**Nazario Magnarelli – Carlo Sintini**

**LATINA**

# Equazioni Differenziali

# PREFAZIONE

Il titolo del volume dice già che con esso ci siamo limitati a trattare prevalentemente quell'aspetto dell'Analisi matematica che riguarda le equazioni differenziali.
Di questo vastissimo argomento abbiamo ricordato solo i teoremi che riguardano il primo biennio delle facoltà scientifiche. Essi sono stati chiariti e approfonditi con molti esercizi di applicazione, svolti con tutti i calcoli matematici.
Abbiamo presentato inoltre altri tipi di esercizi, veramente interessanti, sui quali lo studente, per mancanza di tempo, non riesce a soffermarsi con il necessario approfondimento. Ricordiamo, fra essi, le applicazioni del teorema di Torricelli – Barrow nel calcolo dei limiti di forme indeterminate in cui compaia un integrale, le traiettorie ortogonali e le evolute delle curve e alcune applicazioni del calcolo delle variazioni.
Questo lavoro mostrerà allo studente che, tenendo presenti alcune regole fondamentali, egli può affrontare lo studio di un interessante campo della matematica e acquisire la padrona dei relativi procedimenti di applicazione.

Latina, Aprile 2004

Gli autori

Nazario Magnarelli

Carlo Sintini

# BIBLIOGRAFIA


1) **A. Ghizzetti, Lezioni di analisi matematica, vol. II – Ed. Veschi, Roma,**
2) **A. Ghizzetti, Esercizi di analisi matematica, vol. II – Ed. Veschi, Roma,**
3) **A. Sommerfeld, Lezioni di Meccanica – Zanichelli, Bologna,**
4) **S. Spataro, S. Tribulato, Equazioni differenziali – Edizioni Tecnos,**
5) **C. Cassisa, P. Vernole, Problemi di Analisi mat. – La Sapienza (RM),**
6) **Feldhofer, Esercizi di Analisi matematica – Ed. Giorgio, Torino,**
7) **V.E. Bononcini, Istituzioni di matematiche – Pàtron editore, Bologna,**
8) **T. Apostol, Analisi Matematica, voll. I, II – Bollati Boringhieri,**
9) **E. Giusti, Analisi matematica vol. II – Bollati Boringhieri,**
10) **E. Giusti, Esercizi di Analisi matematica, vol. II – Bollati Boringhieri.**

# INDICE

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

**N. 1 – Definizioni.**

Si dice equazione differenziale ordinaria di ordine $n$ un'equazione nella quale figura come incognita una funzione $y = y(x)$ di una variabile $x$ e che stabilisca un legame fra la variabile $x$, la funzione $y$ e le prime $n$ derivate $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ di questa. Una tale espressione è dunque del tipo

(1) $$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 ,$$

dove la $f$ è una funzione delle variabili $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ definita in un certo campo dello spazio a $n+2$ dimensioni (A. Ghizzetti, Analisi Mat. Vol. 2°, pg. 362).

L'aggettivo ordinaria sta a ricordare che la funzione incognita $y$ dipende da una sola variabile $x$. Si possono anche considerare equazioni differenziali in cui la funzione incognita dipenda da due o più variabili e che stabiliscano un legame fra queste variabili, la funzione incognita e le sue derivate parziali di ordine n. Tali equazioni si dicono equazioni differenziali alle derivate parziali.

Torniamo alle equazioni differenziali ordinarie.
Ogni funzione $y = y(x)$ derivabile $n$ volte in un certo intervallo $I$ dell'asse $x$ e tale da far risultare identicamente in $I$

$$f\left[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right] = 0$$

in ogni punto dell'intervallo $I$ si dice soluzione o meglio un integrale dell'equazione differenziale (1).
Il grafico di questa funzione $y = y(x)$ si dice curva integrale dell'equazione differenziale (1).
Risolvere o integrare l'equazione (1) significa determinare tutti i suoi integrali.
Se è possibile risolvere l'equazione differenziale (19 rispetto alla deivata di ordine massimo si ha

(2) $$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) .$$

La (2) si dice "equazione differenziale ordinaria di ordine n di forma normale".

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n$

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 ,$$

o in forma normale

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) .$$

Se si riesce a trovare $n$ suoi integrali linearmente indipendenti $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ , possiamo dire che abbiamo ottenuto l'integrazione dell'equazione differenziale e che l'integrale generale è

(3) $$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x),$$

quindi la totalità degli integrali dell'equazione differenziale dipende da $n$ costanti arbitrarie $c_1,c_2,...,c_n$, ossia le sue curve integrali formano una famiglia $\infty^n$ rappresentabile con una equazione del tipo

(4) $$y=y(x,c_1,c_2,...,c_n),$$

o più in generale

(4') $$\varphi(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0.$$

Anzi, data una famiglia $\infty^n$ di curve piane (ossia una famiglia dipendente da $n$ parametri essenziali variabili), si può in generale costruire un'equazione differenziale di ordine $n$ alla quale soddisfino tutte le curve della famiglia data. Queste sono quindi le curve integrali dell'equazione differenziale trovata.

Infine, si dice integrale particolare ogni curva integrale dell'equazione differenziale

$$f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0 \quad \text{o} \quad y^{(n)}=F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)=0$$

che si ottiene dall'integrale generale

$$y=y(x,c_1,c_2,...,c_n) \quad \text{o} \quad \varphi(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0$$

dando alle costanti $c_1,c_2,...,c_n$ dei valori numerici particolari, compresi i valori $c_1=c_2=...=c_n=\pm\infty$ .

Potrebbe darsi che l'eq. differenziale ammetta anche alcuni integrali che non rientrano nelle formule (4) o (4'), cioè che non si ottengono per alcun valore dato ai parametri $c_1,c_2,...,c_n$. Essi si dicono integrali singolari dell'equazione differenziale.
Illustriamo i concetti espressi con alcuni esempi.

Esempio 1) . Consideriamo l'equazione differenziale lineare ed omogenea del 2° ordine

(5) $$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2}{x^2+1}y=0 .$$

Essa ammette i due integrali $y_1(x)=x$ e $y_2(x)=x^2-1$, come è immediato verificare. Essi sono definiti su tutto l'asse $x$, cioè $I(-\infty,+\infty)$, e sono linearmente indipendenti perché il loro wronskiano vale

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2+1\neq 0,$$

sempre diverso da zero nell'intervallo $I(-\infty,+\infty)$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione differenziale (5) è

(6) $$y(x) = C_1 x + C_2(x^2 - 1)\ .$$

Esempio 2). Risolvere l'equazione differenziale del 1° ordine di forma normale

(7) $$y' = f(x)\ ,$$

ove $f(x)$ è una funzione continua in un certo intervallo $I$.

Si ha $$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \rightarrow \quad dy = f(x)dx\ ,$$

e se $a$ è un punto qualsiasi dell'intervallo $I$ si ha (8) $y(x) = C + \int_a^x f(t)dt$ , cioè l'eq. differenziale $y' = f(x)$ ha gli infiniti integrali dati dalla (8). Si dice anche che la (7) ammette una famiglia $\infty^1$ di curve integrali dipendenti da un parametro $C$.

Esempio 3). Integrare l'equazione differenziale (9) $y' = y$ .

Si ha $$\frac{dy}{dx} = y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx\ ;$$

quindi $$\ln y - \ln C = x, \quad \rightarrow \quad \ln \frac{y}{C} = x\ ;$$

da cui $$\frac{y}{C} = e^x, \quad \text{infine} \quad y = C \cdot e^x\ ,$$

cioè l'equazione differenziale (9) ha gli infiniti integrali dati dall'equazione (10), cioè ammette una famiglia $\infty^1$ di curve integrali.

Esempio 4). Integrare la seguente equazione differenziale del 2° ordine di forma normale

(a) $$y'' = f(x)\ .$$

ove $f(x)$ è una funzione continua in un certo intervallo $I$ dell'asse $x$. Fissato un punto $a$ di I si ottiene:

$$y'(x) = C_1 + \int_a^x f(s)ds\ , \qquad \rightarrow y(x) = C_1 \cdot x + C_2 + \int_a^x \left[ \int_a^t f(s)ds \right] dt\ .$$

Assumendo $t - x$ come integrale di dt si ha:

$$y(x) = C_1 \cdot x + C_2 + \int_a^x \left[ \int_a^t f(s)ds \right] d(t-x) \,.$$

Integrando per parti l'ultimo integrale si ha:

$$\int_a^x \left[ \int_a^t f(s)ds \right] d(t-x) = \left[ \cancel{(t-x)\int_a^t f(s)ds} \right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) \cdot D_t \left[ \int_a^t f(s)ds \right] dt \;.$$

Quindi $$y(x) = C_1 \cdot x + C_2 + \int_a^x (x-t) f(t) dt \;.$$

NOTA. Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione $\varphi$ che soddisfa l'equazione del tipo $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$ . Si ha

$$\varphi_x(x, y, c_1, c_2) + \varphi_y(x, y, c_1, c_2) \cdot y' = 0 \;;$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{xy} \cdot y' + \varphi_{yx} \cdot y' + \varphi_{yy} y' y' + \varphi_y \cdot y'' = 0 \,, \rightarrow \quad \varphi_{xx} + 2\varphi_{xy} \cdot y' + \varphi_{yy} \cdot y'^2 + \varphi_y \cdot y'' = 0 \;.$$

**N. 2 – Equazione differenziale il cui integrale è una famiglia di curve date.**

Affrontiamo ora il problema inverso di quello finora affrontato. Esso è illustrato dai seguenti esempi.

Esempio 1). Trovare l'equazione differenziale che ha come curve integrali tutte le curve della famiglia definita dall'equazione

(1) $$y = x - 1 + c \cdot e^{-x} \,.$$

Deriviamo rispetto a x : $$y' = 1 - c \cdot e^{-x} \;.$$

Sommando membro a membro possiamo eliminare $c$ e otteniamo:

(2) $$y' + y - x = 0 \;.$$

Questa equazione è soddisfatta da tutte le funzioni (1) ed è facile vedere che non si hanno altri integrali oltre a questi. Infatti dalla (2), moltiplicando per $e^x$, si ottiene:

$$e^x \cdot (y'+y) = x \cdot e^x \ , \quad \rightarrow \quad \left(e^x y\right)' = x\ e^x \ ,$$

quindi (3) $$e^x y = c_o + \int xe^x dx \ .$$

Ora $$\int xe^x dx = \int x de^x \ , \quad \rightarrow \quad (4) \quad \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx \ .$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$$e^x y = c_o + xe^x - e^x + c_1 \quad , \quad \text{da cui} \quad ye^x = e^x(x-1) + c \ ;$$

infine $$y = x - 1 + ce^{-x} \ .$$

Si ottiene così la famiglia di curve (1) .
L’equazione differenziale (2) ha quindi l’integrale generale dato dalla famiglia di curve (1) ed inoltre essa non ha integrali singolari.

Esempio 2). Trovare l’equazione differenziale che ha come integrali tutte le curve della famiglia definita dall’equazione

(5) $$y = \frac{1}{x+C} \ .$$

Derivando rispetto a x si ottiene: $$y'(x) = -\frac{1}{(x+C)^2} \ .$$

Dalla (5) si ha $$-y^2 = -\frac{1}{(x+C)^2} \ .$$

Confrontando le due ultime espressioni si ricava (6) $y'+y^2 = 0$ .

L’equazione differenziale (6) è soddisfatta da tutte le curve della famiglia (5); essa è soddisfatta anche dall’integrale $y=0$, che si può ottenere, al limite, per $C \rightarrow \infty$; $y=0$ è quindi un integrale particolare.

Mostriamo che l’eq. differenziale (6), cioè $y'+y^2=0$, non ammette altri integrali oltre a quelli forniti dalla funzione (5). Infatti dalla (6) si ha:

$$\frac{y'}{y^2} = -1 , \quad \rightarrow \quad -\left(\frac{1}{y}\right)' = -1 , \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{y} = x + C , \quad \text{ossia} \quad y = \frac{1}{x+C} \ .$$

Questa funzione, pertanto, rappresenta l'integrale generale dell'eq. differenziale (6).
NOTARE. L'integrale $y = 0$ si può ottenere dall'integrale generale ponendo $C = \infty$; pertanto esso è un integrale particolare.

Esempio 3). Trovare l'equazione differenziale che ha come curve integrali tutte le curve della famiglia di rette date dall'equazione

(7) $$y = 2Cx - C^2.$$

Derivando rispetto a x si ha $y' = 2C$, da cui (8) $C = y'/2$.

Sostituendo la (8) nella (7) si ha: $$y = 2\frac{y'}{2}x - \frac{y'^2}{4},$$

da cui $4y = 4y'x - y'^2$, e quindi (9) $y'^2 - 4y'x + 4y = 0$.

Si ottiene una equazione differenziale del 1° ordine, ma di forma non normale; essa ha come curve integrali tutte le rette

$$y = 2Cx - C^2.$$

Ma anche l'equazione $y = x^2$ soddisfa l'eq. differenziale (9); infatti si ha:

$$4x^2 - 4 \cdot 2x \cdot x + 4x^2 = 0, \text{ cioè } \qquad 0 = 0.$$

Quindi anche la funzione $y = x^2$ rappresenta un integrale dell'eq. differenziale

(9) $$y'^2 - 4y'x + 4y = 0.$$

Ma l'eq. $y = x^2$ non può ottenersi dall'equazione delle curve integrali

$$y = 2Cx - C^2$$

per alcun valore di C, finito o infinito. Ne segue che la funzione $y = x^2$ è un integrale singolare dell'eq. differenziale (9).

Più precisamente, consideriamo una qualsiasi equazione differenziale

(a) $$f\left[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right] = 0,$$

e sia (b) $$\varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

il suo integrale generale.
Allora, ogni curva integrale che si può ricavare dall'integrale generale (b) dando alle costanti $c_1, c_2, ..., c_n$ dei valori particolari si dice integrale particolare ; invece le curve integrali che non si possono ottenere dall'integrale generale qualunque siano i valori dati alle costanti $c_1, c_2, ..., c_n$ si dicono integrali singolari.

Facciamo vedere che la curva $y = x^2$ (integrale singolare dell'eq. differenziale data) è l'inviluppo della famiglia di rette $y = 2Cx - C^2$.

Infatti, derivando rispetto a C si ricava il sistema

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ f_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y - 2Cx + C^2 = 0 \\ -2x + 2C = 0, \quad \text{da cui} \quad C = x \ . \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (c) si ha $\quad y = x^2$ . (c.v.d.)

Esempio 4) (Demidovic, pag. 320).
a) Trovare l'equazione differenziale che ha come curve integrali tutte le curve della famiglia definita dall'equazione

$$y = Cx^2 ;$$

si dice anche " trovare l'equazione differenziale della famiglia di curve $y = Cx^2$ ".

Soluzione

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} y = Cx^2; \quad \text{da cui} \quad C = \dfrac{y}{x^2} \\ y' = 2Cx \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di C nella seconda eq. del sistema si ha

$$y' = 2x \cdot \frac{y}{x^2}, \quad \rightarrow \quad y' = \frac{2}{x} y \ .$$

Si ha così un'equazione differenziale del tipo $\quad y' = \alpha(x)y + \beta(x)$ .

b) Trovare l'equazione differenziale della famiglia di curve

$$\text{(2)} \qquad x^3 = Cx^2 - Cy^2 \ , \qquad \text{con} \quad y = y(x) \ .$$

Derivando rispetto a $x$ si ha $3x^2 = 2Cx - 2Cy \cdot y'$ , ossia $3x^2 = 2C(x - yy')$ .
Possiamo quindi scrivere il sistema

$$(3) \qquad \begin{cases} x^3 = C(x^2 - y^2), \quad \text{da cui} \quad C = x^3 \big/ (x^2 - y^2) \\ 3x^2 = 2C(x - yy') \ . \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di $C$ nella seconda equazione del sistema si ha:

$$3\cancel{x^2} = 2(x - yy') \cdot \frac{x^{\cancel{3}}}{x^2 - y^2} \ , \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 3y^2 = 2x^2 - 2xyy',$$

$$2xyy' = 3y^2 - x^2 \ , \quad \text{da cui} \quad y' = \frac{3}{2x} y - \frac{x}{2y} \ ,$$

ossia (4)

$$y' = \frac{3}{2x} y - \frac{x}{2} y^{-1} \ .$$

La ) è un'equazione di Bernouilli $y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^n$ con $n = -1$ .

<u>Verifica</u>. Nell'intervallo illimitato $x > 0$ risolvere l'eq. differenziale (4).

Poniamo $u(x) = [y(x)]^{1-n}$ , ossia $u(x) = y^2(x)$ ,

da cui (5) $y(x) = u^{1/2}(x)$ e derivando (6) $y' = \frac{1}{2} u^{-1/2}(x) \cdot u'$ .

Sostituendo le (5), (6) nella (4) si ha:

$$\frac{1}{\cancel{2}} u' u^{-1/2} = \frac{3}{\cancel{2}x} u^{1/2} - \frac{x}{\cancel{2}} u^{-1/2} \ .$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per $u^{1/2}(x)$ si ha

(7)

$$u' = \frac{3}{x} u - x \, .$$

La (7) è un'equazione differenziale lineare non omogenea del 1° ordine, cioè

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)$$

Il suo integrale generale è del tipo

$$y = e^{\int \alpha(x)dx} \cdot \left[ k + \int \beta(x) \cdot e^{-\int \alpha(x)dx} \cdot dx \right] .$$

Quindi

$$u = e^{\int 3dx/x} \cdot \left[ k + \int (-x) \cdot e^{-\int 3dx/x} \cdot dx \right],$$

$$u(x) = e^{3\log x} \cdot \left[ k - \int x e^{-3\log x} \cdot dx \right],$$

$$u(x) = e^{\log x^3} \cdot \left[ k - \int x e^{\log 1/x^3} \cdot dx \right] = x^3 \cdot \left[ k - \int \frac{x}{x^3} dx \right],$$

$$u(x) = x^3 \cdot \left[ k - \int x^{-2} \cdot dx \right] = x^3 \cdot \left[ k + \frac{1}{x} \right];$$

infine $$u(x) = kx^3 + x^2 \quad .$$

Ricordando che $y(x) = \sqrt{u}$ si ha :

$$y = \sqrt{kx^3 + x^2} \ , \qquad \to y^2 = kx^3 + x^2 \, , \qquad kx^3 = y^2 - x^2 \quad .$$

Infine $$x^3 = C(y^2 - x^2) \quad .$$

Abbiamo così verificato che la famiglia di curve (2) ci dà le curve integrali dell'eq. differenziale (4).

Esempio 5). Trovare l'equazione differenziale della famiglia di curve

$$y^2 + \frac{1}{x} = 2 + C \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \quad . \tag{8}$$

E' da pensare che sia $y = y(x)$; pertanto derivando la funzione rispetto ad $x$ si ha:

$$2yy' - x^{-2} = Ce^{-\frac{y^2}{2}} \cdot D\left( -\frac{y^2}{2} \right) \ ,$$

$$2yy' - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} 2yy' \cdot C \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \ , \text{ da cui } \qquad 2x^2yy' - 1 = -x^2yy' \cdot C \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \quad .$$

Derivando l'equazione (8) si ricava quindi la relazione :

(*) $$x^2yy' \cdot Ce^{-\frac{y^2}{2}} = 1 - 2x^2yy' \ , \quad \to \ (9) \qquad Ce^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{x^2yy'} - 2 \quad .$$

Sostituendo la (9) nella (8) si ha : $$y^2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x^2yy'} - 2 \, ,$$

da cui (10) $$y^3x^2y' + xyy' = 1 \ , \qquad \text{o anche } \ y'(x^2y^3 + xy) = 1.$$

La (10) è l'equazione differenziale che ha come integrale generale tutte le curve della famiglia (8).

Esempio 6). Trovare l'equazione differenziale della seguente famiglia di curve:

$$(11) \qquad y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-x}.$$

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} \\ y'' = 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x} \end{cases}.$$

Ricaviamo da questo sistema le espressioni di $C_1e^{2x}$ e $C_2e^{-x}$.

Sommando membro a membro si ha $y' + y'' = 6C_1 \cdot e^{2x}$, $C_1e^{2x} = (y' + y'')/6$;

$$(*) \qquad \begin{cases} -2y' = -4C_1e^{2x} + 2C_2e^{-x} \\ \quad y'' = \quad 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x} \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha $y'' - 2y' = 3C_2e^{-x}$, $C_2e^{-x} = (y'' - y')/3$.

Sostituendo nella (11) le espressioni di $C_1e^{2x}$ e di $C_2e^{-x}$ si ottiene

$$y = \frac{1}{6}(y' + y'') + \frac{1}{3}(y'' - y'), \quad \to \quad 6y = y' + y'' + 2y'' - 4y',$$

da cui $3y'' - 3y' = 6y$, infine (12) $y'' - y' - 2y = 0$.

Esempio 4). Trovare l'equazione differenziale che ha come curve integrali la famiglia $\Phi$ di circonferenze passanti per l'origine O e aventi il centro sull'asse x:

$$\Phi: \quad (x - c)^2 + y^2 = c^2, \quad \text{ossia (10)} \quad \Phi: \quad x^2 + y^2 - 2cx = 0.$$

Derivando la (10) si ha :

$$(*) \qquad 2x + 2yy' - 2c = 0,$$

$$\text{ossia (11)} \qquad x + yy' = c$$

Eliminando il parametro c fra le equazioni (10),(11) si ha:

$$x^2 + y^2 - 2x(x + yy') = 0\,,$$

$$x^2 + y^2 - 2x^2 - 2xyy' = 0\,,$$

(12) $$y^2 - x^2 = 2xyy'\,,$$

infine (13) $$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad :$$

la (13) è l’equazione differenziale avente la famiglia di circonferenze (10) come curve integrali.

## N. 3 - Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.

Le equazioni differenziali a variabili separabili del primo ordine si possono presentare sotto le due forme seguenti:

(*) $$y' = f(x)\cdot g(y) \quad \text{e} \qquad X(x)\cdot Y(y)dx + X_1(x)\cdot Y(y)_1 dy = 0\ .$$

<u>Prima forma</u>: (1) $$y' = f(x)\cdot g(y)\ .$$

Si risolve così: $$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)\ , \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\,,$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C\ .$$

Se per un certo valore $y = y_o$ abbiamo $g(y_o) = 0$, allora la funzione $y = y_o$, come subito si vede, è una soluzione dell’equazione (1).

<u>Seconda forma</u>: (2) $$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y(y)_1 dy = 0 \quad \text{con} \quad X_1(x)Y(y) \neq 0\ .$$

Si ottiene così: $$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0\,,$$

Integrando si ha $\displaystyle\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C$ .

Se a e b sono radici rispettivamente delle equazioni $X_1(x) = 0$ e $Y(y)=0$, allora le rette $x = a$ e $y=b$ sono curve integrali dell'equazione (2).

Esempio 1) ( Demidovic, pag. 323).

Risolvere l'eq. differenziale (3) $xy' + y = 0$, o $y' = -\frac{y}{x}$,

e trovare una soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = 2$.

Una soluzione evidente è $y = 0$ . Un'altra soluzione si può trovare separando le variabili; si ha:

(4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; supponendo $y \neq 0$ e dividendo per y si ha $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ ;

integrando si ha $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C_1|$ , $\rightarrow$ $\ln|y \cdot x| = \ln|C_1|$, da cui $y \cdot x = \pm C_1$.

Ne segue che l'integrale generale dell'eq. differenziale (3) è dato dalla funzione

(5) $y = \frac{C}{x}$ , ove $C = \pm C_1$.

Notare. Supponendo $y \neq 0$ si perde la soluzione $y = 0$ . Questa soluzione, però, si ottiene dalla (5) per $C = 0$; quindi $y = 0$ è un <u>integrale particolare</u>.

Troviamo ora la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 2$ , cioè per $x = 1$ si abbia $y = 2$.

Si ha $2 = \frac{C}{1}$; l'integrale desiderato è $y = \frac{2}{x}$ .

Esempio 2). (Ghizzetti, 2° vol. pag. 378).

Risolvere l'equazione differenziale non lineare del primo ordine (6) $y' = xy^2$ .

Si vede anzitutto che essa ha la soluzione $y = 0$.

Dalla (6) si ha $\frac{dy}{dx} = xy^2$ ;

separando le variabili  e integrando si ottiene si ha:

$$\frac{dy}{y^2} = x \cdot dx\,, \quad \text{ossia} \quad \int y^{-2}dy = \int x \cdot dx\ , \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + C\right).$$

Ne segue che l'integrale generale dell'eq. differenziale è :  (7) $\quad y = -\dfrac{2}{x^2 + C}$ .

Per $C = \infty$ si ottiene l'integrale $y = 0$, che è quindi un integrale particolare.
Vogliamo ora l'integrale che verifica la condizione $y(1) = -1$ .Ponendo nella (7) $x = 1$ e $y = -1$ si ha $-1 = -2/(1 + C)$ , da cui si trova $C = 1$.
L'integrale che verifica la condizione iniziale data è $\quad y = -\dfrac{2}{x^2 + 1}$ .

Esempio 3). Integrare l'equazione differenziale (8) $y' = y^{2/3}$.

Una soluzione evidente è $y = 0$; un'altra soluzione si ottiene separando le variabili:

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}\ , \quad \to y^{-2/3}dy = dx\ , \quad \to \quad \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}\, y^{-\frac{2}{3}+1} = x + C\,;$$

da cui $\qquad 3y^{\frac{1}{3}} = x + C$ , quindi $\qquad$ (9) $\quad y = \left(\dfrac{x + C}{3}\right)^3$ .

La (9) è l'integrale generale dell'equazione differenziale data.

<u>Notare</u>. La soluzione $y = 0$ non può ottenersi dalla (9) per nessun valore di C, finito o infinito; pertanto $y = 0$ è un <u>integrale singolare</u> dell'eq. differenziale $y' = y^{2/3}$.

Troviamo l'integrale che verifica la condizione $y(1) = 0$ , si ha : $\left(\dfrac{1 + C}{3}\right)^3 = 0$, $C = -1$ .

Concludendo $\quad y = \left(\dfrac{x - 1}{3}\right)^3$ è un integrale particolare, $y = 0$ è un integrale singolare.

Esempio 4).(E. Giusti, Esercizi II, pag. 62)
Integrare l'equazione differenziale (10) $\quad y' = y(y - 1)(x + 1)$ .

Due integrali particolari sono $y = 0$ e $y = 1$. Per $y \neq 0$ e $y \neq 1$ si ha:

$$\frac{dy}{dx}=y(y-1)(x+1)\,; \qquad \text{possiamo dividere (11)} \qquad \frac{dy}{y(y-1)}=(x+1)\cdot dx\,.$$

Spezzando la frazione si ha $\displaystyle \frac{1}{y(y-1)}=\frac{-1}{y}+\frac{1}{y-1}$ .

Sostituiamo nella (11) e integriamo

$$-\int\frac{dy}{y}+\int\frac{d(y-1)}{y-1}=\int(x+1)\cdot dx\ .$$

Si ottiene : $\displaystyle \ln\frac{|y-1|}{|y|A^2} = \frac{1}{2}x^2+x$, da cui $\displaystyle \frac{|y-1|}{|y|A^2}=e^{x+x^2/2}$.

Se $y>1$ o $y<0$ possiamo sbarazzarci dei valori assoluti e si ha:

$$y-1=yA^2\cdot e^{x+x^2/2}, \quad \text{e quindi} \qquad (12) \qquad y=\frac{1}{1-A^2e^{x+x^2/2}}\ .$$

Se invece $0<y<1$ si ha $y-1<0$ e quindi $|y-1|=1-y$ e $|y|=y$.

Dalla (12) si ha $1-y=yA^2e^{x+x^2/2}$

e quindi (13) $\displaystyle y=\frac{1}{1+A^2e^{x+x^2/2}}$

Esempio 2).(E. Giusti, Esercizi II, pag. 62)
Integrare l'equazione differenziale a variabili separabili

(14) $$y'=(1+2x)\cdot e^{-y}\ .$$

Come si vede è una equazione del tipo $y'=f(x)\cdot g(y)$ .

Procedimento: $\displaystyle \frac{dy}{dx}=(1+2x)\cdot e^{-y}\,;$

separiamo le variabili $e^{y}\cdot dy=(1+2x)dx$ .

Integrando si ha $\rightarrow$ $\int e^{y}\cdot dy=\int(1+2x)\cdot dx$ ,

(*) $e^{y}=x^2+x+C$, infine (15) $y=\ln\left|x^2+x+C\right|$.

Come si vede, abbiamo ottenuto la y come funzione di x .

**N. 4 – Nozioni da tenere sempre presenti.**

**Valore del tesoro che vale 5 lire = 5 lire;**

analogamente si ha $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ . Infatti si può fare il seguente calcolo:

sappiamo che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, quindi $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$;

si ottiene $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

a) analogamente si ha: $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x)=x$ .

Infatti si può fare il seguente ragionamento:

poniamo $\operatorname{sen}\alpha=x$ , da cui $\operatorname{arcsen}x=\alpha$ ;
si ottiene $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x)=\operatorname{sen}\alpha=x$ .

Dal ragionamento fatto si ricavano altre conclusioni:

b) $\cos(\operatorname{arcsen}x)=\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$ ,

quindi $\cos(\operatorname{arcsen}x)=\sqrt{1-x^2}$ .

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}x)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

quindi $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

d) Sia $\operatorname{tg}\alpha=x$ , da cui $\alpha=\operatorname{arctg}x$ .

Ricordando note formule si ha

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{e} \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Si ricava che: $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}x)=\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,

$$\cos(\operatorname{arctg}x)=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

e) Integrale notevole.

Sia R il simbolo di una funzione razionale; allora i differenziali del tipo $R(\cos x, \operatorname{sen}x)dx$ si razionalizzano con la sostituzione $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$.

Esempio. Si calcoli l'integrale indefinito (1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}$ .

Si ha (2) $1+\operatorname{sen}x=1+\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\rightarrow$ $1+\operatorname{sen}x=\dfrac{1+t^2+2t}{1+t^2}=\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}$;

differenziando la (1) si ha: $\cos x\cdot dx=\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}\cdot dt$ ,

$$\cos x\cdot dx=\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}dt\ ,\qquad \frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}dx=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^{\cancel{2}}}dt\ ,$$

da cui (3) $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ .

Tenendo conto delle (2), (3) per l'integrale (1) si ha:

$$\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}=\int\frac{\cancel{1+t^2}}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{\cancel{1+t^2}}dt=2\int(1+t)^{-2}\cdot d(1+t)=\frac{2}{-2+1}(1+t)^{-1}+C\ ,$$

quindi $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}=\frac{-2}{1+t}+C$, infine $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}=\frac{-2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$ .

**N. 5 - Equazioni differenziali del tipo** $y' = f(ax + by + C)$ **con** $b \neq 0$**.**

Esempio 1). Integrare l'equazione differenziale (1) $y' = \text{sen}(x + y + 3)$.

Poniamo $u = x + y + 3$, quindi $y' = \text{sen}u$.

Si ricava $\dfrac{du}{dx} = 1 + y'$, da cui $u' = 1 + y'$

e quindi (2) $\dfrac{du}{dx} = 1 + \text{sen}u$.

Separando le variabili, dalla (2) si ha

$$\frac{du}{1+\text{sen}u} = dx \;, \quad \text{e integrando si ha} \quad (3) \qquad \int \frac{du}{1+\text{sen}u} = x + k\,.$$

L'integrale che figura nella (3) è noto e si ha:

$$\frac{-2}{1+\text{tg}\dfrac{u}{2}} = x + C\,, \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{1+\text{tg}\dfrac{u}{2}} = -\frac{x+k}{2}\;,$$

$$1+\text{tg}\frac{u}{2} = -\frac{2}{x+k}\;, \qquad \text{tg}\frac{u}{2} = -\left(1+\frac{2}{x+k}\right), \qquad u = -2\cdot\text{arctg}\left(1+\frac{2}{x+k}\right)\;;$$

da cui $$x + y + 3 = -2\cdot\text{arctg}\left(1+\frac{2}{x+k}\right),$$

infine (4) $$y = -x - 3 - 2\cdot\text{arctg}\left(1+\frac{2}{x+k}\right)\,.$$

La (4) è l'integrale generale dell'equazione differenziale (1).

Esempio 2) (Demidovic, pag. 324)

Trovare l'integrale della seguente equazione differenziale: (x-y+1)y'=1,

ossia (5) $y' = \dfrac{1}{x-y+1}$, o anche (5') $x - y + 1 = \dfrac{dx}{dy}$ .

Si tratta di una equazione del tipo $y' = f(ax + by + C)$ con $b \neq 0$,

e abbiamo visto che essa si riduce ad una eq. differenziale a variabili separabili.
Poniamo (6) $u = x - y + 1$, da cui $y = x - u + 1$; derivando si ha

(7) $$y' = 1 - u'.$$

Sostituendo le (6), (7) nella (5) si ha:

$$1 - u' = \frac{1}{u}, \qquad 1 - \frac{1}{u} = u', \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u} \ .$$

Separando le variabili si ha $\frac{u}{u-1}du = dx$, $\frac{u-1+1}{u-1}du = dx$.

Ne segue $du + \frac{du}{u-1} = dx$, ossia $du + \frac{d(u-1)}{u-1} = dx$ .

Integrando si ha $$u + \ln|u-1| = x - \ln C \ .$$

Ricordando che $x - y + 1$ si ha : $\cancel{x} - y + 1 + \ln|x-y| = \cancel{x} + C$,

da cui $\ln\left|\frac{x-y}{C}\right| = y - 1$, quindi $x - y = C \cdot e^{y-1}$, ossia $x = y + C \cdot \frac{e^y}{e}$ ,

Ne segue che l’integrale generale dell’equazione differenziali è
(8) $$x = y + k \cdot e^y \ .$$

Esempio 3) (Edizioni Tecnos, n° 18, pag. 28)

Integrare l’equazione differenziale
(9) $$y' = (x-y)^2 + (x-y) + 1 .$$

Si tratta di un’equazione del tipo $y' = f(ax + by + c)$ con $b \neq 0$,
e abbiamo visto che questa si riduce ad una equazione differenziale a variabili separabili.
Poniamo: (10) $$x - y = z \ .$$

Differenziando totalmente si ha :

$$dx - dy = dz, \quad \text{da cui} \quad (11) \quad dy = dx - dz .$$

Possiamo scrivere la (9) nella forma

$$\frac{dy}{dx} = (x-y)^2 + (x-y) + 1 .$$

Sostituendo in essa le espressioni di $x - y$ e $dy$ date dalle (10),(11) si ha:

$$\frac{dx - dz}{dx} = z^2 + z + 1 , \qquad \rightarrow \qquad 1 - \frac{dz}{dx} = z^2 + z + 1 ,$$

$$\frac{dz}{dx} = -z(z+1) \ .$$

Per $z \neq 0$ e $z \neq -1$, possiamo scrivere

$$\frac{dz}{z(z+1)} = -dx . \tag{12}$$

La (12) è una equazione differenziale a variabili separabili che possiamo facilmente risolvere.
A tale scopo scriviamo l'equazione nella forma

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) \cdot dz = -dx \ . \quad \text{Integrando si ha:}$$

$$\ln|z| - \ln|z+1| + \ln C = -x \qquad \text{con} \quad C > 0 ,$$

$$\frac{Cz}{z+1} = e^{-x} \ , \qquad Cze^x = z + 1 , \quad \rightarrow \qquad z(Ce^x - 1) = 1 ,$$

$$z = \frac{1}{Ce^x - 1} , \quad x - y = \frac{1}{Ce^x - 1}$$

Infine si ha $$y = x - \frac{1}{Ce^x - 1} \ .$$

Per $C = \infty$ e $C = 0$ si hanno gli integrali particolari $y = x$ e $y = x + 1$; ad essi corrisponde l'equazione differenziale $y' = 1$.

Ora per $y = x$ siha $z = 0$ e per $y = x + 1$ si ha $z = -1$. Vengono così recuperati i casi $z = 0$ e $z = -1$ che avevamo esclusi.

**N. 6 – Equazioni differenziali lineari omogenee del 1° ordine.**

Esempio 1) Integrare la seguente equazione differenziale lineare omogenea del 1° ordine (Demidovic pag. 319)

$$y' = \frac{2x-y}{x-2y}, \quad \text{ossia} \quad (1) \qquad y' = \frac{2-y/x}{1-2\,y/x} \ .$$

Posto $\frac{y}{x} = u$ si ha $y = u \cdot x$ , da cui $y'(x) = u + u'x$ .

Grazie ad esse la (1) diventa $u + u'x = \frac{2-u}{1-2u}$ ,

da cui $u - 2u^2 + u'x - 2u'ux = 2 - u$ , $u'x(1-2u) = 2u^2 - 2u + 2$ ,

quindi $\frac{du}{dx} \cdot x(1-2u) = 2u^2 - 2u + 2$ , ossia $\frac{(1-2u)\cdot du}{2(u^2-u+1)} = \frac{dx}{x}$ .

Abbiamo ottenuto un’equazione differenziale a variabili separabili che possiamo facilmente integrare. Infatti in modo più opportuno possiamo scrivere:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d(u^2-u+1)}{2(u^2-u+1)} \ . \qquad \text{Integrando si ottiene}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u+1\right| + \ln C \quad \text{con} \quad C > 0 \, .$$

Da questa si ricava $\ln x^2 = \ln \frac{C^2}{u^2-u+1}$ , $x^2 = \frac{C^2}{u^2-u+1}$ ,

e quindi $x^2(u^2-u+1) = C^2$ .

Ricordando che $u = \frac{y}{x}$ si ha: $x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1\right) = C^2$ ,

e infine (2) $y^2 - yx + x^2 - C^2 = 0$ .

Riassumendo, l’integrale generale dell’equazione differenziale $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$ è

(3) $$U(x,y,C) = x^2 - xy + y^2 - C^2 = 0 \, .$$

Esempio 2). Integrare la seguente equazione differenziale lineare omogenea del 1° ordine (Apostol, II ; pag. 414):

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \;, \quad \text{ossia} \quad (1) \quad y' = \frac{-1+y/x}{1+y/x} \;.$$

Posto $\quad y = x \cdot u(x) \quad$ si ha $\quad y(x) = x \cdot u(x)$ , e $\quad y' = u + x \cdot u'(x)$ .

Grazie ad esse la (1) diventa $\quad u + x \cdot u' = \dfrac{u-1}{u+1}$ .

Ne segue $\quad u^2 + \cancel{u} + uu' \cdot x + u' \cdot x = \cancel{u} - 1, \quad$ quindi $\quad x \cdot u'(1+u) = -1 - u^2$,

ossia $\quad x\dfrac{du}{dx}(1+u) = -(1+u^2)$, $\quad$ da cui (2) $\quad \dfrac{1+u}{1+u^2} \cdot du = -\dfrac{dx}{x}$ .

Abbiamo ottenuto una equazione differenziale a variabili separabili che possiamo facilmente integrare.

Dalla (2) si ricava $\quad \dfrac{du}{1+u^2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{d(1+u^2)}{1+u^2} = -\dfrac{dx}{x}$ . Integrando si ha:

$$\operatorname{arctg}(u) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+u^2) = -\ln|x| + C \,,$$
$$2 \cdot \operatorname{arctg}(u) + \ln(1+u^2) = -\ln x^2 + C \,,$$
$$2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x^2) + \ln\left(1 + y^2 / x^2\right) = C \,,$$

infine (3)
$$2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x^2 + y^2) = C \,.$$

Esempio 3) Integrare la seguente equazione differenziale lineare omogenea del 1° ordine

(1) $$y' = \frac{3y-x}{y+x} \,.$$

Posto $\quad y = x \cdot t(x)$, si ha $\quad y' = t + x\dfrac{dt}{dx}$ . $\quad$ Sostituendo nella (1) si ha:

$$t + x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3xt - x}{xt + x} \;, \quad \text{con} \quad x \neq 0 \,.$$

da cui $\qquad t + x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3t-1}{t+1}$, e quindi $\qquad t^2 + t + x(t+1)\frac{dt}{dx} = 3t-1$.

Da questa si ottiene

(*) $\qquad x(t+1)\frac{dt}{dx} = 2t - t^2 - 1$ , e quindi $\qquad x(t+1)\frac{dt}{dx} = -(t-1)^2$ .

Separando le variabili si ha $\qquad \frac{t+1}{(t-1)^2} \cdot dt = -\frac{dx}{dt}$ ,

ossia $\qquad \frac{t-1+2}{(t-1)^2} \cdot dt = -\frac{dx}{x}$ , $\quad \to \qquad \frac{dt}{t-1} + \frac{2 \cdot dt}{(t-1)^2} = -\frac{dx}{x}$ ,

(2) $$\frac{d(t-1)}{t-1} + 2 \cdot (t-1)^{-2} \cdot d(t-1) = -\frac{dx}{dt} \quad .$$

Integrando si ha: $\qquad \ln|t-1| + \frac{2}{-2+1}(t-1)^{-1} + \ln C = -\ln|x|$,

da cui $\qquad \ln|Cx(t-1)| = \frac{2}{t-1}$ .

Ricordando che $\quad t = \frac{y}{x} \quad$ si ottiene $\qquad \ln\left|Cx\left(\frac{y}{x} - 1\right)\right| = \frac{2}{-1 + y/x}$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale è quindi dato dalla formula:

(3) $$\ln|C(y-x)| = \frac{2x}{y-x} \quad .$$

Esempio 4) (Demidovic, esercizio n° 2770). Integrare l'equazione differenziale

(1) $\qquad (xy - y^2)dx - x^2 dy = 0$ , ossia $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$ :

come si vede, il 2° membro dell'equazione differenziale è una funzione continua omogenea di grado zero.

Poniamo (2) $\qquad y = x \cdot u(x)$ , $\qquad \to$ (3) $\qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ .

Sostituendo le (2),(3) nella (1) si ottiene:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x^2u - x^2u^2}{x^2}\ , \quad \to \quad \cancel{u} + x\frac{du}{dx} = \cancel{u} - u^2 .$$

Separando le variabili si ha $\quad \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{dx}{x}\ ,$

e integrando si ha $\quad \int u^{-2}du = -\int \dfrac{dx}{x}\ , \quad \to \quad -\dfrac{1}{u} = -\ln|x| - \ln|C| .$

Cambiando segno si ha $\quad \dfrac{1}{u} = \ln|Cx|\ .\quad$ Ricordando che $\dfrac{1}{u} = \dfrac{x}{y}$ si ha :

(*) $\qquad \dfrac{x}{y} = \ln|Cx|\ ,\quad$ infine (4) $\qquad y = \dfrac{x}{\ln|Cx|}\ .$

**N. 7 - Equazioni differenziali del tipo** $y' = \varphi(x, y)$**.**

Esempio 1) Integrare la seguente equazione differenziale lineare omogenea del 1° ordine (Ediz. Tecnos , n°18, pag. 21):

(1) $$y' = \sec(x + y) - 1\ .$$

Le variabili non si possono separare; tuttavia l'equazione può essere ridotta ad una equazione a variabili separabili con un opportuno artificio. Poniamo

(2) $$x + y = t\ .$$

Differenziando totalmente ambo i membri si ha

$$dx + dy = dt\ , \quad \to \ (3) \quad dy = dt - dx .$$

Grazie alla (2) la (1) diventa: $\quad \dfrac{dy}{dx} = \sec(t) - 1\ .$

Ricordando la (3) si ottiene $\quad \dfrac{dt - dx}{dx} = \sec(t) - 1\ , \quad \to \quad \dfrac{dt}{dx} - \cancel{1} = \sec(t) - \cancel{1}\ ,$

quindi $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}$ , $\rightarrow$ $\cos t \cdot dt = dx$ ;

integrando si ottiene $\operatorname{sen} t = x + C$ ;

poiché $t = x + y$ si ha $\operatorname{sen}(x + y) = x + C$ .

**N. 8 – Equazioni differenziali lineari non omogenee del tipo $y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$.**

(1) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$, ossia $(ax + by + c)dx = (a_1x + b_1y + c_1)dy$,

con $c$ e $c_1$ non entrambi nulli**.**

Se fosse $c = c_1 = 0$ si avrebbe una eq. differenziale lineare omogenea, che si risolve ponendo $y = x \cdot t(x)$.
Quando una almeno delle costanti $c$ e $c_1$ è diversa da zero, prima si riduce la (1) ad una eq. diff. omogenea e poi operiamo un cambiamento di variabile del tipo $y = x \cdot t(x)$, in modo da avere un'eq. diff. a variabili separabili che sappiamo risolvere.
Distinguiamo due casi, che illustreremo con alcuni esempi..
Sia $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b$ il determinante dei coefficienti delle incognite:

1° caso : $\Delta \neq 0$ ; 2° caso : $\Delta = 0$ .

**1° caso**

Esempio 1) Risolvere l'eq. differenziale lineare non omogenea del 1° ordine

(2) $y' = \frac{x - y}{1 - x - y}$ , $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

o anche (2') $(x - y)dx = (1 - x - y)dy$ ove $\Delta = -2 \neq 0$ .

Poniamo (3) $\begin{cases} x - y = X \\ 1 - x - y = Y \end{cases}$ , $\begin{cases} x - y = X \\ x + y = 1 - Y \end{cases}$ .

Differenziando totalmente si ha $\begin{cases} dx - dy = dX \\ dx + dy = -dY \end{cases}$ ;

da cui (4) $dx = \frac{1}{2}(dX - dY)$ e $dy = -\frac{1}{2}(dX + dY)$ .

Sostituendo le (3),(4) nella (2') si ha:

$$\frac{1}{2}X(dX - dY) = -\frac{1}{2}Y(dX + dY),$$

$$XdX - XdY = -YdX - YdY,$$

(5) $$(X + Y)dX = (X - Y)dY.$$

La (5) è una eq. differenziale lineare omogenea del 1° ordine (non ancora a variabili separabili) che possiamo integrare ponendo (6) $Y = X \cdot t(X)$ .

Differenziando la (6) si ha (7) $dY = t \cdot dX + X \cdot dt$ .

Sostituendo le (6), (7) nella (5) abbiamo:

$$(X + tX)dX = (X - tX) \cdot (t \cdot dX + Xdt),$$

e per $X \neq 0$ possiamo semplificare e si ha

$$(1 + t)dX = (1 - t)(t \cdot dX + Xdt),$$

$$(1 + t)dX = (t - t^2)dX + X(1 - t)dt,$$

$$(1 + t^2)dX = X(1 - t)dt,$$

e quindi $$\frac{dX}{X} = \frac{1 - t}{1 + t^2}dt.$$

Come si vede abbiamo ottenuto un'equazione differenziale a variabili separabili che possiamo scrivere nella forma

(8) $$\frac{dX}{X} = \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d(1 + t^2)}{1 + t^2}.$$

Integrando si ha: $\ln|X| + \ln|C| = \operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+t^2)$ .

$$\ln\left|X\cdot\sqrt{1+t^2}\right| = \operatorname{arctg}(t) + C \ , \quad \text{con} \quad C>0 \ .$$

Ricordando che $t = Y/X$ possiamo scrivere:

$$\ln\left|\cancel{X}\cdot\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cancel{X}}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) + C \ .$$

Ricordando le espressioni di X e Y date dal sistema (3) si ottiene

(9) $$\ln\sqrt{(x-y)^2+(1-x-y)^2} = \operatorname{arctg}\frac{1-x-y}{x-y} + C \ .$$

Esempio 2). Integrare l’equazione differenziale non omogenea

$$y' = \frac{2(x-1)}{y-x} ,$$

Riducendo a forma intera si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-1)}{y-x}, \qquad \text{ossia (10)} \qquad 2(x-1)dx = (y-x)dy \, .$$

Si tratta di una equazione del 1° tipo, infatti si ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ .

Poniamo (11) $\begin{cases} x-1 = X \\ -x+y = Y \ , \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x-1 = X \\ x-y = -Y \ . \end{cases}$

Differenziando totalmente si ha $\begin{cases} dx = dX \\ -dx+dy = dY \end{cases}$ .

Si ha la soluzione (12) $dx = dX$ e $dy = dX + dY$ .

Sostituendo le (11),(12) nella (10) si ha:

$$2X\cdot dX = Y\cdot(dX+dY), \ \text{da cui} \ (13) \quad (2X-Y)\cdot dX = Y\cdot dY \, .$$

Abbiamo ottenuto un’equazione differenziale lineare omogenea che non è ancora a variabili separabili. Per rendere l’eq. a variabili separabili poniamo

$$X = Y \cdot t(Y) \;;\quad \text{differenziando si ha} \quad dX = t \cdot dY + Y \cdot dt \;.$$

Sostituendo queste espressioni nella (13) si ha

$$(2t \cdot Y - Y)(t \cdot dY + Y \cdot dt) = Y \cdot dY \,.$$

Semplifichiamo, supponendo $Y \neq 0$:

$$(2t - 1) \cdot (t \cdot dY + Ydt) = dY \,,$$

$$2t^2 \cdot dY + 2tYdt - t \cdot dY - Ydt = dY \;;$$

ne segue $(2t^2 - t - 1)dY = y(1 - 2t)dt$ , quindi $(t - 1)(2t + 1)dY = Y(1 - 2t)dt$ .

Abbiamo così ottenuto un'equazione differenziale a variabili separabili che sappiamo integrare. Procediamo nella risoluzione:

(14) $$\frac{dY}{Y} = \frac{1 - 2t}{(t-1)(2t+1)} dt \;.$$

Ponendo $\dfrac{1-2t}{(t-1)(2t+1)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{2t+1}$ si ricava $A = -\dfrac{1}{3}$ , $B = -\dfrac{4}{3}$ .

Con questi dati la (14) diventa $\dfrac{dY}{Y} = -\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{dt}{t-1} - \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{dt}{2t+1}$ .

Integrando si ha $$\int \frac{dY}{Y} = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \frac{2}{3} \cdot \int \frac{d(2t+1)}{2t+1} \;,$$

$$\ln Y + \ln C = -\frac{1}{3} \ln |t-1| - \frac{2}{3} \ln |2t+1| \,,$$

$$3 \ln CY = -\ln \left[ |t-1| \cdot (2t+1)^2 \right] ,$$

$$\ln \left\{ C^3 Y^3 |t-1| (2t+1)^2 \right\} = 0 \,, \quad \text{ove} \quad t = \frac{X}{Y} \,.$$

Si deduce che $$kY^3 \left| \frac{X}{Y} - 1 \right| \left( 2\frac{X}{Y} + 1 \right)^2 = 1 \,,$$

$$k |X - Y| (2X + Y)^2 = 1 \,.$$

Poiché $X = x - 1$ e $Y = y - x$ si ricava

$$k |x - 1 - y + x| \cdot (x + y - 2)^2 = 1 \,,$$

(15) $$k(2x - y - 1) \cdot (x + y - 2)^2 = 1 \;.$$

La (15) è l'integrale generale dell'equazione differenziale data.

**1° caso**
Esempio 1) ( Edizioni Tecnos, n18, pag. 22) Integrare l'equazione differenziale

(1) $$(x+2y+1)dx-(4x+8y-1)dy=0\,.$$

Si tratta di una eq. differenziale lineare del 1° ordine. Essa è omogenea perché il determinante dei coefficienti delle incognite è nullo; infatti si ha

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}=8-8=0\ .$$

Per ridurre l'equazione a variabili separabili basta porre

(2) $x+2y=X$ ; differenziando totalmente si ha $dx+2dy=dX$ .

Da questa possiamo ricavare $dx$ o $dy$ a seconda della convenienza; ricaviamo $dx$:

(3) $$dx=dX-2\cdot dy\ .$$

Sostituendo le (2),(3) nella (1) si ha:

$$(X+1)\cdot(dX-2dy)-(4X-1)dy=0\,,$$
$$(X+1)dX=(2X+2)dy+(4X-1)dy\,,$$
$$(X+1)\cdot dX=(6X+1)\cdot dy$$

(4) $$dy=\frac{X+1}{6X+1}\cdot dX\ .$$

Abbiamo così ottenuto un'eq. differenziale a variabili separabili senza passare prima attraverso una eq. differenziale omogenea . Per la sua integrazione notiamo che si può scrivere:

$$\frac{X+1}{6X+1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6X+6}{6X+1}=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{5}{6X+1}\right)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6X+1}=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\cdot\frac{6}{6X+1}\,.$$

Integrando la (4) si ha

(5) $$\int dy=\frac{1}{6}\cdot\int dX+\frac{5}{36}\cdot\int\frac{d(6X+1)}{6X+1}\,,$$

$$y=\frac{1}{6}X+\frac{5}{36}\cdot\ln|(6X+1)|\ +\ k\ .$$

Poiché $X=x+2y$ si ha: (6) $y=\frac{1}{6}(x+2y)+\frac{5}{36}\cdot\ln|6x+12y+1|\ +\ k$ .

L'equazione (6) è l'integrale generale dell'eq. differenziale non omogenea data.

**N. 9 – Equazioni differenziali del tipo** $yA(xy)dx + xB(xy)dy = 0$ **.**

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

(1) $$yA(xy)dx + xB(xy)dy = 0$$

ove $A(xy)$ e $B(xy)$ sono funzioni del prodotto xy**;** in essa compare anche il fattore $y/x$ **.**

In questi casi si opera la sostituzione (2) $xy = z$ , da cui (3) $y = \frac{z}{x}$ .

Calcolando il differenziale totale, si ha
(*)
$$xdy = dz - ydx$$

quindi (4) $$xdy = dz - \frac{z}{x}dx \quad .$$

Sostituendo le (2),(3),(4) nella (1) si ottiene un'eq. differenziale a variabili separabili che possiamo integrare.

Esempio 1) Integrare l'eq. differenziale

(5) $$y \cdot xy \cdot dx - (xy - 1) \cdot xdy = 0 \quad .$$

Sostituendo le (2),(3),(4) si ha:
$$\frac{z}{x} \cdot zdx - (z-1)(dz - \frac{z}{x}dx) = 0 \, ,$$

$$\frac{z^2}{x}dx - (z-1)dz + \frac{z(z-1)}{x}dx = 0 \, ,$$
$$\frac{z}{x}(z + z - 1)dx = (z-1)dz \, .$$
Da essa si ha:
$$\frac{dx}{x} \cdot z(2z-1) = (z-1)dz \, ;$$

Per $z(2z-1) \neq 0$ possiamo separare le variabili e si ottiene:

(6) $$\frac{dx}{x} = \frac{z-1}{z(2z-1)} \cdot dz \, .$$

Possiamo spezzare la frazione che figura al secondo membro dell'equazione; si ha:

(*) $$\frac{z-1}{z(2z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{z-1}{z(2z-1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z-1} \quad .$$

In tal modo l'equazione (6) diventa

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{d(2z-1)}{2z-1}.$$

Integrando si ottiene

$$\ln|x|=\ln|z|-\frac{1}{2}\ln|2z-1|+\ln C,$$

$$\ln|x|=\ln|Cz|-\ln\sqrt{2z-1} \quad ,$$

$$\ln\frac{x\sqrt{2z-1}}{Cz}=0 \qquad \text{da} \qquad \frac{x\sqrt{2z-1}}{Cz}=1$$

e quindi $\qquad x\sqrt{2z-1}=Cz.$

Poiché $z=xy$ si ha $\qquad x\sqrt{2xy-1}=Cxy$

Infine (7) $\qquad C^2y^2=2xy-1.$

La (7) è l'integrale generale dell'eq. differenziale (5).

Per integrare l'equazione abbiamo fatto l'ipotesi che sia $z(2z-1)\neq 0$.

Da $z=xy=0$ segue $\qquad x=0$, qualunque sia y;
$\qquad y=0$, qualunque sia x.

Ma $x=0$ e $y=0$ sono due soluzioni dell'equazione differenziale

$$y\cdot xy\cdot dx-x(xy-1)\cdot dy=0.$$

Si vede subito che essi sono integrali singolari perché non si possono ottenere dalla formula dell'integrale generale per nessun valore della costante C.
Da $2z-1=0$ segue $2xy-1=0$; e questo è un integrale particolare che si ottiene dalla formula dell'integrale generale per $C=0$ .

Esempio 2) (Ed. Tecnos n° 18, pag. 28) Integrare l'equazione differenziale

(8) $$y(xy-1)dx + x(x^2y^2 - xy - 1)dy = 0\,.$$

In questa equazione compaiono addendi del tipo $xy$ e un fattore del tipo $y/x$. Possiamo quindi porre

(9) $xy = z$ e quindi (10) $y = z/x$ .

Calcolando il differenziale totale si ha

$$ydx + xdy = dz\,,\ \text{da cui}\quad xdy = dz - ydx\,,$$

quindi (11) $$xdy = dz - \frac{z}{x}dx\,.$$

Sostituendo le (9),(10),(11) nell'equazione (8) si ha

$$\frac{z}{x}(z-1)dx + (z^2 - z - 1)\cdot(dz - \frac{z}{x}dx) = 0\,,$$

$$\frac{z(z-1)}{x}dx + (z^2 - z - 1)dz - \frac{z}{x}(z^2 - z - 1)dx = 0\,,$$

$$\frac{z}{x}(z - 1 - z^2 + z + 1)dx + (z^2 - z - 1)dz = 0\,,$$

$$-\frac{z}{x}(z^2 - 2z)dx = -(z^2 - z - 1)dz\,,$$

(12) $$\frac{dx}{x} = \frac{z^2 - z - 1}{z^2(z-2)}dz\,.$$

Ma si ha $$\frac{z^2 - z - 1}{z^2(z-2)} = \frac{3}{4z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4(z-2)}\,.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int\frac{dx}{x} = \frac{3}{4}\int\frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\int z^{-2}dz + \frac{1}{4}\int\frac{d(z-2)}{z-2} + k$$

Si ricava $$\ln|x| = \frac{3}{4}\ln|z| - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4}\ln|z-2| + k\,,$$

$$\ln x^4 = -\frac{2}{z} + \ln|z|^3 + \ln|z-2| + \ln C\,,$$

$$\frac{2}{z} = \ln\left|C \cdot z^3(z-2)\right| - \ln x^4 ,$$

$$\frac{2}{xy} = \ln\frac{Cx^3y^3(xy-2)}{x^4} .$$

Si conclude che l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y(xy-1)dx + x(x^2y^2 - xy - 1) = 0$$

è dato dalla formula

(13)
$$\ln\frac{Cy^3(xy-2)}{x} = \frac{2}{xy} .$$

Si osservi che $y = 0$ è un integrale dell'equazione data, e così anche $y = \frac{2}{x}$ come risulta dalla seguente verifica:

$$\frac{2}{x}(2-1)dx + x(4-2-1)\frac{(-2)}{x^2}dx \;=\; \frac{2}{x}dx - \frac{2}{x}dx \;=\; 0 .$$

Essi sono integrali singolari perché non si possono ottenere dalla (13) per alcun valore della costante C.

**N. 10 – Criterio di riconoscimento di un differenziale totale**

Consideriamo una forma differenziale lineare del piano

(1)
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy .$$

Condizione necessaria perché essa sia il differenziale totale di una funzione continua e derivabile $U(x, y)$ è che si abbia

(2)
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} .$$

Infatti, supponiamo che sia

(3)
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU ;$$

allora si ha: (4) $M = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ e $N = \dfrac{\partial U}{\partial y}$;

si ricava $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ , $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ ,

e confrontando si ha $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ .

La condizione (2) è anche sufficiente se è verificata in un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati e le funzioni M(x,y) ed N(x,y) sono continue nel dominio assieme alle loro derivate prime.

Dire che la condizione (2) è sufficiente vuol dire che , se essa è verificata, esiste una funzione U(x,y), definita nel rettangolo stesso, e per la quale sussistono

**N. 11 – Forme differenziali lineari** $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$

Consideriamo una forma differenziale lineare

(1) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy ,$$

ove X(x,y) e Y(x,y) sono funzioni continue in un intervallo A del piano (xy) o in un dominio internamente connesso A assieme alle loro derivate parziali $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ .

Se in ogni punto dell'intervallo A risulta

(2) $$X_y = Y_x$$

allora la forma differenziale (1) è integrabile in A, cioè è un differenziale esatto; ossia esiste una funzione U(x,y), detta integrale della (1), per cui si ha

(3) $$dU(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy ,$$

o in un altro modo (4) $\dfrac{\partial U}{\partial x} = X$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Y$ .

Questa funzione U(x,y) può essere trovata calcolando l'integrale della forma differenziale lineare (1) lungo la spezzata $P_oQR$ , ove $P_o(x_o, y_o)$ , $Q(x, y_o)$ ,R(x,y) , cioè (4) $$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} X(s,y_o)ds+\int_{y_0}^{y} Y(x,t)dt\,,$$

ove $P_o(x_o,y_o)$ è un punto qualsiasi fissato in A..

**N. 12 - Equazioni differenziali della forma** $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$

Consideriamo un forma differenziale lineare

(1) $$X(x,y)dx+Y(x,y)dy\,,$$

ove X(x,y) e Y(x,y) sono funzioni continue in un intervallo A del piano (xy) [o in un dominio internamente connesso A] assieme alle loro derivate parziali $\frac{\partial X}{\partial y}$ e $\frac{\partial Y}{\partial x}$.

Eguagliando a zero tale forma si ottiene l'equazione

(2) $$X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0\,,$$

che è un'eq. differenziale del 1° ordine tanto nell'incognita y(x) che nell'incognita x(y).

Fissato in A un punto $P_o(x_o,y_o)$, se risulta $Y(x_o,y_o)\neq 0$, la (2) si può così scrivere in un intorno del punto $P_o$:

(3) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}\,,$$

che è un'equazione differenziale del 1° ordine di forma normale nella funzione incognita y(x).

Se in un intorno del punto $P_o$ risulta $X(x_o,y_o)\neq 0$, la (2) assume la forma

(4) $$\frac{dx}{dy}=-\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\,,$$

dando luogo ad una equazione differenziale nell'incognita x(y).

E' da notare che nell'intorno di ogni punto $P_o$ per cui risulti $Y(x_o,y_o)=0$ non è possibile ridurre la (2) alla forma (3) , mentre se risulta $X(x_o,y_o)=0$ non è possibile ridurla alla forma (4).

Viceversa ogni equazione differenziale del 1° ordine di forma normale $y' = \varphi(x, y)$ si può sempre scrivere nella forma

(5) $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$, da cui $\varphi(x, y)dx - dy = 0$, e quindi essa acquista la forma

(2) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0.$$

La (2), quindi, rappresenta un modo molto comodo di scrivere le equazioni differenziali del 1° ordine di forma normale, ed ha il vantaggio di considerare le due variabili x e y in modo simmetrico.

**N. 13 – Equazioni differenziali esatte**

Fatta questa premessa teorica, consideriamo la formula generale di una equazione differenziale del 1° ordine in forma normale

(1) $$y' = \varphi(x, y).$$

Essa si può sempre ricondurre alla forma

(2) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0.$$

Possiamo integrare questa equazione (6) in tre casi: quando essa è a variabili separabili, o lineare, oppure omogenea, o quando essa è riconducibile ad uno di questi tre tipi.

Quando X(x,y) e Y(x,y) hanno una forma che non permette di ricondurre l'equazione differenziale ad uno di questi tre tipi, possiamo vedere se è soddisfatta un'altra condizione che rende possibile l'integrazione. Tale condizione è data dall'eguaglianza:

(7) $$\frac{\partial}{\partial y} X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Y(x, y).$$

Se la condizione (7) è soddisfatta allora, come sappiamo, la forma differenziale lineare

(*) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

è un differenziale esatto, cioè esiste una funzione U(x,y) il cui differenziale totale è

$$d\,U(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = X(x, y)dx + Y(x, y)dy.$$

Questa funzione U(x,y) si dice integrale indefinito della forma differenziale $Xdx + Ydy$ e l'equazione $Xdx + Ydy = 0$ si dice esatta.

Se la forma differenziale lineare $Xdx + Ydy$ è un differenziale esatto, l'equazione diff.

(6) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

si riduce all'equazione

(8) $$d\,U(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0 .$$

Ne segue $$dU(x, y) = 0 \ ,$$

e quindi (9) $$U(x, y) = C \ .$$

Questa equazione $U(x, y) = C$ rappresenta l'integrale generale, cioè la soluzione, dell'equazione differenziale (6).

Esempio 1) (Ediz. Tecnos n° 18, pag. 38) Consideriamo la funzione

(1) $$U(x, y) = x^3y - xy^2$$

e calcoliamo il suo differenziale totale. Si ha:

(2) $$d(x^3y - xy^2) \ = \ (3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy .$$

Consideriamo allora l'equazione differenziale

(3) $$(3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy = 0 \ .$$

Per la (2), da essa si ha $$d(x^3y - xy^2) = 0 ;$$

Integrando si ricava la funzione

(*) $$x^3y - yx^2 = C ,$$

la quale rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale (3).

Notiamo che se poniamo $A(x, y) = 3x^2y - y^2$ , $B(x, y) = x^3 - 2xy$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y}A(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^2) = 3x^2 - 2y ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2xy) = 3x^2 - 2y\,.$$

Si vede così che si ha $\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x,y)$ ;

e ciò è esatto perché l'espressione (4) $(3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy$
è un differenziale esatto per costruzione.

Esempio 2) Problema inverso del precedente. Integrare l'equazione differenziale:

(5) $$(3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy = 0\,.$$

Svolgimento.

Poniamo $A(x,y) = 3x^2y - y^2$, e $B(x,y) = x^3 - 2xy$;

derivando si ha $\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) = 3x^2 - 2y$ , $\frac{\partial}{\partial x}B(x,y) = 3x^2 - 2y$ .

Poiché $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ la forma differenziale lineare

(a) $$(3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy$$

è un differenziale esatto e quindi esiste una funzione U(x,y) per la quale si ha

(6) $$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = (3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy$$

Ricaviamo questa funzione $U(x,y)$.

<u>Primo metodo</u>. Dalla (6)si ha:

(7a) $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 3x^2y - y^2$, (7b) $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x^3 - 2xy$ .

Ne segue $$\int \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx = \int (3x^2y - y^2)dx\ ,$$

e quindi (8) $$U(x,y) = x^3y - y^2x + g(y)\ .$$

La costante di integrazione è funzione di y perché nel fare l'integrale abbiamo ritenuto y costante. Derivando ora la (8) rispetto a y si ha

(9) $$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x^3 - 2xy + g'(y) .$$

Confrontando la (9) con la (7b) si vede che si ha $g'(y) = 0$, da cui $g(y) = C_1$.

Sostituendo nella (8) si ha (10) $U(x,y) = x^3 y - y^2 x + C_1$ .

Ora integrando la (6) si ha: $U(x,y) = C_2 + \int (3x^2 y - y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy$ ;

ma l'integrale che figura al secondo membro è nullo per l'equazione (5);

quindi si ha (11) $U(x,y) = C_2$ .

Eguagliando membro a membro le due equazioni (10),(11) si ha

$$x^3 y - xy^2 + C_1 = C_2 .$$

Da essa si ricava (12) $x^3 y - xy^2 = C$ .

La (12) è l'integrale generale dell'equazione differenziale (5).

<u>Secondo metodo</u>. La funzione $U(x,y)$ si può anche trovare (fig. 1) integrando la

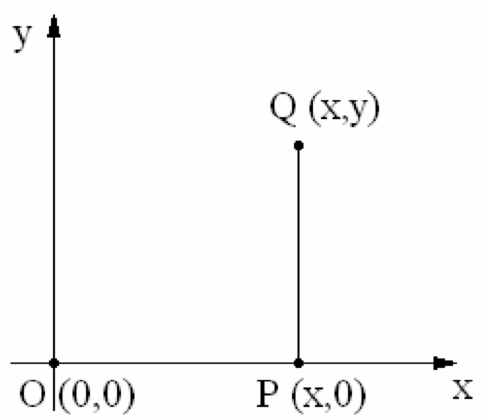



Fig. 1

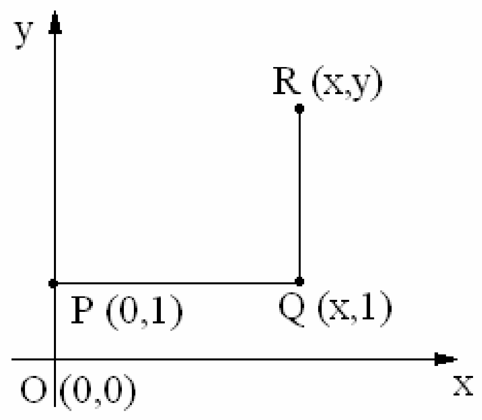



Fig. 2

forma differenziale lineare (a) lungo la linea spezzata determinata dai punti O(0,0), P(x,0), Q(x,y) per mezzo della nota formula

(13) $$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} X(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y} Y(x,t)dt\,,$$ che nel nostro caso diventa:

(14) $$U(x,y)=\int_0^x X(s,0)ds+\int_0^y Y(x,t)dt=\int_0^x 0\cdot dx+\int_0^y (x^3-2xt)dt\ .$$

Si ricava $$U(x,y)=x^3y-xy^2+C_1\,.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale (5) sarà quindi

(15) $$U(x,y)=K\ ,$$

ossia (16) $$x^3y-xy^2=C\ .$$

c.v.d.

Esempio 3) Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

(1) $$(\operatorname{sen}y+y^2\operatorname{sen}x)dx+(x\cos y-2y\cos x)dy=0\,.$$

Si vede che le funzioni X(x,y) e Y(x,y) sono continue in tutto il piano xy assieme alle loro derivate parziali $X_y$ e $Y_x$ e si ha:

(*) $$X_y=\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen}y+y^2\operatorname{sen}x)=\cos y+2y\cdot\operatorname{sen}x\ ,$$

(*) $$Y_x=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y-2y\cos x)=\cos y+2y\operatorname{sen}x\ .$$

Poiché $X_y=Y_x$ l'equazione differenziale è esatta; l'integrale indefinito $U(x,y)$ della forma differenziale lineare che compare al primo membro della (1) si può ottenere con un integrale lungo la spezzata di vertici $O(o,o)$, P(x,o) e Q(x,y) (fig. 1). Si ha:

(*) $$U(x,y)=\int_0^x X(s,o)ds+\int_0^y Y(x,t)dt\ .$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$U(x,y)=\int_0^x \cancel{(\operatorname{sen}0+0\operatorname{sen}s)}ds+\int_0^y (x\cos t-2t\cos x)dt=\Big[x\operatorname{sen}t-t^2\cos x\Big]_0^y\ ,$$

ossia (*) $$U(x,y) = x\,\text{sen}\,y - y^2\cos x\ .$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

(*) $$x\,\text{sen}\,y - y^2\cos x = C$$

**N. 14 – Approfondimenti sulle equazioni della forma** $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$.

Consideriamo ancora la formula generale di un equazione differenziale del 1° ordine in forma normale

(1) $$y'(x) = \varphi(x,y)\ .$$

Abbiamo già detto che essa si può sempre ricondurre alla forma

(2) $$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0\ .$$

Supponiamo che essa non sia a variabili separabili, né lineare, né omogenea. Supponiamo anche che le funzioni A(x,y) e B(x,y) della forma differenziale lineare al secondo membro della (2) siano funzioni continue in un intervallo R del piano xy assieme alle loro derivate parziali prime, ma che la forma non sia un differenziale esatto, cioè che sia

(3) $$\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) \neq \frac{\partial}{\partial x}B(x,y)\ .$$

Vogliamo far vedere che è possibile trovare un fattore integrante $I = I(x)$ o $I = I(y)$ che ci permette di ridurre l'equazione a forma esatta.

Esempio 1) Consideriamo l'equazione differenziale

(1A) $y'(x) = \dfrac{2xy^2 + y}{x - y}$, ossia (2A) $(2xy^2 + y)dx + (y - x)dx = 0$.

L'equazione differenziale (1A) non è a variabili separabili, non è lineare e non è omogenea. Si vede inoltre che si ha:

(3) $$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = 4xy + 1\ , \qquad \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = -1\ .$$

Le due derivate ci dicono che l'equazione differenziale (2A) non è esatta.

1) Moltiplichiamo allora ambo i membri della (2A) per il fattore integrante $I = I(x)$.
Se vogliamo che la nuova equazione differenziale sia esatta dobbiamo imporre la condizione:

(*) $$\frac{\partial(IA)}{\partial y} = \frac{\partial(IB)}{\partial x} \ , \quad \rightarrow \quad (4) \quad \cancel{I_y A} + I \cdot A_y = I_x B + I \cdot B_x \, .$$

Ovviamente il primo termine è nullo perché $I(x)$ non è funzione di y. Dalla (4) si ha:

(*) $$I(A_y - B_x) = I_x B \ , \quad \rightarrow I_x = \frac{I(A_y - B_x)}{B}, \quad \text{cioè} \quad (5) \quad \frac{dI}{dx} = \frac{I(A_y - B_x)}{B} \ .$$

Si ricava $$\frac{dI}{I} = \frac{A_y - B_x}{B} dx \ , \qquad \text{da cui} \qquad \ln I = \int \frac{A_y - B_x}{B} dx \ ,$$

infine si ha (6) $$I(x) = e^{\int \frac{A_y - B_x}{B} \cdot dx} \ .$$

2) Supponiamo invece che il fattore integrante sia funzione della sola y, cioè $I = I(y)$.
Dobbiamo imporre la condizione:

(*) $$\frac{\partial(IA)}{\partial y} = \frac{\partial(IB)}{\partial x} \ , \quad \rightarrow \quad (7) \qquad I_y A + I \cdot A_y = \cancel{I_x B} + I \cdot B_x \ ;$$

ovviamente il terzo termine è nullo perché $I(y)$ non è funzione della $x$ .Dalla (7) si ha:

(*) $$I_y A = I(B_x - A_y) \, , \quad \rightarrow \quad I_y = \frac{I(B_x - A_y)}{A} \ , \quad \text{cioè} \quad (8) \quad \frac{dI}{dy} = \frac{I\left(B_x - A_y\right)}{A} \, .$$

Si ricava $$\frac{dI}{I} = \frac{B_x - A_y}{A} dy \, , \qquad \text{da cui} \qquad \ln I = \int \frac{B_x - A_y}{A} dy \, ,$$

infine si ha (9) $$I(y) = e^{\int \frac{B_x - A_y}{A} dy} \ .$$

Per decidere se dobbiamo applicare la formula (6) o (9) basta vedere quale è la più semplice fra le due espressioni

$$\text{(a)} \qquad \frac{A_y - B_x}{B} \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \qquad \frac{B_x - A_y}{A} \; .$$

Data questa spiegazione iniziale, vogliamo trovare un fattore integrante dell'equazione differenziale proposta. Si ha:

$$(*) \quad (1A) \quad y'(x) = \frac{2xy^2 + y}{x - y}, \qquad \text{ossia} \qquad (2A) \quad (2xy^2 + y)dx + (y - x)dx = 0 .$$

Anzitutto vediamo che si ha $A_y = 4xy + 1$ , $B_x = -1$. Ne segue:

espressione (a) $\quad \dfrac{A_y - B_x}{B} = \dfrac{4xy + 1 + 1}{y - x} = \dfrac{4xy + 2}{y - x}$ ;

espressione (b) $\quad \dfrac{B_x - A_y}{A} = \dfrac{-1 - 4xy - 1}{2xy^2 + y} = \dfrac{-2\cancel{(1+2xy)}}{y\cancel{(2xy+1)}} = -\dfrac{2}{y}$ .

L'espressione (b) è più semplice quindi sfrutteremo il fattore integrante (9). Si ha:

$$(*) \qquad I(y) = e^{\int \frac{B_x - A_y}{A} \cdot dy} = e^{\int -\frac{2}{y} \cdot dy} = e^{-2 \ln y} = e^{\ln \frac{1}{y^2}} .$$

Si ha quindi il fattore integrante $\quad I(y) = \dfrac{1}{y^2}$ .

Nel calcolo degli integrali che figurano nelle espressioni (6) o (9) si è trascurata la costante di integrazione. Infatti questa costante produce solo un fattore moltiplicativo del termine integrante e quindi essa non ha nessuna influenza.

Riprendiamo l' equazione differenziale $\quad (2A) \quad (2xy^2 + y)dx + (y - x)dx = 0$ ;

moltiplicando per il fattore integrante $1/y^2$ si ha:

$$(*) \qquad \frac{2xy^2 + y}{y^2} dx + \frac{y - x}{y^2} dy = 0, \quad \text{da cui} \quad \frac{2xy + 1}{y} dx + \frac{y - x}{y^2} dy = 0 ,$$

e quindi $$\left(2x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0\,.$$

Diamo per scontato che si ha $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy+1}{y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-x}{y^2}\right)\,.$$

Integriamo la forma differenziale al primo membro lungo la spezzata di vertici $P(0;1)$, $Q(x,1)$, $R(x,y)$ e così troveremo l'integrale indefinito $U(x,y)$ della forma differenziale stessa . Si ha:

$$(*)\qquad U(x,y)=\int_0^x (2x+1/y)\,dx+\int_1^y \frac{dy}{y}=\left[2\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}\right]_0^x+\ln y-\cancel{\ln 1}=x^2+\frac{x}{y}-\ln y\,.$$

Si conclude che l'integrale generale dell'equazione differenziale proposta è

$$(*)\qquad U(x,y)=C \quad , \qquad \text{ossia} \qquad x^2+\frac{x}{y}+\ln y=C\,.$$

**N. 15 – Equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine di forma normale.**

Consideriamo le equazioni differenziali del tipo $y'=f(x,y)$, ove il secondo membro è una funzione lineare nella funzione incognita $y(x)$. Esempio

$$(1)\qquad y'=\alpha(x)y+\beta(x)\,,$$

ove $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono funzioni continue in un certo intervallo $I$ dell'asse $x$.

Se l'equazione (1) si dice lineare e omogenea ( ed essa è anche a variabili separabili); se $\beta(x)\neq 0$ l'equazione (1) si dice lineare e non omogenea.

In ogni caso l'integrale generale della (1) è

$$(2)\qquad y(x)=e^{\int\alpha(x)dx}\cdot\left[c+\int\beta(x)\cdot e^{-\int\alpha(x)dx}\cdot dx\right]\,.$$

Dimostrazione. Metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie.

Consideriamo l'equazione omogenea associata

(3) $y' = \alpha(x)y$ , ossia $\dfrac{dy}{dx} = \alpha(x)y$ , $\rightarrow$ $\dfrac{dy}{y} = \alpha(x)\cdot dx$ .

Con successivi passaggi si ha:

(*) $\int \dfrac{dy}{y} = \int \alpha(x)\cdot dx$ , $\rightarrow$ $\ln y - \ln C = \int \alpha(x)\cdot dx$ , $\rightarrow$ $\ln \dfrac{y(x)}{C} = \int \alpha(x)\cdot dx$ .

Si ricava (4) $y(x) = C\, e^{\int \alpha(x)\cdot dx}$ **;**

questa funzione è l'integrale dell'equazione differenziale (3).

Consideriamo ora C non più come una costante, ma come una funzione della variabile x , $[C = C(x)]$, e vediamo se è possibile determinare C in modo che la (4) soddisfi l'equazione differenziale non omogenea (1). Derivando la (4) si ha:

(5) $$y'(x) = C'(x)\, e^{\int \alpha(x)\cdot dx} + C(x)\cdot\alpha(x)\, e^{\int \alpha(x)\cdot dx} \; .$$

Sostituendo le espressioni (4) e (5) nell'equazione (1) si ha

(*) $$C'(x)\cdot e^{\int \alpha(x)dx} + C(x)\alpha(x)\cdot e^{\int \alpha(x)dx} = C(x)\alpha(x)\cdot e^{\int \alpha(x)dx} + \beta(x) \; ;$$

ne segue $C'(x)\cdot e^{\int \alpha(x)dx} = \beta(x)$ , $\rightarrow C'(x) = \beta(x)\cdot e^{-\int \alpha(x)dx}$ ;

da cui (6) $$C(x) = \int \beta(x)\cdot e^{-\int \alpha(x)dx} + k \; .$$

Sostituendo la (6)nella (4) otteniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \alpha(x)y + \beta(x) \; .$$

Precisamente si ha:

(7) $$y(x) = e^{\int \alpha(x)dx}\cdot\left[k + \int \beta(x)e^{-\int \alpha(x)dx}\right] \; .$$

Esempio 1) Bononcini, Patron, pg. 701. Integrare l'equazione differenziale

(1A) $$y' = xy + x^3 \quad .$$

Si ha : $y(x) = e^{\int x \cdot dx} \cdot \left[ k + \int x^3 e^{-\int x dx} \cdot dx \right]$ , da cui

(2) $$y(x) = e^{x^2/2} \cdot \left[ k + \int x^3 e^{-x^2/2} \cdot dx \right]$$

Si osservi ora che $De^{-x^2/2} = e^{-x^2/2} \cdot D(-x^2/2) = -x \cdot e^{-x^2/2}$ .

Ne segue che per il calcolo dell'ultimo integrale si ha:

(*) $$\int x^3 e^{-x^2/2} \cdot dx = -\int x^2 (-xe^{-x^2/2} \cdot dx) = -\int x^2 \cdot de^{-x^2/2} =$$
$$= -x^2 e^{-x^2/2} + \int e^{-x^2/2} \cdot d(x^2) = -x^2 e^{-x^2/2} - 2\int e^{-x^2/2} \cdot d(-x^2/2) \quad .$$

Ne deriva che $\int x^3 e^{-x^2/2} \cdot dx = -x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2}$ ,

quindi ( 3) $$\int x^3 e^{-x^2/2} \cdot dx = -e^{-x^2/2} \cdot (x^2 + 2) \quad .$$

Sostituendo la (3) nella relazione (2) si ha:

(*) $$y(x) = e^{x^2/2} \cdot \left[ k - e^{-x^2/2} \cdot (x^2 + 2) \right],$$

infine (4) $$y(x) = ke^{x^2/2} - x^2 - 2 \quad ;$$

la (4) è l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare (1A).

Esempio 2) Bononcini, C.E. Patron, pg. 702. Integrare l'equazione differenziale

(1B) $$y' = \frac{1}{x} y + x^2 \quad .$$

Abbiamo una eq. differenziale del 1° ordine, lineare e non omogenea,del tipo

(2) $$y' = \alpha(x)y + \beta(x) \ , \ \text{ove}$$

$$\beta(x) = x^2 \ \text{ e } \qquad \alpha(x) = \frac{1}{x} \ , \ \text{ quindi } \ \alpha(x) \ \text{è continua per } x \neq 0 \ .$$

L'integrale generale della (13) è del tipo

(*) $$y(x) = e^{\int \alpha(x)dx} \cdot \left[ k + \int \beta(x) e^{-\int \alpha(x)dx} \cdot dx \right] .$$ Nel nostro caso si ha:

(3) $$y(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[ k + \int x^2 e^{-\int \frac{1}{x}dx} \cdot dx \right] \ , \ \text{da cui}$$

(*) $$y(x) = e^{\ln|x|} \cdot \left[ k + \int x^2 e^{-\ln|x|} \cdot dx \right] = |x| \cdot \left[ k + \int x^2 e^{\ln|1/x|} \cdot dx \right],$$

(*) $$y(x) = |x| \cdot \left[ k + \int x^2 \cdot \frac{1}{|x|} dx \right].$$

Per $x > 0$ si ha $y(x) = kx + x\int x dx$ , $\rightarrow$ $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + kx$ ;

per $x < 0$ si ha $y(x) = -kx - \int \frac{x^2}{-x} dx$ , $\rightarrow$ $y(x) = \frac{1}{2}x^3 - kx$ .

Si conclude che l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

(*) $$y' = \frac{1}{x} y + x^2$$

è (4) $$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + kx \ , \qquad \text{ove} \quad k = \text{costante} \ \neq 0 \ .$$

Esempio 3) Integrare l'equazione differenziale lineare non omogenea

(1C) $$y' = \frac{2x}{1+x^2} y + (1+x^2)\cos x \ , \qquad \text{eq. del tipo} \quad y' = \alpha(x)y + \beta(x) \ .$$

L'integrale generale ha la forma $y(x) = e^{\int \alpha(x)dx} \cdot \left[ k + \int \beta(x) \cdot e^{-\int \alpha(x)dx} \cdot dx \right]$ .

Nel nostro caso si ha:

(*) $$y(x)=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\cdot\left[k+\int(1+x^2)\cos x\cdot e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\cdot dx\right].$$

Poiché $$\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\ln(1+x^2)$$

si ha $$y(x)=e^{\ln(1+x^2)}\cdot\left[k+\int(1+x^2)\cos x\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\cdot dx\right],$$

da cui $$y(x)=(1+x^2)\cdot\left[k+\int(1+x^2)\cos x\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right],$$

quindi $$y(x)=(1+x^2)\cdot\left[k+\int\cos x\cdot dx\right],$$

infine (2) $$y(x)=(1+x^2)\cdot(k+\operatorname{sen}x)\ .$$

La famiglia di funzioni (2) è l'integrale generale dell'equazione differenziale (1C) .

Esempio 4) Determinare le curve integrali dell'eq. diff. del 1° ordine e non omogenea

(1D) $y'=y\cot gx+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$ , ove x varia nell'intervallo aperto $]0\ ;\pi[$ .

L'integrale generale è dato dalla funzione

(2) $$y(x)=e^{\int\cot gx\cdot dx}\cdot\left[k+\int\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\cdot e^{-\int\cot gx\cdot dx}\cdot dx\right];$$

Calcolo il fattore integrante:

(*) $$e^{\int\alpha(x)\cdot dx}=e^{\int\cot gx\cdot dx}=e^{\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}dx}=e^{\int\frac{d\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}}=e^{\ln|\operatorname{sen}x|}=|\operatorname{sen}x|\ .$$

Ma per $0\le x\le\pi$ si ha $|\operatorname{sen}x|=\operatorname{sen}x$ ; possiamo quindi dire che

(a) $$e^{\int \cot gx \cdot dx} = e^{\ln(\operatorname{sen}x)} = \operatorname{sen}x \ ,$$

(b) e così $$e^{-\int \cot gx \cdot dx} = e^{-\ln(\operatorname{sen}x)} = e^{\ln\frac{1}{\operatorname{sen}x}} = \frac{1}{\operatorname{sen}x} \ .$$

Sostituendo le (a) e (b) nella (2) si ha:

(*) $$y(x) = \operatorname{sen}x \cdot \left[ k + \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}2x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}x} \cdot dx \right] ,$$

da cui $$y(x) = \operatorname{sen}x \cdot \left[ k + \int \frac{1}{2} 2 \cancel{\operatorname{sen}x} \cos x \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen}x}} dx \right] ,$$

quindi $$y(x) = \operatorname{sen}x \cdot (k + \int \cos x \cdot dx) \ ,$$

infine $$y(x) = \operatorname{sen}x \cdot (k + \operatorname{sen}x) \ .$$

Si conclude che l'equazione delle curve integrali dell'equazione differenziale (1D) è

(3) $$y(x) = \operatorname{sen}^2 x + k\operatorname{sen}x \ .$$

Vogliamo ora trovare il luogo dei punti nei quali le tangenti alle curve integrali sono parallele alla bisettrice del I quadrante. A tale scopo calcoliamo preventivamente la derivata

(*) $$y'(x) = 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x + k \cos x \ .$$

Deve essere $$y'(x) = tg\alpha = m = 1 \ .$$

Si ha quindi il sistema

(*) $$\begin{cases} 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x + k \cos x = 1 \\ y = \operatorname{sen}^2 x + k\operatorname{sen}x \ . \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si ha $k = \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x}{\cos x}$ .

Sostituendo nella seconda equazione del sistema si ha successivamente:

(*) $$y(x) = \text{sen}^2 x + \frac{\text{senx} \cdot (1 - 2\text{senx} \cos x)}{\cos x} \; ,$$

(*) $$y(x) = \frac{\text{sen}^2 x \cdot \cos x + \text{senx} - 2\text{sen}^2 x \cdot \cos x}{\cos x} = \frac{\text{senx} - \text{sen}^2 x \cdot \cos x}{\cos x} \; ;$$

(*) $$y(x) = \frac{\text{senx} \cdot (1 - \text{senx} \cos x)}{\cos x} \; ,$$

infine $$y(x) = \text{tgx} \cdot (1 - \text{senx} \cdot \cos x) \quad \text{con} \quad 0 < x < \pi \; .$$

Esempio 5) Determinare le curve integrali dell'equazione differenziale del 1° ordine, lineare non omogenea, seguente

(1E) $$y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot y + \frac{e^{2x}}{x} \; .$$

Dobbiamo escludere i punti di ascissa $x = 0$, in cui la funzione $e^{2x}/x$ non è continua. Anche la funzione $\alpha(x) = \dfrac{x-1}{x}$ presenta una discontinuità nel punto $x = 0$; essa infatti rappresenta un'iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi $x$ e $y$ e avente il centro nel punto $C(0;1)$.
Risolviamo l'equazione differenziale nell'intervallo $(0;+\infty)$. Il suo integrale è

(2) $$y(x) = e^{\int (1-1/x) \cdot dx} \cdot \left[ k + \int \frac{e^{2x}}{x} \cdot e^{-\int (1-1/x) dx} \cdot dx \right] \; ,$$

da cui $$y(x) = e^{x - \ln x} \cdot \left[ k + \int \frac{e^{2x}}{x} \cdot e^{-x + \ln x} \cdot dx \right] \; ,$$

quindi $$y(x) = \frac{e^x}{e^{\ln x}} \cdot \left[ k + \int \frac{e^{2x}}{x} \cdot \frac{e^{\ln x}}{e^x} \cdot dx \right] = \frac{e^x}{x} \cdot \left[ k + \int \frac{e^{2x}}{x} \cdot \frac{x}{e^x} \cdot dx \right],$$

ossia $$y(x) = \frac{e^x}{x} \cdot \left[ k + \int e^x dx \right], \quad \to \quad y(x) = \frac{e^x}{x} \cdot \left[ k + e^x \right] \; ,$$

infine (3) $$y(x) = \frac{e^{2x} + ke^{x}}{x} \ .$$

La famiglia di curve (3) ci dà l'integrale generale dell'equazione differenziale (1E).

Esempio 6) Determinare l'equazione integrale dell'equazione differenziale lineare non omogenea

(1F) $$y'(x) = y \cdot \cos x + \cos x \ .$$

Lasciamo da parte le formule che ci dànno la soluzione generale e risolviamo questa equazione con il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie. A tale scopo consideriamo l'equazione differenziale omogenea associata:

(*) $$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x \,, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{dy}{y} = \cos x \cdot dx \,.$$

Integrando si ha: $$\ln \frac{y}{C_1} = \operatorname{sen} x \,, \quad \rightarrow \quad \frac{y(x)}{C_1} = e^{\operatorname{sen} x} \,,$$

da cui (2) $$y(x) = C_1 \cdot e^{\operatorname{sen} x} \ .$$

Consideriamo ora la $C_1$ non come una costante, ma come una funzione della variabile x; poniamo $C_1 = \gamma(x)$ e troviamo un integrale particolare del tipo

(3) $$\bar{y}(x) = \gamma(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} \ .$$

Derivando si ha

(*) $$\bar{y}'(x) = \gamma'(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \gamma(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \ .$$

Sostituendo nella (1F) si ha:

(*) $$\gamma'(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cancel{\gamma(x) \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}} = \cancel{\gamma(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x} + \cos x \,,$$

da cui $$\gamma'(x) e^{\operatorname{sen} x} = \cos x \,, \quad \rightarrow \quad (4) \quad \gamma'(x) = \cos x \cdot e^{-\operatorname{sen} x} \ .$$

Integrando la (4) si ha:

(*) $$\gamma(x) = \int \cos x \cdot e^{-\operatorname{sen} x} \cdot dx = -\int e^{-\operatorname{sen} x} \cdot d(-\operatorname{sen} x) \,,$$

quindi $\gamma(x) = -e^{-\text{senx}} + k$ .

Sostituendo nella (3) si trova che l'integrale particolare cercato è

(5) $$\bar{y}(x) = \left[-e^{-\text{senx}} + k\right] \cdot e^{\text{senx}} ,$$

ossia (6) $$\bar{y}(x) = k \cdot e^{\text{senx}} - 1 \ .$$

Per l'integrale generale dell'equazione differenziale, pertanto, si ha:

(*) $y(x) = C_1 e^{\text{senx}} + \bar{y}(x)$, e quindi $y(x) = C_1 e^{\text{senx}} + C_2 e^{\text{senx}} - 1$.

Ponendo $C_1 + C_2 = C$ si ha che l'integrale generale dell'eq. differenziale (1F) è

(7) $$y(x) = C \cdot e^{\text{senx}} - 1 \ .$$

**N. 16 - Equazioni di Bernouilli.**

Si dicono equazioni di Bernouilli le equazioni del tipo

(1) $$y' = \alpha(x) y + \beta(x) y^n \ ,$$

ove $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono funzioni continue definite in uno stesso intervallo dell'asse $x$ .
Esse sono equazioni differenziali del 1° ordine, ma no sono lineari per la presenza del termine $y^n$, ove $n$ è un numero reale $\neq 0$ e $\neq 1$ ( per uno studio sistematico si veda il testo: A. Ghizzetti, Analisi matematica, 2° vol. pg. 383) .

Per risolvere queste equazioni si assuma come nuova incognita la funzione $u(x) = [y(x)]^{1-n}$, da cui :

(2) $$y(x) = u^{\frac{1}{1-n}} \ .$$ Derivando si ha:

(*) $$y'(x) = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot u'(x) \ , \quad \rightarrow \quad (3) \quad y'(x) = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \cdot u'(x) \ .$$

Sostituendo le (2),(3) nella (1) si ha:

(*) $$\frac{1}{1-n}u^{\frac{n}{n-1}}\cdot u' = \alpha(x)\cdot u^{\frac{1}{1-n}} + \beta(x)\cdot u^{\frac{n}{1-n}} \quad .$$

Liberando dal denominatore e moltiplicando membro a membro per $u^{-\frac{n}{1-n}}$, si ha:

(*) $$u^{\frac{n}{1-n}}\cdot u^{-\frac{n}{1-n}}\cdot u'(x) =$$
$$(1-n)\alpha(x)\cdot u^{\frac{1}{1-n}}\cdot u^{-\frac{n}{1-n}} + (1-n)\beta(x)\cdot u^{\frac{n}{1-n}}\cdot u^{-\frac{n}{1-n}} \quad .$$

Si ricava (4) $$u'(x) = (1-n)\alpha(x)\cdot u + (1-n)\cdot\beta(x) \ .$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale lineare che sappiamo risolvere. Ad ogni integrale $u(x)$ di questa equazione corrisponde l'integrale $y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-n}}$ della equazione differenziale data. Vedremo subito alcuni esempi di applicazione.

Esempio 1) Vedi demidovic pg. 325. Risolvere l'equazione differenziale

(1A) $$y'(x) = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x}y^3 .$$

Primo metodo

E' una equazione di Bernoulli; la possiamo risolvere ponendo

(*) $$u(x) = y^{1-3}, \text{ ossia } \quad u(x) = y^{-2}(x) \ , \text{ da cui}$$

(2) $y(x) = [u(x)]^{-1/2}$, $\quad y'(x) = -\frac{1}{2}u^{-1-1/2}\cdot u'$, $\quad$ (3) $y'(x) = -\frac{1}{2}u^{-3/2}\cdot u'(x)$ .

Sostituendo le (2),(3) nella (1A) si ottiene

(*) $$-\frac{1}{2}u^{-3/2}\cdot u' = \frac{1}{x}u^{-1/2} + \frac{1}{x}u^{-3/2}\ , \ \rightarrow\ (4) \qquad u^{-3/2}\cdot u' = -\frac{2}{x}u^{-1/2} - \frac{2}{x}u^{-3/2}\ .$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (4) per $u^{+3/2}$ e procediamo nei calcoli. Si ha:

(*) $$u^{-3/2}\cdot u^{+3/2}\cdot u' = -\frac{2}{x}u^{-1/2}\cdot u^{+3/2} - \frac{2}{x}u^{-3/2}\cdot u^{+3/2}\ ,$$ e quindi:

(5) $$u'(x) = -\frac{2}{x}u(x) - \frac{2}{x}\ .$$

La (5) è un’equazione differenziale lineare del tipo $u'(x) = \alpha(x)\cdot u(x) + \beta(x)$, e questa si risolve con la formula

(*) $$u(x) = e^{\int \alpha(x)\cdot dx}\cdot\left[k + \int \beta(x) e^{-\int \alpha(x)\cdot dx}\cdot dx\right]\ .$$

Nel caso della (5) si ha:

(*) $$u(x) = e^{-\int (2/x)dx}\cdot\left[k + \int -\frac{2}{x}\cdot e^{\int (2/x)dx}\cdot dx\right],$$

(*) $$u(x) = e^{-2\ln x}\cdot\left[k - \int \frac{2}{x}e^{2\ln x}\cdot dx\right],$$

(*) $$u(x) = \frac{1}{e^{\ln(x^2)}}\cdot\left[k - 2\int \frac{1}{x}e^{\ln(x^2)}\cdot dx\right],$$

(*) $$u(x) = \frac{1}{x^2}\cdot\left[k - 2\int \frac{1}{x}x^2\cdot dx\right] = \frac{1}{x^2}\cdot\left[k - x^2\right],$$

quindi (6) $$u(x) = \frac{k - x^2}{x^2}\ .$$

Ricordando la (2) si ha:

(*) $$y(x) = \left[u(x)\right]^{-1/2}\ , \qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{u}}\ , \ \rightarrow \quad y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{k - x^2}}\ ;$$

infine si ha (7) $$y(x)=\frac{x}{\sqrt{k-x^2}} \quad .$$

La (7) ci dà le curve integrali dell'equazione differenziale di Bernoulli $(1A)$
.
<u>Secondo procedimento</u>.
Notiamo che l'equazione differenziale data è a variabili separabili e quindi essa si può risolvere in un modo più breve e più facile (Demidovic pg. 325) . Infatti riprendiamo l'equazione e vediamo come essa si può scrivere:

(*) $xy'(x)=y+y^3$, da cui $x\frac{dy}{dx}=y(1+y^2)$ . Si ricava

(8) $$\frac{dy}{y(1+y^2)}=\frac{dx}{x} \quad .$$

Ma si ha $\frac{1}{y(1+y^2)}=\frac{1}{y}-\frac{y}{1+y^2}$ . Pertanto dalla (8) si ottiene:

(*) $$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{dx}{x} \ ,$$

(*) $$\ln|y|-\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln|x|-\ln C \ ,$$

(*) $$\ln y^2+\ln C^2-\ln\left(1+y^2\right)=\ln x^2 \ ,$$

(*) $$\ln\frac{C^2y^2}{1+y^2}=\ln x^2 \ , \quad \to \quad x^2=\frac{C^2y^2}{1+y^2} \ ,$$

(*) $$x^2+x^2y^2=C^2y^2 \ , \quad \to \quad x^2=y^2(C^2-x^2) \ , \quad \to \quad y^2=\frac{x^2}{k-x^2} \quad .$$

Si ricava che l'integrale generale dell'equazione differenziale $(1A)$ è :

(*) $$y(x)=\frac{x}{\sqrt{k-x^2}} \ ,$$

come abbiamo trovato in precedenza.

Esempio 2) Integrare l'equazione di Bernouilli

$$(1A) \qquad \left(1+x^2\right)^2 yy'+2x=0\,, \qquad \text{ossia} \qquad yy'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\,.$$

Come si vede, essa è una equazione differenziale non lineare e non omogenea.
La funzione $f(x)=-2x\Big/\left(1+x^2\right)^2$ è continua su tutto l'asse $x$. Integriamo quindi l'equazione nell'intervallo $(-\infty,\ +\infty)$ ponendo:

$$(*) \qquad u(x)=\left[y(x)\right]^{1-n}, \quad \text{cioè} \qquad (2) \qquad u(x)=\left[y(x)\right]^2\,.$$

Deriviamo prima la (2); si ha:

$$(*) \qquad u'(x)=2yy'\,, \quad \text{da cui} \qquad (3) \qquad yy'=\frac{u'}{2}\,.$$

Sostituendo la (3) nella $(1A)$ si ottiene:

$$(*) \qquad \frac{u'}{2}=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\,, \quad \text{da cui} \quad (4) \qquad du=-\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\,.$$

Integrando si ottiene $\displaystyle\int du=-2\int\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot d\left(1+x^2\right)$ ,

quindi $\displaystyle u(x)=-\frac{2}{-1}\left(1+x^2\right)^{-1}+C$ , ossia $u(x)=2\left(1+x^2\right)^{-1}+C$ .
Ricordando che $y(x)=\sqrt{u(x)}$ , si ha

$$(7) \qquad y(x)=\sqrt{2\left(1+x^2\right)^{-1}+C}\,.$$

La (7) ci dice che anche l'integrale $y(x)$ è una funzione continua su tutto l'asse reale.

<u>Secondo procedimento</u>.
L'equazione differenziale $\left(1+x^2\right)^2 y\cdot y'+2x=0$ è a variabili separabili e quindi si può risolvere con un procedimento più breve e più facile. Infatti da essa si ha:

(*) $\left(1+x^2\right)^2 y\cdot\frac{dy}{dx}=-2xdx$ , da cui (8) $y\cdot dy=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot dx$ .

Integrando si ha $\int y\cdot dy=-\int\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot d\left(1+x^2\right)$,

(*) $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{-1}\left(1+x^2\right)^{-1}+C$, $\rightarrow$ $y^2=2\left(1+x^2\right)^{-1}+k$ ,

infine $y(x)=\sqrt{2\left(1+x^2\right)^{-1}+k}$ .

Come si vede, l'integrale generale dell'equazione differenziale è uguale a quello trovato con il primo procedimento .

Esempio 3) A.Ghizzetti , Vol 2°, pg. 383 Integrare l'equazione differenziale

(1D) $y'(x)=2y\cdot tgx+2\sqrt{y}$ .

Abbiamo un'equazione di Bernoulli che possiamo integrare ponendo

(*) $u(x)=y^{1-n}(x)$, cioè (2) $\sqrt{y(x)}=u(x)$ , $\rightarrow$ (3) $y(x)=u^2(x)$ .

Derivando la (3) si ha : (4) $y'(x)=2u\cdot u'$ .

Sostituendo le (2),(3),(4) nella (1D) si ottiene $2u\cdot u'=2\cdot u^2 tgx+2u$ ,
e da questa si ha $u(x)=0$ e (5) $u'=1+u\cdot tgx$ .

Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione differenziale (5):

(*) $u(x)=e^{\int tgx\cdot dx}\cdot\left[k+\int e^{-\int tgx\cdot dx}\cdot dx\right]=e^{-\int\frac{d\cos x}{\cos x}}\cdot\left[k+\int e^{\int\frac{d\cos x}{\cos x}}\cdot dx\right]$ ,

(*) $u(x)=e^{-\ln(\cos x)}\cdot\left[k+\int e^{\ln(\cos x)}\cdot dx\right]$ ,

(*) $u(x)=\frac{1}{\cos x}\left[k+\int\cos x\cdot dx\right]=\frac{1}{\cos x}\left[k+senx\right]$,

(6) $$u(x) = \mathrm{tg}x + \frac{k}{\cos x} \ .$$

Ricordando che $y(x) = u^2(x)$, si ha che l'integrale generale dell'equazione differenziale è

(7) $$y(x) = \left( \mathrm{tg}x + \frac{k}{\cos x} \right)^2 \ .$$

Dall'equazione $u(x) = 0$ si ha l'integrale $y(x) = 0$. Ma questo integrale non si può ottenere dalla (7) per nessun valore della costante k; quindi $y = 0$ è un integrale singolare dell'equazione differenziale data.

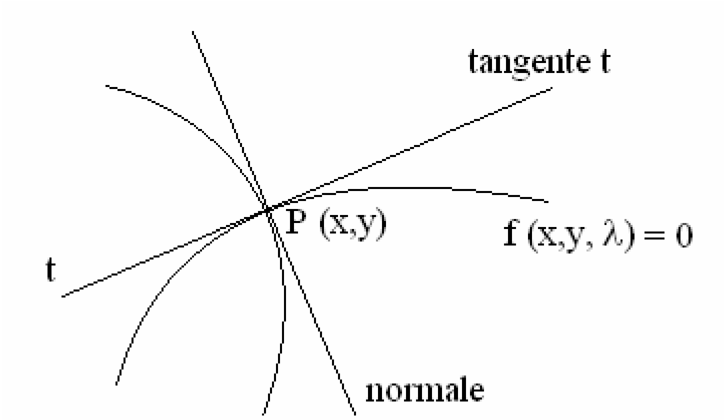
**N. 17 – Traiettorie ortogonali**

Consideriamo nel piano xy una famiglia $\infty^1$ di curve piane C, rappresentata dall'equazione $f(x,y,\lambda)=0$ al variare del parametro $\lambda$ (A. Ghizzetti, Esercizi di Analisi Matematica, 2° vol., pg. 466). In un punto P(x,y) la curva $f(x,y,\lambda)=0$ che passa per esso ha la tangente:

(1) $$t: f_x(x,y,\lambda)(X-x)+f_y(x,y,\lambda)(Y-y)=0$$

e il suo coefficiente angolare è

(2) $$m=-\frac{f_x(x,y,\lambda)}{f_y(x,y,\lambda)}\ .$$




Per lo stesso punto P(x,y) passa una traiettoria ortogonale incognita $y=y(x)$ e la sua tangente in tal punto ha il coefficiente angolare $m_1 = dy/dx$. Poiché le tangenti alle due curve nel punto P sono fra loro ortogonali, deve essere $m\cdot m_1=-1$. Sussiste quindi il sistema:

(3) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{f_x(x,y,\lambda)}{f_y(x,y,\lambda)}=1 \\ f(x,y,\lambda)=0\ . \end{cases}$$

Ovviamente, la seconda equazione del sistema deve essere verificata per quel valore di $\lambda$ che spetta alla curva passante per il punto P(x,y).

Eliminando $\lambda$ fra le equazioni del sistema (3) si ha un'equazione del tipo

(4) $$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0\ ;$$

essa è l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali .

Se la famiglia di curve ha l'equazione $f(x,y)=\lambda$, la prima equazione del sistema (3) si riduce a

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=1 \;. \tag{5}$$

La relazione (5) è senz'altro l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali.

Esempio 1) Si consideri la famiglia di lemniscate definita dall'equazione

$$\left(x^2+y^2\right)^2-\lambda(x^2-y^2)=0 \;. \tag{1}$$

Vogliamo trovare l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali e le curve integrali dell'equazione.
Questa equazione differenziale si ricava dal sistema:

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{f_x(x,y,\lambda)}{f_y(x,y,\lambda)}=1 \\ f(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \quad\to\quad \text{(3)}\quad \begin{cases} y'\cdot\dfrac{2(x^2+y^2)2x-2lx}{2(x^2+y^2)2y+2\lambda y}=1 \\ \lambda=\left(x^2+y^2\right)^2\Big/(x^2-y^2) \;. \end{cases}$$

Sostituendo la $(3)_2$ nella $(3)_1$ si ha:

$$y'\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-x\cdot\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2-y^2}}{2y(x^2+y^2)+y\cdot\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2-y^2}}=1 \;, \qquad \text{da cui} \tag{4}$$

$$y'\cdot\frac{x\,\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\left[2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)\right]}{y\,\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\left[2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)\right]}=1 \;, \quad \text{quindi} \tag{5}$$

$$\text{(6)}\quad y'\cdot\frac{x(x^2-3y^2)}{y(3x^2-y^2)}=1, \quad\to\quad \text{(7)}\quad y'(x)\cdot\frac{x^3-3xy^2}{3yx^2-y^3}=1 \;.$$

Si ricava che la richiesta equazione differenziale delle traiettorie è:

$$y'(x)=\frac{3x^2y-y^3}{x^3-3xy^2} \;. \tag{8}$$

Essa è un'equazione differenziale omogenea che si può risolvere ponendo $y = x \cdot u(x)$.

Si ricava $\frac{dy}{dx} = \frac{3\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - 3\frac{y^2}{x^2}}$, $\rightarrow$ (9) $dy(1-3u^2) = (3u - u^3)dx$.

Ma dalla posizione $y = x \cdot u(x)$ si ricava (10) $dy = udx + xdu$.

Sostituendo nella (9) si ha

(*) $$(udx + xdu)(1-3u^2) = (3u - u^3)dx \ .$$

Ne segue $$(1-3u^2)udx + x(1-3u^2)du = (3u - u^3)dx \ ,$$

(*) $$x(1-3u^2)du = (3u - u^3)dx - (u - 3u^3)dx = (2u + 2u^3)dx \ ,$$

(*) $$x(1-3u^2)du = 2u(1+u^2)dx \ ,$$

(11) $$\frac{1-3u^2}{u(1+u^2)}du = \frac{2}{x}dx \ .$$

Ma ora : $\frac{1-3u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1+u^2-4u^2}{u(1+u^2)}$, $\rightarrow$ $\frac{1-3u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{4u}{1+u^2}$.

Sostituendo questa espressione nella (11) e integrando si ha:

(*) $$\int \frac{1}{u}du - 2\int \frac{2u}{1+u^2}du = 2\int \frac{1}{x}dx \ ,$$

(*) $$\ln u - 2\ln(1+u^2) + \ln C = 2\ln x \ ,$$

(*) $$\ln Cu = 2\ln x(1+u^2) \ , \rightarrow \quad \ln Cu = \ln x^2(1+u^2)^2$$

(*) $$Cx = x^2(1+u^2)^2 \quad .$$

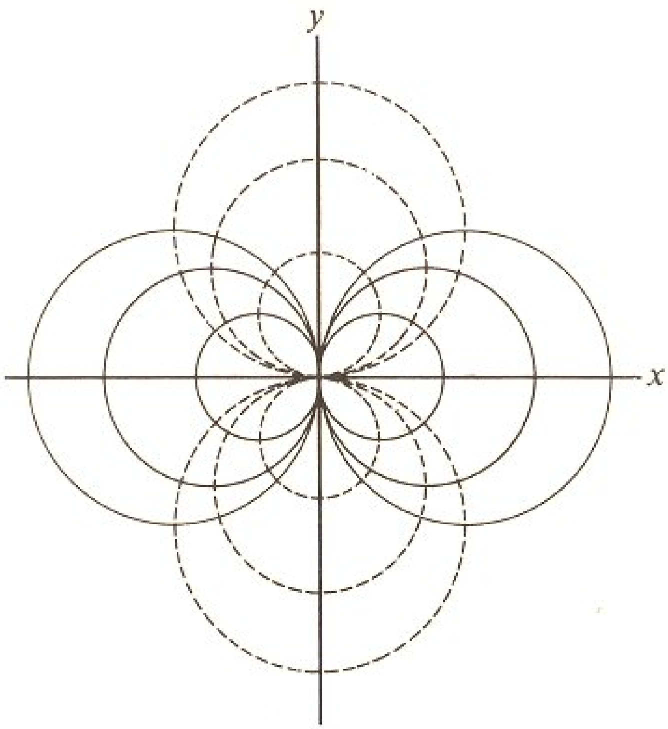
Poiché $u = \frac{y}{x}$ si ottiene $$C\frac{y}{x} = x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 \ ,$$

Infine si ha (12) $\left(x^2+y^2\right)^2-Cxy=0$ .

La (12) rappresenta l'equazione delle traiettorie ortogonali alle curve della famiglia di lemniscate (1); come si vede, queste traiettorie costituiscono anche esse una famiglia di lemniscate.

Esempio 2) Dato il fascio di circonferenze $x^2+y^2-2Cx=0$

a) trovare l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali ;
b) trovare le curve integrali dell'equazione differenziale, cioè l'equazione della famiglia delle traiettorie ortogonali.




**Circonferenze ortogonali**

Per rispondere al primo quesito risolviamo il sistema

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{f_x(x,y,C)}{f_y(x,y,C)}=1 \\ f(x,y,C)=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y'\cdot\dfrac{2x-2C}{2y}=1 \\ x^2+y^2-2Cx=0 \end{cases} \quad\rightarrow(2)\quad \begin{cases} y'\cdot\dfrac{x-C}{y}=1 \\ C=\dfrac{x^2+y^2}{2xy} \end{cases} .$$

Sostituendo la $2^a$ equazione del sistema (2) nella prima equazione si ha :

(*) $$y'\cdot\frac{x-\dfrac{x^2+y^2}{2x}}{y}=1, \quad \rightarrow \quad y'\cdot\frac{x^2-y^2}{2xy}=1\ ;$$

infine (3) $$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}\ .$$

La (3) è l’equazione differenziale delle traiettorie ortogonali. Come si vede, essa è una equazione omogenea che possiamo risolvere ponendo

(4) $$y(x)=x\cdot u(x)\ , \quad \rightarrow \ (5) \quad y'=u+x\cdot u'\ .$$

Sostituendo le (4),(5) nella (3) si ha:

(*) $$u+x\cdot u'=\frac{2x^2u}{x^2(1-u^2)}\ , \ \rightarrow \quad u+xu'=\frac{2u}{1-u^2}\ ,$$

(*) $$xu'=\frac{2u}{1-u^2}-u\ , \quad \rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u^2},$$ da cui

(*) $$\frac{1-u^2}{u+u^3}du\ =\ \frac{dx}{x}\ , \quad \rightarrow \ (6) \quad \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du\ =\ \frac{dx}{x}\ .$$

Ma ora $$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}=\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\ .$$ Sostituendo nella (6) si ha:

(*) $$\frac{1}{u}du-\frac{2u}{1+u^2}du\ =\ \frac{1}{x}dx\ .$$

Integrando si ha $$\ln u-\ln(1+u^2)=\ln x+\ln k\ ,$$

da cui $$\ln\frac{u}{1+u^2}=\ln(kx)\ .$$

Eguagliando gli argomenti e ricordando che $u=\dfrac{y}{x}$ si ottiene :

(*) $$\frac{u}{1+u^2}=kx\ , \quad \rightarrow \quad \frac{y}{x}:\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=kx\ ,$$

(*) $$\frac{y}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{x^2+y^2}=kx\,,\qquad\rightarrow\qquad\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2C}\ .$$

Ne segue (8) $$x^2+y^2-2Cy=0\ :$$

la (8) ci dice che le curve integrali formano una famiglia di circonferenze aventi il centro sull'asse $y$ e passanti per l'origine $O$ del riferimento cartesiano .

Esercizio 3). Trovare l'equazione differenziale che ha come curve integrali la famiglia $\Phi$ di circonferenze passanti per l'origine $O$ e aventi il centro sull'asse x:

$$\Phi:\quad (x-C)^2+y^2=C^2\ ,\quad \text{ossia}\ (1)\quad \Phi:\quad x^2+y^2-2Cx=0\,.$$

Derivando la (1) si ha :

$$2x+2yy'-2C=0\,,$$

ossia (2) $$x+yy'=C$$

Eliminando il parametro $C$ fra le equazioni (1),(2) si ha:

$$x^2+y^2-2x(x+yy')=0\,,$$

$$x^2+y^2-2x^2-2xyy'=0\,,$$

(3) $$y^2-x^2=2xyy'\,,$$

infine (4) $$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}\ :$$

la (4) è l'equazione differenziale avente la famiglia di circonferenze (1) come curve integrali.

Esercizio 4) Risolviamo ora il problema inverso del precedente, cioè integriamo l'equazione differenziale

(1) $$y'(x)=\frac{y^2-x^2}{2xy}\ .$$

Primo metodo

Poniamo (2) $y(x) = x \cdot u(x)$ ; derivando si ha: (3) $y' = u + u'(x)$ .

Sostituendo le (2),(3) nella (1) si ha

(*) $u + xu' = \dfrac{x^2u^2 - x^2}{2x^2y}$ , $\rightarrow$ $xu' = \dfrac{u^2 - 1}{2u} - u = \dfrac{-u^2 - 1}{2u}$ ,

(*) $x\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u^2 + 1}{2u}$ , $\rightarrow$ $\dfrac{2u}{u^2 + 1} \cdot du = -\dfrac{dx}{x}$ .

Integrando si ha : $\ln(u^2 + 1) = -\ln x + \ln 2C$ , $\rightarrow$ $\ln(u^2 + 1) = \ln\dfrac{2C}{x}$ .

Eguagliando gli argomenti e ricordando che $u = y/x$ si ottiene:

(*) $\dfrac{y^2}{x^2} + 1 = \dfrac{2C}{x}$ , $\rightarrow$ $\dfrac{x^2 + y^2}{x^{\cancel{2}}} = \dfrac{2C}{\cancel{x}}$ .

Si ricava che le curve integrali dell'equazione differenziale (1) formano la famiglia di circonferenze

(4) $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$ .

Secondo metodo.

L'equazione (1) si può scrivere nella forma (*) $2xy \cdot dy = (y^2 - x^2)dx$ ,

ossia (5) $(x^2 - y^2)dx + 2xy \cdot dy = 0$ .

Si vede subito che la forma differenziale lineare al primo membro della (5) non è un differenziale esatto; infatti si ha:

(*) $\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2\right) = -2y$ , mentre $\dfrac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} \cdot 2xy = +2y$ .

Troviamo allora un fattore integrante dell'equazione. Il più semplice è $I(x)$ ; infatti si ha (*) $\dfrac{A_y - B_x}{B} = \dfrac{-2y - 2y}{2xy} = -\dfrac{2}{x}$ .

Si ricava: (*) $$I(x) = e^{\int \frac{A_y - B_x}{B} \cdot dx} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-\ln x^2} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} \; ;$$

quindi (6) $$I(x) = \frac{1}{x^2} \; .$$

Moltiplicando l’equazione differenziale data per questo fattore integrante si ha:

(7) $$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot dx + 2 \frac{y}{x} \cdot dy = 0 \, , \quad \text{ove deve essere} \quad x \neq 0 \, ,$$

ed è facile verificare che si ha $A_y = B_x = -2\,y / x^2$ .

Abbiamo così trasformato la (5) in una equazione differenziale esatta.

Possiamo trovare l’integrale $U(x,y)$ della forma differenziale al primo membro integrando lungo la spezzata PQR, ove $P(1;0)$ , Q(x;0), R(x;y) .Si ha:

(*) $$U(x,y) = \int_1^x (1 - \cancel{\frac{y^2}{x^2}})\,dx + \int_1^x 2 \cancel{\frac{y}{x}}\,dx + \cancel{\int_0^y (1 - \frac{y^2}{x^2})dx} + \int_0^y 2 \frac{y}{x}\,dx \, ,$$

(*) $$U(x,y) = \left[x\right]_1^x + \frac{1}{x} \cdot \left[y^2\right]_0^y + k \quad \text{, ossia}$$

(*) $$U(X,y) = x - 1 + \frac{y^2}{x} + k \quad \text{e quindi}$$

(*) $$U(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x} + h \, .$$

Ne segue che l’integrale generale dell’equazione differenziale esatta è

(*) $$U(x,y) = 2C \, ,$$

ossia (8) $$x^2 + y^2 - 2Cx = 0 \; .$$

**N. 18 – Traiettorie ortogonali (seconda parte)**

Supponiamo che una data famiglia di curve piane soddisfi un'equazione differenziale del 1° ordine

(1) $$y'(x) = f(x, y) \ .$$

Per un dato punto P(x,y) $f(x, y)$ è il coefficiente angolare della tangente alla curva integrale passante per il punto stesso. Il coefficiente angolare della traiettoria ortogonale passante per questo stesso punto è il reciproco cambiato di segno di $f(x, y)$, ossia è $-1/f(x, y)$. Pertanto le traiettorie ortogonali soddisfano l'equazione differenziale

(2) $$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \ .$$

Esempio 1) (A. Ghizzetti, Analisi Matematica, Vol. 2° , pag. 467) . Si consideri la famiglia di ellissi data dall'equazione:

(3) $$3x^2 + y^2 - \lambda x = 0 \ .$$

Trovare l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali e l'equazione del fascio di traiettorie stesse.

Deriviamo la (3) rispetto alla variabile x e mettiamo poi a sistema. Si ha:

(4) $6x + 2yy' - \lambda = 0$ , $\rightarrow$ (5) $$\begin{cases} 3x^3 + y^2 - \lambda x = 0 \\ \lambda = 6x + 2yy' \ . \end{cases}$$

Eliminando $\lambda$ fra le due equazioni del sistema (5) si ha

(*) $y^2 - 3x^2 - 2xyy' = 0$ , da cui (6) $$y'(x) = \frac{y^2 - 3x^2}{2xy} \ .$$

La (6) è l'equazione integrale del fascio di ellissi (3). L'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali alle ellissi è immediata:

(7) $$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \ .$$

Vogliamo trovare le curve integrali di questa equazione differenziale. Poiché essa è omogenea possiamo porre:

(8) $$y(x) = x \cdot u(x) .$$

Sostituendo nella (7) si ha :

(*) $$y' = \frac{2x^2 u}{x^2(3-u^2)} \quad , \quad \text{da cui} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2u}{3-u^2} ,$$

ossia (8) $$(3-u^2)dy = 2udx \quad .$$

Poiché $y(x) = x \cdot u(x)$ , differenziando si ha $dy = u \cdot dx + x \cdot du$ .

Sostituendo nella (8) si ottiene in successione:

(*) $$(3-u^2) \cdot (u \cdot dx + x \cdot du) = 2u \cdot dx ,$$

(*) $$x(3-u^2)du = 2u \cdot dx - (3-u^2)u \cdot dx ,$$

(*) $$x(3-u^2)du = u^3 \cdot dx - u \cdot dx ,$$

(*) $$x(3-u^2)du = u(u^2-1)dx ,$$

(9) $$\frac{3-u^2}{u(u^2-1)}du = \frac{1}{x} \cdot dx . \qquad \text{Ma ora si ha:}$$

(10) $$\frac{3-u^2}{u(u^2-1)} = \frac{-(u^2-1)+2}{u(u^2-1)} = -\frac{1}{u} + \frac{2}{u(u^2-1)} = -\frac{1}{u} - \frac{2}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} \quad .$$

Sostituendo nella (9) si ha

(*) $$-3\frac{du}{u} + \frac{du}{u-1} + \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \quad .$$

Integrando si ottiene:

(*) $$-3\ln u + \ln(u-1) + \ln(u+1) = \ln x + \ln k \quad ,$$

da cui $$\ln(u^2-1) = \ln(kx \cdot u^3) .$$

Eguagliando gli argomenti si ha

(10) $$kx \cdot u^3 = u^2 - 1 \quad .$$

Ricordiamo che $y = x \cdot u$ e quindi $u = y/x$ .

Sostituendo nella (10) si ha: $$kx \cdot \frac{y^3}{x^3} = \frac{y^2}{x^2} - 1 \ ,$$

Infine si ottiene (11) $$y^3 + C\left(x^2 - y^2\right) = 0 \quad .$$

Abbiamo così ottenuto che le traiettorie ortogonali del fascio di ellissi (3) formano un fascio di cubiche di equazione (11). Esse sono le curve integrali dell'equazione differenziale (7).

**N. 19 – Il problema di inseguimento e la curva trattrice**

E' dato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Una lepre L si trova nell'origine O mentre un cane C si trova nel punto P(k;0) dell'asse x. Alla vista del cane la lepre fugge lungo l'asse y e il cane la insegue in modo tale che il suo moto sia sempre diretto verso la lepre L . Trovare l'equazione della curva descritta dal cane ( T. M. Apostol, Calcolo, vol. 1° pag. 419; fig.5).

Il punto C descrive una curva $\gamma :\ y = f(x)$, detta " curva di inseguimento o trattrice ", caratterizzata dal fatto che la tangente ad essa in un punto $C(x, y)$ ( posizione occupata dal cane all'istante t) passa anche per il punto $L(0;Y)$ ( posizione occupata dalla lepre in quello stesso istante).

Se $(\xi, \eta)$ sono le coordinate del generico punto Q della tangente, l'equazione di questa è

(*) $\eta - y = y'(x) \cdot (\xi - x)$, da cui (1) $$y'(x) = \frac{\eta - y}{\xi - x} \quad .$$

Se facciamo coincidere il punto $Q(\xi, \eta)$ con il punto $L(0;Y)$ in cui si trova la lepre, l'equazione precedente diventa

(2) $$y' = \frac{Y - y}{-x} \quad .$$

Aggiungiamo ora la condizione che i due animali abbiano la stessa velocità; quindi la loro distanza iniziale $\overline{OP} = k > 0$ rimane costante durante la loro corsa. Ne segue che deve sussistere anche la condizione

(a) $$(0 - x)^2 + (Y - y)^2 = k^2 \ ;$$

notare: la lepre si muove sull'asse Y, quindi deve essere $X_L = 0$.
Dalla condizione (a) si ottiene

(*) $(Y - y)^2 = k^2 - x^2$, quindi (3) $Y - y = \sqrt{k^2 - x^2}$ .

Sostituendo la (3) nella (2) si ha:

(4) $y' = \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{-x}$, da cui (5) $dy = -\frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{x} \cdot dx$ .

Poniamo $x = k \cdot \text{sen} t$, quindi $dx = k \cos t \cdot dt$; sostituendo si ha:

(*) $$dy = -\frac{\sqrt{k^2(1 - \text{sen}^2 t)}}{\cancel{k}\,\text{sen} t} \cdot \cancel{k} \cos t \cdot dt ,$$

(*) $$dy = -k\frac{\cos^2 t}{\text{sen} t} \cdot dt , \qquad dy = -k\frac{1 - \text{sen}^2 t}{\text{sen} t} \cdot dt ,$$

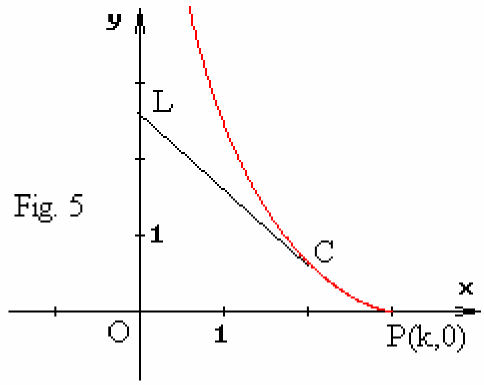
e quindi (6) $$dy = -k\frac{dt}{\text{sen} t} + k\,\text{sen} t \cdot dt$$

Integrando, si trovano le "equazioni parametriche della trattrice":

(7) $$\begin{cases} x = k \cdot \text{sen} t, & \text{con} \quad k > 0 \\ y = -k \ln\left( \text{tg}\frac{t}{2} \right) - k \cdot \cos t + C & . \end{cases}$$

Si vede subito che essa è costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse x;
per $0 < t \leq \pi/2$ si ha il ramo superiore.

Fig. 5




Dal sistema (7) possiamo ricavare l'equazione cartesiana della curva. Infatti si ha :

(*) $\qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\,, \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\operatorname{sen} t}{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\,.$ Ne segue:

(*) $$y = -k\ln\frac{\operatorname{sen} t}{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \; - \; k\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \; + \; C \quad , \quad \text{ove} \quad \operatorname{sen} t = x/k\,;$$

(*) $$y = -k\cdot\ln\frac{x/k}{1+\sqrt{1-x^2/k^2}} \; - \; k\sqrt{1-\frac{x^2}{k^2}} \; + \; C\,,$$

(*) $$y = -k\cdot\ln\frac{x}{k+\sqrt{k^2-x^2}} \; - \; \sqrt{k^2-x^2} \; + \; C\,,$$

(*) $$y = +k\cdot\ln\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} \; - \; \sqrt{k^2-x^2} \; + \; C\,.$$

Ricordando la condizione che sia $x = k$ quando $y = 0$ si ha:

(*) $$0 = k\cdot\ln\frac{k}{k} - 0 + C \quad , \quad \text{ossia} \quad C = 0\,.$$

Pertanto la curva di inseguimento, o trattrice, ha l'espressione cartesiana:

(9) $$y = k\cdot\ln\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} \; - \; \sqrt{k^2-x^2}\,.$$

Ricordiamo che facendo ruotare la trattrice attorno all'asse $x$ (asintoto) si ottiene la pseudo-sfera di Beltrami, che ha la curvatura costante $\Gamma = -k^2$.
Ciascuna trattrice risulta l'evolvente di una catenaria.

**N. 20 – Equazioni differenziali del 1° ordine del tipo** $y = f(y')$**.**

Consideriamo un'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

(1) $$y = f(y')\,;$$

si tratta di una equazione in cui non compare esplicitamente la variabile $x$ ( vedi A. Ghizzetti, Esercizi di Analisi Mat. 2° vol. pag. 469) .

L'integrale generale si può esprimere mediante due equazioni parametriche con il parametro $y'$ . Infatti, differenziando l'equazione data si ha:

(*) $y'dx = f'(y)dy'$, $\rightarrow$ $dx = \dfrac{f'(y')}{y'}dy'$ .

Integrando si ha (2) $x = \int \dfrac{f'(y')}{y'}dy' + C$ .

Le equazioni parametriche dell'integrale generale formano il sistema:

(3) $$\begin{cases} x = \int \dfrac{f'(y')}{y'}dy' + C \\ y = f(y') \quad . \end{cases}$$

Se fra queste due equazioni è possibile eliminare il parametro $y'$ si ha l'integrale generale sotto forma cartesiana

(4) $\varphi(x, y, C) = 0$ .

Esempio 1) . Integrare l'equazione differenziale non lineare del 1° ordine

(1) $y = 2y'^3 + y'^2$ .

Differenziando ambo i membri si ha:

(*) $y' \cdot dx = (6y'^2 + 2y') \cdot dy'$, $\rightarrow$ $y'dx = y'(6y' + 2) \cdot dy'$. Da questa si ha:

a) $y' = 0$ , da cui si ricava l'integrale (singolare) $y = 0$;

b) $dx = (6y' + 2) \cdot dy'$ , da cui $x = 3y'^2 + 2y' + C$ .

L'integrale generale dell'equazione è dato, in forma parametrica, dal sistema:

(2) $$\begin{cases} x = 3y'^2 + 2y' + C \\ y = 2y'^3 + y'^2 \quad . \end{cases}$$

L'integrale $y = 0$ è un integrale singolare. E' facile verificare che esso è l'inviluppo degli $\infty^1$ integrali particolari.

**N. 21 – Integrare l'equazione differenziale (1)** $x = f(y')$

Si tratta di una equazione differenziale che non contiene esplicitamente la $y$.
Differenziando i due membri dell'equazione si ha

(2) $$dx = f'(y')dy' \ .$$

Ma da $y = y(x)$ si ricava $dy = y'(x)dx$ , $\rightarrow$ (3) $dx = dy/y'$ .

Sostituendo la (3) nella (2) si ottiene:

(*) $$\frac{dy}{y'} = f'(y') \cdot dy' \ , \quad \rightarrow \quad dy = y' \cdot f(y')dy' \ .$$

Integrando si ha $y = C + \int y' \cdot f(y')dy'$ .
Si conclude che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato, in forma parametrica, dal sistema

(4) $$\begin{cases} x = f(y') \\ y = C + \int y' f'(y)dy' \ . \end{cases}$$

Esempio 1).(Ghizzetti, Esercizi, vol. 2°, pg. 469) Integrare l'equazione differenziale

(1) $$x = \cos y' + y' \ .$$

Differenziando ambo i membri della (1) si ha:

(*) $$\frac{dx}{dy'} = -\operatorname{sen} y' + 1 \ , \quad \text{da cui} \quad (2) \quad dx = (-\operatorname{sen} y' + 1) \cdot dy' \ .$$

Ma da $y = y(x)$ si ricava $dy = y'(x) \cdot dx$, da cui (3) $dx = \dfrac{dy}{y'}$ .

Sostituendo la (3) nella (2) si ha:

(*) $$\frac{dy}{y'} = (-\operatorname{sen} y' + 1)dy' \ , \quad \rightarrow \quad (4) \quad dy = -y' \operatorname{sen} y' dy' \ + \ y'dy'.$$

Integrando si ottiene

(*) $$y(x) = \frac{1}{2} y'^2 + \int y' d\cos y' + C \ , \qquad y(x) = \frac{1}{2} y'^2 + y' \cos y' - \int \cos y' dy' + C \ ,$$

e quindi $$y(x)=\frac{1}{2}y'^2+y'\cos y'-\operatorname{sen}y'+C\ .$$

Questa equazione, assieme all'equazione data $x=\cos y'+y'$, fornisce l'integrale generale in forma parametrica. Tale integrale è dato dal sistema

(7) $$\begin{cases} x=y'+\cos y' \\ y=\frac{1}{2}y'^2+y'\cos y'-\operatorname{sen}y'+C\ . \end{cases}$$

**N. 22 – Equazioni differenziali del tipo** $F(y',y'')=0$

Le equazioni differenziali di questo tipo si risolvono ponendo

(1) $$y'(x)=t(x)\ ,\qquad \text{da cui}\qquad y''(x)=t'(x)\ .$$

Esempio 1) (A.Ghizzetti, Esercizi di Analisi Mat. Vol 2°, pag 472). Integrare l'equazione differenziale

(2) $$2y'y''+\left(1+y'^2\right)^2=0\ .$$

E' un'equazione del 2° ordine in cui non compare esplicitamente la $y$. Assumiamo come nuova incognita la y' e poniamo $y'(x)=t(x)$ e quindi $y''=t'$. Sostituendo nella (2) si ottiene:

(*) $$2t\cdot t'+(1+t^2)^2=0\ ,\qquad \to\quad (3)\qquad t'=-\frac{(1+t^2)^2}{2t}\ .$$

La (3) è una equazione differenziale a variabili separabili che sappiamo risolvere. Procedendo nei calcoli si ha:

(*) $$\frac{dt}{dx}=-\frac{(1+t^2)^2}{2t}\ ,\qquad \to\qquad \frac{2t\cdot dt}{(1+t^2)^2}=-dx\ ,\qquad \text{ossia}$$

(4) $$dx=-\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2}\ .$$

Integrando si ha $$x + C = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad \text{ove} \quad t = y'(x)\ .$$

Ne segue (5) $$x + C = \frac{1}{1+y'^2}\ .$$

La (5) è un'equazione differenziale non lineare del 1° ordine. Differenziando ambo i membri si ottiene :

(6) $$dx = \frac{-2y'}{(1+y'^2)^2}dy'\ .$$

Ma dalla $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ segue $dx = \frac{dy}{y'}$ . Sostituendo in dx si ottiene:

(*) $$\frac{dy}{y'} = -\frac{2y'}{(1+y'^2)^2}dy'\ ,$$ da cui (7) $$dy = -2\frac{y'^2}{(1+y'^2)^2}dy'\,.$$

Ora si ha: $$\frac{2y'^2}{(y'^2+1)^2} = \frac{2(y'^2+1-1)}{(y'^2+1)^2} = \frac{2}{y'^2+1} - \frac{2}{(y'^2+1)^2}\ ;$$

e la formula di Hermite ci permette di ricavare:

(*) $$\frac{2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

Le due scomposizioni precedenti ci permettono di scrivere:

(8) $$dy = -2\frac{y'^2}{(y'^2+1)} = \frac{-2}{y'^2+1} + \frac{1}{y'^2+1} + \frac{d}{dy'}\left(\frac{y'}{y'^2+1}\right)\ ,$$

da cui (9) $$dy = -\frac{1}{y'^2+1} + \frac{d}{dy'}\left(\frac{y'}{y'^2+1}\right)\ .$$

Integrando si ha $$y(x) = -\text{arctg}(y') + \frac{y'}{y'^2+1} + C\ .$$

Ricordando che $y'(x) = t(x)$ si ha:

(10) $$y(x) = -\mathrm{arctg}(t) + \frac{t}{t^2+1} + C \quad ,$$

mentre dalla (5) si ha $$x + C = \frac{1}{t^2+1} \ .$$

In forma parametrica, l'integrale generale dell'equazione differenziale (2) è dato dal sistema:

(11) $$\begin{cases} x + C = \dfrac{1}{t^2+1} \\ y + C_1 = \dfrac{t}{t^2+1} - \mathrm{arctg}(t) \ . \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si ricava facilmente che $t = \sqrt{\frac{1}{x+C} - 1}$ ; se poi eliminiamo il parametro $t$ fra le due equazioni del sistema (11) otteniamo facilmente l'espressione cartesiana dell'integrale dell'equazione differenziale (2); si ricava:

(12) $$y + C_1 = \sqrt{x + C + (x+C)^2} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{x+C} - 1} \ .$$

Esempio 2) Integrare l'equazione differenziale del 2° ordine

(1) $$y'' - e^{y'} = 0 \ . \qquad \text{Eq. del tipo} \quad F(y', y'') = 0 \ .$$

Poniamo $y'(x) = t(x)$ e quindi $y''(x) = t'(x)$ . Sostituendo nella (1) si ha:

(*) $$t' - e^t = 0 \ , \quad \to \quad \frac{dt}{dx} = e^t \ , \quad \to \quad \frac{dt}{e^t} = dx \ .$$

Integriamo: $$\int e^{-t} \cdot dt = \int dx \ , \quad \to \quad -e^{-t} = x - k \ , \quad \to \quad \frac{1}{e^t} = k - x \ .$$

Si ricava $e^t = \frac{1}{k-x}$ , da cui $t = -\ln(k-x)$ .

Ricordando che $t = y'(x) = \frac{dy}{dx}$ , si ha $\frac{dy}{dx} = -\ln(k-x)$ .

Integrando si ha: (2) $y(x) = c - \int \ln(k-x)dx$ .

Consideriamo l'ultimo integrale e integriamolo per parti; si ha:

(*)
$$\int \ln(k-x)\cdot dx = x\cdot\ln(k-x) - \int x\cdot d\left[\ln(k-x)\right] =$$
$$= x\cdot\ln(k-x) - \int \frac{x}{k-x}d(k-x) = x\cdot\ln(k-x) + \int \frac{x}{k-x}dx \;;$$

(*) $$\int \ln(k-x)\cdot dx = x\cdot\ln(k-x) + \int \frac{(x-k)+k}{k-x}dx \,,$$

(*) $$\int \ln(x-k)\cdot dx = x\cdot\ln(k-x) - \int dx + k\int \frac{dx}{k-x} \,,$$

(*) $$\int \ln(k-x)\cdot dx = x\cdot\ln(k-x) - x - k\int \frac{d(k-x)}{k-x}$$

(3) $$\int \ln(x-k)\cdot dx = x\cdot\ln(x-k) - x - k\cdot\ln(k-x) \;.$$

Sostituendo la (3) nella (2) si ha:

(*) $$y(x) = c - x\cdot\ln(k-x) + x + k\cdot\ln(k-x) \;;$$

(4) $$y(x) = (k-x)\cdot\ln(k-x) + c + x \,.$$

Conclusione: l'integrale generale dell'equazione differenziale (*) $y'' - e^{y'} = 0$
è dato dalla famiglia di curve (4) .

Esempio 2) integrare l'equazione differenziale del 2° ordine

(1) $$y\cdot y'' - y'^2 - y' = 0 \;.$$

Conviene pensare che $y'(x)$ sia una certa funzione $t$ della variabile $y(x)$ , cioè
(2) $$y'(x) = t\left[y(x)\right] \;.$$

Derivando questa funzione $t$ si ottiene:

(*) $$y''(x)=\frac{dt}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\ \ ,\ \ \text{ossia}\ \ y''=\frac{dt}{dy}\cdot y'\ \ ,\ \ \text{cioè}\ \ y''=\frac{dt}{dy}\cdot t\ ;$$

e da quest’ultima si ha

(3) $y''(x)=t(x)\cdot t'(x)$ , o più semplicemente $y''=t\cdot t'$

Sostituendo le (2), (3) nella (1) si ha:

(*) $$ytt'-t^2-t=0\ \ ,\ \ \rightarrow\ (4)\ \ t(yt'-t-1)=0\ .$$

La (4) si spezza nelle due equazioni seguenti:
(a) $t=0$ , cioè $y'=0$, da cui $y=C$;

(b) $yt'-t-1=0$ , ossia $y\cdot\dfrac{dt}{dy}=t+1$ ,

da cui (5) $$\frac{dt}{t+1}=\frac{dy}{y}\ .$$

Integrando la (5) si ha:

(6) $\ln(t+1)=\ln(ky)$, ed eguagliando gli argomenti si ha : $t+1=ky$ .

Si ricava $y'(x)=ky-1$ , ossia $\dfrac{dy}{dx}=ky-1$ ; quindi $\dfrac{dy}{ky-1}=dx$ ;

(*) $$\frac{d(ky-1)}{ky-1}=k\cdot dx\ \ ,\ \ \text{e integrando si ha}\ \ \ln\frac{ky-1}{C}=kx\ .$$

Prendendo gli esponenziali di ambo i membri si ha:

(*) $$\frac{ky-1}{C}=e^{kx}\ \ ,\ \ \text{da cui}\ \ ky=1+C\cdot e^{kx},\ \ y=\frac{1}{k}x+\frac{C}{k}\cdot e^{kx}\ .$$

Concludendo, l’integrale generale dell’equazione differenziale (1) è:

(7) $$y(x)=Ax+B\cdot e^{\frac{x}{A}}\ .$$

**N. 23 – Equazioni differenziali del tipo** $F(y, y', y'') = 0$

Le equazioni differenziali del tipo (1) $F(y, y', y'') = 0$ si risolvono ponendo

(2) $y'(x) = t\left[y(x)\right]$ ; derivando si ha: $y'' = \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ , ossia $y'' = y' \cdot \frac{dt}{dy}$ .

Ricordando che t è funzione della variabile y(x) possiamo dire: (3) $y'' = t \cdot t'$ .

Grazie alle (2), (3) possiamo scrivere la (1) nel modo seguente:

(4) $$F\left( y, t, \frac{dt}{dy} \cdot t \right) = 0 \ .$$

Questa equazione, qualora si riguardi $y$ come variabile indipendente e $t = t(y)$ come funzione incognita, è un'equazione differenziale del 1° ordine, che avrà un certo integrale generale

(5) $$f(y, t, c) = 0 \ .$$

Ricordando allora che $t = y'(x)$ si ha (6) $f(y, y', c) = 0$ ,

che è anch'essa una equazione differenziale del 1° ordine. Integrando l'equazione (6) si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale $F(y, y', y'') = 0$ .

Esempio 1) (Bononcini, Pàtron pg. 707) . Integrare l'equazione differenziale

(1) $yy'' + y'^2 - yy' = 0$ ( è una eq. del tipo $F(y, y', y'') = 0$ ) .

Possiamo risolvere l'equazione ponendo

(2) $y'(x) = t\left[y(x)\right]$ ; derivando si ha: $y'' = \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ , ossia $y'' = y' \cdot \frac{dt}{dy}$ .

Poiché t è funzione della variabile y(x) possiamo dire: (3) $y'' = t \cdot t'$ .

Sostituendo le (2),(3) nella (1) si ottiene:

(*) $y \cdot t \cdot t' + t^2 - yt = 0$ , $\rightarrow$ (4) $t(yt' + t - y) = 0$ .

La (4) si spezza nelle due equazioni seguenti:

(a) $t = 0$ , cioè $y' = 0$ , da cui $y = C$ ;

(b) $yt' + t - y = 0$ , da cui si ha: (5) $t' = -\frac{1}{y}t + 1$ .

La (5) è un'equazione differenziale lineare non omogenea del 1° ordine nella funzione incognita t. Conosciamo la regola per integrarla:

(*) $$t = e^{-\int \frac{dy}{y}} \cdot \left[ k + \int 1 \cdot e^{\int \frac{dy}{y}} \cdot dy \right] = e^{\ln\left|\frac{1}{y}\right|} \cdot \left[ k + \int e^{\ln|y|} \cdot dy \right],$$

(*) $$t = \frac{1}{|y|} \cdot \left( k + \int |y| dy \right) , \quad \text{ossia} \quad t = \frac{1}{y} \cdot \left( k + \frac{1}{2} y^2 \right),$$

e quindi $$t = \frac{C + y^2}{2y} .$$

Poiché $t = y'(x) = \frac{dy}{dx}$ si ha : $\frac{dy}{dx} = \frac{C + y^2}{2y}$ .

Ne segue: $dx = \frac{2y \cdot dy}{C + y^2}$ , e quindi $dx = \frac{d(C + y^2)}{C + y^2}$ .

Integrando si ha $x = \ln(C + y^2) + \ln C_1$ ;

possiamo dire $x = \ln(A + By^2)$ , $\rightarrow$ $A + By^2 = e^x$ ,

ne segue $y^2 = k_1 e^x + k_2$ ,

e infine (6) $y(x) = \pm\sqrt{k_1 e^x + k_2}$ .

La (6) è l'integrale generale dell'equazione differenziale (1)

## N. 24 – Equazioni differenziali del tipo $F(x, y', y'') = 0$

L'equazione differenziale $F(x, y, y') = 0$ è una relazione fra le coordinate di un punto della curva $y = y(x)$ e il coefficiente angolare della curva nel punto stesso, cioè è una proprietà della curva relativa alla tangente in un suo punto.

Vogliamo ora integrare le equazioni differenziali del tipo (1) $F(x, y', y'') = 0$.

Posto $y'(x) = t(x)$ e $y''(x) = t'(x)$ la (1) diventa

(2) $$f(x, t, t') = 0 .$$

Si ottiene così un tipo di eq. differenziali che abbiamo già studiato.

Esempio 1) Integrare l'equazione differenziale

(1) $$xy'' + y' - 4x - 9x^2 = 0$$ eq. del tipo $F(x, y', y'') = 0$.

Ponendo $y' = t(x)$ , $y'' = t'(x)$ si ha:

(*) $xt' + t - 4x - 9x^2 = 0$ , da cui (2) $t' = -\frac{1}{x}t + 9x + 4$ .

Abbiamo un'equazione differenziale lineare del 1° ordine. La possiamo integrare applicando direttamente la nota regola. Si ha:

(*) $$t(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[ k + \int (9x+4) \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot dx \right] ,$$

(*) $$t(x) = e^{\ln\left|\frac{1}{x}\right|} \cdot \left[ k + \int (9x+4) \cdot e^{\ln|x|} \cdot dx \right] ,$$

(*) $$t(x) = \frac{1}{|x|} \cdot \left[ k + \int |x| \cdot (9x+4) dx \right] .$$

Per $x > 0$ si ha: $$t(x) = \frac{1}{x} \cdot \left[ k + \int (9x^2 + 4x) dx \right] ,$$

(3) $$t(x) = \frac{1}{x}\left[k + 3x^3 + 2x^2\right] , \qquad t(x) = \frac{k}{x} + 3x^2 + 2x \ .$$

Per $x < 0$ si ha: $$t(x) = -\frac{1}{x}\left[k - \int (9x^2 + 4x)dx\right] ,$$

(4) $$t(x) = -\frac{1}{x}\left[k - 3x^3 - 2x^2\right] , \qquad t(x) = -\frac{k}{x} + 3x^2 + 2x \ .$$

Possiamo riunire i due risultati ottenuti in una formula unica. Si ha:

(6) $$t(x) = \frac{C}{x} + 3x^2 + 2x \ , \quad \text{con} \quad C > 0 \ \text{ o } \ C<0 \ .$$

Poiché $t = y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, dalla (6) si ottiene:

(*) $$dy = (3x^2 + 2x + C/x)dx \, .$$

Integrando si ha: (7) $$y(x) = x^3 + x^2 + C \cdot \ln|x| + k$$

La (7) ci dà l'integrale generale dell'equazione differenziale (1).

Esempio 2) (Feldhofer, pag. 646) Integrare l'equazione differenziale

(1) $xy''(x) + y'(x) = 0$; eq. del tipo $F(x, y', y'') = 0$.

Posto (2) $y'(x) = z(x)$ e $y''(x) = z'(x)$ si ottiene:

(*) $xz' + z = 0$ , ossia $x\dfrac{dz}{dx} + z = 0$ , da cui $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x}$ .

(*) Integrando si ottiene $\ln z = -\ln x + \ln C$ ,

e quindi $\ln(zx) = \ln C$ ;

eguagliando gli argomenti si ha:

(*) $zx = C$ , da cui $z(x) = \frac{C}{x}$ .

Poiché $z(x) = y'(x)$ si ha: $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{x}$ .

Integrando si ottiene (3) $y(x) = C \cdot \ln x + k$ .

La (3) è l’integrale generale dell’equazione differenziale data.

Esempio 3) Integrare l'equazione differenziale

(1) $$y''(x)+\frac{2x}{1+x^2}y'(x)=\frac{x}{1+x^2} \qquad \text{Eq. del tipo} \quad F(x,y',y'')=0\,.$$

Posto $y'(x)=t(x)$ e quindi $y''(x)=t'(x)$ si ottiene:

(*) $$t'(x)=-\frac{2x}{1+x^2}t+\frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{Eq. tipo} \quad y'=\alpha(x)y+\beta(x)\,.$$

Integrando con la nota formula risolvente si ha:

(*) $$t(x)=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\cdot\left[a+\int\frac{x}{1+x^2}e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\cdot dx\right],$$

(*) $$t(x)=e^{\ln\frac{1}{1+x^2}}\cdot\left[a+\int\frac{x}{1+x^2}e^{\ln(1+x^2)}\cdot dx\right],$$

(*) $$t(x)=\frac{1}{1+x^2}\left[a+\int\frac{x}{\cancel{1+x^2}}\cancel{(1+x^2)}\cdot dx\right],$$

(*) $$t(x)=\frac{1}{1+x^2}\left[a+\frac{1}{2}x^2\right], \quad \rightarrow \quad t(x)=\frac{a}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2},$$

(*) $$t(x)=\frac{a}{1+x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+x^2)}\,.$$

Con una espressione più semplice possiamo scrivere:

(2) $$t(x)=y'(x)=\frac{K}{1+x^2}+\frac{1}{2}\,.$$

Integrando si ottiene

(3) $$y(x)=\frac{1}{2}x+K\cdot\operatorname{arctg}(x)+C\,.$$

Supponiamo ora che si voglia trovare l'integrale che verifica le condizioni

(4) $$y(1) = 1 \quad \text{e} \quad y'(1) = \frac{1}{2}$$ ( Si tratta di un problema di Cauchy) .

Dalle equazioni (3), (2) si ottiene:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} + K \cdot \operatorname{arctg}(1) + C \\ \frac{1}{2} = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \quad ; \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{si ricava} \quad K = 0 \ \text{ e } \ C = \frac{1}{2} \ .$$

L'integrale che soddisfa le condizioni date è $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Esercizio 3) (Feldhofer, pg. 659) Integrare l'equazione differenziale

(1) $$x^2 y'' - xy' - 3y = 0 \ .$$

Poiché i coefficienti dell'equazione sono potenze decrescenti della variabile $x$ è facile trovare due integrali particolari della (1) aventi la forma:

(2) $y(x) = x^r$ , da cui $y'(x) = rx^{r-1}$ e $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$ .

Imponiamo la condizione che le (2) soddisfino la (1); si ha:

(*) $$r(r-1)x^{r-2} \cdot x^2 - x \cdot rx^{r-1} - 3x^r = 0 ,$$

da cui $$r(r-1)x^r - rx^r - 3x^r = 0 \ .$$

Dividendo per $x^r$ si ottiene l'equazione:

(*) $r(r-1) - r - 3 = 0$ , cioè $r^2 - 2r - 3 = 0$.

Essa ha le radici $r_1 = -1$ ed $r_2 = +3$ . Ne segue che l'equazione differenziale ha i due integrali particolari seguenti:

(*) $$y(x) = x^3 \ , \quad e \quad y(x) = x^{-1} \ .$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è dato dalla loro combinazione

(4) $$y(x) = k_1 x^3 + k_2 x^{-1} \ .$$

**N. 25 – Equazioni differenziali lineari di ordine n**

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n$

(*) $$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \ .$$

Essa si dice lineare quando il suo primo membro è una funzione lineare di $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ , cioè quando essa è del tipo

(2) $$p_o(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ..... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \ ,$$

ove $p_o(x),\ p_1(x), ....., p_n(x)$ (coefficienti) e $q(x)$ (termine noto) sono funzioni assegnate della variabile x; supporremo che esse siano continue in un dato intervallo I, limitato o illimitato, dell'asse x (A. Ghizzetti: Analisi Mat. II , pg. 413).

<u>Se il primo coefficiente $p_o(x)$ non è mai nullo in I</u>, l'equazione (2) si può scrivere nella forma <u>normale</u> :

(3) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ..... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \ ,$$

ove $$a_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_o(x)} \ , \quad \text{con } i = 1, 2, ..., n \text{ ed } \quad f(x) = \frac{q(x)}{p_o(x)} \ .$$

Ovviamente le funzioni $a_i(x)$ ed $f(x)$ sono ancora continue nell'intervallo I.

Nel seguito ci riferiremo sempre alla forma normale dell'equazione.

L'equazione differenziale lineare (2) si dice <u>omogenea</u> quando il termine noto $f(x)$ è identicamente nullo, si dice <u>non omogenea</u> o completa nel caso contrario.

Un'equazione differenziale lineare e omogenea di ordine n, e di forma normale, sarà dunque del tipo:

(4) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ..... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

Se la funzione y(x) o qualcuna delle derivate $y^{(k)}(x)$ è elevata a potenza, l'equazione differenziale non è lineare.

Diamo alcuni esempi di equazioni differenziali non lineari (T. Apostol, vol I , pg. 409):

(*) $$(y')^2 - xy + y + 1 = 0 \ , \quad (y')^2 + yy'' + 1 = 0 \ ,$$

(*) $$y' = \frac{y-x}{y+x} \quad , \quad y' = xy^2 , \quad y' = y^{2/3} \quad .$$

Notiamo che le ultime due eq. diff. sono a variabili separabili e si solvono ponendo $y' = \frac{dy}{dx}$ , mentre la terzultima eq. è omogenea e si risolve ponendo $y'(x) = x \cdot t(x)$ .

Diremo che n integrali $y_1(x), y_2(x), ....., y_n(x)$ dell'equazione differenziale e omogenea (4) formano un sistema fondamentale di integrali quando il loro wronskiano $W(x)$ è diverso da zero in tutto l'intervallo I . Ricordiamo l'espressione di un wronskiano nel caso di $n = 3$ . Si ha:

(5) $$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} \ .$$

Ricordiamo un teorema senza darne la dimostrazione.

Teor. Se $y_1(x), y_2(x), ....., y_n(x)$ sono integrali dell'equazione differenziale lineare e omogenea (3) formanti un sistema fondamentale, allora tutti e soli gli integrali dell'equazione stessa sono compresi nella formula

(6) $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ..... + c_ny_n(x) ,$$

ove $c_1, c_2, ....., c_n$ sono costanti arbitrarie.
Si dimostra anche che l'eq. differenziale (3) è priva di integrali singolari.

Ovviamente possiamo considerare anche un'equazione differenziale di ordine n a coefficienti costanti. Se l'equazione è non omogenea, cioè completa, si ha:

(8) $$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+.....+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

e, come al solito, indicheremo con $y_1(x), y_2(x),....., y_n(x)$ n integrali linearmente indipendenti della corrispondente equazione differenziale omogenea.

Se $v(x)$ è un integrale particolare dell'eq. diff. (8), il suo integrale generale sarà:

(9) $$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+.....+c_ny_n(x)+v(x).$$

L'integrale particolare $v(x)$ può avere un'espressione del tipo:

(10) $$v(x)=y_1(x)\cdot v_1(x)+y_2(x)\cdot v_2(x)+.....+y_n(x)\cdot v_n(x),$$

ove $v_1(x), v_2(x),....., v_n(x)$ si trovano con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie $c_1, c_2,....., c_n$, o metodo di Lagrange.

Esercizio 1) Integrare l'equazione $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=4e^{-t}$ .

Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del 2° ordine, a coefficienti costanti.

Eq. diff. omogenea associata (1) $y''+4y'+3y=0$,

eq. caratteristica (2) $\alpha^2+4\alpha+3=0$ , radici $\alpha_1=-3$ $\alpha_2=-1$ .

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

(3) $$y(t)=k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}.$$

Trovo un integrale particolare dell'eq. differenziale non omogenea. Poiché l'esponente $-1$ che figura nella funzione $4e^{-t}$ è una radice dell'equazione caratteristica, l'integrale particolare è del tipo

(4) $$y(t)=a\cdot te^{-t}.$$ Le sue derivate sono:

(5) $$y'=a\cdot e^{-t}-a\cdot te^{-t} \quad , \quad y''=-2a\cdot e^{-t}+a\cdot te^{-t}.$$

Sostituendo le (4),(5) nella (1) si ha:

(*) $$-2ae^{-t} + ate^{-t} + 4ae^{-t} - 4ate^{-t} + 3ate^{-t} = 4e^{-t} \ .$$

Semplificando per il fattore comune $e^{-t}$ si ha:

(*) $$-2a + \cancel{at} + 4a - \cancel{4at} + \cancel{3at} = 4\,, \quad \to \quad 2a = 4\,, \quad \text{e quindi} \quad a = 2 \ .$$

Ne segue che l'integrale particolare dell'equazione non omogenea è

(6) $$y(t) = 2t \cdot e^{-t} \ ,$$

e l'integrale generale è

(7) $$y(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t} + 2t \cdot e^{-t} \, .$$

Esercizio 2) Integrare l'equazione $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$ .

Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del 2° ordine, a coefficienti costanti.

Eq. diff. omogenea associata :

(1) $$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0\,,$$

eq. caratteristica (2) $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$ , radici $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$ .

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

(3) $$y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 \cdot te^{-2t} \, .$$

Troviamo un integrale dell'eq. diff. non omogenea. Il coefficiente $-2$ che figura come esponente nella funzione $e^{-2t}/t^2$ è anche una radice dell'equazione caratteristica. Ciò nonostante troviamo un integrale particolare del tipo

(4) $$y(t) = Ce^{-2t} \ln(t) \ .$$

Le sue derivate sono:

(5) $$y'(t) = -2C \cdot e^{-2t} \ln(t) + \frac{C}{t} e^{-2t} \ ,$$

(6) $$y''(t) = 4Ce^{-2t} \cdot \ln(t) - 2\frac{C}{t} \cdot e^{-2t} - \frac{C}{t^2} e^{-2t} - 2\frac{C}{t} \cdot e^{-2t} \ .$$

Sostituiamo le (4),(5),(6) nella (1) e mettiamo subito in evidenza il fattore comune $e^{-2t}$:

(*) $$e^{-2t} \cdot \left( \cancel{4C\ln t} - 4\cancel{\frac{C}{t}} - \frac{C}{t^2} - \cancel{8C\ln t} + 4\cancel{\frac{C}{t}} + \cancel{4C\ln t} \right) = \frac{e^{-2t}}{t^2} \ .$$

Semplifichiamo nei due membri dell'equazione il fattore comune $e^{-2t}$ e facciamo la riduzione dei termini simili che stanno in parentesi. Si ottiene:

(*) $$-\frac{C}{t^2} = \frac{1}{t^2} \ , \quad \text{da cui} \qquad C = -1 \ .$$

Ne segue che un integrale particolare dell'equazione diff. non omogenea è

(7) $$y(t) = -e^{-2t} \ln t \ ,$$

mentre l'integrale generale è :

(8) $$y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} - e^{-2t} \ln t \ .$$

**N. 26 – Integrali particolari**

1) Vogliamo calcolare un integrale che presto ci servirà: (1) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

Posto $e^x = t$ si ha: $x = \ln t$ , $dx = \frac{1}{t} dt$ .

Ne segue $\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln t - \ln(t+1)$ ,

Poiché $t = e^x$ si ha: (2) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = x - \ln(e^x + 1) + C$ .

2) Si ha inoltre

(*) $$\int \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{e^x(e^x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1}\right)dx = -\int e^{-x}d(-x) - \int \frac{dx}{e^x+1}.$$

Tenendo presente la (2) si ha:

(3) $$\int \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx = -e^{-x} - x + \ln(e^x+1) + C.$$

3) E' facile anche calcolare il seguente integrale:

(*) $$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C$$

4) Calcolare l'integrale $I(x) = \int e^x \operatorname{sen}x \cdot dx$ .

Si ha: $$\int e^x \operatorname{sen}x \cdot dx = -\int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot d(e^x) =$$
$$= -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cdot d(\operatorname{sen}x) \quad .$$

Ne segue $$\int e^x \operatorname{sen}x \cdot dx = -e^x \cos x + e^x - \int \operatorname{sen}x \cdot d(e^x) =$$
$$= -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \operatorname{sen}x \cdot dx \quad ;$$

da cui $$2\int e^x \operatorname{sen}x dx = e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x \quad .$$

Infine $$\int e^x \operatorname{sen}x \cdot dx = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}x - \cos x)$$

5) Calcolare l'integrale $\int e^{-x} \operatorname{sen}x \cdot dx$.

Si ha $$\int e^{-x} \operatorname{sen}x \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot d(\cos x) = -e^{-x} \cos x + \int \cos x \cdot d(e^{-x}) =$$
$$= -e^{-x} \cos x - \int \cos x \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cdot d(\operatorname{sen}x) \; .$$

Ne segue $$\int e^{-x} \operatorname{sen}x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \operatorname{sen}x + \int \operatorname{sen}x \cdot d(e^{-x}) =$$
$$= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \operatorname{sen}x - \int e^{-x} \operatorname{sen}x \cdot dx \; ;$$

da cui $\qquad 2\int e^{-x}\operatorname{senx}\cdot dx=-e^{-x}(\operatorname{senx}+\cos x)$ .

Infine si ha $\qquad \int e^{-x}\operatorname{senx}\cdot dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{senx}+\cos x)$ .

5) Altro integrale: $\qquad \int e^{\cos x}\cos x\cdot \operatorname{senx}\cdot dx=-\int \cos x\cdot d(e^{\cos x})$ ,

$$\int e^{\cos x}\cos x\operatorname{senx}\cdot dx=-\cos x\cdot e^{\operatorname{cox}}+\int e^{\cos x}\cdot d(\cos x)=$$
$$=-\cos x\cdot e^{\cos x}+\int d\left(e^{\cos x}\right)=-\cos x\cdot e^{\cos x}-e^{\cos x}\ .$$

Infine si ottiene $\qquad \int e^{\cos x}\cos x\operatorname{senx}\cdot dx=e^{\cos x}(1-\cos x)$ .

## N. 27 – Equazioni differenziali lineari di ordine n; 2° gruppo di esercizi

Esercizio 1) Integrare l'equazione (1) $\qquad y''-y=\frac{2}{1+e^x}$

Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del 2° ordine, a coefficienti costanti.

Eq. diff. omogenea associata :

(2) $\qquad y''-y=0$ ;

eq. caratteristica (3) $\qquad \alpha^2-1=0$ , radici $\alpha_1=-1$ e $\alpha_2=+1$.

Si hanno gli integrali particolari $y_1(x)=e^{-x}$ e $y_2(x)=e^x$ che sono linearmente indipendenti.

L'integrale generale dell'eq. omogenea associata è:

(5) $\qquad y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^x$.

<u>Trovo un integrale particolare</u> dell'equazione differenziale non omogenea <u>con il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie</u>, o metodo di Lagrange.

Poniamo $c_1=v_1(x)$ , $c_2=v_2(x)$ e risolviamo il sistema:

(*) $\begin{cases} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = f(x) \ ; \end{cases}$ nel nostro caso si ha:

(6) $\begin{cases} v_1'e^{-x} + v_2'e^{x} = 0 \\ -v_1'e^{-x} + v_2'e^{x} = 2\big/(1+e^{x}) \ . \end{cases}$

Sommando membro a membro si ha: $2v_2'\cdot e^{x} = 2\big/(1+e^{x})$ ,

quindi (7) $v_2'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$ .

Sostituendo nella $(6)_1$ si ha : $v_1'e^{-x} + \dfrac{1}{1+e^{x}} = 0$ ,

dalla quale si ricava (8) $v_1'(x) = -\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ .

Con una operazione di integrazione possiamo ricavare subito $v_1(x)$ e $v_2(x)$. Si ha:

(*) $v_1(x) = -\int \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx = -\ln(1+e^{x})$ , integrale già visto,

(*) $v_2(x) = \int \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}dx = \ln(1+e^{x}) - e^{-x} - x$ integrale già visto .

Un integrale particolare dell'eq. differenziale non omogenea è:

(*) $y(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ .

L'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea (1) sarà:

(9) $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ .

Nel nostro caso l'integrale generale sarà:

(*) $$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + e^{-x}\left[-\ln(1+e^{x})\right] + e^{x}\left[\ln(1+e^{x}) - e^{-x} - x\right],$$

(*) $$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - e^{-x}\cdot\ln(1+e^{x}) + e^{x}\cdot\ln(1+e^{x}) - xe^{x} - 1,$$

infine (10) : $$y(x) = e^{x}(c_2 - x) + c_1 e^{-x} + \left[e^{x} - e^{-x}\right]\cdot\ln(1+e^{x}) \; .$$

Esercizio 2) Integrare l'equazione differenziale, a coefficienti variabili,

(1) $$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = (x^2+1)^2 \; .$$

L'equazione omogenea associata è:

(2) $$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0 \; ,$$

e come sappiamo questa ha i due integrali linearmente indipendenti

(3) $$y_1(x) = x \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^2 - 1 \; .$$

Ne segue che l'integrale generale dell'eq. omogenea associata è:

(4) $$y(x) = c_1 x + c_2(x^2 - 1) .$$

<u>Trovo un integrale particolare</u> dell'equazione differenziale non omogenea <u>con il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie</u>, o metodo di Lagrange.

Poniamo $c_1 = v_1(x)$ , $c_2 = v_2(x)$ e risolviamo il sistema:

(*) $$\begin{cases} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = f(x) \; ; \end{cases}$$ nel nostro caso si ha:

(5) $$\begin{cases} v_1'(x)\cdot x + v_2'(x)\cdot(x^2-1) = 0 \\ v_1'(x)\cdot 1 + v_2'(x)\cdot 2x \;\; = (x^2-1) \; . \end{cases}$$

Risolvendo si trova: (6) $v_1'(x) = 1 - x^4$ , (7) $v_2'(x) = x + x^3$ .

Integrando si ricava: (8) $v_1(x) = x - \frac{x^5}{5}$ , (9) $v_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ .

L'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea (1) sarà:

(9) $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) \ .$$

Nel nostro caso l'integrale generale sarà:

(*) $$y(x) = c_1 x + c_2 (x^2 - 1) + (x - \frac{x^5}{5}) \cdot x + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \cdot (x^2 - 1),$$

ossia $$y(x) = \left( c_1 + x - \frac{x^5}{5} \right) \cdot x + \left( c_2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \cdot (x^2 - 1) \ .$$

Esercizio 3) Integrare l'equazione diff. (1) $y'' - 2y = e^x \cdot \operatorname{sen} x$ .

Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del 2° ordine, a coefficienti costanti.

Eq. diff. omogenea associata :

(2) $$y'' - 2y = 0 \ ;$$

eq. caratteristica (3) $\alpha^2 - 2\alpha = 0$ , radici $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = +2$ .

Si hanno gli integrali particolari $y_1(x) = e^0 = 1$ ed $y_2(x) = e^{2x}$ .

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

(4) $$y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{2x} \ .$$

Troviamo un integrale particolare dell'equazione non omogenea.

<u>Primo procedimento</u>. Metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, detto anche metodo di Lagrange.

Poniamo $c_1 = v_1(x)$ , $c_2 = v_2(x)$ e risolviamo il sistema:

(*) $$\begin{cases} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} ,$$

nel nostro caso si ha (*) $$\begin{cases} v_1'(x)\cdot 1 + v_2'(x)\cdot e^{2x} = 0 \\ v_1'(x)\cdot 0 + v_2'(x)\cdot 2e^{2x} = e^x \operatorname{sen}x \end{cases} ,$$

da cui $$\begin{cases} v_1'(x) + v_2'(x)e^{2x} = 0 \\ 2v_2'(x)\cdot e^{x} = \operatorname{sen}x \end{cases} .$$

Si ricava : $$v_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\cdot \operatorname{sen}x \quad \text{e} \quad v_1'(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen}x\cdot e^{2x} = 0 \ .$$

Si ottiene così la soluzione:

(*) $$v_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{x}\operatorname{sen}x, \qquad v_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\cdot \operatorname{sen}x \ .$$

Integriamo queste due equazioni differenziali; omettendo i calcoli si trova

(*) $$v_1(x) = \frac{1}{4}e^{x}(\cos x - \operatorname{sen}x) \ , \qquad v_2(x) = -\frac{1}{4}e^{x}(\cos x + \operatorname{sen}x) \ .$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale

(1) $$y'' - 2y' = e^x \cdot \operatorname{sen}x$$

sarà: $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) ,$$

ossia $$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}e^{x}(\operatorname{sen}x - \cos x) - \frac{1}{4}e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen}x)e^{2x} \ ,$$

da cui $$y(x)=c_1+c_2e^{2x}-\frac{1}{4}e^x(\operatorname{sen}x-\cancel{\cos x}+\cancel{\cos x}+\operatorname{sen}x)\,,$$

infine (*) $$y(x)=c_1+c_2e^{2x}-\frac{1}{2}e^x\cdot\operatorname{sen}x\ .$$

Secondo procedimento. C'è un altro metodo che ci permette di trovare un integrale particolare dell'equazione differenziale

(1) $$y''-2y'=e^x\cdot\operatorname{sen}x\ .$$

Poiché l'equazione caratteristica $\alpha^2-2\alpha=0$ non ammette le radici $\alpha_{1,2}=1\pm i$ possiamo trovare un integrale particolare della forma

(*) $$\overline{y}(x)=e^x(A\operatorname{sen}x+B\cos x)\ ,$$

ossia $$\overline{y}(x)=Ae^x\operatorname{sen}x+Be^x\cos x\,.$$

Si ricava:

(*) $$\overline{y}'(x)=e^x(A\operatorname{sen}x+B\cos x)+e^x(A\cos x-B\operatorname{sen}x)\,,$$

(*) $$\overline{y}''(x)=\cancel{e^x(A\operatorname{sen}x+B\cos x)}+e^x(A\cos x-B\operatorname{sen}x)+$$
$$+\ e^x(A\cos x-B\operatorname{sen}x)+\cancel{e^x(-A\operatorname{sen}x-B\cos x)}\ .$$

Si ottiene $$\overline{y}''(x)=2e^x(A\cos x-B\operatorname{sen}x)\,.$$

Sostituendo le espressioni di $\overline{y}'(x)$ e $\overline{y}''(x)$ nell'equazione differenziale data si ha:

(*) $$2e^x(A\cos x-B\operatorname{sen}x)-2e^x(A\operatorname{sen}x+B\cos x)-2e^x(A\cos x-B\operatorname{sen}x)=e^x\operatorname{sen}x\ .$$

Semplificando il fattore comune $e^x$ si ottiene:

(*) $$\cancel{2A\cos x}-\cancel{2B\operatorname{sen}x}-2A\operatorname{sen}x-2B\cos x-\cancel{2A\cos x}+\cancel{2B\operatorname{sen}x}=\operatorname{sen}x\ .$$

Affinché questa equazione sia soddisfatta per qualsiasi valore di x deve essere:

(*) $\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases}$ ; si ottiene la soluzione $A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0$ .

Si ricava che l'eq. diff. $y'' - 2y' = e^x \cdot \operatorname{sen}x$

ha l'integrale particolare $\overline{y}(x) = -\frac{1}{2} e^x \cdot \operatorname{sen}x$

e l'integrale generale $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \cdot \operatorname{sen}x$ .

Esercizio 4) Integrare l'eq. differenziale

(1) $$y'' - 2y = e^{2x} \cdot \operatorname{sen}x \quad .$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del 2° ordine, a coefficienti costanti.

Eq. diff. omogenea associata : (2) $y'' - 2y = 0$ ;

eq. caratteristica (3) $\alpha^2 - 2\alpha = 0$ , radici $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = +2$ .

Si hanno gli integrali particolari $y_1(x) = e^0 = 1$ ed $y_2(x) = e^{2x}$ .

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

(4) $$y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{2x} \quad .$$

Poiché l'equazione caratteristica non ammette le radici $\alpha_{1,2} = 2 \pm i$ , l'eq. differenziale

(1) $$y'' - 2y' = e^{2x} \cdot \operatorname{sen}x \quad .$$

ammette un integrale particolare della forma

(5) $$\overline{y}(x) = e^{2x}(A\,\mathrm{sen}x + B\cos x) \;,$$

Derivando si ricava:

(*) $$\overline{y}'(x) = 2e^{2x}(A\,\mathrm{sen}x + B\cos x) + e^{2x}(A\cos x - B\,\mathrm{sen}x) \,,$$

(*) $$\begin{aligned}\overline{y}''(x) = 4e^{2x}(A\,\mathrm{sen}x + B\cos x) + 2e^{2x}(A\cos x - B\,\mathrm{sen}x) + \\ +\; 2e^{2x}(A\cos x - B\,\mathrm{sen}x) + e^{2x}(-A\,\mathrm{sen}x - B\cos x) \;.\end{aligned}$$

Sommando i termini simili si ottiene

(*) $$\begin{aligned}\overline{y}''(x) = e^{2x}A\,\mathrm{sen}x\cdot(4-1) + e^{2x}A\cos x\cdot(2+2) + \\ + e^{2x}B\cos x\cdot(4-1) + e^{2x}B\,\mathrm{sen}x\cdot(-2-2) \;.\end{aligned}$$

Ne segue $$\overline{y}''(x) = 3e^{2x}(A\,\mathrm{sen}x + B\cos x) + 4e^{2x}(A\cos x - B\,\mathrm{sen}x) \,.$$

Sostituendo le espressioni di $\overline{y}'$ e di $\overline{y}''$ nell'equazione differenziale (1) si ha:

(*) $$\begin{aligned}3\cancel{e^{2x}}(A\,\mathrm{sen}x + B\cos x) + 4\cancel{e^{2x}}(A\cos x - B\,\mathrm{sen}x) + \\ -4\cancel{e^{2x}}(A\,\mathrm{sen}x + B\cos x) - 2\cancel{e^{2x}}(A\cos x - B\,\mathrm{sen}x) = \cancel{e^{2x}}\cdot\mathrm{sen}\;x \;.\end{aligned}$$

Semplifichiamo il fattore comune $e^{2x}$ e riduciamo i termini simili. Si ha:

(*) $$-A\,\mathrm{sen}x - B\cos x + 2A\cos x - 2B\,\mathrm{sen}x = \mathrm{sen}x \;,$$

da cui $$(-A - 2B)\cdot\mathrm{sen}x + (2A - B)\cos x = \mathrm{sen}x \;.$$

Poiché questa equazione deve essere soddisfatta per qualsiasi valore di $x$, possiamo dire che si ha:

(*) $\begin{cases}-A - 2B = 1 \\ \;\;2A - B = 0\end{cases}$, che ha la soluzione $B = -\dfrac{2}{5}$ , $A = -\dfrac{1}{5}$ .

Si ricava che l'eq. diff. $\quad y''-2y'=e^{2x}\cdot \mathrm{sen}x$

ha l'integrale particolare $\quad \overline{y}(x)=-\frac{1}{5}e^{2x}\cdot(\mathrm{sen}x+2\cos x)$

e l'integrale generale $\quad y(x)=c_1+c_2e^{2x}-\frac{1}{5}e^{2x}\cdot(\mathrm{sen}x+2\cos x)$ .

**N. 28 – Equazioni differenziali di Clairaut**

Abbiamo studiato le equazioni differenziali di Bernouilli

(*) $$y'=\alpha(x)y+\beta(x)y^n \ .$$

Vogliamo ora studiare le equazioni differenziali di Clairaut ( A. Ghizzetti, Analisi Matem. II , pag 406). Queste sono equazioni del tipo:

(1) $$y=xy'+f(y') \ ,$$

ove $f(t)$ è una funzione continua assieme alla sua derivata prima e seconda in un certo intervallo $(a,b)$ e inoltre $a<y'<b$ ed $y''(x)\neq 0$.

Derivando ambo i membri della (1) rispetto a x si ha

(*) $\quad y'=y'+xy''+f'(y')y''$ , $\rightarrow$ (2) $\quad xy''+f'(y')y''=0$ .

La (2) non è equivalente alla (1) perché la sua soluzione contiene due costanti arbitrarie mentre la soluzione della (1) ne contiene una sola.
Tutte le soluzioni della (1) sono quindi soluzioni della (2), ma non tutte le soluzioni della (2) sono soluzioni della (1); per tale motivo dovremo poi scegliere le soluzioni della (2) che soddisfano la (1).

Vogliamo dimostrare che l'equazione di Clairaut (1) ha come integrale generale la famiglia $\infty^1$ di rette $y=xc+f(c)$ [ la cui equazione si ottiene dalla stessa equazione (1) scrivendo c in luogo di $y'$ ] ed un integrale singolare che è l'inviluppo di tali rette.

Infatti dalla (2) si ha:

(*) $$y''\left[x+f(y')\right]=0\,;$$

che si spezza nelle equazioni: (I) $y''=0$, e (II) $x+f'(y')=0$ .

Dalla (I) si ha: (3) $y'=c$, (4) $y(x)=cx+c_1$ .

Imponendo alle espressioni (3), (4) di soddisfare l'equazione di Clairaut, si ha:

(*) $cx+c_1=xc+f(c)$, da cui $c_1=f(c)$ .

In tal modo la (4) diventa: (5) $y(x)=cx+f(c)$ .

La (5) è l'integrale generale dell'equazione di Clairaut; come abbiamo detto, essa rappresenta un fascio di rette.

Riprendiamo ora la (II) : $x+f'(y')=0$ .

Si ha: (6) $x=-f'(y')$ , e quindi (7) $xy'=-y'f'(y')$ .

La variabile $y'$ che figura nelle (6), (7) è un parametro che possiamo indicare con la lettera $t$ . Si ottiene quindi il sistema:

(8) $$\begin{cases} x=-f'(t) \\ y=f(t)-t\cdot f'(t) \end{cases} .$$

Il sistema (8) fornisce, in forma parametrica, un'altra soluzione dell'equazione differenziale di Clairaut. Vedremo che essa è <u>una soluzione singolare,</u> poiché non si può ottenere dalla (4) $\left[y(x)=cx+f(c)\right]$ per nessun valore di $c$ : a tale scopo <u>basta far vedere che il sistema (8) non rappresenta una retta</u>.
Infatti dalla (8) si ha:

(*) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\left[\cancel{f'(t)}-\cancel{f'(t)}-t\cdot f''(t)\right]:\left[-f''(t)\right] ,$$

ossia (*) $$\frac{dy}{dx}=t\cdot\frac{f''(t)}{f''(t)} ,$$ da cui (9) $$\frac{dy}{dx}=t .$$

<u>Si ricava che il coefficiente angolare della tangente in un punto qualsiasi della curva non è costante e quindi la curva non può essere una retta.</u>

Rimane così dimostrato che le equazioni parametriche (8) rapresentano un integrale singolare dell'equazione di Clairaut.

Rimane da far vedere che *l'integrale singolare dato dal sistema (8) è l'inviluppo del fascio di rette date dall'integrale generale*. Infatti la curva inviluppata dal fascio si ricava dal sistema:

(10) $$\begin{cases} y - cx - f(c) = 0 \\ \dfrac{d}{dc}\left[y - cx - f(c)\right] = 0 \end{cases}, \quad \text{ne segue} \quad (11) \quad \begin{cases} y = cx + f(c) \\ x = -f'(c) \end{cases}.$$

Si ricava che l'equazione della curva inviluppo è data dal sistema:

(12) $$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = f(c) - c \cdot f'(c) \end{cases}.$$

Il sistema (12) dà la curva inviluppo del fascio di rette. Salvo il nome del parametro, che non ha alcuna importanza*, il sistema (12) coincide con l'integrale singolare dato dal sistema (8).*

Esercizio 1) ( Feldhofer, Esercizi pag. 636) Integrare l'equazione di Clairaut

(*) $$y = xy' + y'^2 .$$

La forma generale è $y = xy' + f(y')$ , quindi $f(c) = c^2$ ed $f'(c) = 2c$ .

La regola ci dice che:

l'integrale generale è (1) $y = xc + c^2$ ,

l'integrale singolare è dato dal sistema:

(*) $$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = f(c) - c \cdot f'(c) \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad (2) \quad \begin{cases} x = -2c \\ y = c^2 - 2c^2 \end{cases}.$$

Ne segue (*) $$\begin{cases} x = -2c \\ y = -c^2 \end{cases}.$$

Si ricava $c = -\frac{x}{2}$ , e sostituendo nella seconda equazione del sistema si ha:

(3) $$y = -\frac{x^2}{4} \; .$$

Come si vede, esso è un integrale singolare perché non si può ricavare dall'integrale generale per alcun valore del parametro c.

Secondo procedimento. Esso ci permette di procedere in modo esente da schematismi.

Si ha:

equazione (1) $y(x) = xy'(x) + y'^2(x)$ ,

derivata (2) $y'(x) = y'(x) + xy''(x) + 2y'(x) \cdot y''(x)$ .

Da questa (3) $y''(x + 2y') = 0$ .

La (3) si spezza nelle due equazioni

(*) (I) $y'' = 0$ , e (II) $x + 2y' = 0$ .

Equazione $y'' = 0$ ; ne segue : (III) $y' = c$ , da cui $y(x) = cx + c_1$;

quindi l'integrale generale è del tipo (4) $y = cx + c_1$ .

Imponendo alla (4) di soddisfare l'equazione (1) si ha:

(*) $cx + c_1 = xc + c^2$ ; si ricava $c_1 = c^2$ .

Ne segue che l'equazione dell'integrale generale è

(5) $$y(x) = cx + c^2 \; .$$

Prendiamo ora in esame il risultato (II) : $x + 2y' = 0$ .

Si ricava (6) $x = -2y'$ , e da questa si ha: $xy' = -2y'^2$ .

Sostituendo nella (1) si ha:

(*) $$y = -2y'^2 + y'^2 \quad \text{e quindi (6)} \quad y = -y'^2 \; .$$

Le due equazioni (5), (6) messe a sistema, ci dànno un'altra soluzione dell'equazione differenziale di Clairaut in forma parametrica :

(7) $$\begin{cases} x = -2y' \\ y = -y'^2 \; . \end{cases}$$

Ricordando che $y' = c$ (è la III) si ha: (*) $\begin{cases} x = -2c \\ y = -c^2 \; . \end{cases}$

Eliminando il parametro c si ottiene la soluzione

(*) $$y = -\frac{x^2}{4} \; .$$

Esso è un integrale singolare perché non si può ottenere dall'integrale generale per alcun valore di c.
Abbiamo già dimostrato che la curva $y = -x^2/4$ è l'inviluppo del fascio di rette (5).

Esercizio 2) (Bononcini, Pàtron pg. 705) Integrare l'equazione differenziale

(1) $$y = xy' + 2\sqrt{y'} \; .$$

E' una equazione differenziale di Clairaut, cioè del tipo

(2) $$y = xy' + f(y') \; .$$

L'integrale generale della (2), come sappiamo, è $y = cx + f(c)$ ;

c'è poi un integrale particolare dato da $\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = f(t) - t \cdot f'(t) \; . \end{cases}$

Nel nostro caso, l'integrale generale e l'integrale singolare sono rispettivamente:

(3) $$y = xc + 2\sqrt{c} \ , \qquad \text{con} \quad c > 0 \ ;$$

(4) $$\begin{cases} x = -1\big/\sqrt{t} \\ y = 2\sqrt{t} - t\big/\sqrt{t} \ , \end{cases} \qquad \text{ove} \quad t = y' > 0 \ , \quad \text{e quindi} \quad x < 0 .$$

Razionalizzando il denominatore che compare nella seconda equazione, possiamo esprimere l'integrale singolare per mezzo del seguente sistema di equazioni parametriche:

(5) $$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y = \sqrt{t} \quad , \end{cases} \qquad \text{ove} \quad x < 0 \quad \text{e} \quad y>0 \ .$$

Eliminando il parametro t fra le due equazioni si ha:

(6) $$xy = -1 \ ;$$

la (6) è l'espressione cartesiana dell'integrale singolare.

Facciamo vedere che la (6) è la curva inviluppata dal fascio di rette (3) al variare del parametro c . Infatti mettiamo a sistema l'equazione (3) e l'equazione che si ottiene da essa derivandola rispetto a c. Si ha:

(7) $$\begin{cases} cx + 2\sqrt{c} - y = 0 \\ x + \dfrac{1}{\sqrt{c}} = 0 \ , \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} y = cx + 2\sqrt{c} \\ \sqrt{c} = -\dfrac{1}{x} \quad . \end{cases}$$

Eliminando il parametro c si ha: $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x}$ ,

ossia $$xy = -1 \quad .$$

E ciò è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio 3) (Ghizzetti, Esercizi di Analisi Mat. Vol 2° , pg. 472). Integrare l'equazione differenziale

(1) $$y = xy' - e^{y'} \ .$$

E' una equazione differenziale di Clairaut, cioè del tipo

(2) $$y = xy' + f(y') \ .$$

L'integrale generale della (2), come sappiamo, è $y = cx + f(c)$ .

Nel nostro caso si ha: (3) $$y = cx - e^c \ .$$

L'integrale singolare, in forma parametrica, è dato dal sistema:

(*) $\begin{cases} c = -f'(t) \\ y = f(t) - t \cdot f'(t) \ , \end{cases}$ nel nostro caso si ha: (4) $\begin{cases} x = -(-e^t) \\ y = -e^t - (-e^t) \ . \end{cases}$

Si ha quindi il sistema (5) $\begin{cases} x = e^t \\ y = -e^t + t \cdot e^t . \end{cases}$

Eliminiamo il parametro $t$ fra le due equazioni e troveremo l'equazione cartesiana dell'integrale singolare.

Dalla $1^a$ eq. del sistema si ha : (6) $t = \ln x$ ;

sostituendo nella $2^a$ eq. si ha : (7) $y = -x + x \ln x$ .

Ne segue che l'equazione (1) ha l'integrale singolare:

(8) $$y = x \cdot (\ln x - 1) \ .$$

Mostriamo che il fascio di rette (8) è l'inviluppo del fascio di rette: $y = cx - e^c$.

Infatti, consideriamo il sistema:

(*) $\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = 0 \ , \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cx - e^c - y = 0 \\ x - e^c = 0 \ , \end{cases} \rightarrow$ (9) $\begin{cases} y = cx - e^c \\ x = e^c \ . \end{cases}$

Dalla seconda equazione del sistema si ricava :

(10) $e^c = x$ e quindi (11) : $c = \ln x$ .

Sostituendo le (10), (11) nella seconda eq. del sistema (9) si ha:

(12) $$y = x \cdot (\ln x - 1) \; .$$

Come si vede, l'integrale singolare dell'equazione (1) è l'inviluppo delle curve date dal suo integrale generale.

## N. 29 – Calcolo delle variazioni

Il calcolo delle variazioni ci permette di risolvere problemi come quello di trovare la curva lungo la quale l'integrale di linea di una data funzione $f$ assume valore estremo.
Consideriamo per semplicità il problema nella sua forma unidimensionale:
"Nell'intervallo (a, b) dell'asse $x$ vogliamo trovare la curva $y = y(x)$ tale che l'integrale di linea della funzione $f(x, y, y')$, dove $y' = dy/dx$, abbia un valore estremo".
Ciò vuol dire che vogliamo trovare la funzione $y = y(x)$ in corrispondenza della quale l'integrale

(1) $$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

abbia valore massimo o minimo. Qui la variabile x ha preso il posto del tempo $t$ che figura nella funzione lagrangiana $L = T - U$.
L'integrale $J(y)$ si dice funzionale della funzione y(x); la generica funzione $y = y(x)$, cioè il generico elemento dell'insieme in cui il funzionale è definito, si dice "argomento del funzionale". Faremo alcune ipotesi:

le variabili $x$, $y(x)$, $y'(x)$ siano reali e la funzione $f(x, y, y')$ sia continua al variare del punto (x,y) in un dominio internamente connesso A del piano xy;
inoltre, fissati in A due punti $P_1(a, y_1)$ e $P_2(b, y_2)$, le funzioni $y = y(x)$, definite nell'intervallo (a,b), siano continue assieme alle loro derivate prime, cioè siano curve regolari, e abbiano un grafico di punti estremi $P_1, P_2$ interamente contenuto in A (fg. 6).

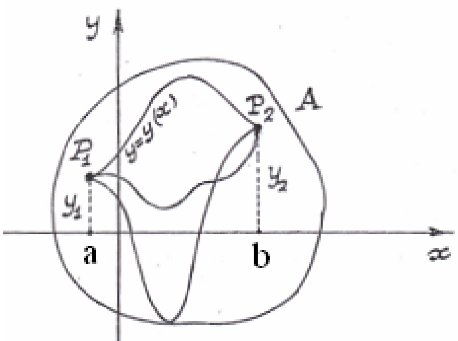


Fig. 6

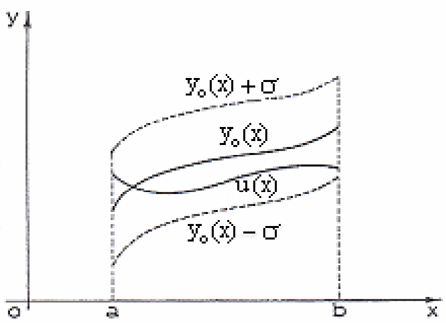


Fig. 7

Indicheremo con $\Phi = [y(x)]$ la famiglia di tali curve.
Per ciascuna di queste curve $y = y(x)$ il funzionale $J(y)$ acquista un determinato valore

(2) $$J(y) = \int_a^b f\,[x, y(x), y'(x)]dx \ , \quad \forall y(x) \in \Phi \ .$$

Ebbene, vogliamo determinare quelle curve della famiglia $\Phi = [y(x)]$ che fanno assumere all'integrale $J(y)$ il valore massimo o minimo.

Il problema così posto consiste quindi nella ricerca del massimo e del minimo assoluti dell'integrale $J(y)$; ma, come nel caso delle funzioni di punto, si può cominciare con la ricerca delle funzioni $y = y(x)$ che forniscono per $J(y)$ un massimo o un minimo relativo.
Diremo che una funzione $y = y_o(x)$ della famiglia $\Phi$ di funzioni è di minimo relativo per l'integrale $J(y)$ quando si può determinare un numero $\sigma > 0$ tale che per tutte le curve $y = y(x)$ della famiglia $\Phi$ che verificano le condizioni

(*) $$|y(x) - y_o(x)| < \sigma \ , \quad \text{con} \quad a \le x \le b \quad \text{(vedi fig. 7)},$$

risulti (*) $$J(y) \ge J(y_o) \ .$$

In modo analogo si definiscono le curve di massimo relativo.

Le curve $y = y_o(x)$ che forniscono un minimo o un massimo relativo per l'integrale $J(y)$ si dicono brevemente estremanti del funzionale $J(y)$. Se il loro grafico è tutto interno al dominio A, esse si dicono <u>estremanti interne</u>.

E' chiaro che il minimo assoluto per $J(y)$, se esiste, coincide con il minimo dei minimi relativi, e così il massimo assoluto coincide con il massimo dei massimi relativi.

**N. 30 – L'equazione di Eulero**

Per trovare le curve $y = y_o(x)$ che risultano estremanti interne di un funzionale $J(y)$ dobbiamo fare altre ipotesi:

1°) la funzione $f(x, y, y')$ sia dotata delle derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ e queste siano continue per $(x, y) \subset A - \text{frontiera } fA$ e per $-\infty < y' < +\infty$;

2°) la curva $y_o(x)$ ammetta anche la derivata seconda continua.

Sotto tali ipotesi sussiste il seguente teorema:
"Affinché una curva $y = y(x)$ della famiglia $\Phi$ di funzioni sia una curva estremante per l'integrale $J(y)$ (cioè affinché sia una curva di massimo o di minimo relativo) è necessario che essa sia un integrale dell'equazione differenziale di Eulero-Lagrange

(1) $$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') - f_y(x, y, y') = 0 \quad \text{".}$$

Notiamo che questa condizione è necessaria, ma non sufficiente a garantire che le sue soluzioni siano curve estremanti per l'integrale $J(y)$. Per questo motivo le soluzioni dell'equazione (2) si dicono curve estremali. Esse debbono soddisfare altre condizioni se vogliamo che siano anche curve stremanti.

Illustriamo i concetti espressi con alcuni esempi.

Esempio 1) Presi nel piano (x,y) due punti $P_1(a, y_1)$ e $P_2(b, y_2)$ con $a < b$, determinare fra tutte le linee regolari $\gamma: \ y = y(x)$ di estremi $P_1$ e $P_2$ quella di lunghezza minima.
In tal caso la famiglia $\Phi$ è costituita da tutte le funzioni $y(x)$ continue nell'intervallo $[a, b]$ assieme alle loro derivate $y'(x)$ e soddisfacenti alle condizioni

(*) $$y(a) = y_1 \qquad \text{e} \qquad y(b) = y_2 \ .$$

Quindi il funzionale $J(y)$ sarà:

(*) $$J(y) = \int_{\gamma(P_1 P_2)} ds \ , \quad \text{ossia (2)}: \qquad J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx \ .$$

E' evidente che la linea che rende minimo $J(y)$ è costituita dal segmento $P_1 P_2$ .Infatti, in tal caso l'equazione di Eulero ci dà:

(3) $$\frac{d}{dx}\left( \frac{d}{dy'} \sqrt{1 + y'^2(x)} \right) - \cancel{\frac{d}{dy} \sqrt{1 + y'^2(x)}} = 0 \ .$$

Il secondo termine dell'equazione di Eulero è nullo perché il radicale non è derivabile rispetto alla variabile y . Pertanto si ha:

(*) $$\frac{d}{dx}\left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \ , \qquad \text{da cui (4)} \qquad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = k \ .$$

Ne segue: $y'^2 - k^2 y'^2 = k^2$ , da cui (5) $y' = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \text{costante.}$

Si ricava che le curve estremali hanno coefficiente angolare costante, ossia sono rette. Il segmento $P_1P_2$ è dunque l'unico estremale che verifichi le condizioni ai limiti $y(a) = y_1$ , $y(b) = y_2$; ovviamente esso fornisce l'unica curva di lunghezza minima che unisce i due punti dati.

Esempio 2) Problema della brachistocrona.

Sia $\gamma$ una curva di punti estremi O ed M, situata nel piano verticale passante per essi. Un punto materiale P parte dall'estremo O con velocità iniziale nulla e scivola lungo $\gamma$ senza attrito. Trovare l'equazione che deve avere la curva $\gamma$ se si vuole che il punto P raggiunga il punto M nel minimo tempo possibile.
Assumiamo il punto O come origine di un riferimento cartesiano avente l'asse x orizzontale e l'asse y verticale e siano (a,b) le coordinate del punto M. Cerchiamo la nostra curva nella famiglia di curve regolari che passano per O ed M e che sono intersecate in un sol punto dalle parallele all'asse y ( fig. A).

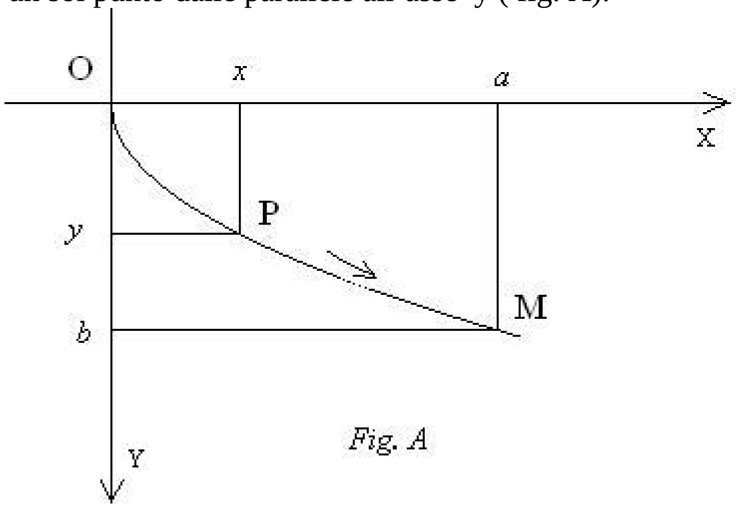


Fig. A

Una tale curva è rappresentabile con una equazione del tipo $y = y(x)$, con $y(0) = 0$, $y(a) = b$ e con $a > 0$, $b > 0$.
Sia poi s una ascissa curvilinea di origine O, distesa sulla curva e contata positivamente da O verso M.

Ricordando le leggi della caduta dei gravi, possiamo dire che quando il punto P passa per il punto di coordinate (x,y) per la sua velocità scalare si ha:

(1) $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g \cdot y(x)}\ , \qquad \text{da cui} \qquad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g \cdot y(x)}}\,.$$

Ricordando dall'Analisi Matematica l'espressione dell'arco elementare di curva $y = y(x)$ si ha:

(2) $$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g \cdot y(x)}} \cdot dx \quad .$$

Si ricava che il tempo $T$ necessario a percorrere l'intero arco $\overset{\frown}{OM}$ è:

(*) $$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g \cdot y(x)}} \cdot dx \quad , \quad \text{ossia} \qquad T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y(x)}} \cdot dx \ .$$

Poiché nel punto iniziale (cioè alla partenza) si ha $y(0) = 0$, abbiamo un integrale improprio; quindi più esattamente si ha:

(3) $$J(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^a \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g \cdot y(x)}} \cdot dx\,.$$

La famiglia $\Phi$ di curve che verificano il funzionale $J(y)$ è costituita dalla totalità delle funzioni $y = y(x)$ positive nell'intervallo $[0; a]$, derivabili con derivata $y'(x)$ continua, e che soddisfano alle condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y(a) = b$.
Ora nel nostro caso la funzione $f(x, y, y')$ che figura nell'equazione differenziale di Eulero non dipende esplicitamente da $x$; infatti si ha:

(4) $$f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \ ,$$

e quindi l'equazione di Eulero-Lagrange (del paragrafo precedente) diventa:

(5) $$\frac{d}{dx} f_{y'}(y, y') - f_y(y, y') = 0 \ .$$

Questa equazione si può scrivere utilmente nella forma

(6) $$\frac{d}{dx}\left\{ y' \cdot f_{y'}(y, y') - f(y, y') \right\} = 0 \ ,$$

da cui si ricava l'importante equazione:

(7) $$y'\cdot f_{y'} - f = 0 \ .$$

Facciamo vedere che dal primo membro della (6) si ricava la (5). Infatti si ha:

(*) $$\frac{d}{dx}\left\{y'\cdot f_{y'}(y,y') - f_y(y,y')\right\} =$$
$$= \cancel{y''\cdot f_{y'}} + y'\frac{d}{dx}(f_{y'}) - f_y \cdot y' - \cancel{f_{y'}\cdot y''} = y'\cdot\left[\frac{d}{dx}f_{y'} - f_y\right] \ .$$

Ma $y' \neq 0$ poiché il punto è in moto, mentre $\frac{d}{dx}f_{y'} - f_y = 0$, la (6) risulta dimostrata, e da essa si ricava come conseguenza la (7). Risolviamo ora quest'ultima equazione; potremo così avere una curva estremale, che può coincidere con una curva di minimo, per l'integrale

(*) $$J(y) = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^a \sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{2g\cdot y(x)}}\cdot dx \ .$$

Ricordiamo ora che (8): $$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \ .$$

Derivando rispetto a $y'$ si ha:

(*) $$f_{y'} = D_{y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot D_{y'}\left(1+y'^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(1+y'^2\right)^{-1/2}\cdot\cancel{2}y' ;$$

(*) $$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}}$$ , quindi (9) $$y'f_{y'} = \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \ .$$

Sostituendo le (8) e (9) nella (7) si ha:

(10) $$\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = C \ .$$

Da questa si ottiene:

(*) $$\frac{\cancel{y'^2} - 1 - \cancel{y'^2}}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \ ,$$ ossia (*) $$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = k \ ,$$

(*) $$y(1+y'^2)=\frac{1}{k^2}\ .\qquad \text{Ponendo}\ \frac{1}{k^2}=2R\ \ \text{si ha:}$$

(11) $$y=\frac{2R}{1+y'^2}\ .$$

Dobbiamo integrare l’equazione differenziale scritta. Facciamo vedere che essa è a variabili separabili; infatti riducendo a forma intera si ha:

(*) $$y+yy'^2=2R\,,\quad\rightarrow\quad y'^2=\frac{2R-y}{y}\ ,\ \rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2R-y}{y}}\ ,$$

e quindi (12) $$\sqrt{\frac{y}{2R-y}}\cdot dy=dx\ .$$

Facendo la sostituzione (13) $y=R(1-\cos t)$ si ha:

(14) $$\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\cdot R\mathrm{sen}t\cdot dt=dx\ .$$

Ricordando le formule trigonometriche di duplicazione e bisezione degli archi si ha:

(*) $$dx=R\mathrm{tg}\frac{t}{2}\cdot 2\mathrm{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt\,,\ \rightarrow\qquad dx=2R\cdot\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}dt\,,$$

e quindi $$dx=R(1-\cos t)dt\,.$$

Integrando si ha (15) $$x(t)=R(t-\mathrm{sen}t)+k\,.$$

Poiché il punto parte dall’origine O(0,0) si ha $x(0)=0$, e quindi $k=0$.
Le equazioni (13), (14) si possono riunire nel sistema di equazioni parametriche:

(16) $$\begin{cases} x(t)=R(t-\mathrm{sen}t)\\ y(t)=R(1-\cos t)\ ;\end{cases}$$

esse ci dànno una rappresentazione parametrica della curva integrale. La curva di equazioni (16) è detta “cicloide”.

Possiamo ricavare le equazioni parametriche della cicloide con un procedimento che solo apparentemente si discosta dall'equazione di Eulero-Lagrange. Infatti, ponendo nella (11) $y' = \cot g(t/2)$ si ha:

$$(*) \qquad y = \frac{2R}{1+\cot g^2 \frac{t}{2}} = \frac{2R \cdot sen^2 \frac{t}{2}}{sen^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}} = 2R \cdot sen^2 \frac{t}{2} = 2R\left(\frac{1-\cos t}{2}\right),$$

ove si sono ricordate la formule di bisezione degli archi. Si ottiene così la formula:

$$(12) \qquad y = R \cdot (1-\cos t) \quad \text{e derivando} \quad \frac{dy}{dt} = R \cdot sent \ .$$

Poiché anche la x si può ritenere funzione del parametro t, si ha:

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}, \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \left(1 : \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ricordando che abbiamo posto $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \cot g \frac{t}{2}$ e che $\frac{dy}{dt} = R \cdot sent$ si ottiene:

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = tg\frac{t}{2} \cdot Rsent = R\frac{sen(t/2)}{\cancel{\cos(t/2)}} \cdot 2sen(t/2) \cdot \cancel{\cos(t/2)} ,$$

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 2Rsen^2 \frac{t}{2} = \cancel{2}R\frac{1-\cos t}{\cancel{2}} \ .$$

Si ricava $\qquad dx = R(1-\cos t)dt$ ,

e integrando si ha $\qquad x = R(t - sent) + k$ .

Poiché il punto parte dall'origine O(0,0) si ha $x(0) = 0$ , e quindi $k = 0$ .

Ne segue che la rappresentazione parametrica dell'integrale dell'equazione $y = \frac{2R}{1+y'^2}$

è data dal sistema:

$$(*) \qquad \begin{cases} x(t) = R(t - sent) \\ y(t) = R(1-\cos t) \end{cases} .$$

E ciò è quanto si voleva dimostrare.

## N. 31 – Cicloide ordinaria della retta

Dato un riferimento cartesiano Oxy nel piano, consideriamo una circonferenza $\gamma_o$ avente il centro $C_o(o;r)$ sull'asse y e tangente all'asse x nell'origine O. A partire da questa posizione, facciamo ruotare senza strisciare la circonferenza sull'asse x.

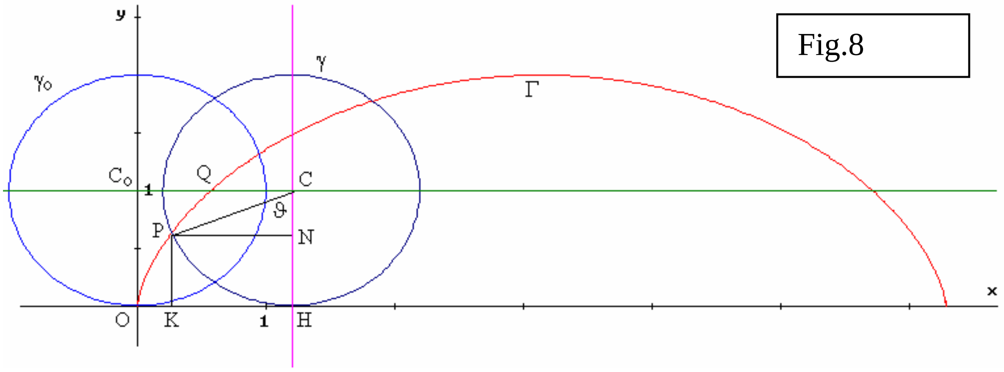



Fig.8

Sia $\gamma$ la nuova posizione della circonferenza, H il nuovo punto di contatto con l'asse x e P la posizione in cui si porta il punto O (fig. 8).

L'angolo $P\hat{C}H = \varphi$ è l'angolo di cui è ruotato il raggio $C_oO$ della circonferenza.

Al ruotare della circonferenza $\gamma_o$, cioè al variare dell'angolo $\vartheta$, il punto P descrive una curva detta <u>cicloide</u>.

La lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{HP} = \ell$ si ricava subito e si ha:

(1) $$\overline{OH} = \overset{\frown}{HP} = r\varphi \;.$$

Siano (x,y) le coordinate cartesiane del punto P e sia K la proiezione ortogonale del punto sull'asse x:

(2) $\overline{OK} = x \;,\quad \overline{KP} = y \;;$ (3) $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KP} \;,\quad \overline{KP} = \overline{HC} - \overline{NC} \;.$

Ora si ha: (4) $\overline{OH} = r\varphi \;,\quad \overline{KH} = \overline{PN} = r \cdot \mathrm{sen}\varphi \;,\quad \overline{HC} = r \;,\quad \overline{NC} = r\varphi \;.$

Sostituendo queste espressioni nelle relazioni (3) si ottengono le equazioni:

(4) $$x = r\vartheta - r\mathrm{sen}\varphi \;,\qquad y = r - r\cos\varphi \;;$$

Si ricava così il sistema:

(5) $$\begin{cases} x(\vartheta) = r(\varphi - \mathrm{sen}\varphi) \\ y(\vartheta) = r(1 - \cos\varphi) \;. \end{cases}$$

Il sistema è costituito da due equazioni parametriche che ci dànno i punti della cicloide.

Se nella $(5)_2$ si pone $y = 0$ si ricava $\cos\varphi = 1$, cioè $\varphi = 2k\pi$; sostituendo nella $(5)_1$ si ha $x = 2k\pi r$, ove $k = 0,1,2,3,\ldots$ . Inoltre , per ogni $\varphi$ è sempre $y \geq 0$; ciò vuol dire che la cicloide giace tutta nel semipiano delle ordinate non negative.

**N. 32 – Evoluta della cicloide**

Consideriamo la cicloide di equazioni parametriche

(1) $$x = r(t - \mathrm{sen}t) \ , \quad y = r(1 - \cos t) \quad \text{con} \quad (-\infty < t < +\infty) \ .$$

Vogliamo determinare le coordinate (X,Y) del centro di curvatura e il raggio R di curvatura in un generico punto P della cicloide e l'evoluta della curva stessa; ricordiamo che l'evoluta di una curva è il luogo dei centri di curvatura relativi ai vari punti della curva.

Le coordinate (X,Y) del centro di curvatura e il raggio R sono date dalle formule:

(2) $$X = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \qquad Y = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \qquad R = \frac{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}{|x'y'' - x''y'|} \ .$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$x' = r(1 - \cos t), \quad y' = r\mathrm{sen}t, \quad x'' = r\mathrm{sen}t, \quad y'' = r\cos t \ ;$$

quindi: $$x'^2 + y'^2 = r^2(1 + \cos^2 t - 2\cos t) + r^2\mathrm{sen}^2 t \ ,$$

(*) $$x'^2 + y'^2 = r^2(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t) + r^2(1 - 2\cos t) \ ,$$

(3) $$x'^2 + y'^2 = r^2(2 - 2\cos t) \ ;$$

(*) $$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= r(1 - \cos t) r\cos t - r\mathrm{sen}t \cdot r\mathrm{sen}t = \\ &= r^2(\cos t - \cos^2 t) - r^2 \cdot \mathrm{sen}^2 t = r^2 \cos t - r^2(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t) \ , \end{aligned}$$

quindi (4) $$x'y'' - x''y' = r^2(\cos t - 1) \ .$$

Applicando le formule (2) si ottiene:

(*) $$X = r(t - \mathrm{sen}t) - r\mathrm{sen}t \frac{\cancel{r^2}(2 - \cos t)}{\cancel{r^2}(\cos t - 1)} = r(t - \mathrm{sen}t) + 2r\mathrm{sen}t \ ,$$

quindi $$X = r(t + \mathrm{sen}t) \ ;$$

(*) $$Y = r(1 - \cos t) + r(1 - \cos t)\frac{2\cancel{r^2}(1 - \cos t)}{\cancel{r^2}(\cos t - 1)} = r(1 - \cos t) - 2r(1 - \cos t) \ ,$$

da cui $\qquad Y = r(\cos t - 1)$.

Le coordinate del centro di curvatura sono quindi:

(5) $$\begin{cases} X = r(t + \operatorname{sen} t) \\ Y = -r(1 - \cos t) \end{cases} .$$

Poiché l'evoluta di una curva è il luogo dei centri di curvatura relativi ai vari punti della curva, le equazioni parametriche (5) rappresentano anche l'evoluta della cicloide.

Per il raggio di curvatura della cicloide si ha invece

(*) $$R = \frac{\sqrt{8r^6(1-\cos t)^3}}{r^2(1-\cos t)} = r\sqrt{\frac{8(1-\cos t)^3}{(1-\cos t)^2}} = r\sqrt{8(1-\cos t)} = r\sqrt{16\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} ,$$

infine : (6) $$R = 4r\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| .$$

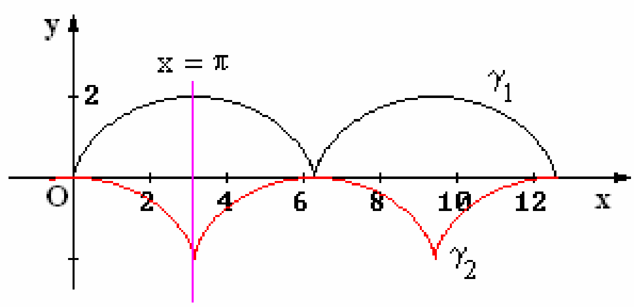
Come si vede dalla (6), il valore del raggio di curvatura dipende dai vari punti della cicloide.

Le equazioni parametriche (5) dell'evoluta si possono trasformare come segue:

(*) $$\begin{cases} X - \pi r = rt + r\operatorname{sen} t - \pi r \\ Y + 2r = -r + r\cos t + 2r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X - \pi r = r\left[(t-\pi) + \operatorname{sen} t\right] \\ Y + 2r = r\left[1 + \cos t\right] \end{cases} .$$

Ma $\quad \operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(t - \pi)$ , $\quad \cos t = -\cos(t - \pi)$ .

Fig. 9




Possiamo quindi dire:

(7) $$\begin{cases} X - \pi r = r\left[(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi)\right] \\ Y + 2r = r\left[1 - \cos(t-\pi)\right] \end{cases} .$$

Le (7) sono le equazioni di una cicloide traslata; quindi anche l'evoluta di una cicloide è una cicloide ( vedi fig. 9).

### N. 33 – Equazione del moto di un pendolo cicloidale

Dato nel piano un riferimento cartesiano Oxy, consideriamo una cicloide tangente all'asse $x$ e con le concavità rivolta verso l'alto ( basta far rotolare il cerchio sotto una retta orizzontale di equazione $y = 2r$ ). Se una cuspide giace sull'asse $y$, le equazioni parametriche della cicloide sono:

(1)
$$\begin{cases} x = r(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \\ y = r(1 + \cos\varphi)\ . \end{cases}$$

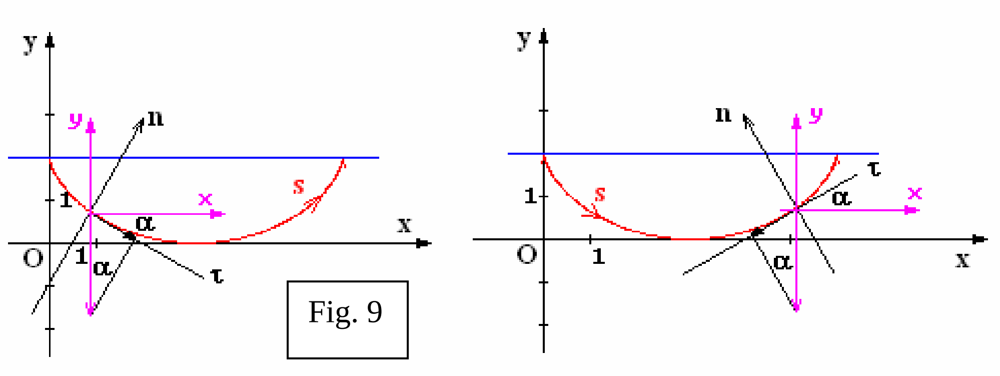


Fig. 9

Stabiliamo sulla curva una ascissa curvilinea $s$, concorde con il verso secondo cui cresce l'angolo $\varphi$. Sia $\tau$ la tangente alla curva in un punto P, orientata nel verso delle $s$ crescenti (fig. 10); i suoi coseni direttori sono:

(2)
$$\cos\widehat{x\tau} = \frac{dx(s)}{ds}\ , \qquad \cos\widehat{y\tau} = \frac{dy(s)}{ds}\ .$$

Ricordando che la tangente alla traiettoria ha il verso della ascissa curvilinea $s$, possiamo anche scrivere:

(3)
$$\cos\widehat{xs} = \frac{dx(s)}{ds}\ , \qquad \cos\widehat{ys} = \frac{dy(s)}{ds}\ ;$$

mentre i coseni direttori della normale n alla curva, orientata verso l'interno della cavità, sono:

(4) $$\cos\widehat{xn} = -\frac{dy}{ds} \ , \qquad \cos\widehat{yn} = \frac{dx}{ds} \ .$$

Se ora un punto pesante mg discende la cicloide, la componente tangenziale della forza peso è:

(5) $$F_s = mg\cdot sen\alpha = -mg\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -mg\cos\widehat{ys} = -mg\frac{dy}{ds} \ ;$$

quando invece il punto risale la cicloide si ha:

(6) $$F_s = -mgsen\alpha = -mg\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = -mg\cos\widehat{ys} = -mg\frac{dy}{ds} \ .$$

Differenziando le equazioni (1) della cicloide si ha:

(*) $$dx = r(1-\cos\varphi)d\varphi \ , \qquad dy = -rsen\varphi d\varphi \, ,$$

(*) $$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = r\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+sen^2\varphi}\cdot d\varphi \ ,$$

(*) $$ds = r\cdot\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\cdot d\varphi = r\sqrt{2}\cdot\sqrt{2sen^2\frac{\varphi}{2}}\cdot d\varphi \, ,$$

(7) $$ds = 2rsen\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi \ .$$

Ne segue $$\frac{dy}{ds} = -\frac{rsen\varphi\cdot d\varphi}{2rsen\frac{\varphi}{2}d\varphi} = -\frac{2\cancel{sen\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cancel{sen\frac{\varphi}{2}}} \ ,$$

quindi (8): $$\frac{dy}{ds} = -\cos\frac{\varphi}{2} \ .$$

Ora, per l'equazione del moto si ha:

(*) $$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} \, .$$

Proiettando sulla tangente orientata $\vec{\tau}$ si ha la componente scalare

(9) $$F_s = m\dot{v}_s \ ,$$

ossia, per la (5), $$-\cancel{m}g\frac{dy}{ds}=\cancel{m}\dot{v}_s,$$

da cui (10) : $$g\cos\frac{\varphi}{2}=\dot{v}_s\ .$$

Ricaviamo $v_s$, e quindi $\dot{v}_s$, e poi sostituiamo nella (10).

Ricordando che $ds=2r\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}d\varphi$ si ottiene :

(*) $$v_s=\frac{ds}{dt}=2r\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=-2r\frac{d}{dt}\cos\frac{\varphi}{2};$$

quindi: (11) $v_s=-4r\frac{d}{dt}\cos\frac{\varphi}{2}$ , (12) $\dot{v}_s=-4r\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}$ .

Sostituendo la (12) nella (10) si ha:

(*) $$g\cos\frac{\varphi}{2}=-4r\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}\ ,$$

(13) $$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{g}{4r}\cos\frac{\varphi}{2}=0\,.$$

Ricordiamo ora l’equazione del moto di un pendolo semplice è

(14) $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\varphi=0$ , periodo di oscillazione $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .

Se nella (14) si sostituisce $\varphi$ con $\cos(\varphi/2)$ si ottiene la (13); quindi le due equazioni sono formalmente identiche. Pertanto il periodo di oscillazione $T$ della sferetta sulla cicloide è dato dalla formula

(15) $$T=2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}\ .$$

Dobbiamo però notare che la (14) descrive solo le piccole oscillazioni di un pendolo semplice e che essa è una approssimazione dell’equazione differenziale

(*) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\varphi=0\ .$$

Nel caso dell'equazione differenziale (13), invece, il periodo di oscillazione della sferetta è dato esattamente dall'espressione (15), qualunque sia l'ampiezza dell'oscillazione.
Il pendolo cicloidale, dunque, è rigorosamente isocrono, cioè la durata delle sue oscillazioni è la stessa qualunque sia l' ampiezza che esse hanno; si dice anche che le oscillazioni lungo la cicloide sono isocrone, qualunque sia la loro ampiezza. Per tale motivo la cicloide è detta curva tautocrona.
La cicloide è detta anche brachistocrona, poiché il tempo che un punto materiale impiega a scendere lungo la cicloide è minore del tempo che il punto materiale impiega a scendere lungo una qualsiasi altra curva avente gli stessi punti estremi.

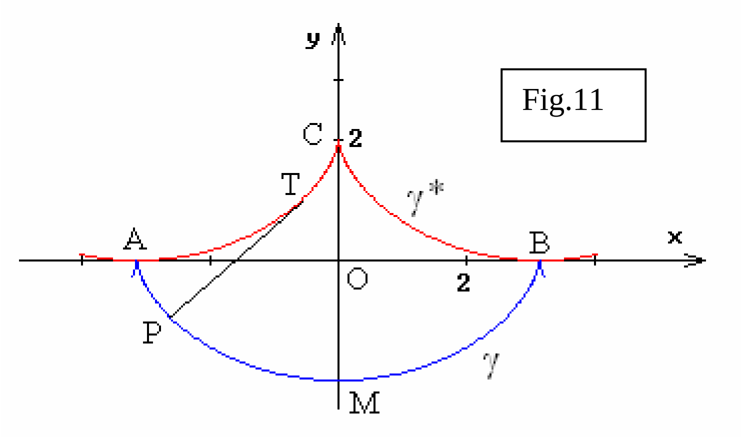


Fig.11

NOTA. La scoperta di Huyghens dell'isocronismo del moto cicloidale e il modo pratico secondo cui egli lo realizzò sono entrambi ammirevoli.
Huyghens si servì di un vincolo praticamente privo di attrito, fondato sulla proprietà secondo cui " l'evoluta di una cicloide $\gamma$ è un'altra cicloide $\gamma^*$, uguale alla prima"; la curva $\gamma$ è detta evolvente di $\gamma^*$; sappiamo come $\gamma$ si possa generare dall'altra (fg.11).
- C è la cuspide della cicloide situata in alto;
- $\ell = 4r$ è la lunghezza del pendolo che descrive la cicloide concava verso l'alto;
- $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{CB}$ sono due semiarchi di cicloide simmetrici rispetto alla verticale per C;
- al punto C è attaccato il filo che sorregge all'altra estremità il punto materiale oscillante.

Durante l'oscillazione il filo rimane teso per effetto della componente longitudinale della forza peso, aderisce alternativamente ora all'uno e ora all'altro arco di cicloide (evoluta), mentre la sferetta attaccata all'estremità libera del filo descrive l'arco di cicloide inferiore (evolvente) e si ha: $\overset{\frown}{TA}=\overline{TP}$ .
Il vincolo cicloidale che nella pratica si può realizzare ha lo stesso trascurabile attrito che presenta il vincolo circolare nel caso del pendolo semplice.

**N. 33 – Pendolo cicloidale (uso delle equazioni di Lagrange).**

Vogliamo utilizzare le equazioni generali di Lagrange per trovare le equazioni del moto del pendolo cicloidale.
Come coordinata lagrangiana $q$ possiamo scegliere l'angolo $\varphi$ descritto dal raggio della ruota che genera la cicloide.
Ora, affinché un punto materiale possa oscillare sulla curva, questa deve avere la concavità rivolta verso l'alto; quindi le equazioni parametriche della cicloide sono:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r(\varphi - \text{sen}\varphi) \\ y = r(i + \cos\varphi)\ , \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x}(\varphi) = r(1-\cos\varphi)\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y}(\varphi) = -r\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}\ . \end{cases}$$

Da queste si ha:

$$(*)\qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2(1+\cos^2\varphi - 2\cos\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\text{sen}^2\varphi\,,$$

$$(*)\qquad v^2 = r^2\dot{\varphi}^2(1+\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi - 2\cos\varphi) = r^2\dot{\varphi}^2\cdot 2(1-\cos\varphi)\,.$$

Si ricava:

$$(2)\qquad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = mr^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi)\,,$$

$$(3)\qquad U = mgy = mgr(1+\cos\varphi)\,,$$

$$(4)\qquad L = T - U = mr^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi) - mgr(1+\cos\varphi)\,.$$

Stabilita la (4) non occorre sapere altro sulla geometria del sistema, perché il formalismo lagrangiana ci esime da ogni altra indagine.
Infatti, scriviamo l'equazione di Lagrange:

$$(f)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0\,.$$

Dalla (4) subito si trova:

$$(*)\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2mr^2(1-\cos\varphi)\cdot\dot{\varphi}\quad,\quad e \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = mr^2\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + mgr\cdot\text{sen}\varphi\,,$$

$$(*)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2mr^2(1-\cos\varphi)\cdot\ddot{\varphi} + 2mr^2\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}^2\,.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale (f) si ottiene:

(*) $$2\cancel{m}r^2(1-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+2\cancel{m}r^2\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}^2-\cancel{m}r^2\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}^2-\cancel{m}gr\text{sen}\varphi=0\ ,$$

(*) $$2r(1-\cos\varphi)\cdot\ddot{\varphi}+r\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}^2-g\text{sen}\varphi=0\,,$$

(*) $$(1-\cos\varphi)\cdot\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}\text{sen}\varphi\cdot\dot{\varphi}^2-\frac{g}{2r}\text{sen}\varphi=0\ .$$

Introducendo l'arco metà di $\varphi$ si ha:

(*) $$2\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\cdot\ddot{\varphi}+\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{g}{r}\cdot\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\ .$$

Dividendo ambo i membri per $2\text{sen}\frac{\varphi}{2}$ si ha:

(5) $$\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}^2=\frac{g}{2r}\cos\frac{\varphi}{2}\ .$$

Il primo membro di questa equazione è uguale a $-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}$ . Infatti si ha:

(*) $$\frac{d}{dt}\cos\frac{\varphi}{2}=-\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}\,,$$

(*) $$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\ddot{\varphi}$$

quindi $$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\ddot{\varphi}\ ,$$

infine $$-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}=+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}^2+\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\ddot{\varphi}\ .$$

Fatto questo controllo possiamo dire che dalla (5) si ha:

(*) $$-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{g}{2r}\cos\frac{\varphi}{2}\ .$$

ossia (6) $$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{g}{4r}\cos\frac{\varphi}{2}=0\ .$$

La (6) è l'equazione del moto di un pendolo cicloidale.
Essa è formalmente analoga all'equazione del moto di un pendolo che compie piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\varphi=0\,, \quad . \tag{7}$$

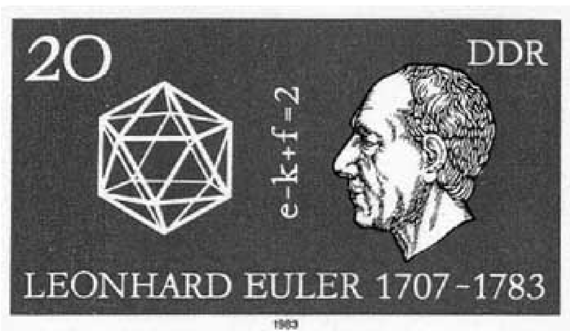
quando si sostituisca $\cos\frac{\varphi}{2}$ con $\varphi$, e $4r$ con $\ell$ .

Naturalmente per l'integrazione non si ha alcuna differenza.
Concludiamo che il periodo di oscillazione della pallina che si muove sulla cicloide è uguale al periodo di oscillazione del moto di un pendolo semplice che compie piccole oscillazioni. Il periodo di oscillazione è quindi dato dalla formula:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad , \quad \text{ove} \quad \ell=4r \ . \tag{8}$$

NOTA. La legge del moto del pendolo cicloidale non utilizza una variabile legata direttamente alla curva, ma utilizza la metà dell'angolo $\varphi$ di cui ruota il raggio della circonferenza che descrive la cicloide stessa. Questo parametro è legato in modo indiretto al problema, ma fornisce il modo più semplice per trattarlo.
Questa fatto ci dà un'idea del metodo generale di Lagrange secondo il quale nelle equazioni del moto di un sistema materiale si possono introdurre, come variabili indipendenti, parametri totalmente arbitrari.

Per una trattazione più completa delle equazioni generali di Lagrange sul moto di un sistema di punti materiali si può consultare il testo: Nazario Magnarelli , Onde elettromagnetiche; cap.V, $N^i$ 8,9,10,11, pp151-157.



# APPENDICE

## N. 34 – Teorema di Torricelli – Barrow

Cfr. Ghizzetti, Analisi II, pg. 96- Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e $x_o$ un punto qualsiasi interno all'intervallo. Detto $c$ una costante additiva arbitraria, tutte le primitive di $f(x)$ sono date dalla formula

(1) $$F(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)\cdot dt + c\ , \quad \text{quindi} \qquad D_x F(x) = f(x)\ .$$

Dim. Per l'incremento della funzione $F(x)$ si ha:

(2) $$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = c + \int_{x_o}^{x+\Delta x} f(t)dt - \left[ c + \int_{x_o}^{x} f(t)dt \right] = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \ .$$

Ricordiamo il teorema del valor medio di Lagrange per gli integrali:

(*) $$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)\ , \qquad \text{con} \qquad a < c < b\ .$$

Nel caso della funzione $F(x)$, indicando con $\xi$ un punto interno all'intervallo di punti estremi $x$ e $x+\Delta x$, si ha:

(*) $$\Delta F = f(\xi)\cdot \Delta x\ , \quad \text{da cui} \qquad \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi)\ .$$

Per $\Delta x \to 0$ si ha $$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)\ .$$

c.v.d.

## N. 35 – Applicazioni del teorema di Torricelli – Barrow

Gli esercizi che svolgeremo nei $n^i$ 34 e 35 sono stati assegnati, nelle prove di esame, dai proff. C. Cassisa e P. Vergole dell'Università " La Sapienza" di Roma.

Esercizio - Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt + c$ .

Si ha: $\Delta F = c + \int_0^{(x+\Delta x)^2} f(t)dt - \left[ c + \int_0^{x^2} f(t)dt \right] = \int_{x^2}^{(x+\Delta x)^2} f(t)dt$ ,

(*) $\Delta F = \left[ (x+\Delta x)^2 - x^2 \right] \cdot f(\xi)$ , con $x^2 \le \xi \le (x+\Delta x)^2$ .

Ne segue: $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \cdot f(\xi)$ , da cui $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \cdot f(\xi)$ ,

ossia (1) $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \left[ 2x + \Delta x \right] \cdot f(\xi)$ .

Troviamo il limite di questa espressione per $\Delta x \to 0$ ; teniamo presente che quando $\Delta x \to 0$ , allora $\xi \to x^2$ . Si ha:

(2) $F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ 2x + \Delta x \right] \cdot \lim_{\xi \to x^2} f(\xi)$ ,

(3) e quindi $F'(x) = 2x \cdot f(x^2)$ ,

ove il fattore $2x$ è la derivata dell'estremo superiore $x^2$ che figura nell'integrale.

Esercizio 1) E' data la funzione $F(x) = \int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1 - t \cdot \text{sen}t)dt$ ;

Per il teorema precedente la su derivata è:

(*) $D_x F(x) = 2x \cdot [e^{x^4} - 1 - x^2 \cdot \text{sen}(x^2)]$ .

Esercizio 2)

Data la funzione $F(x)=\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$, calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^3}$.

Anzitutto si ha $F'(x)=e^{x^2}-1$ .

Calcoliamo ora il limite tenendo presente che esso è una f.i. Applicando il teorema di De L'Hôpital e poi il teor. di Torricelli –Barrow si ha:

(*) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{D\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{Dx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}\cdot e^{x^2}}{\cancel{2x}\cdot 3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{3}=\frac{e^0}{3}=\frac{1}{3}\quad .$$

Il limite ci dice che la funzione $F(x)=\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$ è un infinitesimo di ordine 3 rispetto all'infinitesimo principale $x$ ; ciò vuol dire che l'integrale tende a zero più rapidamente di $x$ e quindi dobbiamo elevare $x$ a potenza di esponente 3 per avere due infinitesimi dello stesso ordine.

Esercizio 3) Data la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^2+1}\cdot dt$ dimostrare che $F(x)$ è una funzione pari uniformemente continua su **R** e calcolare l'ordine di infinitesimo di $F(x)$ per $x\to 0$ rispetto all'infinitesimo campione $x$.

La funzione $\operatorname{sen} t/(t^2+1)$ è dispari perché è il rapporto di una funzione dispari e di una pari ed è continua in **R** come rapporto di due funzioni continue; essa è anche continua uniformemente.
Per determinare l'ordine di infinitesimo della funzione vediamo per quale valore di $\alpha$ è determinato e finito il seguente limite

(*) $$\mathbf{L}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^2+1}dt}{x^\alpha}=(f.i)\lim_{x\to 0}\frac{D\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^2+1}dt}{Dx^\alpha}=(Barrow)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x/(x^2+1)}{\alpha x^{\alpha-1}}\ ,$$

ossia $$\mathbf{L}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\alpha x^{\alpha-1}\cdot(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\alpha x^{\alpha-1}}\quad .$$

Si vede subito che se $\alpha = 2$ si ha:

(*)
$$\mathbf{L} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{\text{sent}}{t^2+1} dt}{x^\alpha} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Quindi F(x) è un infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione $x$ .

Esercizio 4) Tenendo presente la funzione

(1)
$$f(x) = \int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1 - t \cdot \text{sent}) dt$$

è un infinitesimo per $x \to 0$, calcolare l'ordine di tale infinitesimo.

Applicando il teorema di De L'Hôpital alle forme indeterminate che si incontrano si ha:

(2)
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{x^2} [e^{t^2} - 1 - t \cdot \text{sent}] dt \ (f.i) \ = \lim_{x \to 0} \frac{[e^{x^4} - 1 - x^2 \cdot \text{sen}(x^2)] \cdot 2x}{\alpha x^{\alpha - 1}} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2[e^{x^4} - 1 - x^2 \cdot \text{sen}(x^2)]}{\alpha x^{\alpha - 2}} \ (f.i) \ .$$

Sviluppiamo in serie di Mac Laurin le funzioni $f(x) = e^{x^4}$ e $g(x) = \text{sen}(x^2)$.
Ricordando gli sviluppi della funzione esponenziale e della funzione seno si ha:

(*)
$$e^{x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{k!} = 1 + x^4 + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{12}}{3!} + \dots ,$$

(*)
$$\text{sen}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

(*) Indicando con **L** il limite $\mathbf{L} = \lim_{x \to 0} \frac{2[e^{x^4} - 1 - x^2 \cdot \text{sen}(x^2)]}{\alpha x^{\alpha - 2}}$ si ha :

$$(3) \quad \mathbf{L}=\frac{2\cdot\left[1+\cancel{x^4}+\frac{x^8}{2!}+0(x^8)-1-\cancel{x^4}+\frac{x^8}{3!}-0(x^8)\right]}{\alpha x^{\alpha-2}}=\frac{2}{\alpha}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x^8/6}{x^{\alpha-2}}=.....=\lambda \ .$$

Se $\alpha-2=8$ , cioè se $\alpha=10$ , allora $\lambda$ è un numero finito e $\neq 0$ . In tal caso la funzione

$$f(x)=\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1-t\cdot \operatorname{sen} t)dt$$

è un infinitesimo di ordine $\alpha=10$ rispetto all'infinitesimo principale x.

## N. 36 – Altre forme indeterminate con integrali

Negli esercizi che seguono sono applicati i teoremi di De L'Hôpital e di Torricelli – Barrow.

Esercizio 1) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{e^{t^2}-e^t}{t^2+1}}{1-\cos x}=(f.i)\lim_{x\to 0}\frac{D\int_0^x \frac{e^{t^2}-e^t}{t^2+1}}{D(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-e^x}{x^2+1}}{\operatorname{sen} x} \ ,$$

(*) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^x}{(x^2+1)\operatorname{sen} x}(f.i)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^x}{x^2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x}(\text{Hôp}) \ ,$$

(*) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-e^x}{2x\operatorname{sen} x+x^2\cos x+\cos x}=\frac{-e^0}{0+0+1}=-1$$

Esercizio 2) $$L=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx$$

Poniamo $\sqrt{x}=t, \quad \to \quad x=t^2 \ , \quad dx=2tdt$

Inoltre, per $x=0$ si ha $t=0$ ; per $x=1$ si ha $t=1$ .

Calcoliamo l'integrale indefinito usando il metodo di sostituzione e quello di integrazione per parti. Si ha:

(*) $$I=\int \frac{e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{e^{t}(t+1)}{\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt=2\int (t+1)e^{t}dt\,,$$

(*) $$I=2\int e^{t}dt+2\int te^{t}dt=2e^{t}+2\int t\,de^{t}=2e^{t}+2t\cdot e^{t}-2\int e^{t}dt\,,$$

(*) $$I=\cancel{2e^{t}}+2t\cdot e^{t}-\cancel{2e^{t}}+C\,,\qquad\rightarrow\qquad I=2t\cdot e^{t}+C$$

Riprendendo l'integrale dato si ha:

(*) $$L=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2t\cdot e^{t}\right]_{\varepsilon}^{1}=2e$$

Esercizio 3) Calcolare l'ordine di infinitesimo della funzione

(1) $$F(x)=\int_{0}^{x^{3}}\frac{1-e^{\operatorname{sen}^{3}t}}{\cosh t}dt\,,\qquad \text{ove}\qquad \cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\quad .$$

Calcoliamo il limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{\alpha}}$ .

Si tratta di una f.i. $\frac{0}{0}$ ; vediamo per quale valore di $\alpha$ $F(x)$ e $x^{\alpha}$ sono infinitesimi dello stesso ordine. Applicando la regola di De L'Hôpital si ha:

(2) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{D\int_{0}^{x^{3}}\frac{1-e^{\operatorname{sen}^{3}t}}{\cosh t}dt}{Dx^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2}\cdot\frac{1-e^{\operatorname{sen}^{3}(x^{3})}}{\cosh x^{3}}}{\alpha x^{\alpha-1}}\quad ,$$

(*) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\left[1-e^{\operatorname{sen}^3(x^3)}\right]}{\frac{1}{2}(e^{x^3}+e^{-x^3})\alpha x^{\alpha-1}},$$

(*) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{3}{(e^{x^3}+e^{-x^3})/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\operatorname{sen}^3(x^3)}}{\alpha x^{\alpha-3}}(\text{Hôp})\ ,$$

(*) $$L=-\frac{3}{\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}^3(x^3)}\cdot 3\operatorname{sen}^2(x^3)\cdot\cos(x^3)3x^2}{(\alpha-3)x^{\alpha-4}}$$

(*) $$L=-\frac{27}{\alpha(\alpha-3)}\lim_{x\to 0}\left\{e^{\operatorname{sen}^3(x^3)}\cdot\cos(x^3)\right\}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x^3)}{x^{\alpha-6}}\ ,$$

(3) $$L=-\frac{27}{\alpha(\alpha-3)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x^3)}{x^{\alpha-6}}\ .$$

Teniamo ora presente che $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x^3)}{x^6}=1$ , e quindi il limite (3) risulta determinato e diverso da 0 solo se $\alpha-6=6$ , cioè se $\alpha=12$ . Pertanto la funzione

(1) $$F(x)=\int_0^{x^3}\frac{1-e^{\operatorname{sen}^3 t}}{\cosh t}dt$$

è un infinitesimo di ordine 12 rispetto all'infinitesimo principale $x$ .

Esercizio 4) Calcolare il limite della f.i. $\frac{0}{0}$ (1) $L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[x\int_0^x e^{t^2}\cdot\operatorname{tg}(t^2)dt\right]}{x^4}$ .

Applicando il teorema di De L'Hôpital e poi il teor. di Barrow si ha:

(1) $$L=\lim_{x\to 0}\frac{D\sin\left[x\int_0^x e^{t^2}\cdot\operatorname{tg}(t^2)dt\right]}{Dx^4}\ .$$

Teniamo presente che

(2) $\quad DF(x) = D\,sen\left[x\int_0^x e^{t^2} tg(t^2)dt\right] = \cos\left[x\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt\right] \cdot D\left[x\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt\right]$ ,

(*) $\quad DF(x) = \cos\left[x\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dst\right] \cdot \left[\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt + x \cdot D\int_0^x e^{t^2} tg(t^2)dt\right]$

(*) $\quad DF(x) = \cos\left[x\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dst\right] \cdot \left[\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt + x \cdot e^{x^2} tg(x^2)\right]$ .

Riprendendo il limite si ha:

(*)
$$L = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \cos\left[x\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt\right] \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt}{x^3} +$$
$$+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \cos\left[x\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt\right] \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} \cdot tg(x^2)}{x^2} \quad ,$$

(*)
$$L = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{D\int_0^x e^{t^2} \cdot tg(t^2)dt}{Dx^3} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} e^{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{tg(x^2)}{x^2} \quad ,$$

(*)
$$L = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} \cdot tg(x^2)}{3x^2} + \frac{1}{4} \quad ,$$

(*)
$$L = \frac{1}{12}\lim_{x\to 0} e^{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{tg(x^2)}{x^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \quad , \quad \to \quad L = \frac{1}{3} \quad .$$

Il limite (1), finito e diverso da zero, ci dice che la funzione al numeratore della frazione è un infinitesimo del quarto ordine rispetto all'infinitesimo principale $x$ .

**N. 37 – Teorema di derivazione sotto il segno di integrale .**

Sia $f(x,y)$ una funzione continua nel rettangolo $A[a \le x \le b,\ c \le y \le d]$ del piano xy. Fissato un qualsiasi punto $x$ nell'intervallo [a,b] e detti $y_1, y_2$ due punti arbitrari dell'intervallo [c,d], possiamo pensare $f(x,y)$ come funzione della sola $y$; evidentemente essa risulta continua nell'intervallo di punti estremi $y_1$ e $y_2$ . Possiamo quindi considerare l'integrale $\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$, che dipenderà dai punti x, $y_1, y_2$ che abbiamo fissati.
In altre parole l'integrale è una funzione delle variabili $x, y_1, y_2$ ed è definito nel parallelepipedo $B[a \le x \le b,\ c \le y_1 \le y_2,\ c \le y_2 \le d]$ dello spazio $xy_1y_2$ . Possiamo quindi porre:

(1) $$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy = \varphi(x, y_1, y_2) \ .$$

Teor. I – Possiamo dimostrare che la funzione $\varphi(x, y_1, y_2)$ è continua nel parallelepipedo B. Inoltre essa è ivi dotata di derivate parziali $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$ , $\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}$ che sono continue nel parallelepipedo stesso e sono date dalle formule:

(2) $$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = -f(x, y_1) \ , \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = f(x, y_2) \ .$$

Le formule (2) si ricavano immediatamente dal teorema di Torricelli – Barrow.

Teor. II – Possiamo ora dimostrare l'importante **teorema di derivazione sotto il segno di integrale** (A. Ghizzetti, Analisi mat. II. pg. 134).

Se la funzione $f(x,y)$, oltre ad essere continua nel rettangolo $A[a \le x \le b, c \le y \le d]$ del piano xy, è dotata di derivata parziale continua $f_x(x,y)$ in questo rettangolo, allora la funzione $\varphi(x, y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$ risulta dotata di derivata parziale continua $\varphi_x(x, y_1, y_2)$ nel parallelepipedo $B[a \le x \le b,\ c \le y_1 \le d,\ c \le y_2 \le d]$ e si ha:

(3) $$\varphi_x(x, y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy \ .$$

Dim. Sia $\Delta\varphi$ l'incremento della funzione $\varphi$ nel passaggio dal punto $(x, y_1, y_2)$ al punto $(x+\Delta x, y_1, y_2)$; si ha:

$$(4) \qquad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} dy - \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \left[ \frac{f(x+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta x} - f_x(x,y) \right] dy \ ;$$

$$(5) \qquad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} [f_x(x+\vartheta\Delta x, y) - f_x(x,y)]dy, \quad \text{con} \quad 0<\vartheta<1 \ .$$

Ora, poiché la $f_x(x,y)$ è uniformemente continua nel rettangolo A, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\delta > 0$ tale che per $|\Delta x| < \delta$ e per ogni punto (x,y) di A riesca:

$$(*) \qquad |f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x,y)| < \frac{\varepsilon}{d-c} \ .$$

Allora, per $|\Delta x| < \delta$ la (5) ci permette di scrivere:

$$(*) \qquad \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}|y_2 - y_1| \le \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon \ .$$

Da qui segue $$\lim_{\Delta x\to 0}\left[ \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy \right] = 0,$$

ossia (6) $$\varphi_x(x, y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy \ .$$

**Forma generale del teorema di derivazione sotto il segno di integrale.**

Sia $y = f(x,y)$ una funzione definita nel rettangolo $A[a \le x \le b,\ c \le y \le d]$ del piano xy e supponiamo che nell'intervallo (a,b) dell'asse x siano assegnate due funzioni continue $\alpha(x)$, $\beta(x)$ tali da aversi sempre $c \le \alpha(x) \le d$, $c \le \beta(x) \le d$. Per $a \le x \le b$ possiamo allora considerare la funzione:

(7) $$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \;.$$

Evidentemente la funzione F(x) è composta mediante le funzioni continue

(8) $$\varphi(x, y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy \;, \quad y_1 = \alpha(x), \quad y_2 = \beta(x)$$

e possiamo quindi scrivere $F(x) = \varphi[x, \alpha(x), \beta(x)]$; ovviamente anche la funzione F(x) risulta continua nell'intervallo (a,b).

Orbene, vale il seguente teorema:

III – Se la funzione f(x,y) è continua nel rettangolo A ed è ivi dotata di derivata parziale prima $f_x(x,y)$ continua, allora in ogni punto x dell'intervallo (a,b) nel quale le funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sono derivabili, anche la funzione F(x) risulta derivabile e la sua derivata è data dalla formula:

(9) $$F'(x) = f[x, \beta(x)] \cdot \beta'(x) - f[x, \alpha(x)] \cdot \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)dy \;.$$

La formula (9) si trova applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte e tenendo conto delle formule (1), (2) e (6),cioè delle formule:

(1) $$\varphi(x, y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy \;, \qquad (2) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = f(x, y_2) \;, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = -f(x, y_1) \;,$$

(6) $$\varphi_x(x, y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f_x(x,y)dy$$

L'autore del libro si congeda proponendo il seguente problemino.

**N. 38 – Il problema del cane e della lepre**

Un cane appostato nel punto A vede una lepre nel punto B; con 12 salti la potrebbe raggiungere; ma la lepre, accortasi del cane, fugge lungo la retta AB.
Sappiamo che mentre il cane compie 4 salti, la lepre ne compie 5; ma un salto del cane è uguale a 2 salti della lepre. Quanti salti dovrà spiccare il cane per raggiungere la lepre? Nel frattempo quanti salti avrà spiccato questa?

Prima soluzione.
Il cane compie 4 salti di lunghezza $x$ in un certo tempo $T$; nello stesso intervallo di tempo la lepre compie 5 salti di lunghezza $y$. Le velocità dei due animali saranno quindi:

(1) $$V_C = 4\frac{x}{T} \quad , \quad V_L = 5\frac{y}{T} \; .$$

Poiché $x = 2y$ possiamo anche dire:

(2) $$V_C = 8\frac{y}{T} \; , \qquad V_L = 5\frac{y}{T} , \qquad \text{e quindi} \quad V_L = \frac{5}{8}V_C \; .$$

Poiché la velocità della lepre è minore della velocità del cane, essa, presto o tardi, sarà raggiunta.
Precisamente, supponiamo che la lepre sia raggiunta dopo $t$ salti di lunghezza uguale a quella del cane; poiché la velocità del primo animale è $5/8$ della velocità dell'altro, possiamo scrivere la relazione:

(3) $$t = \frac{5}{8}(12 + t) \; , \; \to \; 8t = 60 + 5t \; , \; \text{da cui} \quad t = 20 \; .$$

Conclusione: quando la lepre ha compiuto un tragitto pari a 20 salti del cane, cioè pari a 40 dei suoi salti, essa sarà raggiunta dal cane; nel frattempo il cane avrà compiuto 32 salti.

Seconda soluzione ( data da un collega di Arbizzano - VR).
Il cane inizialmente è in A e dista 12 suoi balzi dalla lepre, che è in B.
Dopo 8 salti il cane dista ancora 4 salti dal punto B, mentre la lepre si è allontanata da B di 10 suoi salti, equivalenti a 5 salti del cane. Ne segue che dopo 8 salti il cane dista dalla lepre $4 + 5 = 9$ suoi salti. Ossia: in 8 salti il cane riduce la distanza dalla lepre di 3 suoi salti. Per vedere con quanti salti il cane può annullare la distanza dalla lepre, cioè può raggiungerla, basta risolvere la proporzione:

(*) $$8 : 3 = x : 12 \; , \quad x = \frac{8 \cdot 12}{3} , \quad x = 32 \;\; \text{salti del cane} \; .$$

Nel frattempo la lepre si sarà allontanata dal punto B di una distanza pari a 20 salti del cane, che equivalgono a 40 suoi salti.

# SECONDA PARTE

Carlo Sintini

## APPLICAZIONI ED ESERCIZI

**N. 39 – Primi esempi pratici.**
Un'equazione differenziale è un'equazione che contiene le variabili x ed y, ma anche le derivate (y', y'', …) e i loro differenziali (dx, dy).

Per esempio $dy = (x + 2y)dx$ oppure $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

La soluzione è costituita da una funzione del tipo y = f(x).
Cioè da una relazione fra x ed y, senza più derivate o differenziali, che soddisfa identicamente l'equazione differenziale iniziale.
L'**ordine** dell'equazione è stabilito dalla derivata più alta.
L'equazione a sinistra è del primo ordine, mentre quella a destra è del secondo ordine.
Entrambe le equazioni sono di **primo grado** (o **lineari**).
Come vedremo la soluzione si trova con una o più operazioni di integrazione: ogni integrazione introduce una costante arbitraria, e quindi la soluzione y = f(x) conterrà una o più costanti.
Si chiama **soluzione (o integrale) generale** quella soluzione che contiene il massimo numero di costanti.

## ESEMPIO n. 1

Data l'equazione differenziale

(1) $$y''(1-x) + y'x - y = 0$$

essa si può anche scrivere nella forma simbolica $f(x, y, y', y'') = 0$.

Verificare che le funzioni $\begin{cases} y = 2e^x \\ y = 3x \\ y = C_1e^x + C_2x \end{cases}$ sono tutte soluzioni della (1).

E' immediato verificare derivando e sostituendo, che la terza funzione è l'integrale generale, mentre le prime due sono **integrali particolari** (cioè casi particolari dell'integrale generale, ottenuti assegnando alle costanti opportuni valori numerici).

## ESEMPIO n. 2

Determinare l'equazione differenziale che ha come integrale generale la funzione

$$y = Cx^2 - x$$

Derivando si ha $y' = 2Cx - 1$. Esplicito la C: $C = \dfrac{y'+1}{2x}$ e sostituisco questa espressione nell'integrale generale iniziale

$$y = \frac{1}{2}\frac{y'+1}{x}x^2 - x$$

$$2xy = x^2y' + x^2 - 2x^2$$

cioè $$2y = xy' + x - 2x$$

$$xy' = 2y + x$$

che è l'equazione differenziale cercata.

## ESEMPIO n. 3

Determinare l'equazione differenziale che ha come integrale generale la funzione

$$y = C_1x^3 + C_2x + C_3$$

Derivo tre volte

$$y' = 3C_1x^2 + C_2$$

$$y'' = 6C_1x$$

$$y''' = 6C_1$$

sostituisco nell'integrale generale (eliminando le C), ed ottengo l'equazione differenziale

$$y'' = xy'''$$

## ESEMPIO n. 4

Determinare l'equazione differenziale del secondo ordine che ha come soluzione l'insieme di tutte le parabole con asse coincidente con l'asse x.

L'insieme di tali parabole è dato dalla funzione $x = ay^2 + b$. Le costanti di integrazione sono ora a e b, invece di $C_1$ e $C_2$.

Si ha

$$y^2 = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

derivando entrambi i membri, si ottiene

$$2yy' = \frac{1}{a}$$

e derivando ancora ambo i membri, si ha

$$2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

$$(y')^2 + yy'' = 0$$

che è l'equazione differenziale cercata.

**N. 40 – Equazioni differenziali del primo ordine.**

Contengono solo differenziali e derivate del primo ordine. La loro forma generica è

(1) $$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

# PRIMO TIPO (A VARIABILI SEPARABILI)

Se la (1) può essere scritta nella forma

(2) $$f_1(x)g_2(y)dx = f_2(x)g_1(y)dy$$

allora la (2) si può trasformare nel modo seguente

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + C$$

ed essere risolta con una semplice integrazione di entrambi i membri.

## ESEMPIO n. 5

Risolvere l'equazione differenziale $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^3)dx = 0$.

Si può scrivere

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$$

cioè

(3) $$\frac{dx}{x(1+x^2)} + \frac{y^2}{1+y^3}dy = 0$$

Integrando separatamente i due termini a primo membro, si ottiene

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\ \int \frac{y^2}{1+y^3}dy = \frac{1}{3}\int \frac{3y^2}{1+y^3}dy = \frac{1}{3}\ln|y^3+1| + C \end{cases}$$

Quindi la (3) diviene

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{3}\ln\left|y^3+1\right| = C$$

In cui abbiamo unificato le costanti integrative. Moltiplichiamo per 6 si ha

$$6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) + 2\ln\left|y^3+1\right| = C$$

La soluzione può essere resa più compatta scrivendo

$$\ln\frac{x^6(y^3+1)^2}{(1+x^2)^3} = C$$

$$e^C = \frac{x^6(y^3+1)^2}{(1+x^2)^3}$$

cioè

$$\frac{x^6(y^3+1)^2}{(1+x^2)^3} = C$$

## ESEMPIO n. 6

Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

Separando le variabili e integrando si ha

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

cioè

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C$$

Dove la costante C è espressa sotto forma di arcotangente, per convenienza.
Integrando si ottiene

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C)$$

cioè (ricordando le formule di addizione)

$$y = \frac{x+C}{1-Cx}$$

## ESEMPIO n. 7

Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Separando le variabili e integrando si ha

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$tgy = -ctgx + C$$

## SECONDO TIPO (OMOGENEE)

Una funzione f(x,y) = 0 si dice omogenea di grado n, se è possibile trasformarla nella forma

(1) $$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Relativamente alle equazioni differenziali, la (1) si dice omogenea se f(x,y) e g(x,y) sono omogenee dello stesso grado.
In tal caso si pone y = tx dalla quale, differenziando, si ottiene dy = tdx + xdt e la (1) si trasforma in una equazione differenziale del primo tipo (a variabili separabili).

### ESEMPIO n. 8

Risolvere l'equazione differenziale $2xydy = (x^2 - y^2)dx$ . E' omogenea di 2° grado.
Poniamo y = tx (differenziando si ha dy = tdx + xdt)

Sostituendo si ottiene

$$2x(tx)(tdx+xdt) = (x^2 - t^2x^2)dx$$
$$2tx^2(tdx + xdt) = x^2(1 - t^2)dx$$
$$2t^2dx + 2txdt = dx - t^2dx$$
$$3t^2dx - dx = -2txdt$$
$$dx(1-3t^2) = 2txdt$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{2t}{1-3t^2}dt$$

integrando il 2° membro si ha

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|1-3t^2\right| + \ln C = 0 \text{ e perciò}$$
$$3\ln|x| + \ln\left|1-3t^2\right| + \ln C = 0$$
$$\ln\left(|x|^3 \cdot \left|1-3t^2\right| \cdot C\right) = 0$$
$$|x|^3 \cdot \left|1-3t^2\right| \cdot C = 1$$
$$|x|^3 \cdot \left|1-3t^2\right| = C$$
$$x^3 - 3x^3\frac{y^2}{x^2} = C$$

## ESEMPIO n. 9

Risolvere l'equazione differenziale

$$x\,\mathrm{sen}\frac{y}{x}(ydx + xdy) + y\cos\frac{y}{x}(xdy - ydx) = 0$$

E' omogenea di 2° grado e con la solita sostituzione, y = tx
(differenziando si ha dy = tdx + xdt), otteniamo

$$x\,\mathrm{sen}\,t(xtdx + xtdx + x^2dt) + tx\cos t(xtdx - x^2dt - xtdx) = 0$$

$$\mathrm{sen}\,t(2tdx + xdt) + tx\cos tdt = 0$$

$$2t\,\mathrm{sen}\,tdx + x(\mathrm{sen}\,t + t\cos t)dt = 0$$

$$2\frac{dx}{x} + \frac{\mathrm{sen}\,t + t\cos t}{t\,\mathrm{sen}\,t}dt = 0$$

$$2\ln|x| + \ln|t\,\mathrm{sen}\,t| + \ln C = 0$$

$$\ln\left(x^2 \cdot |t\,\mathrm{sen}\,t| \cdot C\right) = 0$$

$$x^2 \cdot |t\,\mathrm{sen}\,t| \cdot C = 1$$

$$x^2 \cdot |t\,\mathrm{sen}\,t| = C$$

$$x^2\frac{y}{x}\mathrm{sen}\frac{y}{x} = C$$

cioè

$$xy\,\mathrm{sen}\frac{y}{x} = C$$

## ESEMPIO n. 10

Risolvere l'equazione differenziale

$$(x^2 - 2y^2)dy + 2xydx = 0$$

Poniamo y = tx (differenziando si ha dy = tdx + xdt)

$$(x^2 - 2x^2t^2)(xdt + tdx) + 2x^2tdx = 0$$
$$(1 - 2t^2)(xdt + tdx) + 2tdx = 0$$
$$xdt + tdx - 2t^2xdt - 2t^3dx + 2tdx = 0$$
$$x(1 - 2t^2)dt = (2t^3 - 3t)dx$$
$$\frac{1 - 2t^2}{2t^3 - 3t}dt = \frac{dx}{x}$$

la frazione a primo membro può essere scomposta nel modo seguente

$$\frac{1 - 2t^2}{2t^3 - 3t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt}{2t^2 - 3}$$

da cui si ottiene

$$A = -\frac{1}{3} \quad B = -\frac{4}{3}$$

Sostituendo si ha

$$\left[-\frac{1}{3} - \frac{4t}{3(2t^2 - 3)}\right]dt = \frac{dx}{x}$$
$$3\frac{dx}{x} + \frac{dt}{t} + \frac{4t}{2t^2 - 3}dt = 0$$
$$3\ln|x| + \ln|t| + \ln|2t^2 - 3| + \ln C = 0$$
$$\ln\left(|x|^3 \cdot |t| \cdot |2t^2 - 3| \cdot C\right) = 0$$
$$|x|^3 \cdot |t| \cdot |2t^2 - 3| \cdot C = 1$$
$$|x|^3 \cdot |t| \cdot |2t^2 - 3| = C$$
$$x^3 \frac{y}{x}\left(2\frac{y^2}{x^2} - 3\right) = C$$
$$y(2y^2 - 3x^2) = C$$

# TERZO TIPO (EQUAZIONI RISOLUBILI CON ARTIFICI)

Certe equazioni differenziali possono essere facilmente risolte sfruttando la presenza di particolari condizioni di integrabilità.
Oppure può accadere che moltiplicando i due membri dell'equazione per una opportuna funzione di x e y (detta **fattore di integrazione**), si raggiungano le condizioni di integrabilità suddette.

## ESEMPIO n. 11

Risolvere l'equazione differenziale

$$(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$$

Sviluppando si ottiene immediatamente

$$x^2dx + ydx + y^3dy + xdy = 0$$

$$x^2dx + (xdy + ydx) + y^3dy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^4}{4} = C$$

## ESEMPIO n. 12

Risolvere l'equazione differenziale

$$(x + e^{-x}\,\mathrm{sen}\,y)dx - (y + e^{-x}\cos y)dy = 0$$

Si ottiene facilmente

$$xdx + e^{-x}\,\mathrm{sen}\,ydx - ydy - e^{-x}\cos ydy = 0$$

$$xdx - ydy + e^{-x}\,\mathrm{sen}\,ydx - e^{-x}\cos ydy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - e^{-x}\,\mathrm{sen}\,y = C$$

$$x^2 - y^2 - 2e^{-x}\,\mathrm{sen}\,y = C$$

## ESEMPIO n. 13

Risolvere l'equazione differenziale

$$xdy - ydx = 2x^3dx$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 2xdx$$

e, integrando,

$$\frac{y}{x} = x^2 + C$$

$$y = x^3 + Cx$$

## ESEMPIO n. 14

Risolvere l'equazione differenziale

$$xdy + ydx = 2x^2ydx$$

Moltiplicando i due membri per il fattore integrante $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

si ottiene

$$\frac{xdy + ydx}{xy} = 2xdx$$

e, integrando,

$$\ln|xy| = x^2 + C$$

$$e^{x^2+C} = |xy|$$

$$xy = C \cdot e^{x^2}$$

$$y = C \cdot \frac{e^{x^2}}{x}$$

## ESEMPIO n. 15

Risolvere l'equazione differenziale

$$xdy + (3y - e^x)dx = 0$$

Il fattore integrante è $f(x) = x^2$

Si ottiene

$$x^3dy + 3x^2ydx - x^2e^xdx = 0$$

$$x^3dy + 3x^2ydx = x^2e^xdx$$

e, integrando,

$$x^3y = \int x^2e^xdx$$

$$x^3y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

(il secondo membro si integra per parti 2 volte successivamente)

$$y = \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + C$$

# QUARTO TIPO

Equazioni lineari del tipo $\frac{dy}{dx} + Ay = B$ **(**con A e B funzioni della sola x**)**

Ammettono sempre come fattore integrante la funzione $f(x) = e^{\int A dx}$

## ESEMPIO n. 16

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 6x^3$$

Ponendo A(x) = 2/x si ha $\int A(x)dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| = \ln x^2$

e quindi il fattore integrante[1] è $f(x) = e^{\ln x^2} = x^2$

Moltiplicando e integrando si ha

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 6x^5$$

$$x^2 dy + 2xy\,dx = 6x^5 dx$$

$$x^2 y = \frac{6x^6}{6} + C$$

$$y = x^4 + \frac{C}{x^2}$$

## ESEMPIO n. 17

Risolvere l'equazione differenziale

$$\tan x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \sec x$$

Trasformandola nella

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot \cot x = c\sec x$$

---

[1] N.B. Si noti che il fattore integrante è definito a meno di una costante: è conveniente prendere il più semplice degli infiniti fattori integranti, quello con C = 0.

Ponendo $A(x) = \cot x$

Si può ricavare il fattore integrante

$$\int A(x)dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx = \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$f(x) = e^{\ln|\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$$

Sviluppando, si ha

$$\operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + y\cos x = 1$$

$$\operatorname{sen} x dy + y\cos x dx = dx$$

$$y \operatorname{sen} x = x + C$$

$$y = \frac{x}{\operatorname{sen} x} + \frac{C}{\operatorname{sen} x}$$

## ESEMPIO n. 18

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} - xy = x$$

Per il fattore integrante poniamo

$$A(x) = -x \quad \rightarrow \quad \int A(x)dx = -\frac{x^2}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si ha

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dy}{dx} - e^{-\frac{x^2}{2}}xy = e^{-\frac{x^2}{2}}x$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}dy - e^{-\frac{x^2}{2}}xydx = e^{-\frac{x^2}{2}}xdx$$

$$ye^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

$$y = -1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

# QUINTO TIPO

Infine esaminiamo le equazioni del tipo

(1) $$\frac{dy}{dx} + A(x) \cdot y = B(x) \cdot y^n$$

(con n intero non negativo ed A e B funzioni della sola x)

L'equazione può essere trasformata in lineare con la sostituzione

(2) $$t = y^{1-n}$$

Si ricava

$t = y/y^n$

(3) $$y = t\, y^n$$

Differenziando la (2) si ha

$$dt = (1-n)y^{1-n-1}dy$$

$$dt = (1-n)y^{-n}dy \qquad \text{divido per dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}\frac{dt}{dx}$$

Sostituendo (3) e (4) nella (1) si ha

$$\frac{y^n}{1-n}\frac{dt}{dx} + A(x) \cdot ty^n = B(x) \cdot y^n$$

(5) $$\frac{1}{1-n}\frac{dt}{dx} + A(x) \cdot t = B(x)$$

## ESEMPIO n. 19

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^2$$

(n = 2 e quindi poniamo $t = y^{1-2} = y^{-1}$)

Sostituendo nella (5)

$$\frac{1}{1-2}\frac{dt}{dx} + t = x \quad \rightarrow \quad -\frac{dt}{dx} + t = x \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} - t = -x$$

che è una equazione differenziale lineare con fattore integrante $f(x) = e^{\int(-1)dx} = e^{-x}$

$$e^{-x}\frac{dt}{dx} - te^{-x} = -xe^{-x}$$

$$e^{-x}dt - te^{-x}dx = -xe^{-x}dx \qquad \text{(il 2° membro si integra per parti)}$$

$$e^{-x}t = xe^{-x} + e^{-x} + C \qquad \left(\text{ma è} \quad t=\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{e^{-x}}{y} = xe^{-x} + e^{-x} + C$$

$$\frac{1}{y} = x + 1 + \frac{C}{e^{-x}}$$

$$\frac{1}{y} = x + 1 + C \cdot e^{x}$$

## ESEMPIO n. 20

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = y^3 \sec x \qquad \left(n=3 \quad t=y^{1-3} = \frac{1}{y^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-3}\frac{dt}{dx} + t\tan x = \sec x$$

$$\frac{dt}{dx} - 2t\tan x = -2\sec x$$

Essendo

$$\int (-2\tan x)dx = 2\ln|\cos x| = \ln\cos^2 x$$

il fattore integrante è

$$f(x) = e^{\ln\cos^2 x} = \cos^2 x$$

Quindi

$$\cos^2 x\frac{dt}{dx} - 2t\,\text{sen}\,x\cos x = -2\cos x$$

$$\cos^2 x\,dt - 2t\,\text{sen}\,x\cos x\,dx = -2\cos x\,dx$$

$$t\cos^2 x = -2\,\text{sen}\,x + C$$

$$\frac{\cos^2 x}{y^2} = -2\,\text{sen}\,x + C$$

# ESERCIZI

Dall'integrale generale ricava l'equazione differenziale:

| | | |
|---|---|---|
| 1 - | $y = Cx^2 + 1$ | $[xy' = 2(y - 1)]$ |
| 2 - | $y = C^2x + C$ | $[y' = (y - xy')^2]$ |
| 3 - | $y = Cx^2 + C^2$ | $[4x^2y = 2x^3y' + (y')^2]$ |
| 4 - | $xy = x^3 - C$ | $[xy' + y = 3x^2]$ |
| 5 - | $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$ | $[y'' = 0]$ |
| 6 - | $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ | $[y'' - 3y' + 2y = 0]$ |
| 7 - | $y = C_1 \text{sen } x + C_2 \cos x$ | $[y'' + y = 0]$ |
| 8 - | $y = C_1 e^x \cos(3x + C_2)$ | $[y'' - 2y' + 10y = 0]$ |

Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

| | | |
|---|---|---|
| 9 - | $ydy - 4xdx = 0$ | $[y^2 = 4x^2 + C]$ |
| 10 - | $y^2dy - 3x^5dx = 0$ | $[2y^3 = 3x^6 + C]$ |
| 11 - | $x^3y' = y^2(x - 4)$ | $[x^2 - xy + 2y = Cx^2y]$ |
| 12 - | $(x - 2y)dy + (y + 4x)dx = 0$ | $[xy - y^2 + 2x^2 + C]$ |
| 13 - | $(2y^2 + 1)dy + (y + 4)dx = 0$ | $[y^2 + \ln y = x^3 + C]$ |
| 14 - | $xy'(2y - 1) = y(1 - x)$ | $[\ln (xy) = x + 2y + C]$ |
| 15 - | $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ | $[x^2 - y^2 = Cx]$ |
| 16 - | $(x + y)dy = (x - y)dx$ | $[x^2 - 2xy - y^2 = C]$ |
| 17 - | $x(x + y)dy - y^2dx = 0$ | $[y = C e^{-y/x}]$ |
| 18 - | $xdy - ydx + x e^{-y/x} dx = 0$ | $[e^{y/x} + \ln(Cx) = 0]$ |
| 19 - | $dy = (3y + e^{2x})dx$ | $[y = (Ce^x - 1)e^{2x}]$ |
| 20 - | $x^2y^2dy = (1 - xy^3)dx$ | $[2x^3y^3 = 3x^2 + C]$ |

**N. 41 – Equaz. differenziali del secondo ordine.**

# PRIMO TIPO

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Si risolvono semplicemente con due integrazioni successive.

## ESEMPIO n. 21

Risolvere l’equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x$$

integrando si ha

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - e^x + \text{sen}\, x + C_1$$

e, integrando ancora,

$$y = xe^x - 2e^x - \cos x + C_1x + C_2$$

# SECONDO TIPO

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y')$$

Si pone $y' = p$ e si risolvono semplicemente con due integrazioni successive.

## ESEMPIO n. 22

Risolvere l’equazione differenziale $x^2 y'' + x y' = a$

Ponendo $y' = p$ si ha $y'' = dp/dx$ e sostituendo si ha

$$x^2\frac{dp}{dx}+xp=a$$

$$xdp+pdx=\frac{a}{x}dx$$

$$px=a\ln|x|+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}x=a\ln|x|+C_1$$

$$dy=\frac{a}{x}\ln|x|+C_1\frac{dx}{x} \qquad \int\frac{\ln x}{x}dx=\ln^2 x$$

e quindi

$$y=a\frac{\ln^2|x|}{2}+C_1\ln|x|+C_2$$

## ESEMPIO n. 23

Risolvere l’equazione differenziale xy’’ + y’ + x = 0
Ponendo y’ = p si ha y’’ = dp/dx e sostituendo si ha

$$x\frac{dp}{dx}+p+x=0$$

$xdp+pdx+x=0$ integrando

$$px=-\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}x=-\frac{x^2}{2}+C_1$$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}$ e integrando ancora

$$y=-\frac{x^2}{2}+C_1\ln|x|+C_2$$

# TERZO TIPO

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

Poichè $\frac{d(y')^2}{dx} = 2y'y''$ si moltiplicano ambo i membri per 2y’

## ESEMPIO n. 24

Risolvere l’equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$$

Moltiplicando per 2y’ si ha

$$2y'y'' = 4yy' \qquad \text{e integrando}$$

$$(y')^2 = 4\int yy'dx$$

$$(y')^2 = 4\int y\frac{dy}{dx}dx$$

$$(y')^2 = 4\int ydy = 4\frac{y^2}{2} + C_1 = 2y^2 + C_1$$

estraendo la radice in entrambi i membri

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}$$

che è a variabili separabili

$$\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx \qquad \leftarrow \qquad \text{Ricordando l'integrale notevole}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a}} = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + a}\right)$$

che si risolve per sostituzione ponendo

$$t = y + \sqrt{y^2 + a}$$

si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{C_1}{2}}}=dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(y+\sqrt{y^2+\frac{C_1}{2}}\right)=x+C_2$$

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2+\frac{C_1}{2}}\right)=x\sqrt{2}+C_2$$

## ESEMPIO n. 25

Risolvere l'equazione differenziale $y'' = -1/y^3$

Moltiplico per 2y'

$$2y'y'' = -2y'/y^3$$

e integro

$$(y')^2=\frac{1}{y^2}+C_1=\frac{1+C_1y^2}{y^2}$$

$$y'=\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+C_1y^2}}=dx$$ integro ponendo $t=1+C_1y^2$

$$\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{C_1}=x+C_2$$

$$\sqrt{1+C_1y^2}=x+C_2$$

# QUARTO TIPO (CASO GENERALE)

(4) $$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = R$$

Si deve risolvere l'equazione **$m^2 + P m + Q = 0$** detta **equazione caratteristica** della equazione **omogenea** associata alla (4).
A seconda della natura delle soluzioni, si hanno due casi:

- **Soluzioni $m_1$ e $m_2$ distinte** (reali o complesse), allora l'equazione generale della omogenea è

  (5) $$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

- **Soluzioni reali e coincidenti** allora l'equazione generale della omogenea è

  (6) $$y = C_1 e^{m x} + C_2 x e^{m x}$$

**La soluzione generale della (4)** (equazione non omogenea), **è la somma della soluzione generale della omogenea associata** calcolata con la (5) o con la (6), **e di una soluzione particolare della (4).**

## ESEMPIO n. 26

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \qquad \text{(omogenea)}$$

L'equazione caratteristica è $m^2 + 3m - 4 = 0$ $\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -4 \end{cases}$

e l'integrale generale e'

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

## ESEMPIO n. 27

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(omogenea con } m_1 = 0 \text{ e } m_2 = -3\text{)}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

## ESEMPIO n. 28

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0 \qquad \text{(omogenea con } m_1=2+3i \text{ e } m_2=2-3i)$$

$$y=C_1e^{(2+3i)x}+C_2e^{(2-3i)x}$$

$$y=e^{2x}\left(C_1e^{3ix}+C_2e^{-3ix}\right)$$

Ricordando la formula di Moivre, $e^{iax}$ = (cos ax + sen ax) e perciò

$$y=e^{2x}\left[C_1(\cos 3x+i\,\text{sen}\,3x)+C_2(\cos 3x-i\,\text{sen}\,3x)\right]$$

$$y=e^{2x}\left[(C_1+C_2)\cos 3x+i(C_1-C_2)\,\text{sen}\,3x\right]$$

$$y=e^{2x}(A\cos 3x+B\,\text{sen}\,3x)$$

(la i è inglobata nella B)

## ESEMPIO n. 29

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0 \qquad \text{(omogenea con } m_1=m_2=2)$$

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$$

## ESEMPIO n. 30

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-4y=x^2 \qquad \text{(non omogenea con } m_1=1 \;\; m_2=-4)$$

La soluzione dell'omogenea associata è

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}$$

Per trovare una soluzione particolare della non omogenea notiamo che il termine $x^2$ a secondo membro suggerisce che la soluzione contenga un termine in $x^2$ e forse altri termini scaturiti dalle integrazioni successive. Supponiamo cioè che tale soluzione abbia la forma

$y = A\,x^2 + B\,x + C$ (con A, B, C costanti da determinare)

Derivando sa ha

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

Ora, sostituendo nell'equazione differenziale non omogenea, si ottiene

$$2A + 3(2Ax + B) -4(A\,x^2 + B\,x + C) = x^2$$

$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ha

$$A = -1/4 \qquad B = -3/8 \qquad C = -13/32$$

e quindi la soluzione generale della non omogenea è

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$$

## ESEMPIO n. 31

Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x$$

L'equazione caratteristica fornisce $m_1 = -1$ $m_2 = 3$

Una soluzione particolare della non omogenea sarà questa volta una espressione di tipo trigonometrico, per esempio del tipo

$$y = A \text{ sen } x + B \cos x$$

derivando si ottiene

$$y' = A \cos x - B \text{ sen } x$$
$$y'' = - A \text{ sen } x - B \cos x$$

Sostituendo nella non omogenea, si ha

$$- A \text{ sen } x - B \cos x - 2(A \cos x - B \text{ sen } x) - 3(A \text{ sen } x + B \cos x) = \cos x$$
$$\text{sen } x\, (2B - 4A) + \cos x\, (- 2A - 4B) = \cos x$$

Applicando il principio di identità si ottiene

$$A = - 1/10 \qquad B = - 1/5$$

Quindi la soluzione generale della non omogenea è

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{10}\text{sen } x - \frac{1}{5}\cos x$$

# ESERCIZI

1 – $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$  $\left[ y = \dfrac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2 \right]$

2 – $e^{2x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$  $\left[ y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2 \right]$

3 – $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -9\,\mathrm{sen}\,3x$  $\left[ y = \mathrm{sen}3x + C_1x + C_2 \right]$

4 – $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$  $\left[ y = x^2 + C_1x^4 + C_2 \right]$

5 – $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 2x - x^2$  $\left[ y = \dfrac{x^3}{3} + C_1e^x + C_2 \right]$

6 – $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 8x^3$  $\left[ y = x^4 + C_1x^2 + C_2 \right]$

7 – $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$  $\left[ y = C_1e^x + C_2e^{2x} \right]$

8 – $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$  $\left[ y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} \right]$