(k_1 y_o - k_3 y_o)}{(k_2 y_o - k_3 y_o)} \cdot \frac{(k_2 y_o - k_4 y_o)}{(k_1 y_o - k_4 y_o)} = \frac{(k_3 - k_1)}{(k_3 - k_2)} : \frac{(k_4 - k_1)}{(k_4 - k_2)} \quad ,$$

ossia $$(ABCD) = (k_1 k_2 k_3) : (k_1 k_2 k_4) = (k_1 k_2 k_3 k_4) \,,$$

e quindi (4) $$(ABCD) = (abcd) \,.$$

Abbiamo così dimostrato che il birapporto di quattro punti A, B, C, D di una punteggiata r è uguale al birapporto delle quattro rette a, b, c, d che li proiettano da un punto P, esterno ad essa.

d) Se ora intersechiamo le rette a, b, c, d con un'altra retta $s \neq r$ otteniamo altri quattro punti A', B', C', D' ; ma siccome i coefficienti angolari delle rette che li proiettano non variano evidentemente si avrà

$$(A'B'C'D') = (abcd) \,;$$

ne segue (5) $$(ABCD) = (abcd) = (k_1 k_2 k_3 k_4) = (A'B'C'D')$$

La (5) esprime una importantissima proprietà, detta <u>conservazione dei birapporti</u>:

"Il birapporto di quattro punti di una punteggiata o di quattro rette di un fascio è invariabile per operazioni di proiezione e sezione".

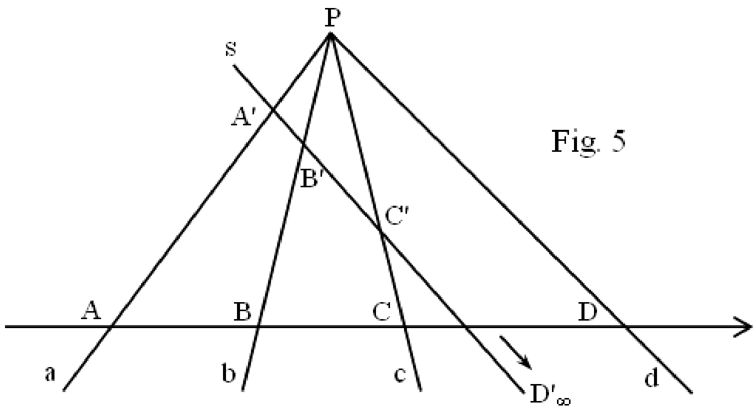


Fig. 5

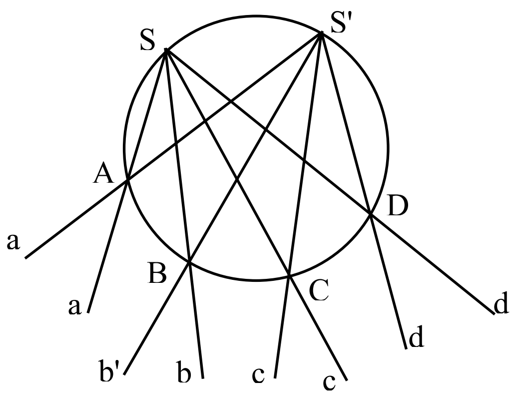
Se poi la retta s è parallela alla retta d, il punto D viene proiettato nel punto improprio D'_∞ della retta s (Fig. 4) e ovviamente si ha

$$(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C') \ .$$

n. 4 – Birapporto di quattro punti di una circonferenza

Possiamo estendere la nozione di birapporto anche a quattro punti A, B, C, D di una circonferenza γ.

Fig. 6



Prendiamo sulla circonferenza altri due punti S ed S' e ricordiamo che angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali o supplementari, e quindi hanno lo stesso seno. Pertanto, con riferimento alla fig. 5, si ha:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\operatorname{sen}\widehat{ac}}{\operatorname{sen}\widehat{bc}} : \frac{\operatorname{sen}\widehat{ad}}{\operatorname{sen}\widehat{bd}} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{a'c'}}{\operatorname{sen}\widehat{b'c'}} : \frac{\operatorname{sen}\widehat{a'd'}}{\operatorname{sen}\widehat{b'd'}} ,$$

cioè $\quad \dfrac{(abc)}{(abd)} = \dfrac{(a'b'c')}{(a'b'd')} \quad$ ossia $\quad (abcd) = (a'b'c'd')$.

Ciò vuol dire che le due quaderne di rette che proiettano i punti A, B, C, D da S ed S' formano birapporti uguali.

Con un opportuno simbolismo possiamo scrivere

$$S\,(ABCD) = S'\,(ABCD) \ .$$

n. 5 – Sul gruppo armonico (L. Campedelli, Esercizi di Geometria pg. 171)

Consideriamo quattro punti A,B,C,D di una punteggiata, o quattro rette a,b,c,d o quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di un fascio.
Si dice che essi costituiscono un gruppo armonico quando il loro birapporto è uguale a -1, cioè

(1) $$(ABCD) = (abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta) = -1 .$$

Anche il birapporto si dice armonico.
Si dice anche che l'ultimo punto (o elemento) di ciascuna quaterna è il quarto armonico dopo i primi tre; o che il primo e secondo punto sono coniugati armonici rispetto al terzo e al quarto punto. Si dice anche che le coppie formate dai primi due elementi e dagli ultimi due si separano armonicamente.
Poiché un birapporto armonico è negativo, le coppie di punti (A,B) e (C,D) si separano.

Vogliamo vedere come si può costruire un gruppo armonico su una retta.
Consideriamo due rette a, b che si intersecano in un punto O e siano c e d le bisettrici degli angoli al vertice da esse formati (fig. 7).

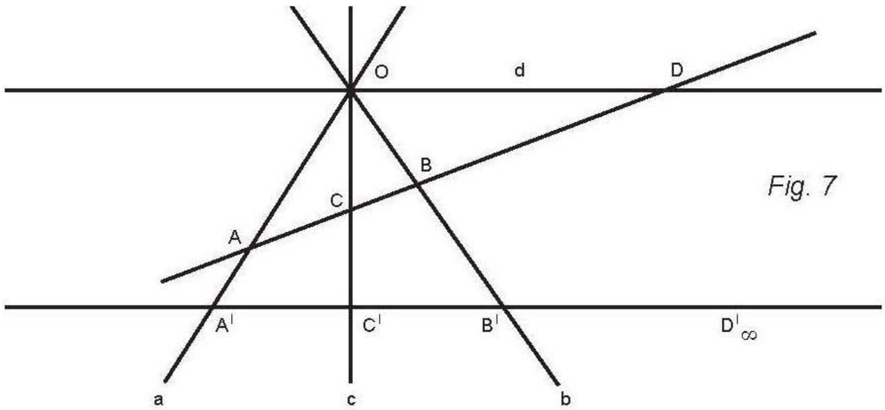


Fig. 7

Facciamo vedere che se intersechiamo le rette a,b,c,d con una retta generica s otteniamo quattro punti di intersezione A,B,C,D che formano un gruppo armonico.
Infatti, dal punto O proiettiamo i punti A,B,C,D su una retta s parallela alla d, e quindi perpendicolare alla bisettrice c; otteniamo quattro punti A', B', C', D'_{∞} dei quali C' è il punto medio del segmento $A'C'$, mentre D'_{∞} è il punto improprio della retta r. Ricordando che il valore di un birapporto si conserva per operazioni di proiezioni e sezioni, si ha:

(2) $$(ABCD) = (A'B'C'D'_{\infty}) = (A'B'C') = \frac{A'C'}{B'C'} = -1 \ ;$$

abbiamo così dato un esempio di gruppo armonico.

Facciamo qualche altra osservazione.

Se $\quad (ABCD) = -1, \quad$ si ricava $\quad (*) \quad \frac{(ABC)}{(ABD)} = -1, \quad$ da cui

(3) $\quad (ABC) = -(ABD), \quad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \quad \rightarrow \quad AC/BC = AD/DB.$

Se per esempio è $AC/BC = -2$, risulta anche $AD/DB = -2$.

Tenendo presente che in un gruppo armonico le coppie di punti (A,B) e (C,D) si separano, si ha la disposizione di punti indicata in fig. 8..

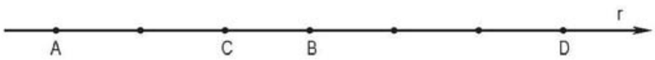
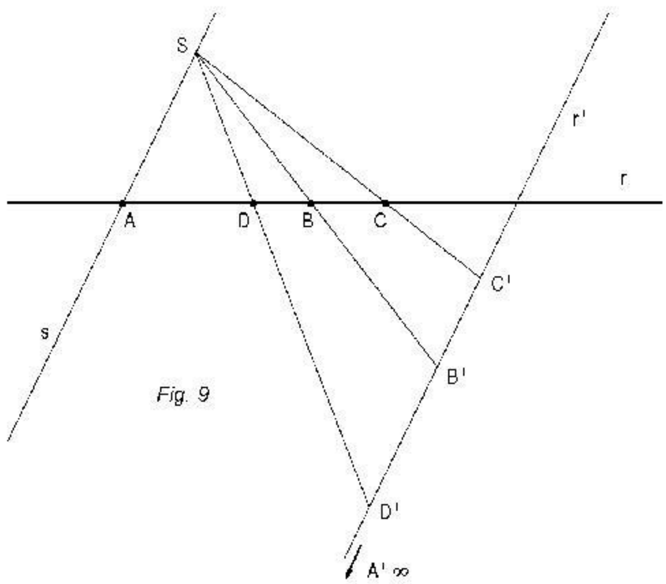


Fig. 8

In altre parole: “ Il segmento AB è diviso internamente ed esternamente in uno stesso rapporto dai punti C e D “.

n. 6 – Costruzioni grafiche

Siano dati tre punti distinti A,B,C di una punteggiata (fig.9) e sia assegnato un valore reale k.



Vogliamo trovare il quarto punto D per cui si abbia

(1) $$(ABCD) = k.$$

Prendiamo un punto S su una retta passante per A. Se da questo punto S proiettiamo i punti A,B,C su una retta r' parallela ad s, il punto A andrà a cadere nel punto improprio della retta r', mentre i punti B,C si proietteranno nei punti B', C'. Prendiamo ora sulla retta r' il punto D' per cui si ha in valore e segno

(2) $$B'D' = k \cdot B'C',$$

e sia D il punto di intersezione della retta SD' con la retta r.
Poiché il birapporto di quattro punti è invariante per proiezioni e sezioni si ha:

(*) $$(ABCD) = (A'_{\infty}B'C'D') = (D'C'B'A'_{\infty}) = (D'C'B') = \frac{D'B'}{C'B'},$$

e quindi (3) $$(ABCD) = \frac{B'D'}{B'C'} = k\,.$$

Se D' è simmetrico di C' rispetto a B', dalla (3) si ricava $B'D'/B'C' = -1$, e quindi

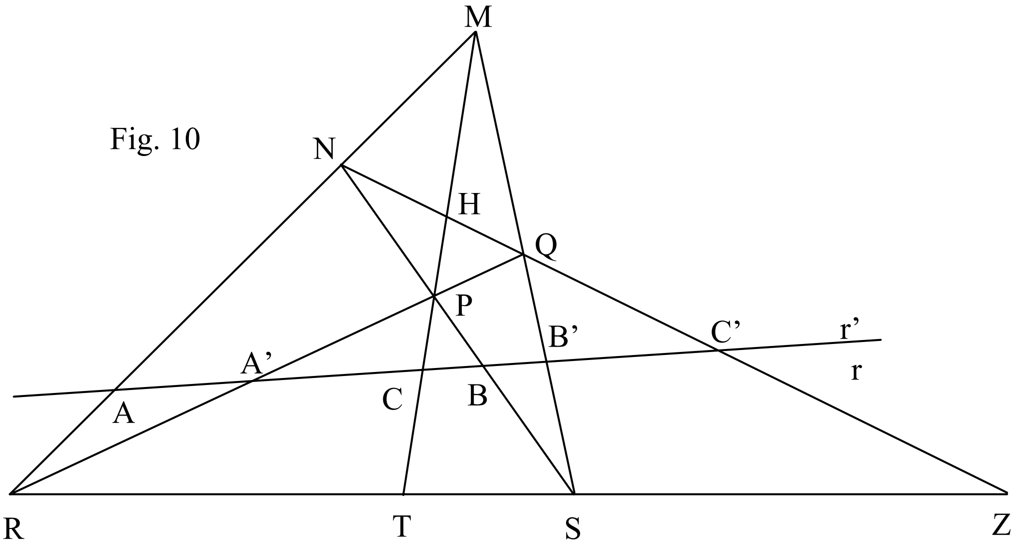
(4) $$(ABCD) = -1\,;$$

abbiamo così ottenuto la costruzione del quarto armonico dopo tre punti A,B,C.

n. 7 – Gruppo armonico generato da un quadrangolo completo

Si dice quadrangolo completo la figura costituita da quattro punti complanari M,N,P,Q, detti vertici, e dalle sei rette (dette lati) che li congiungono a due a due (fig. 10). Due lati che non passano per lo stesso vertice si dicono opposti; si hanno tre coppie di lati opposti: MN e PQ, NP ed MQ, MP ed NQ.

Fig. 10



Il punto comune a due lati opposti prende il nome di punto diagonale; R, S, H sono i punti diagonali del quadrilatero completo.

Indichiamo con T, Z i punti di intersezione della retta RS con le diagonali MP ed NQ.

Tesi: vogliamo dimostrare che i punti R,S,T,Z formano un gruppo armonico, ossia

(1) $$(\mathrm{RSTZ}) = -1 .$$

Infatti, se dal punto M proiettiamo i punti R,S,T,Z sulla retta NQ si ottiene:

(2) $$(\mathrm{RSTZ}) = (\mathrm{NQHZ}) .$$

Se ora dal punto P proiettiamo i punti N,Q,H,Z sulla retta r si ottiene:

(3) $$(\mathrm{NQHZ}) = (\mathrm{SRTZ}) .$$

Ma per la proprietà transitiva dell'eguaglianza, dalle (2),(3) si ha:

(4) $$(\mathrm{RSTZ}) = (\mathrm{SRTZ}) .$$

Se ora poniamo $(\mathrm{RSTZ}) = k$, si ottiene $(\mathrm{SRTZ}) = \frac{1}{k}$:
infatti, scambiando i due primi o i due ultimi elementi di un birapporto, il suo valore si muta nel reciproco. Ne segue l'eguaglianza $k = \frac{1}{k}$; ma questa eguaglianza può sussistere solo se $k = 1$ o $k = -1$.

Come sappiamo, si ha $k = 1$ solo se $S \equiv R$ o se $Z \equiv T$. Ma dal momento che i punti R,S,T,Z sono distinti fra loro, dobbiamo accettare solo la soluzione $k = -1$. Quindi:

(5) $$(\mathrm{RSTZ}) = -1 ,$$

ossia i quattro punti forniti dal quadrangolo completo formano un gruppo armonico.

n. 8 – Le proiettività

I) Si dice proiettività fra due forme , distinte o coincidenti, di prima specie ogni corrispondenza tra gli elementi della prima forma e gli elementi della seconda la quale goda delle seguenti proprietà.
a) di essere biunivoca;
b) di conservare i birapporti.

La relazione di proiettività tra due forme u e u' si esprime con il simbolo

(*) $$u \overline{\wedge} u'$$

oppure $$(A, B, C, ...) \overline{\wedge} (A', B', C', ...) .$$

Per definizione la u e la u' si comportano in modo simmetrico l'una rispetto all'altra. Tuttavia, quando si vuole indicare la proiettività che ci permette di passare da ogni elemento della u all'elemento corrispondente della u' si usa il simbolo π. Quando si vuole indicare la proiettività inversa, che ci permette di risalire da ogni elemento della u' al corrispondente elemento della u si usa il simbolo π^{-1}.

II) Ogni corrispondenza tra due forme di prima specie generabile mediante proiezioni e sezioni è una proiettività: essa, infatti, è biunivoca per sua natura e conserva i birapporti.
Viceversa, ogni proiettività tra due forme di prima specie è generabile (in infiniti modi) mediante proiezioni e sezioni.

Ricordiamo un teorema di fondamentale importanza.
" Esiste una e una sola proiettività tra due forme di prima specie nella quale ad una terna di elementi distinti presi arbitrariamente sulla prima corrispondano ordinatamente gli elementi di una seconda terna, anche essi distinti, presi in modo arbitrario sulla seconda forma".
In altre parole:
" Una proiettività tra due forme di prima specie è perfettamente individuata quando si conoscano tre coppie di elementi corrispondenti".

Tenendo conto che per individuare un elemento sopra una forma di prima specie occorre un parametro, possiamo dire subito che:
" Le terne di elementi di una forma di prima specie sono ∞^3, e quindi, le proiettività tra due forme di prima specie saono ∞^3 ".

NOTA- Una proiettività tra due forme di prima specie F_1 ed F_1', distinte o sovrapposte, è costituita dal complesso di due trasformazioni, l'una inversa dell'altra, che fanno passare dagli elementi di F_1 a quelli di F_1' e viceversa.

Il prodotto di due trasformazioni T, S è una trasformazione. La trasformazione che si ottiene operando prima la T e poi la S si indica con la scrittura ST.
In generale è $ST \neq TS$.
La trasformazione inversa della T si indica con T^{-1} e si ha:

(*) $$T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I\,,$$

cioè si ha la trasformazione identica (E. Martinelli, Geometria, pg. 99).

n. 9 – Costruzione di una proiettività fra due punteggiate

Consideriamo due punteggiate r ed r'; vogliamo costruire la proiettività π nella quale a tre punti A,B,C della r corrispondano ordinatamente i punti A', B', C' della retta r' (fig11).

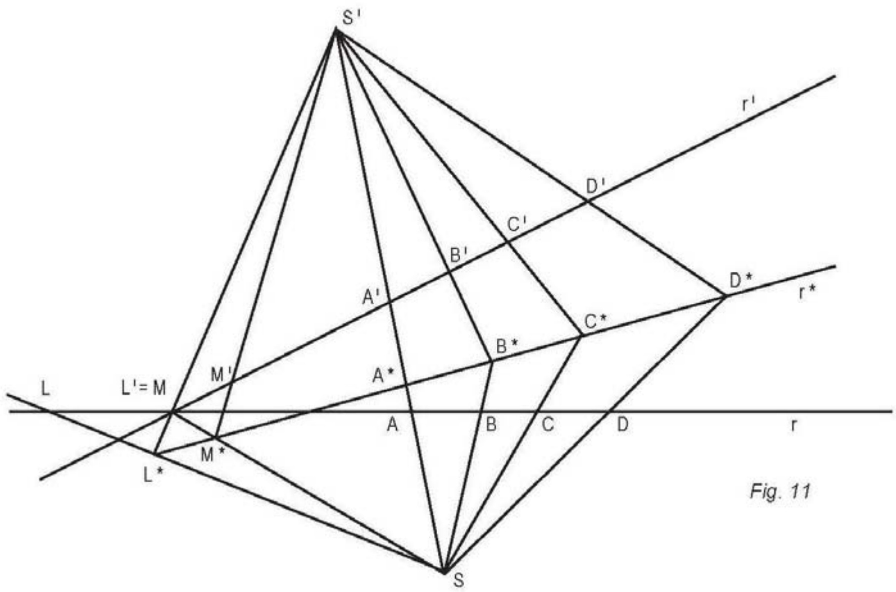


Fig. 11

Sulla retta AA' prendiamo due centri di proiezioni S ed S', situati esternamente all'angolo formato dalle due rette. Le rette SB, $S'B'$ ed SC, $S'C'$ si intersecano rispettivamente nei punti B^* e C^*, per i quali passa una retta r^*.

Questa retta è detta <u>asse di prospettiva</u> delle due punteggiate r ed r', legate dalla proiettività π, e queste due rette sono sezioni di <u>fasci prospettivi</u>.
Vogliamo ora trovare sulla retta r' il corrispondente di un punto D della retta r.
Si traccia la retta SD sino ad intersecare in un punto D^* la retta r^*. Dopo di ciò si traccia la retta $S'D^*$: essa interseca la retta r' in un punto D' che è in corrispondenza proiettiva con il punto D, ossia

(*) $$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

In figura è indicato anche il punto M' della retta r' che corrisponde al punto M della retta r, dato dall'intersezione delle rette r ed r'. Ciò ci dice che il punto comune a queste due rette non è unito. Se il punto M della figura è visto non come un punto della retta r, ma come un punto L' della retta r', ad esso corrisponde il punto L della retta r, costruito come in figura.

n. 10 – Proiettività tra due punteggiate sovrapposte

Consideriamo una proiettività tra due punteggiate sovrapposte r, r'. Siano A,B,C tre punti della retta r e A',B',C' i punti corrispondenti sulla retta r'(fg. 12).

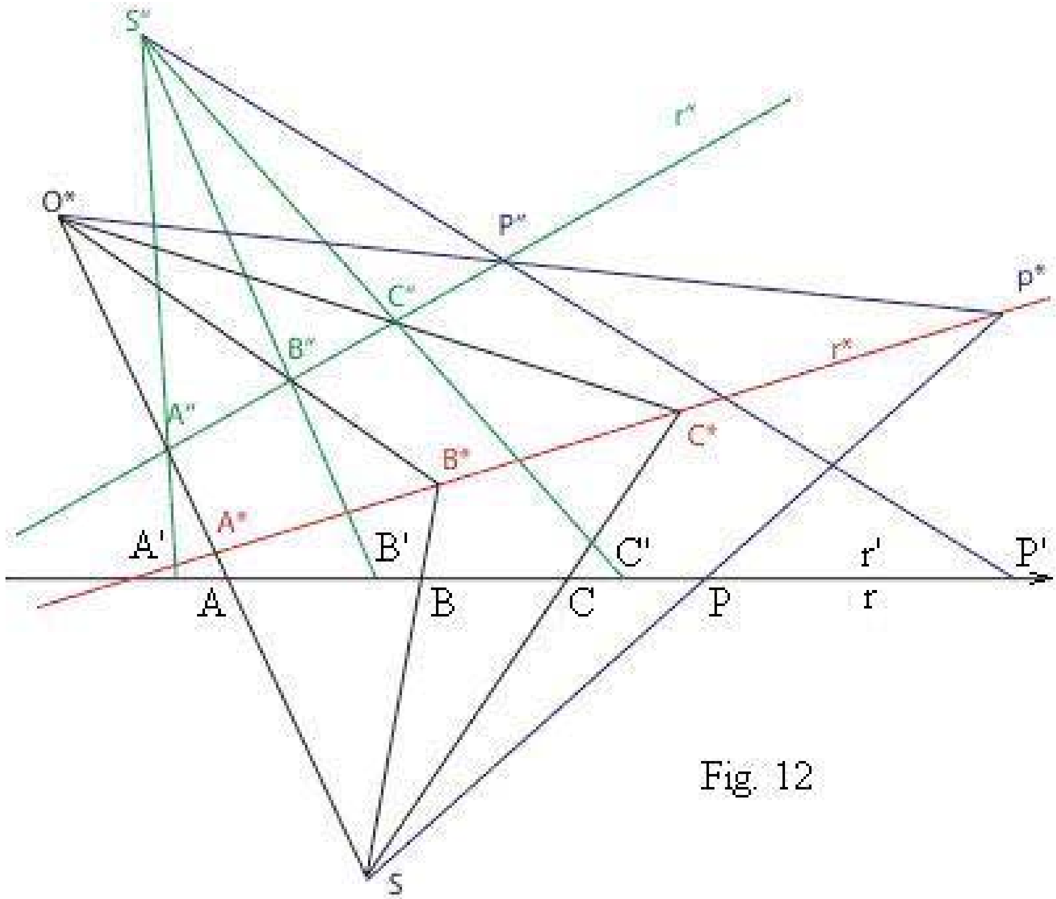


Fig. 12

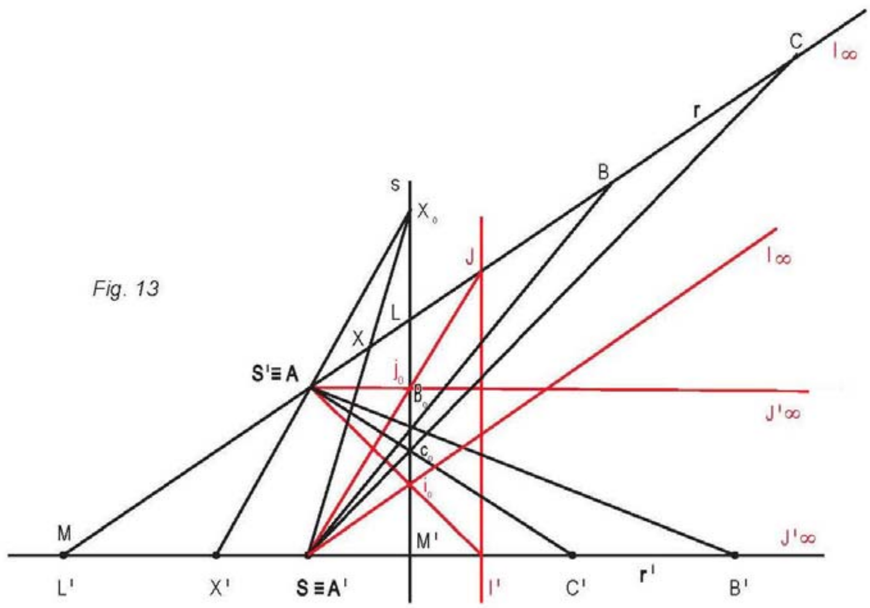
Prendiamo un punto $S"$ esterno alla retta r. Dal punto $S"$ proiettiamo i punti A', B', C' su una retta $r"$, che interseca la retta r, e siano $A",B",C"$ i punti di intersezione.

Troviamo la proiettività π che ai punti A,B,C della retta r fa corrispondere i punti A'', B'', C'' della retta r''.

A tale scopo, tracciamo la retta SO^* passante per il punto A, per la quale O^* è un punto del semipiano in cui giace S''. Siano poi B^* e C^* i punti di intersezione delle rette O^*B'', SB ed O^*C'',SC. La retta $r^* \equiv B^*C^*$ è l'asse della prospettività π.
E' facile ora trovare sulla retta r' il corrispondente proiettivo di un punto P della retta r. Si traccia la retta SP^* passante per il punto P; si traccia poi la retta O^*P^* che interseca la retta r'' in un punto P'' e si traccia infine la retta $S''P''$. Questa interseca la retta r' in un punto P' che è il corrispondente del punto P.

n. 11 – Punti limite di una punteggiata

Siano r ed r' due punteggiate proiettive ed I_∞, J'_∞ i loro punti impropri. (fig. 13). A questi punti corrispondono rispettivamente sulle r' ed r due punti (in generale impropri) I' e J, che chiameremo "punti limite".



Detti A,B due punti qualsiasi della retta r ed A', B' i loro corrispondenti sulla retta r', si ha:

(*) $$(A\ B\ J\ I_\infty) = (A'B'J'_\infty I').$$

Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due, si ha:

(*) $$(A\ B\ J\ I_{\infty}) = (B'A'I'J'_{\infty}).$$

Ma un birapporto nel quale il quarto punto è improprio si riduce ad un rapporto semplice. Quindi si ha:

(*) $$(ABJ) = (B'A'I'),$$ da cui

(*) $$\frac{AJ}{BJ} = \frac{B'I'}{A'I'}.$$

Si ricava $AJ \cdot A'I' = BJ \cdot B'I'$, ossia

(*) $$AJ \cdot A'I' = \text{costante}.$$

Essa dice: “ il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti, es. A e A', dai punti limite J e I', situati sulle rispettive punteggiate, è costante (L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 184).

n. 12 – Determinazione grafica dei punti limite di una proiettività

Consideriamo una proiettività tra due punteggiate distinte r ed r'; siano A,B,C tre punti della retta r e A', B', C' i punti corrispondenti della retta r'.
E' opportuno scegliere i centri di proiezione S ed S' coincidenti rispettivamente con i punti A' ed A delle rette r' ed r (vedi ancora fig. 13).
Sia B_o il punto di intersezione delle rette AB' e $A'B$ e C_o il punto di intersezione delle rette AC' e $A'C$. L'asse di prospettiva $s \equiv B_oC_o$, che si viene ad ottenere in relazione alla particolare scelta dei centri di proiezione S ed S', prende il nome di asse di collineazione. La determinazione di due punti corrispondenti D, D' si effettua nel modo solito.
Ora dal punto A conduciamo la parallela alla retta r'; essa taglia la retta r in un punto J_o e passa evidentemente per il punto improprio J'_{∞} della retta r'.

Se uniamo i punti A' e J_o otteniamo una retta che taglia la retta r nel punto limite J; quindi J è il punto limite della retta r corrispondente al punto improprio J'_{∞} della retta r'.
Analogamente, la retta condotta dal punto A parallelamente alla retta r passa per il punto I_{∞} di r e taglia la retta s in un punto I_o. La retta che unisce A con I_o taglia la retta r' nel punto limite I'. E' bene notare che la retta passante per J e I' è parallela alla retta s.

n. 13 – Equazione di una proiettività fra due punteggiate

Due forme di prima specie, es. due punteggiate, si dicono proiettive quando esiste fra di esse una corrispondenza biunivoca tale che il birapporto di quattro punti qualsiasi della prima retta sia uguale al birapporto dei quattro elementi corrispondenti della seconda retta (Cfr n. 6).
Vogliamo ora trovare l'equazione di una proiettività tra due punteggiate distinte r ed r'. Fissiamo sulla retta r un riferimento cartesiano Ox e sulla retta r' un riferimento $O'x'$.
Siano a,b,c le ascisse di tre punti distinti della retta r e a',b',c' le ascisse dei punti corrispondenti della retta r' (fig. 14).

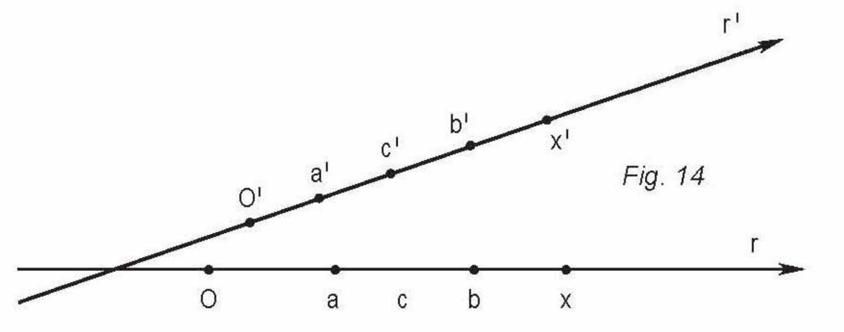


Fig. 14

Siano poi x e x' le ascisse di due punti corrispondenti delle due punteggiate.
L'equazione della proiettività π è data dall'eguaglianza di due birapporti:

(1) $$(abcx) = (a'b'c'x').$$

Sviluppando si ricava

(2) $$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 .$$

Dalla (2) si ricavano le trasformazioni lineari non degeneri

(3) $$x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \qquad \text{e} \qquad (4) \quad x = -\frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta} .$$

n. 14 – Punti uniti di una proiettività fra punteggiate sovrapposte

Consideriamo una proiettività π fra due punteggiate sovrapposte r ed r'.
Per trovare la sua equazione dobbiamo anzitutto fissare su di esse lo stesso riferimento cartesiano. Siano ora a,b,c le ascisse di tre punti della retta r e a',b',c' le ascisse dei punti corrispondenti della retta r' (fig. 15).

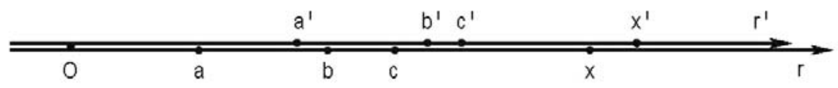


Fig. 15

Consideriamo poi due punti corrispondenti qualsiasi $X \in r$ ed $X' \in r'$ e siano x , x' le loro ascisse.
L'equazione della proiettività π è data dall'eguaglianza di birapporti

(1) $$(abcx) = (a'b'c'x').$$

Sviluppando la (1) si ha

(2) $$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 .$$

Quando $x = x'$ i due punti X, X' coincidono ed essi si dicono punti uniti nella proiettività π. In tal modo dalla (2) si ha

(3) $$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0.$$

L'equazione (3) ha due radici, quindi la proiettività tra due punteggiate sovrapposte ha due punti uniti. Essi sono reali e distinti, reali coincidenti o immaginari a seconda che sia

(4) $$\Delta = (\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0, = 0, < 0.$$

In corrispondenza la proiettività si dice iperbolica, parabolica o ellittica.

Se in una proiettività tra due forme sovrapposte esistono più di due elementi uniti, la (3) ha un numero di radici maggiore di due e quindi essa è identicamente soddisfatta, cosicché risulta $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $\beta + \gamma = 0$, cioè $\gamma = -\beta$. Ma allora la (2) si scrive:

(5) $$\beta x - \beta x' = 0, \quad \text{cioè} \quad x = x',$$

e quindi ciascun elemento coincide con il suo corrispondente, cioè: " Se in una proiettività fra due punteggiate (o forme di prima specie) sovrapposte esistono più di due punti uniti, allora ogni altro punto (o elemento) è unito e la proiettività si riduce all'identità ".

n. 15 – Involuzioni

Consideriamo ancora una proiettività π fra due punteggiate sovrapposte r ed r'. Naturalmente dobbiamo fissare su di esse uno stesso riferimento cartesiano. Sia A un punto della retta r e B' il punto della retta r' sovrapposto ad A (fig. 16).

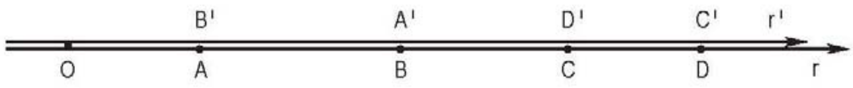


Fig. 16

La proiettività π fa corrispondere al punto A della punteggiata r un punto A' della punteggiata r'.
Ma al punto A' pensato appartenente alla retta r (lo chiameremo B) la proiettività, in generale, non fa corrispondere il punto B' sovrapposto ad A. Qualora ciò si verifichi si dice che i punti A e A' si corrispondono in doppio modo o involutoriamente e si dice anche che la coppia (A, A') è involutoria o che ha carattere involutorio.

Per esempio, nel sostegno comune alle rette r ed r' fissiamo un punto O e ad ogni punto A della retta r facciamo corrispondere il punto A' di r' simmetrico di A rispetto al punto O (fig. 17).

Fig. 17

Ovviamente, al punto B di r, coincidente con A', corrisponderà il punto B' di r' sovrapposto ad A.
La corrispondenza che così nasce fra r ed r' è una proiettività nella quale ogni coppia di punti corrispondenti (A, A') è involutoria. Una proiettività in cui tutte le coppie di punti omologhi si corrispondono in doppio modo si dice <u>involuzione</u> e due elementi corrispondenti in una involuzione si dicono anche <u>coniugati</u>.
Evidentemente, una proiettività involutoria π coincide con la sua inversa π^{-1}.

Teorema.“ Se in una proiettività fra due punteggiate sovrapposte r ed r' due punti distinti A e A' si corrispondono in doppio modo, anche tutte le altre coppie di punti omologhi si corrispondono in doppio modo (fg. 16), cioè la proiettività è una <u>involuzione</u>. In altre parole, una proiettività involutoria π coincide con la sua inversa π^{-1} ”.

Dimostrazione. Sia (A, A') una coppia di punti involutoria; allora, per definizione, al punto B di r sovrapposto al punto A' di r' corrisponde il punto B' di r' sovrapposto al punto A di r.
Sotto tale ipotesi, consideriamo un'altra coppia di punti (C, C') corrispondenti nell'assegnata proiettività. Vogliamo dimostrare che:

" se il punto D di r coincide con C', cioè se $D \equiv C'$, allora anche il punto D' di r' coincide con C, cioè $D' \equiv C$ ".

Partiamo dal birapporto $(ABCD)$.
Poiché le proiettività conservano il valore di un birapporto, si ha:

(1) $$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Ma per ipotesi abbiamo che $A' \equiv B$, $B' \equiv A$ e $C' \equiv D$,

quindi (2) $$(A'B'C'D') = (BADD').$$

Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due, si ha:

(3) $$(A'B'C'D') = (ABDD').$$

Confrontando le eguaglianze (1), (3), per la proprietà transitiva si ha:

(4) $$(ABCD) = (ABD'D).$$

La (4) ci dice che deve essere $C \equiv D'$.

Possiamo quindi dire che si ha:

(5) $A \equiv B'$, $B \equiv A'$, $D \equiv C'$, per l'ipotesi iniziale;

(6) $D' \equiv C$, per la dimostrazione precedente.

Sostituendo nel secondo birapporto della (4) si ha:

(7) $$(ABCD) = (B'A'D'C').$$

La (7) ci dice che:
" Se la coppia di punti (A, A') è involutoria, cioè è formata da punti che si corrispondono in doppio modo, anche la coppia di punti (C, C') è involutoria ".

n. 16 – Equazione di una involuzione

Consideriamo una proiettività π fra due punteggiate sovrapposte r ed r', fissando su di esse uno stesso riferimento cartesiano. L'equazione che lega le ascisse x, x' di una coppia di punti corrispondenti è:

$$(1) \qquad \alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \,, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \ .$$

Supponiamo che esista una coppia di punti involutoria e siano $\bar{x}, \bar{x}'$ le ascisse dei punti. Sostituendo queste ascisse nella (1) si ha:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\alpha\bar{x}\cdot\bar{x}' + \beta\bar{x} + \gamma\bar{x}' + \delta = 0 \ , \\ &\alpha\bar{x}'\cdot\bar{x} + \beta\bar{x}' + \gamma\bar{x} + \delta = 0 \ . \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$(*) \qquad \beta(\bar{x} - \bar{x}') + \gamma(\bar{x}' - \bar{x}) = 0 \,, \ \rightarrow \beta(\bar{x} - \bar{x}') - \gamma(\bar{x} - \bar{x}') = 0 \,,$$

e quindi $$(\beta - \gamma)(\bar{x} - \bar{x}') = 0 \ .$$

Poiché $\bar{x} \neq \bar{x}'$ si ha $\qquad (3) \quad \beta = \gamma \ .$

Ne segue che l'equazione della proiettività diventa

$$(4) \qquad \alpha xx' + \beta(x + x') + \delta = 0 \,, \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta^2 \neq 0 \ .$$

La (4) è un'equazione simmetrica in x, x'. Quindi ogni coppia di valori x, x' che la soddisfa dà luogo ad una nuova coppia di valori che soddisfa la (2) se si scambia la x con la x' e la x' con la x.
La (4), quindi, ci permette di dire che se in una proiettività una coppia di punti è involutoria, tutte le coppie di punti omologhi sono involutorie, cioè la proiettività è una involuzione e la (4) è la sua equazione.
Questo fatto è la traduzione analitica della proprietà dimostrata poco sopra con considerazioni di carattere proiettivo.

Vogliamo ora trovare gli elementi uniti di una involuzione; essi sono detti elementi doppi (E. Martinelli, Geometria, pg. 103).
Nel caso di una involuzione fra due punteggiate sovrapposte parleremo più esattamente di punti doppi. Per trovare questi punti doppi basta porre $x = x'$ nell'equazione dell'involuzione. Si ottiene così un'equazione di 2° grado

$$(5) \qquad \alpha x^2 + 2\beta x + \delta = 0 \,,$$

che ha due radici.

Il discriminante di questa equazione, $\Delta = \alpha\delta - \beta^2$, è $\neq 0$ e può essere positivo o negativo, ma mai nullo.
Nel primo caso si hanno due punti uniti reali e distinti e l'involuzione si dice iperbolica. Nel secondo caso si hanno due punti immaginari coniugati e l'involuzione si dice ellittica.
Poiché $\Delta = \alpha\delta - \beta^2 \neq 0$ l'involuzione non può avere mai due punti uniti coincidenti, cioè non esistono involuzioni paraboliche.

Diciamo inoltre: se due forme u e u' sono involutorie, data la simmetria del loro comportamento, non è necessario distinguere la u dalla u' e si parla quindi di involuzione sopra una retta o in un fascio di rette o di piani.

n. 17 – L'invariante assoluto di una proiettività

Consideriamo una proiettività fra due punteggiate r ed r', distinte o coincidenti, ed in generale tra due forme di prima specie.
Se U e V sono i punti uniti, supposti distinti, della proiettività e se (A, A'), $(B, B'), \ldots, (X, X')$ sono coppie di elementi corrispondenti, si ha:

(1) $$(UVAB) = (UVA'B') = \ldots = (UVXX') = h = \cos\tan te \ .$$

Infatti, per definizione si ha:

(2) $$(UVAB) = (UVA'B'), \qquad \text{da cui}$$

(*) $$\frac{(UVA)}{(UVB)} = \frac{(UVA')}{(UVB')}, \quad \rightarrow \quad \frac{(UVA)}{(UVA')} = \frac{(UVB)}{(UVB')}, \quad \text{infine}$$

(3) $$(UVAA') = (UVBB') = h\ .$$

Il numero h si dice invariante assoluto della proiettività. Se le due punteggiate sono sovrapposte e la proiettività è una involuzione si ha

(4) $$(UVAA') = (UVA'A) = -1,$$

cioè l'invariante assoluto di una proiettività involutoria vale -1: infatti, abbiamo visto che quando in un birapporto i punti sono distinti e il suo valore non varia scambiando i due primi o i due ultimi punti, allora il birapporto è armonico.

Ricordando che i punti che si corrispondono in doppio modo si dicono coniugati, possiamo dire:

" In una involuzione, ogni coppia di elementi coniugati separa armonicamente gli elementi doppi; e viceversa".

Esempio.
Consideriamo una involuzione sopra una retta e supponiamo che uno dei due punti doppi sia improprio, per es. $U = U_\infty$ (fig. 18).

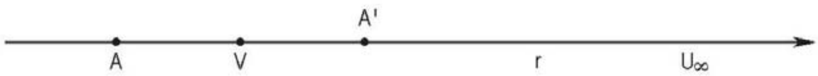


Fig. 18

Allora, se (A, A') è una coppia di punti coniugati si ha:

(5) $$(U_\infty VAA') = -1, \quad \text{da cui} \quad (A'AVU_\infty) = (A'AV) = -1.$$

Si ricava $$\frac{A'V}{AV} = -1, \quad \text{da cui (6)} \quad AV = -A'V,$$

quindi l'involuzione considerata non è altro che la simmetria rispetto al punto doppi V (L. Campedelli, Geometria I, pg. 224).

n. 18 – Il centro e la potenza dell'involuzione sopra una punteggiata

Sopra una punteggiata r si abbia una involuzione ω_o, i cui punti doppi U e V siano a distanza finita (fig. 19).

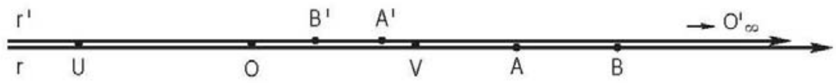


Fig. 19

Allora il punto improprio O'_∞ della r' sovrapposta ad r corrisponde un punto O, detto centro dell'involuzione e che è l'unico punto limite della ω_o. Ovviamente per esso si ha:

(*) $\qquad (UVOO'_\infty) = -1$, quindi $\qquad (UVO) = -1, \rightarrow \quad \dfrac{UO}{VO} = -1,$

ossia $\quad$ (1) $\qquad UO = OV;$

la (1) ci dice che " il centro dell'involuzione è il punto medio del segmento finito UV, che ha per estremi i due punti doppi dell'involuzione".

Ora, se (A, A') e (B, B') sono due coppie di elementi coniugati si ha:

(2) $$(ABOO'_\infty) = (A'B'O'_\infty O);$$

ma il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due; possiamo quindi scrivere

(3) $$(ABOO'_\infty) = (B'A'OO'_\infty).$$

Ne segue $\qquad (ABO) = (A'B'O), \qquad$ da cui $\quad \dfrac{AO}{BO} = \dfrac{B'O}{A'O}$, e quindi

(4) $$AO \cdot A'O = BO \cdot B'O = k,$$

cioè: " il prodotto delle distanze orientate di due punti coniugati dal centro dell'involuzione è una costante k. Questo valore prende il nome di potenza della involuzione".

In particolare, se i punti coniugati A, A' coincidono con il punto doppio U e i punti B, B' con il punto doppio V, si ha:

(5) $$\overline{OU}^2 = \overline{OV}^2 = k\,,$$

ed è $k > 0$ o $k < 0$ a seconda che l'involuzione ω_o sia iperbolica o ellittica (L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 199).

Viceversa, le coppie dei punti per i quali ha luogo la (4) appartengono ad una stessa involuzione di centro O e di potenza k.

Infine, se quattro punti U, V, A e A' formano un gruppo armonico, due di essi, U e V, possono sempre riguardarsi come punti doppi di una involuzione individuata in modo unico e in cui i punti A e A' si corrispondono in doppio modo. Il centro O dell'involuzione corrisponde con il punto medio del segmento UV e per le (4), (5) si ha:

(6) $$\overline{UO}^2 = \overline{VO}^2 = AO \cdot A'O = -1\,.$$

La (6) esprime una proprietà caratteristica del gruppo armonico.

n. 19 – Problemi di applicazione su proiettività e involuzioni

Consideriamo due punteggiate sovrapposte r ed r', fissiamo su di esse uno stesso riferimento cartesiano e consideriamo due punti U e V di ascisse rispettive 2 e 1.
a) Trovare l'equazione dell'involuzione che ha U e V come punti doppi.
b) Trovare l'equazione della proiettività che ha U e V come punti uniti e nella quale si corrispondano i punti $A(-1)$ e $A'(3)$.

Problema a)
L'equazione di una involuzione su una punteggiata è

(7) $$\alpha xx' + \beta(x + x') + \delta = 0\,, \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta^2 \neq 0\,.$$

Poiché α, β, δ sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità, possiamo porre $\alpha = 1$ e scrivere:

(8) $$xx' + \beta(x + x') + \delta = 0\,.$$

Ponendo prima $x = x' = 2$ e poi $x = x' = 1$ la (8) fornisce il sistema:

(9) $$\begin{cases} 4 + 4\beta + \delta = 0 \\ 1 + 2\beta + \delta = 0\,, \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} 4\beta + \delta = -4 \\ 2\beta + \delta = -1\,, \end{cases} \quad \begin{cases} 4\beta + \delta = -4 \\ -2\beta - \delta = +1\,. \end{cases}$$

Si trova subito la soluzione $\beta = -\frac{3}{2}$, $\delta = 2$;
quindi l'equazione dell'involuzione è

(10) $$2xx' - 3(x + x') + 4 = 0 .$$

Problema b).

L'equazione generale di una proiettività è:

(*) $$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 ,$$ ossia, assumendo $\alpha = 1$,

(11) $$xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 .$$

Ponendo prima $x = x' = 2$, poi $x = x' = 1$ e infine $x = -1$, $x' = 3$ si ha il sistema di tre equazioni in tre incognite:

(12) $$\begin{cases} 4 + 2\beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 1 + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -3 - \beta + 3\gamma + \delta = 0 , \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\beta + 2\gamma + \delta = -4 \\ \beta + \gamma + \delta = -1 \\ -\beta + 3\gamma + \delta = 3 . \end{cases}$$

Risolvendo con un qualsiasi metodo si trova che il sistema ha la soluzione:

(*) $$\beta = -\frac{5}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = 2 ,$$

e quindi l'equazione della proiettività è:

(*) $$xx' - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x' + 2 = 0 ,$$ ossia

(13) $$2xx' - 5x - x' + 4 = 0 .$$

n. 20 – Punti limite di due punteggiate proiettive: 1° esempio.

Scrivere l'equazione della proiettività fra due punteggiate distinte r ed r' nella quale ai punti di ascisse $0,1,2$ della r corrispondono rispettivamente, sulla r', i punti di ascisse $-2; 0; 2/3$ .Trovare le ascisse dei punti limite sulle due punteggiate (L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 210).

Soluzione

Il birapporto di quattro punti della r è uguale al birapporto dei punti corrispondenti della retta r'. Ne segue che le ascisse di due punti omologhi x, x' sono legate dalla relazione

(1) $$(0,1,2,x) = (-2,0,\frac{2}{3},x'), \qquad \text{da cui}$$

(*) $$\frac{(0,1,2)}{(0,1,x)} = \frac{(-2,0,2/3)}{(-2,0,x')},$$

(*) $$\frac{2-0}{2-1}:\frac{x-0}{x-1} = \frac{2/3+2}{2/3-0}:\frac{x'+2}{x'-0},$$

(*) $$\frac{2(x-1)}{x} = \left(\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x'}{x'+2}, \quad \rightarrow \quad \frac{2(x-1)}{x} = \frac{4x'}{x'+2},$$

(2) $$\frac{2x'}{x'+2} = \frac{x-1}{x} .$$

Liberando dai denominatori si ha: $\qquad 2xx' = (x-1)\cdot(x'+2)$.

Ne segue che l'equazione fra le due punteggiate è:

(3) $$xx' - 2x + x' + 2 = 0 .$$

Vogliamo ora trovare le ascisse dei punti limite J e I' delle due punteggiate. A tale scopo ricaviamo dalla (3) le espressioni di x e x'. Si ha:

(*) $$x(x'-2) = -(x'+2), \qquad \text{da cui}$$

(4) $$x = \frac{2+x'}{2-x'};$$

ma anche $\qquad x'(x+1) = 2x-2, \qquad$ da cui

(5) $$x' = \frac{2x-2}{x+1} .$$

Dalla (4) possiamo ricavare l'ascissa del punto limite J, cioè l'ascissa del punto della retta r corrispondente al punto improprio J'_∞ della retta r'. Si ha:

(*) $$x_J = \lim_{x'\to\infty} \frac{2+x'}{2-x'} = -1,$$

e quindi (6) $J \equiv (-1)$.

Analogamente, dalla (5) possiamo ricavare l'ascissa del punto limite I', cioè l'ascissa del punto della retta r', che corrisponde al punto improprio I_∞ della retta r. Si ha:

(*) $$x_{I'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-2}{x+1} = 2,$$

e quindi (6) $I' \equiv (2)$.

Se ora X, X' è una coppia di punti corrispondenti sulle due punteggiate, il prodotto delle loro distanze dai punti limite situati sulle rispettive rette è costante, cioè:

(7) $$XJ \cdot X'J' = \cos t.$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $XJ = -1 - x$, $X'I' = 2 - x'$; ne segue

(*) $(-1-x)\cdot(2-x') = \cos t$, e quindi

(8) $$(x+1)\cdot(x'-2) = k.$$

Possiamo ricavare il valore della costante k ricordando che le ascisse di due punti corrispondenti sono $x = 0$, $x' = -2$. Sostituendo nella (8) si ha:

(*) $k = 1\cdot(-2-2)$, ossia $k = -4$.

Sostituendo nella (8) si ricava che l'equazione della proiettività è:

(9) $(x+1)\cdot(x'-2) = -4$, da cui

(3) $$xx' - 2x + x' + 2 = 0.$$

Si ritrova così l'equazione (3) della proiettività ottenuta attraverso l'eguaglianza dei birapporti di due quaderne di punti corrispondenti.

n. 21 – Punti limite di due punteggiate proiettive: 2° esempio

Scrivere l'equazione della proiettività fra due punteggiate distinte r ed r', conoscendo i punti limite $J(3),\ I'(-1)$ e una coppia di punti omologhi $A \equiv (-2)$ e $A' \equiv (+1)$.

Soluzione
Se $X \equiv (x)$ e $X' \equiv (x')$ sono due punti omologhi, ricordando che il prodotto delle distanze dai punti limite delle rette sulle quali essi giacciono è costante, si ha:

(1) $$XJ \cdot X'J' = AJ \cdot A'J'.$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$\begin{aligned} XJ &= 3 - x, \qquad & X'I' &= -1 - x', \\ AJ &= 3 + 2, \qquad & A'I' &= -1 - 1\ . \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1) si ha:

(*) $$(3 - x) \cdot (-1 - x') = 5 \cdot (-2).$$

Scambiando opportunamente segno nei primi due fattori si ha:

(2) $$(x - 3) \cdot (x' + 1) = -10, \qquad \text{ossia}$$

(3) $$xx' + x - 3x' + 7 = 0.$$

La (3) è l'equazione della proiettività richiesta.

n. 22 – Problemi sulle involuzioni

Data una retta e fissato sopra di essa un sistema di ascisse, scrivere l'equazione dell'involuzione individuata dalle due coppie di punti coniugati $A(0),\ A'(-1)$ e $B(2),\ B'(3)$.

Soluzione
L'equazione di una involuzione su una punteggiata è

(1) $$axx' + b(x + x') + d = 0, \quad \text{con} \quad ad - b^2 \neq 0.$$

Ponendo prima $x = -1,\ x' = 0$ e poi $x = 2,\ x' = 3$ si ha il sistema

(2) $$\begin{cases} 0-b+d=0 \\ 6a+5b+d=0\ . \end{cases}$$

Si ricava $b=d$; e poiché i coefficienti a,b,c sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $b=d=1$. Si ricava $a=1$ e quindi l'involuzione ha l'equazione

(3) $$xx'-x-x'-1=0\ .$$

Ponendo $x'=x$ la (3) diventa un'equazione di 2° grado che con le sue radici ci dà le ascisse dei punti doppi U, V dell'involuzione. Si ottiene:

(*) $$x^2-2x-1=0\ , \quad \text{da cui}$$

(3) $$U \equiv x_1 = 1-\sqrt{2}\ , \qquad V \equiv x_2 = 1+\sqrt{2}\ .$$

Poiché i due punti doppi sono reali, l'involuzione è iperbolica.

Il punto medio del segmento UV ci dà il centro O dell'involuzione; la sua ascissa è:

(*) $$x_O = \frac{x_1+x_2}{2} = 1\ .$$

La potenza dell'involuzione è la costante k data dall'espressione

(*) $$BO \cdot B'O = \overline{OU}^2 = \overline{OV}^2 = k\ .$$

Con facili calcoli si ricava:

(*) $$k = \overline{OV}^2 = (1+\sqrt{2}-1)^2 = 2\ ,$$

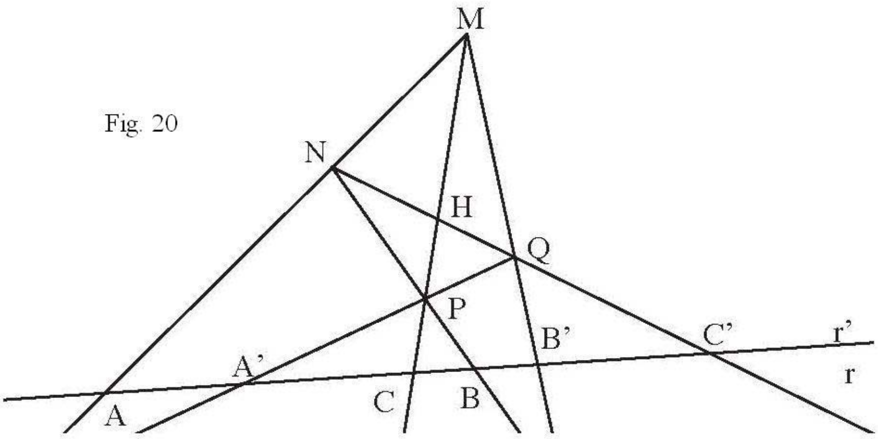
oppure $$BO = 1-2 = -1, \qquad B'O = 1-3 = -2$$

e quindi $$k = BO \cdot B'O = 2\ .$$

n. 23 – Teorema di Désargues

Per quanto riguarda le involuzioni, ci limitiamo a ricordare anche il teorema di Désargues sul quadrangolo completo:
" Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo segano sopra una retta r, non passante per alcun vertice, tre coppie di punti coniugati in una stessa involuzione".

Fig. 20



Fatta la costruzione geometrica indicata in fig. 20, sulla retta $r \equiv r'$ abbiamo una involuzione nella quale le coppie di punti involutorie sono $(A, A'), (B, B')$ e (C, C'). Per dimostrare che la coppia di punti (A, A') è involutoria basta far vedere che si ha l'eguaglianza di birapporti

(1) $$(ABCA') = (A'B'C'A);$$

dove nel primo birapporto i punti sono pensati appartenenti alla retta r, mentre nel secondo birapporto i punti sono pensati appartenenti alla retta sovrapposta r'.

Analogamente, per dimostrare che la coppia di punti (C, C') è involutoria basta far vedere che si ha l'eguaglianza di birapporti

(2) $$(ABCC') = (A'B'C'C),$$

con la solita avvertenza per l'appartenenza dei punti (vedi il lavoro di Nazario Magnarelli sul teorema di Désargues sul quadrangolo completo, indicato nella bibliografia).

n. 24 – Involuzione in un fascio di rette proprio

Nel fascio di rette proprio

(1) $$y = mx - 3$$

determinare l'equazione dell'involuzione che ha le rette doppie $y = 3x - 3$ e $y = -x - 3$.

Soluzione

Facendo $m = 0$ ed $m = 1$ nell'equazione (1) otteniamo il punto $C(0, -3)$, che rappresenta il centro del fascio (fig. 21).

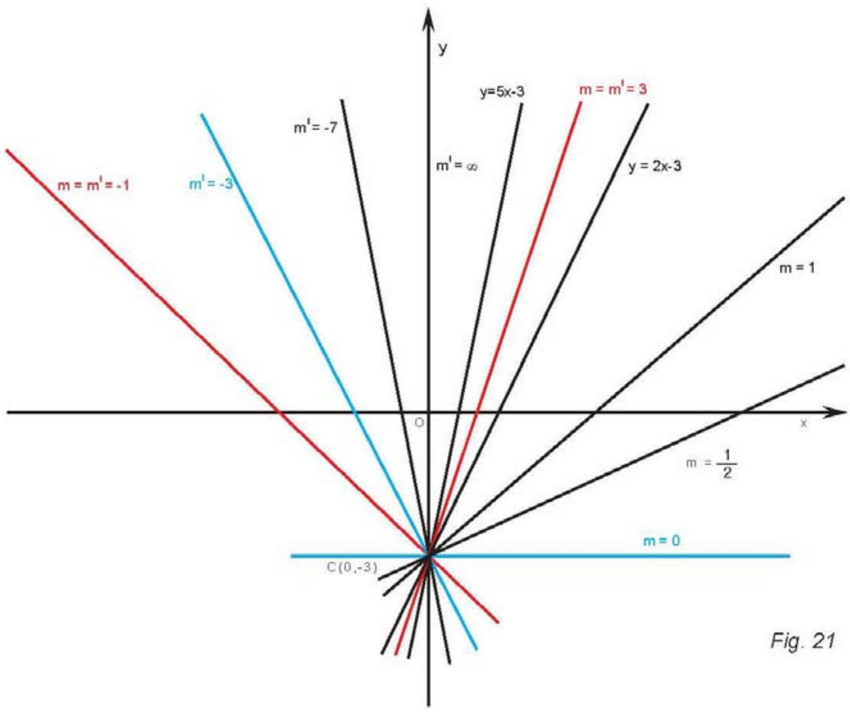


Fig. 21

L'equazione dell'involuzione nel fascio di rette è

(2) $$\alpha mm' + \beta(m + m') + \delta = 0, \text{ con } \alpha\delta - \beta^2 \neq 0.$$

Poiché i coefficienti α, β, δ sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $\alpha = 1$ e scrivere

(3) $$mm' + \beta(m + m') + \delta = 0.$$

Ponendo prima $m = m' = 3$ e poi $m = m' = 1$ si ha il sistema

(4) $$\begin{cases} 9+6\beta+\delta=0 \\ 1-2\beta+\delta=0\ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6\beta+\delta=-9 \\ 2\beta-\delta=+1\ . \end{cases}$$

Il sistema ha la soluzione $\beta=-1$, $\delta=-3$; ne segue che l'equazione dell'involuzione nel fascio è

(5) $$mm'-m-m'-3=0\ .$$

Vediamo i coefficienti angolari di alcune rette e quelli delle rispettive rette coniugate:

- $m=0,\quad m'=-3;\qquad m=1,\quad m'=\infty;\qquad m=2,\quad m'=5;$
- $m=1/2,\quad m'=-7;\qquad m=-3/2,\quad m'=-3/5\ .$

CAPITOLO TERZO

PROPRIETA' DIFFERENZIALI DELLE SUPERFICI

n. 1 – Equazioni parametriche regolari di una superficie

Sia Σ una superficie rappresentata dalle equazioni parametriche

(1) $$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v),$$

dove $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sono funzioni di classe ≥ 1 (cioè dotate di derivate parziali continue almeno del primo ordine), definite in un dato campo del piano uv, che non occorre precisare.

Supponiamo che vi sia corrispondenza biunivoca tra il punto (u,v) del campo di definizione e il punto P(x,y,z) che descrive la superficie Σ.
Supponiamo inoltre che la matrice jacobiana delle funzioni (1)

(2) $$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} \neq 0$$

abbia caratteristica due: abbiamo indicato ciò con il simbolo $\neq 0$. Si dice allora che Σ e la sua rappresentazione parametrica (1) sono regolari.

Sia $P_o(x_o, y_o, z_o)$ il punto della superficie Σ corrispondente al punto (u_o, v_o) del campo di definizione delle tre funzioni. Come è noto dall'Analisi matematica, nell'intorno del punto (u_o, v_o) le due equazioni $x = x(u,v)$, $y = u(u,v)$ possono risolversi rispetto alle variabili u,v e si ottiene:

(3) $$u = \varphi_1(x,y), \qquad v = \varphi_2(x,y).$$

Sostituendo nella terza delle equazioni (1) si ottiene:

(4) $$z = z[\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)] \;, \qquad \text{ossia}$$

(5) $$z = \varphi(x,y).$$

Viceversa, la superficie di equazione (5) si può sempre rappresentare con le equazioni parametriche

(6) $$x = u, \qquad y = u, \qquad z = \varphi(u,v).$$

Consideriamo ora una linea (regolare) L tracciata sulla superficie Σ e passante per i punti $P(u,v)$, $P_1(u+du, v+dv)$.

La lunghezza dell'arco ds che unisce questi due punti è data dalla formula

(7) $$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad \text{ove}$$

(8) $$\begin{aligned} E &= \left|\vec{P}_u\right| = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= \vec{P}_u \times \vec{P}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= \left|\vec{P}_v\right| = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \ . \end{aligned}$$

Se la superficie Σ è data dalle equazioni (6), si ha:

(9) $$E = 1 + \varphi_x{}^2, \qquad F = \varphi_x \varphi_y, \qquad G = 1 + \varphi_y{}^2, \quad \text{e quindi}$$

(10) $$ds^2 = (1+\varphi_x^2)dx^2 + 2\varphi_x\varphi_y dxdy + (1+\varphi_y^2)dy^2 \ .$$

L'espressione $$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

si dice prima forma quadratica fondamentale.

n. 2 – Tangenti asintotiche

Consideriamo una porzione di superficie regolare Σ. Possiamo sempre pensare che nell'intorno di un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ la sua equazione si possa esplicitare rispetto a z, cioè si possa scrivere nella forma

(1) $$z = \varphi(x,y).$$

Supponiamo inoltre che la funzione sia analitica, cioè che essa sia sviluppabile con la formula di Taylor, onde

(2) $$\begin{aligned} z &= z_o + \varphi^o{}_x(x-x_o) + \varphi^o{}_y(y-y_o) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\varphi^o_{xx}(x-x_o)^2 + 2\varphi^o_{xy}\cdot(x-x_o)(y-y_o) + \varphi^o_{yy}(y-y_o)^{\ 2}\right] + \ldots.., \end{aligned}$$

ove $\quad z_o = \varphi(x_o, y_o)$, $\quad \varphi_x{}^o = \varphi_x(x_o, y_o)$, $\quad \varphi^o_{xx} = \varphi_{xx}(x_o, y_o)$, ecc.

Il piano tangente nel punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ ha l'equazione

(3) $$z = z_o + \varphi^o{}_x(x - x_o) + \varphi^o{}_y(y - y_o) .$$

Se intersechiamo la superficie Σ con il piano tangente in P_o, si ottiene una linea C la quale, in generale, ha un punto doppio nel punto di contatto, e che è rappresentata dal sistema

(4) $$\begin{cases} z = z_o + \varphi_x{}^o(x - x_o) + \varphi_y{}^o(y - y_o) \\ z = z_o + \varphi^o_x(x - x_o) + \varphi^o_y(y - y_o) + \\ + \dfrac{1}{2}\left[\varphi^o_{xx}(x - x_o)^2 + 2\varphi^o_{xy}(x - x_o)(y - y_o) + \varphi^o_{yy}(y - y_o)^2\right] + \ldots \ldots = 0 \end{cases} .$$

Il punto P_o, come altre volte, si dirà <u>iperbolico, parabolico o ellittico</u> a seconda che le tangenti principali a C nel punto P_o siano reali e distinte, reali e coincidenti o immaginarie coniugate. Esse si diranno <u>tangenti asintotiche a Σ nel punto</u> P_o.

Eliminando z fra le due equazioni del sistema (4) si ottiene l'equazione

(5) $$\frac{1}{2}\left[\varphi^o_{xx}(x - x_o)^2 + 2\varphi^o_{xy}(x - x_o)(y - y_o) + \varphi^o_{yy}(y - y_o)^2\right] + \ldots\ldots = 0 .$$

La (5) rappresenta la proiezione C' della curva C sul piano xy.

Le tangenti asintotiche in P_o sono date dal sistema:

(6) $$\begin{cases} z = z_o + \varphi_x{}^o(x - x_o) + \varphi_y{}^o(y - y_o) \\ \varphi^o_{xx}(x - x_o)^2 + 2\varphi^o_{xy}(x - x_o)(y - y_o) + \varphi^o_{yy}(y - y_o)^2 = 0 \end{cases} .$$

Consideriamo ora il determinante hessiano

(7) $$H(x_o, y_o) = \begin{vmatrix} \varphi^o_{xx} & \varphi^o_{xy} \\ \varphi^o_{yx} & \varphi^o_{yy} \end{vmatrix} .$$

Le tangenti asintotiche saranno reali e distinte, reali e coincidenti, immaginarie coniugate a seconda che il determinante $H(x_o, y_o)$ sia < 0, $= 0$, o > 0.
In corrispondenza, il punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ della superficie sarà iperbolico, parabolico o ellittico.

La curva data dal sistema di equazioni

(*) $$H(x, y) = 0 \quad e \quad z = \varphi(x, y)$$

è una linea parabolica della superficie Σ in quanto <u>essa è a punti parabolici</u>.
Si potrebbe dimostrare che le superfici a punti parabolici sono tutte e sole le rigate sviluppabili.

ESERCIZIO n. 1 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 251)

Scrivere le equazioni cartesiane della linea parabolica L della superficie

(1) $$\Sigma: \; z = \varphi(x, y) = y^3 - x^2 y + x \, .$$

Dedurre che L è intersezione di Σ con una coppia di piani e determinare i punti impropri di L.

<u>Soluzione</u>. Risulta

(2) $$\begin{array}{lll} \varphi_x = -2xy + 1 \, , & \varphi_y = 3y^2 - x^2 \, , & \\ \varphi_{xx} = -2y \, , & \varphi_{xy} = -2x \, , & \varphi_{yy} = 6y \, . \end{array}$$

L'espressione del determinante Hessiano è

(3) $$H(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 6y \end{vmatrix} = -12y^2 - 4x^2 = -4(x^2 + 3y^2) \, .$$

L'equazione della linea parabolica L è data quindi dal sistema

(4) $$\begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ H(x, y) = 0 \, , \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y^3 - x^2 y + x \\ x^2 + 3y^2 = 0 \, , \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y^3 - x^2 y + x \\ (y\sqrt{3} + ix)(y\sqrt{3} - ix) = 0 \, . \end{cases}$$

Si vede così che la linea parabolica L è intersezione di Σ con i piani

(*) $\qquad y\sqrt{3} + ix = 0\,, \qquad y\sqrt{3} - ix = 0\ .$

Scriviamo la (1) in coordinate omogenee e troviamo i punti impropri di L. Basta risolvere il sistema

$$(4) \qquad \begin{cases} zx_4{}^2 = x_2{}^3 - x_1{}^2x_2 + x_1x_4{}^2 \\ x_1{}^2 + 3x_2{}^2 = 0 \\ x_4 = 0\ . \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = 0$ e $x_1{}^2 = -3x_2{}^2$ nella prima equazione del sistema (4) si ha

(*) $\qquad 0 = x_2{}^3 + 3x_2{}^2x_2\ , \quad$ da cui $\quad x_2{}^3 = 0\,.$

Si ricava la soluzione tripla $\qquad x_1 = 0\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = 1\,, \quad x_4 = 0\,.$

La linea parabolica ha quindi il punto improprio $P_\infty(0,0,1,0)$.

ESERCIZIO n. 2 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria pag. 251)

Trovare le equazioni delle tangenti asintotiche nell'origine O alla superficie:

$$(1) \qquad \Sigma:\ x = y^2 - 2yz + z^3\,.$$

Scrivere poi le equazioni della linea parabolica L di Σ. Riconoscere che L è una conica e precisarne il tipo affine.

<u>Soluzione</u>. Le tangenti asintotiche in un generico punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ della superficie $x = \varphi(y,z)$ sono date dal sistema:

$$(2) \qquad \begin{cases} x - x = \varphi_y{}^o(y - y_o) + \varphi_z{}^o(z - z_o) \\ \varphi^o_{yy}(y - y_o)^2 + 2\varphi^o_{yz}(y - y_o)(z - z_o) + \varphi^o_{zz}(z - z_o)^2 = 0\ . \end{cases}$$

Esse rappresentano rispettivamente il piano tangente e i termini di 2° grado dello sviluppo di Taylor della funzione $x = \varphi(y,z)$

Dalla funzione $\qquad \varphi(y,z) = y^2 - 2yz + z^3 \quad$ si ricava:

(3) $\varphi_y = 2y - 2z, \quad \varphi_z = -2y + 3z^2, \quad \varphi_{yy} = 2, \quad \varphi_{yz} = -2, \quad \varphi_{zz} = 6z$,

e quindi si ha $\varphi^o_{yy} = 2$, $\varphi^o_{yz} = -2$, $\varphi^o_{zz} = 0$.

Con questi valori il sistema (2) diventa:

(*) $$\begin{cases} x = 0 \\ 2(y-0)^2 - 4(y-0)(z-0) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2yz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y(y-2z) = 0 \end{cases} .$$

Si trova così che le tangenti asintotiche nell'origine O sono le rette

(4) $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} .$$

Poiché le due rette sono distinte, il punto O(0,0,0) è iperbolico.

Calcoliamo ora il determinante hessiano in un punto generico: Si ha:

(5) $$H(y,z) = \begin{vmatrix} \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +2 & -2 \\ -2 & 6z \end{vmatrix} = 12z - 4 .$$

La linea parabolica L ha le equazioni

(6) $$\begin{cases} x = \varphi(y,z) \\ H(y,z) = 0 , \end{cases} \to \begin{cases} x = y^2 - 2yz + z^3 \\ z = 1/3 . \end{cases}$$

Si ricava la linea di equazioni

(7) $$\begin{cases} x = y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{27} \\ z = 1/3 . \end{cases}$$

Si tratta di una parabola giacente sul piano $z = \dfrac{1}{3}$, parallelo al piano xy.

ESERCIZIO n. 3 (D. Ghinelli; Geometria, pag. 249)

Determinare le equazioni parametriche della rigata Σ avente direttrice

$$(1) \qquad D: \quad x = u, \qquad y = u^2, \qquad z = u \qquad (u \in R)$$

e come generatrice g(u) nel generico punto della D la retta di parametri direttori (0,1,u).
Scritta l'equazione di Σ nella forma $z = \varphi(x, y)$, dimostrare che tutti i suoi punti sono iperbolici. Determinare equazioni cartesiane separate delle tangenti asintotiche a Σ nel punto $P_o(1,1,1)$.

Soluzione. Le equazioni parametriche di Σ sono:

$$(2) \qquad x = u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = u + uv \qquad (u, v \in R^2).$$

Dalle prime due equazioni si ottiene:

$$(*) \qquad u = x, \qquad v = y - x^2,$$

e sostituendo nella terza equazione si ha: $z = x + x(y - x^2)$, ossia

$$(3) \qquad z = x + xy - x^3.$$

Posto $\varphi(x, y) = x + xy - x^3$ si ottiene

$$(4) \qquad \varphi_x = 1 + y - 3x^2, \quad \varphi_y = x, \quad \varphi_{xx} = -6x, \quad \varphi_{xy} = 1, \quad \varphi_{yy} = 0,$$

onde (5)
$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

e pertanto tutti i punti di Σ sono iperbolici e le tangenti asintotiche in ognuno di essi saranno reali e distinte, come presto vedremo.

Ricordiamo che le tangenti asintotiche a Σ in un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ sono date dal sistema

$$(6) \qquad \begin{cases} z - z_o = \varphi_x{}^o (x - x_o) + \varphi_y{}^o (y - y_o) \\ \varphi_{xx}^o (x - x_o)^2 + 2\varphi_{xy}^o (x - x_o)(y - y_o) + \varphi_{yy}^o (y - y_o)^2 = 0 \end{cases}.$$

Nel caso del punto $P_o(1,1,1)$, le tangenti asintotiche sono date dal sistema

$$(7)\quad \begin{cases} z-1=-1(x-1)+1(y-1) \\ -6(x-1)^2+2\cdot(x-1)(y-1)+0=0\,, \end{cases} \quad \begin{cases} z-1=-x+1+y-1 \\ -3(x-1)^2+(x-1)(y-1)=0\,. \end{cases}$$

Si ricava

$$(8)\qquad \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ (x-1)(y-1-3x+3)=0\,, \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ (x-1)(y-3x+2)=0\,. \end{cases}$$

Pertanto le tangenti asintotiche nel punto $P_o(1,1,1)$ sono le rette

$$(a)\qquad \begin{cases} x-1=0 \\ x-y+z-1=0\,, \end{cases} \qquad (b)\qquad \begin{cases} y-3x+2=0 \\ x-y+z-1=0\,. \end{cases}$$

<u>II) Parte</u>. Vogliamo ora trovare l'equazione differenziale delle linee asintotiche della superficie (3) (vedi parag. seguente); essa è data dalla formula

$$(9)\qquad \varphi_{xx}dx^2+2\varphi_{xy}dxdy+\varphi_{yy}dy^2=0\,.$$

Nel nostro caso si ha:

$$(*)\qquad -6xdx^2+2dxdy=0\,,\quad \text{da cui}\quad (10)\quad dxdy-3xdx^2=0.$$

La (10) si spezza nelle due equazioni

$$(11)\qquad dx=0\,,\qquad \text{e}\qquad dy=3xdx\,.$$

Gli integrali di queste due equazioni sono:

$$(12)\qquad x=C \quad \text{e} \quad y=\frac{3}{2}x^2+K\,.$$

Ne segue che per ogni punto della superficie passano due linee asintotiche, le cui proiezioni sul piano xy sono le equazioni (12).
Le linee asintotiche che passano per il punto $P_o(1,1,1)$ hanno le proiezioni

$$(13)\qquad x=1\,,\qquad \text{e}\qquad y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\,.$$

Le tangenti a queste due curve nel punto $U(1,1)$ sono le rette:

(14) $x=1$ e $y-1=3(x-1)$ (ossia $y-3x+2=0$).
Le tangenti asintotiche alla superficie Σ nel punto $P_o(1,1,1)$ si ottengono mettendo a sistema le equazioni (14) con quella del piano tangente a Σ nel punto $P_o(1,1,1)$, cioè con la (8_1): $x-y+z-1=0$

Concludendo, le equazioni delle due tangenti asintotiche in P_o sono, come avevamo già trovato:

(a) $\begin{cases} x-1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} y-3x+2=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$.

n. 3 – Linea asintotica di una superficie.

Si dice linea asintotica di una superficie Σ una linea L che tocchi in ogni suo punto una delle tangenti asintotiche a Σ nel punto considerato.
Se la superficie è regolare, possiamo sempre pensare che in un intorno di un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ la sua equazione si possa esplicitare rispetto a z, cioè si possa scrivere nella forma
(1) $$z=\varphi(x,y).$$

Se P_o è un punto di una linea asintotica e il punto (x_o+dx, y_o+dy, z_o+dz) appartiene ad una delle tangenti asintotiche alla superficie nel punto P_o, la seconda equazione del sistema (6) del paragrafo **n. 2** diventa

(2) $$\varphi_{xx}dx^2+2\varphi_{xy}dxdy+\varphi_{yy}dy^2=0.$$

La (2) può considerarsi l'equazione differenziale delle linee asintotiche, giacché essa ne definisce le proiezioni ortogonali sul piano xy e quindi definisce le linee stesse. Si può dimostrare che
" Le linee asintotiche possono considerarsi come le linee che osculano in ogni loro punto il piano tangente alla superficie".
L'equazione differenziale (2) si può risolvere dividendo per dx^2; si ottiene

(3) $$\varphi_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\varphi_{xy}\frac{dy}{dx}+\varphi_{xx}=0 .$$

Si tratta di una equazione differenziale di 2° grado, da cui si ha:

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi_{xy} \pm \sqrt{\varphi_{xy}^2 - \varphi_{xx}\varphi_{yy}}}{\varphi_{yy}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi_{xy} \pm \sqrt{-H(x,y)}}{\varphi_{yy}},$$

ove H(x,y) è il determinante Hessiano.
La (3) è una equazione differenziale lineare di 1° grado, o a variabili separabili, che in generale sappiamo risolvere.

n. 4 – Equazione differenziale delle linee asintotiche in coordinate interne
(E. Martinelli, Geometria; pag. 619)

Supponiamo che una superficie regolare Σ sia rappresentata, in forma parametrica, dalle equazioni

(1) $$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v).$$

In tal caso, l'equazione differenziale delle linee asintotiche della superficie è

(2) $$L' \cdot du^2 + 2M'dudv + N'dv^2 = 0,$$

ove $L' = |x_{uu} \quad x_u \quad x_v|$, $M' = |x_{uv} \quad x_u \quad x_v|$, $N' = |x_{vv} \quad x_u \quad x_v|$.

Il primo membro della (2) coincide, a meno di un fattore di proporzionalità, con la seconda forma fondamentale di una superficie.

PROBLEMA 5 E-bis (Dispense di Geometria ORUR; pag. 42, Quesito IV)

Consideriamo la superficie regolare Σ di equazioni parametriche:

(1) $$\begin{cases} x = u + t \\ y = t^2 \\ z = u \cdot t \end{cases} .$$

Trovare l'equazione differenziale delle linee asintotiche e la linea passante per il punto U(1,1,0).

Soluzione. L'equazione differenziale delle linee asintotiche è

(2) $$L'du^2 + 2M'dudt + N'dt^2 = 0.$$

Calcoliamo L', M', N'. Si ottiene:

$$(3_1) \qquad L' = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_t & y_t & z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 2t & u \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

$$(3_2) \qquad M' = \begin{vmatrix} x_{ut} & y_{ut} & z_{ut} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_t & y_t & z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 2t & u \end{vmatrix} = 2t \ ,$$

$$(3_3) \qquad N' = \begin{vmatrix} x_{tt} & y_{tt} & z_{tt} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_t & y_t & z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 2t & u \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} t & 1 \\ u & 1 \end{vmatrix} = 2(t-u) \ .$$

Da queste espressioni si ricava che l’equazione delle linee asintotiche è:

$$(4) \qquad 4t \cdot dudt + 2(t-u) \cdot dt^2 = 0 .$$

Escludendo $dt = 0$, che fornirebbe il sistema delle generatrici, resta l’equazione:

$$(*) \qquad 2t \cdot du = (u-t) \cdot dt , \qquad \text{da cui}$$

$$(5) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{u-t}{2t}, \qquad \text{cioè} \qquad u'(t) = \frac{1}{2t}u - \frac{1}{2} \ .$$

Si tratta di una equazione del tipo

$$(6) \qquad y'(x) = \alpha(x)y + \beta(x) ,$$

cioè di una equazione differenziale ordinaria del $1°$ ordine; come sappiamo, essa ammette l’integrale generale

$$(7) \qquad y(x) = e^{\int \alpha(x)dx} \cdot \left[c + \int \beta(x) e^{-\int \alpha(x)dx} \cdot dx \right] \ .$$

Nel caso dell’equazione (5), l’integrale generale è:

(8) $$u(t)=e^{\int\frac{1}{2t}dt}\cdot\left[c+\int(-\frac{1}{2})e^{-\int\frac{1}{2t}dt}\cdot dt\right],\quad \text{da cui}$$

(9) $$u(t)=e^{\ln\sqrt{t}}\cdot\left[c-\frac{1}{2}\int e^{\ln\sqrt{\frac{1}{t}}}\cdot dt\right],$$

(*) $$u(t)=\sqrt{t}\cdot\left[c-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt\right],$$

(*) $$u(t)=\sqrt{t}\cdot\left[c-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt\right]=\sqrt{t}\cdot\left[c-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}\right],$$

(10) $u=c\sqrt{t}-t$, da cui (11) $u+t=c\sqrt{t}$,

o se si vuole (12) $(u+t)^2=kt$.

Sostituendo le (10), (11) nelle equazioni parametriche (1) della superficie Σ si ha:

(13) $$\begin{cases} x(t)=c\sqrt{t} \\ y(t)=t^2 \\ z(t)=t(-t+c\sqrt{t}) \end{cases} .$$

Posto $\sqrt{t}=\tau$, si ottiene

(*) $$\begin{cases} x=c\tau \\ y=\tau^4 \\ z=\tau^2(-\tau^2+c\tau) \end{cases},\quad \text{da cui}\quad (14)\quad \begin{cases} x=c\tau \\ y=\tau^4 \\ z=\tau^3(c-\tau) \end{cases} .$$

Le (14) sono le equazioni parametriche delle linee asintotiche della superficie Σ. La linea che passa per il punto U(1,1,0) si ottiene imponendo che sia $c=1$. Le equazioni di questa linea asintotica sono:

(15) $$\begin{cases} x=\tau \\ y=\tau^4 \\ z=\tau^3(1-\tau) \end{cases} .$$

Consideriamo ancora una volta le equazioni parametriche (1) della superficie Σ.
Come subito si vede il punto U(1,1,0) di essa si ottiene in corrispondenza dei valori $u = 0$, $t = 1$ (e quindi $\tau = 1$).
La tangente asintotica alla linea (15) nel punto U ha i parametri direttori

(16) $$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=1} = 1 \ , \qquad \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_{\tau=1} = 4 \ , \qquad \left(\frac{dz}{d\tau}\right)_{\tau=1} = -1 \ .$$

Ne segue che le equazioni cartesiane della tangente asintotica nel punto U(1,1,0) sono:

(*) $$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-0}{-1} \ ,$$

ossia (17) $$x - 1 = \frac{y-1}{4} = -z \ .$$