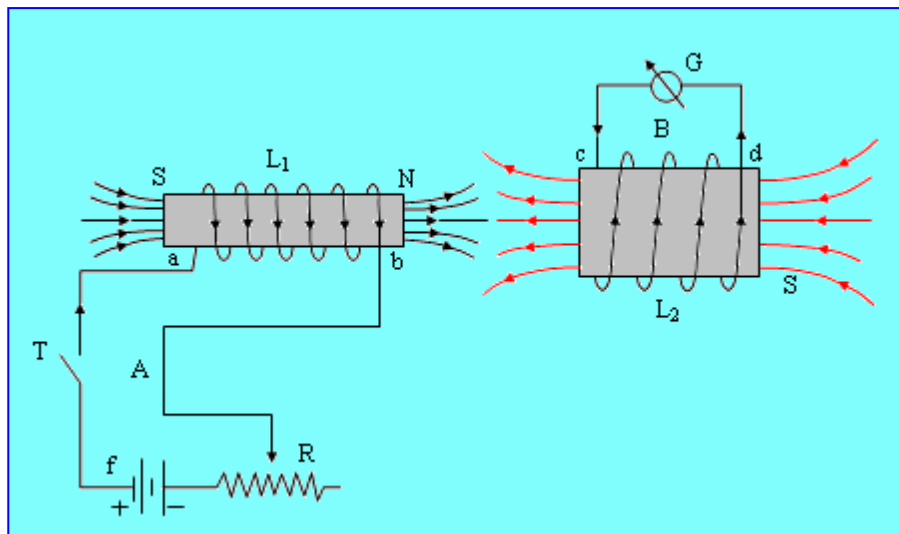


Nazario Magnarelli

ELETTROMAGNETISMO



Ringrazio l'amico Prof. Carlo Sintini per i suoi utili consigli, per i suggerimenti e la cura da lui posta nella scrittura del testo e nell'esecuzione delle figure.

*A mia figlia Flora che mi ha
sempre incoraggiato ad ordinare
e raccogliere questi argomenti
di Fisica.*

PREFAZIONE

In questo volume sull'Elettromagnetismo abbiamo esposto i principali argomenti della disciplina dando una trattazione chiara, esaustiva e di agevole consultazione degli stessi. I vari teoremi sono stati dimostrati spiegando accuratamente i procedimenti matematici di cui la Fisica si avvale. Ciò permetterà al lettore di intraprendere lo studio dell'Elettromagnetismo rimuovendo subito dubbi e difficoltà iniziali, e gli consentirà di approfondire la sua preparazione su altri testi di Fisica.

A parziale completamento del presente lavoro, la propagazione delle onde elettromagnetiche nello spazio e lo studio delle leggi che Maxwell ha posto a base della corrispondente teoria saranno trattati in un altro volume.

Latina, Aprile 2003

Nazario Magnarelli

BIBLIOGRAFIA

- 1) E. Perucca, Fisica generale voll. I e II, UTET.
- 2) E. Amaldi – Fisica sperimentale parte II – Litografia Marves - Roma
- 3) C. Mencuccini – V. Silvestrini, Fisica II, Liguori Editore - Napoli.
- 4) D. Sette, Lezioni di Fisica vol. III, Veschi – Roma.
- 5) A. Rostagni, Fisica generale, Vol. II parte 1^a – UTET.
- 6) G. Cortini – S. Sciuti, Apparecchi di Fisica – Libreria Veschi, Roma.
- 7) A. Caforio – A. Ferilli, Physica voll. II e III, Le Monnier.

INDICE

CAPITOLO PRIMO	9
ELETTRICITA'	9
N. 1 - Legge di Coulomb	9
N. 2 - Concetto di campo elettrico	12
N. 3 - Lavoro del campo elettrico generato da una carica puntiforme e potenziale del campo.....	13
N. 4 - Carattere irrotazionale del campo elettrico.....	18
N. 5 - Alcune considerazioni sul gradiente di una funzione scalare.....	22
N. 6 - Potenziale di un punto di un campo elettrico ed energia potenziale.....	25
N. 7 - Dipolo elettrico.....	28
N. 8 - Azioni meccaniche sui dipoli elettrici posti in un campo elettrico esterno.....	38
N. 9 - Energia di un campo elettrostatico.....	41
N. 10 - Dimostrazione elementare della formula del lavoro elettrico.	45
N. 11 - Flusso del vettore campo elettrico \vec{E}_0 attraverso una superficie chiusa (Teorema di Gauss).....	48
N. 12 - Spostamento delle cariche elettriche in un campo elettrico o in un conduttore	53
N. 13 - Superfici equipotenziali del campo elettrico	54
N. 14 - Alcune considerazioni sul significato di gradiente	59
N. 15 - Campo elettrico e potenziale di un conduttore in equilibrio elettrostatico	60
N. 16 - Potenziale e campo elettrico di una sfera elettrizzata	62
N. 17 - Campo elettrico generato da una distribuzione superficiale di cariche	65
N. 18 - Gli integrali nel calcolo dell'intensità dei campi elettrici.....	69
N. 19 - Teorema di Coulomb	74
N. 20 - Pressione elettrostatica.....	75
N. 21 - Potere dispersivo delle punte.....	77
N. 22 - Capacità elettrica di un conduttore isolato.....	79
N. 24 - L'elettroscopio come elettrometro	85
N. 25 - Condensatori elettrici.....	88
N. 26 - Elettroscopio condensatore di Volta	91
N. 27 - Energia di un condensatore	92

N. 28 – Energia di un condensatore; II° metodo.....	94
N. 29 – Elettrometri	97
N. 30 - Procedimento elementare per la determinazione dei potenziali	103
N. 31 - Scarica di un condensatore attraverso una resistenza.	104
N. 32 - Carica di un condensatore attraverso una resistenza.	106
CORRENTE CONTINUA	108
N. 33 – Energia di una corrente continua ed effetto Joule.....	108
N. 34 – Legge di Ohm per un circuito chiuso.....	110
N. 35 – Leggi di Kirchhoff	111
Problemi di applicazione	114
CAPITOLO SECONDO.....	117
MAGNETISMO	117
N. 1 - Campo magnetico di una calamita o di un circuito elettrico .	117
N. 2 – Vettore induzione magnetica \vec{B}_0	119
N. 3 – Azioni meccaniche esercitate da un campo magnetico su una spira percorsa da corrente	122
N. 4 – Forza di Lorentz	125
N. 5 – Legge di Biot e Savart.....	127
N. 6 – Prima formula di Laplace.....	129
N. 7 – Campo magnetico nel centro di una spira.....	131
N. 8 – Campo magnetico sull'asse di una spira	133
N. 9 - Campo magnetico in un punto interno ad un solenoide	135
N. 10 – Sulla proprietà fondamentale del campo di induzione magnetica	137
N. 11 - Elettrodinamometro assoluto	138
N. 12 – Circuitazione di un vettore	140
N. 13 – Teorema della circuitazione di Ampère (prima parte)	142
N. 14 – Teorema della circuitazione di Ampère (seconda parte)....	145
N. 15 – Espressione differenziale del teorema della circuitazione di Ampère.....	148
N. 16 - Il campo di induzione magnetica entro un solenoide	150
N. 17 – Momento magnetico di un magnete.....	152
N. 18 – Campo magnetico di un dipolo	153
N. 19 - Teorema dell'equivalenza di Ampère.....	155
N. 20 – Correnti indotte: leggi di Faraday e di Lenz.	157
N. 21 – Induzione elettromagnetica e legge di Faraday-Neumann..	160
N. 22 – Corrente indotta e principio di conservazione dell'energia.	167
N. 23 – Forma differenziale della legge di Faraday-Neumann-Lenz	170

N. 24 – Autoinduzione.....	172
N. 25 – Dinamo e alternatore.....	175
N. 26 - La corrente elettrica in un circuito oscillante RLC.....	180
N. 27 – Oscillazioni forzate in un circuito RLC.....	183
N. 28 – Potenza di una corrente alternata	188
N. 29 - Energia del campo magnetico generato da una corrente	189
N. 30 - Energia del campo magnetico generato da una corrente elettrica (altra dimostrazione)	193
CAPITOLO TERZO.....	199
IL GALVANOMETRO BALISTICO.....	199
N. 1 – Elementi costruttivi di un galvanometro balistico	199
N. 2 – Moto dell’equipaggio di un galvanometro.....	202
N. 3 - Uso del galvanometro balistico nella misura della corrente di scarica di un condensatore.	212
N. 4 – Misura della costante dielettrica ϵ_0 del vuoto per mezzo dell’elettrometro assoluto.....	222
APPENDICE MATEMATICA	224
N. 1 – Integrale di una particolare forma indeterminata.....	224
N. 2 – Altro integrale notevole	226
N. 3 – Studio di un particolare problema differenziale.....	229
N. 4 – Prima identità goniometrica	232
N. 5 – Seconda identità goniometrica	233
N. 6 – Terza identità goniometrica	234
N. 7 – Problema geometrico.	235
N. 8 – Quando si viaggiava in carrozza	238
N. 9 – Un problema sull’uso delle frazioni.....	240

CAPITOLO PRIMO

ELETTRICITA'

N. 1 - Legge di Coulomb

Due cariche elettriche Q_0, q praticamente puntiformi si attraggono o si respingono con una forza che è direttamente proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza; cioè

$$(1) \quad F = k \left| \frac{Q_0 q}{r^2} \right|.$$

Si ha repulsione se le due cariche hanno lo stesso segno, si ha attrazione in caso contrario.

Per il principio di azione e reazione, se \vec{F} è la forza che Q_0 esercita su q , $-\vec{F}$ è la forza che la carica q esercita su Q_0 (fig. 1-1)

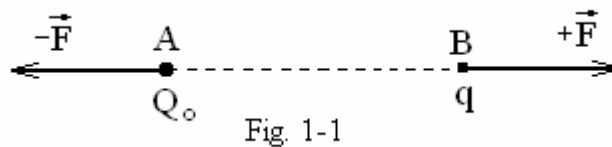


Fig. 1-1

Supponiamo che la carica Q_0 sia positiva e sia fissa in un punto O e sia \vec{r} una semiretta orientata di origine O . Indichiamo con $\vec{u} = \text{vers } \vec{r}$ il versore della semiretta \vec{r} e poniamo in un punto P di essa una carica q . Allora su di essa agisce la forza (fig. 1-2)

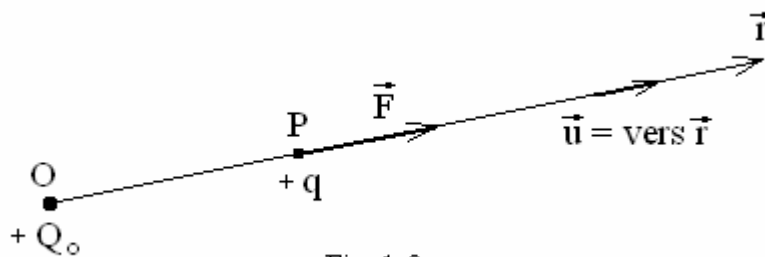


Fig. 1-2

$$(2) \quad \vec{F} = k \frac{Q_0 q}{r^2} \text{vers } \vec{r}, \quad \text{ove } r = \overline{OP}.$$

Geometricamente si vede che questa forza è repulsiva se $q>0$, è attrattiva se $q<0$; pertanto la (2) ci dà la forma vettoriale della legge di Coulomb.

La componente della forza \vec{F} sull'asse \vec{r} , cioè la grandezza della forza in valore e segno, è data dalla relazione

$$(3) \quad F = k \frac{Q_0 q}{r^2}, \text{ ove}$$

$F>0$ se Q_0 e q sono concordi (forza repulsiva),

$F<0$ se Q_0 e q sono discordi (forza repulsiva) .

La verifica sperimentale della legge di Coulomb è molto difficile; la sua validità è confermata soprattutto da molte leggi fisiche che scaturiscono da essa e che sono verificabili sperimentalmente.

Nella legge di Coulomb figura una costante k e una nuova grandezza fisica, cioè la carica elettrica, per la quale dobbiamo stabilire una unità di misura.

Nel sistema di misure MKSQ si fissa in maniera arbitraria, ma opportuna, l'unità di carica elettrica, detta Coulomb(C), e quindi si determina in maniera univoca la costante k in dimensioni e in valore.

Precisamente, si dice Coulomb (internazionale) quella carica che passando in un voltmetro a nitrato d'argento (AgNO_3) separa, qualunque sia il tempo impiegato, mg1,118 di argento metallico sul catodo.

Fissata in tal modo l'unità di carica elettrica, dalla (1) si ricava l'unità di misura della costante k e da altre esperienze si ricava il valore numerico che compete a questa costante. Precisamente si ha:

$$k = 9 \cdot 10^9, \text{ o meglio } k = 8,98742 \cdot 10^9,$$

$$\text{con l'unità di misura } [k]_{\text{MKSQ}} = \frac{\text{Newton} \cdot \text{m}^2}{\text{Coulomb}^2}.$$

Una volta trovato il valore della costante k , la legge di Coulomb diventa

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_0 q}{r^2},$$

e possiamo dare un'altra definizione dell'unità di carica nel sistema di misure MKSQ. Infatti, ponendo $Q_0 = q = 1\text{C}$ ed $r = 1\text{m}$ si trova

$$F = 9 \cdot 10^9 \text{ Newton ; quindi}$$

“ Si dice Coulomb quella carica che attrae o respinge con la forza di Newton una carica uguale, posta nel vuoto, ad 1m di distanza da essa”. Poiché questa forza è enorme, questa seconda definizione è puramente teorica.

Nel sistema $(CGS)_{es}$ - C:G:S: elettrostatico-, invece, si considera k come un numero puro, cioè senza dimensioni, di valore 1 e quindi si definisce l'unità di misura della carica elettrica, che si chiama Franklin.

Infatti, se nella (3) si pone $k=1$, $Q_0 = q = 1 \text{ Fr}$ ed $r = 1\text{cm}$, si ottiene

$$F = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1 \text{ dina} \text{ e si ha la definizione:}$$

“ Si dice Franklin (Fr) quella carica che, posta nel vuoto ad 1cm di distanza da una carica uguale, la attrae o la respinge con la forza di 1 dina”.

Quando si considerano due cariche poste nel vuoto, la legge di Coulomb nel sistema MKSQ si scrive comunemente nella forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 q}{r^2},$$

ove ϵ_0 si dice costante dielettrica del vuoto. Possiamo ricavare facilmente

il valore di ϵ_0 e la sua unità di misura. Poiché $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ si ha

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}, \quad \text{da cui} \quad (5) \quad \epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12}.$$

Per l'unità di misura della costante dielettrica del vuoto ϵ_0 si ha:

$$[\epsilon_0]_{\text{MKSQ}} = \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{m}^2} = \dots = \frac{\text{Farad}}{\text{metro}}, \text{ ove il Farad è l'unità di capacità un conduttore.}$$

N. 2 - Concetto di campo elettrico

La legge di Coulomb $F = k \frac{Q_0 q}{r^2}$ permette di calcolare la forza che si

esercita fra due cariche elettriche puntiformi poste in un dielettrico qualsiasi ad una distanza r una dall'altra. Essa, però, non ci dà nessuna informazione sulla natura di tale forza e sul meccanismo con il quale essa si trasmette nello spazio.

In ogni caso questa forza non va interpretata come un'azione a distanza, esercitata in maniera diretta da una carica sull'altra. Dobbiamo invece pensare che nell'istante in cui forniamo, per esempio, ad una sferetta una carica elettrica Q_0 , questa modifichi lo spazio circostante e generi un nuovo stato di cose che si dice campo elettrico. In altre parole, lo spazio geometrico si trasforma in uno spazio fisico il quale ha particolari proprietà che non possiede lo spazio geometrico.

Proprio per mezzo di questo campo la carica elettrica Q_0 esercita la sua forza di attrazione o di repulsione su un'altra carica q -detta carica esploratrice- che rappresenta l'ente spia a mezzo del quale è possibile rivelare l'esistenza del campo elettrico. In altre parole, quando noi introduciamo la carica esploratrice q in un punto P dello spazio sufficientemente vicino alla carica Q_0 , il campo elettrico già esiste, ma esso viene rivelato dalla forza \vec{F} che agisce sulla carica esploratrice q .

Naturalmente la forza \vec{F} dipende dal valore della carica esploratrice e dal particolare valore del campo elettrico nel punto considerato.

Se vediamo le cose in questo modo, possiamo definire in ogni punto P dello spazio un vettore \vec{E}_0 , funzione delle coordinate cartesiane del punto e della carica Q_0 che genera il campo elettrico; esso è dal rapporto $\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}}{q}$ tra la

forza \vec{F} che agisce sulla carica q e la carica stessa e si dice intensità del campo elettrico nel punto P , o semplicemente campo elettrico.

Si ha quindi per definizione

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}}{q}, \text{ da cui } \vec{E}_0 = k \frac{Q_0}{r^2} \text{ vers } \vec{r}.$$

Riassumendo:

“Si dice campo elettrico in un punto P dello spazio il rapporto $\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}}{q}$ tra la forza che agisce su una carica elettrica posta nel punto P e la carica

stessa. Esso è una funzione vettoriale definita in ogni punto dello spazio vicino ad una carica Q_0 e descrive la perturbazione che la carica stessa crea intorno ad essa".
Per estensione si dice campo elettrico anche la porzione di spazio in cui la funzione \vec{E}_0 è definita.

In generale si dice "campo" l'insieme dei valori che una data grandezza fisica assume in ogni punto P di una certa regione dello spazio ed espressa in funzione delle coordinate spaziali (x,y,z) del punto stesso.

Se la grandezza fisica è rappresentata da un vettore \vec{E} , funzione delle coordinate spaziali (x,y,z) del punto P, il campo si dice vettoriale e si scrive $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$.

Se invece la grandezza fisica è una grandezza scalare (es. densità, temperatura ecc.), funzione sempre delle coordinate (x,y,z) del punto P, il campo si dice scalare e si scrive, per esempio, $u = u(x, y, z)$.

Il campo elettrico \vec{E}_0 , essendo il rapporto tra una grandezza vettoriale ed una scalare, è anch'esso un vettore che ha il verso della forza \vec{F} se $q > 0$, ha il verso contrario se $q < 0$.

In ogni caso, il vettore \vec{E}_0 è orientato come il vettore \overrightarrow{OP} se la carica che genera il campo è positiva; è orientato in senso contrario se la carica Q_0 è

negativa. Dalla formula $\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}}{q}$ si ha $\vec{F} = q\vec{E}_0$.

N. 3 – Lavoro del campo elettrico generato da una carica puntiforme e potenziale del campo.

Considerando il campo elettrico \vec{E}_0 generato da una carica puntiforme q_0 posta in un punto O dello spazio (fig. 1-3). Il campo elettrico in un punto P è dato dalla formula:

$$(1) \quad \vec{E}_0(\vec{r}) = k \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

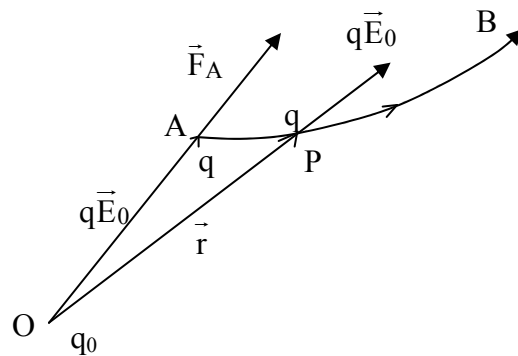
ove con \vec{r} abbiamo indicato il vettore \overrightarrow{OP} .

Il vettore $\vec{E}_0(\vec{r})$ è definito per $r \neq 0$, cioè per ogni punto $P \neq O$ dello spazio. Sappiamo che una carica q posta nel punto P è soggetta alla forza

$$\vec{F} = q\vec{E}_0$$

ossia

$$(2) \quad \vec{F} = k \frac{q_0 q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{ove} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$



Il lavoro $L_{\gamma(A,B)}$ che le forze del campo compiono per trasportare la carica q dal punto A al punto B lungo una linea γ è dato dall'integrale:

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} k \frac{q_0 q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \times d\vec{\ell}$$

Figura 1-3

cioè (3)
$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} k \frac{q_0 q}{r^2} \cdot dr,$$

$$L_{\gamma(A,B)} = kq_0q \int_{\gamma(A,B)} r^{-2} dr = kq_0q \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B = kq_0q \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right],$$

$$(4) \quad L_{\gamma(A,B)} = q \left(k \frac{q_0}{r_A} - k \frac{q_0}{r_B} \right) = q [V_0(r_A) - V_0(r_B)],$$

dove è
$$V_0(r) = k \frac{q_0}{r} + c \quad \text{per } r \neq 0.$$

La (4) ci dice che il lavoro che le forze del campo compiono per trasportare la carica q dal punto A al punto B dipende solo da questi due punti e non dalla particolare curva γ che li unisce.

Nel caso di una qualsiasi curva regolare chiusa, cioè per $A \equiv B$, la (4) ci dà:

$$(4') \quad \oint_{\pm \gamma} k \frac{q_0 q}{r^2} dr = 0.$$

Le (4), (4') ci dicono che il campo elettrico \vec{E}_0 è conservativo, e come tale esso si può esprimere come gradiente di una funzione scalare $V_0(r)$, ossia :

$$(5) \quad \vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} (V_0).$$

Vogliamo trovare questa funzione. Moltiplicando scalarmene per $\vec{d\ell}$ ambo i membri della (5) si ottiene:

$$\vec{E}_0 \times \vec{d\ell} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_0) \times \vec{d\ell},$$

$$(6) \quad \vec{E}_0 \times \vec{d\ell} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} dx - \frac{\partial V_0}{\partial y} dy - \frac{\partial V_0}{\partial z} dz.$$

Il secondo membro della (6) è il differenziale, cambiato di segno, della funzione scalare $V_0(r)$. Si ottiene così la notevole relazione

$$(7) \quad dV_0 = -\vec{E}_0 \times \vec{d\ell},$$

ossia
$$dV_0 = -k \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{d\ell},$$

da cui
$$dV_0 = -k \frac{q_0}{r^2} dr.$$

Integrando questa equazione differenziale si ottiene:

$$\int dV_0 = -kq_0 \times \int r^{-2} dr,$$

cioè (8)
$$V_0(r) = k \frac{q_0}{r} + c .$$

Le (5), (8) ci dicono che il campo elettrico \vec{E}_0 generato da una carica puntiforme è uguale al gradiente, cambiato di segno, della funzione scalare

$V_0 = k \frac{q_0}{r} + c$. Questa funzione, determinata a meno di una costante, si dice potenziale elettrico del punto P del campo.

La (7) ci dice che: “Il lavoro elementare del campo elettrico riferito all’unità di carica positiva è uguale al differenziale, cambiato di segno, del potenziale elettrostatico “.

La formula

$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_0)$$

ci permette subito di ritrovare la relazione (4) del lavoro elettrico. Infatti si ha :

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} q \vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -q \int_{\gamma(A,B)} \overrightarrow{\text{grad}}(V_0) \times d\vec{\ell} = -q \int_A^B dV_0$$

$$L_{(A,B)} = q [V_0(r_A) - V_0(r_B)] \quad \text{e quindi}$$

$$(9) \quad L_{(A,B)} = q \left[k \frac{q_0}{r_A} - k \frac{q_0}{r_B} \right] .$$

Nella (9) e nella formula precedente abbiamo ommesso di indicare la curva γ per ricordare che il lavoro del campo elettrico fra due punti A e B non dipende dalla particolare linea γ che unisce i due punti considerati.

Moltiplicando scalarmente per $d\vec{\ell}$ ambo i membri della (9) si ha

$$(*) \quad \vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 \times d\vec{\ell} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} dx - \frac{\partial V_0}{\partial y} dy - \frac{\partial V_0}{\partial z} dz .$$

Si ottiene così la notevole relazione

$$\vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -dV_0 ,$$

cioè : il lavoro elementare del campo elettrico riferito all'unità di carica è uguale al differenziale, cambiato di segno del potenziale elettrostatico. La formula $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0$ ci permette subito di ritrovare la formula (4) del lavoro elettrico. Infatti si ha

$$(*) \quad L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} q\vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -q \int_{\gamma(A,B)} \overrightarrow{\text{grad}} V_0 \times d\vec{\ell} = -q \int_A^B dV_0 ,$$

$$L_{\gamma(A,B)} = -q[V_0(r)]_A^B ,$$

$$L_{\gamma(A,B)} = q[V_0(r_A) - V_0(r_B)] .$$

N. 4 - Carattere irrotazionale del campo elettrico.

Vogliamo dimostrare che il campo elettrico \vec{E}_0 generato da una carica puntiforme q_0 è irrotazionale, ossia

$$\text{rot}\vec{E}_0 = 0 \quad .$$

Infatti si ha: (1)

$$\text{rot}\vec{E}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{k q_0 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{k q_0 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{k q_0 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} .$$

Esaminiamo la componente del vettore $\text{rot} \vec{E}_0$ secondo l'asse x. Si ha:

$$\text{rot}_x \vec{E}_0 = \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} .$$

Calcolando a parte le due derivate parziali si ottiene:

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k q_0 z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = -\frac{3}{2} k q_0 z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y ,$$

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} = -3kq_0 \frac{zy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} ;$$

$$\frac{\partial E_{0Y}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[kq_0 y (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = -\frac{3}{2} kq_0 y (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z \quad ,$$

$$\frac{\partial E_{0Z}}{\partial y} = -3kq_0 \frac{zy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad .$$

Ne segue $\text{rot}_X \vec{E}_0 = 0$

Analogamente: $\text{rot}_Y \vec{E}_0 = 0 \quad \text{rot}_Z \vec{E}_0 = 0 \quad .$

Riassumendo i risultati, si verificano due condizioni

a) Le componenti (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) del vettore \vec{E}_0 sono definite per ogni punto $P \neq O$ dello spazio (xyz) ; ne segue che esse sono definite per ogni dominio A delimitato da due sfere concentriche di centro O , che è un dominio a connessione lineare semplice (infatti, comunque si tracci in A una poligonale semplice e chiusa, essa è sempre il bordo di una superficie poliedrica tutta costituita da punti di A).

b) Le componenti E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} sono continue in A assieme alle loro derivate parziali prime e per ogni punto di A si verifica:

$$\text{rot } \vec{E}_0 = 0 \quad \text{o se si vuole} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \text{da cui}$$

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} = \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial E_{0x}}{\partial z} = \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \quad .$$

Quando sono soddisfatte le condizioni a) e b), un importante teorema di analisi matematica ci assicura che l'integrale

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{E}_0 \times d\vec{\ell}$$

dipende solo dai punti A, B e non dalla particolare linea γ che li unisce (quindi possiamo omettere il pedice γ) ed esiste una funzione $V_0(x, y, z)$, definita in A , per cui si ha :

$$\vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -dV_0$$

o se si vuole $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0$.

(Vedi A. Ghizzetti, Analisi matematica II, pg. 234 – Ed. Veschi, 1954).

Il verificarsi di queste due condizioni ci permette di dire che:

$\alpha)$ il campo elettrico \vec{E}_0 generato dalla carica puntiforme q_0 è conservativo e quindi il lavoro $L_{\gamma(AB)}$ non dipende dalla particolare traiettoria γ seguita dalla carica q ;

$\beta)$ il campo elettrico \vec{E}_0 si può esprimere come gradiente di una funzione scalare $V_0(r) = k \frac{q_0}{r} + c$, detta potenziale, e quindi si ha:

$$(2) \quad \vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0, \text{ da cui } dV_0 = -\vec{E}_0 \times d\vec{\ell} .$$

La costante c che compare nella formula del potenziale (4) non porta nessuna difficoltà nei calcoli; infatti nei casi pratici interessano solo differenze di potenziale (si scrive d.d.p.) e quindi la costante c si elimina automaticamente.

Generalmente si assume che il potenziale si annulli nei punti all'infinito, cioè $V_0(\infty) = 0$; in tal caso dalla (4) si ha $c = 0$ e la formula del potenziale diventa:

$$(6) \quad V_0(r) = k \frac{q_0}{r} .$$

Abbiamo visto che il campo elettrico \vec{E}_0 si può esprimere come gradiente di una funzione scalare $V_0 = kq_0/r$. Possiamo quindi scrivere:

$$(7) \quad \vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{kq_0}{r} .$$

Vogliamo verificare direttamente che la formula (7) è esatta. Infatti, ricordando la definizione di gradiente possiamo anche scrivere

$$\vec{E}_0 = -\vec{i} \frac{\partial V_0}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial V_0}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial V_0}{\partial z} , \text{ da cui:}$$

$$(8) \quad E_{0X} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} , \quad E_{0Y} = -\frac{\partial V_0}{\partial y} , \quad E_{0Z} = -\frac{\partial V_0}{\partial z} .$$

Verifichiamo che le tre relazioni (8) sono esatte; basta verificare la prima di esse. Si ha

$$E_{0X} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} = -kq_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -kq_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{con } r \neq 0 .$$

Ricordando il calcolo della derivata parziale di una funzione composta si ha:

$$E_{0X} = -kq_0 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{kq_0 x}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

da cui

$$E_{0X} = \frac{kq_0 x}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow E_{0X} = k \frac{q_0}{r^2} \frac{x}{r} .$$

Abbiamo così dimostrato che la derivata $-kq_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$ rappresenta

effettivamente la componente E_{0X} del campo elettrico \vec{E}_0 secondo l'asse x . La dimostrazione delle altre due relazioni (82) è perfettamente analoga. Se ora ricordiamo che risulta identicamente

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad } V_0}) = 0 \quad ,$$

si ha la riprova che il campo elettrico $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad } V_0}$ è irrotazionale nei punti dello spazio in cui esso è definito, cioè nei campi che non contengono l'origine O del riferimento Oxyz.

N. 5 – Alcune considerazioni sul gradiente di una funzione scalare.

Consideriamo una funzione scalare $V_0(x,y,z)$ definita in un insieme I dello spazio Oxyz. Il luogo dei punti $P(x,y,z)$ dell'insieme per cui si ha

$$(1) \quad V_0(x,y,z) = \text{cost}$$

rappresenta una superficie, detta superficie equipotenziale o di livello.

Si dice gradiente della funzione $V_0(x,y,z)$ il vettore definito dall'espressione

$$(2) \quad \overrightarrow{\text{grad } V_0} = \vec{i} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V_0}{\partial z} \quad .$$

Uno spostamento elementare del punto P dello spazio è dato dall'espressione

$$(3) \quad d\vec{\ell} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \quad .$$

Moltiplicando scalarmene i vettori (2), (3) si ha:

$$(4) \quad \overrightarrow{\text{grad } V_0} \times d\vec{\ell} = \frac{\partial V_0}{\partial x} dx + \frac{\partial V_0}{\partial y} dy + \frac{\partial V_0}{\partial z} dz$$

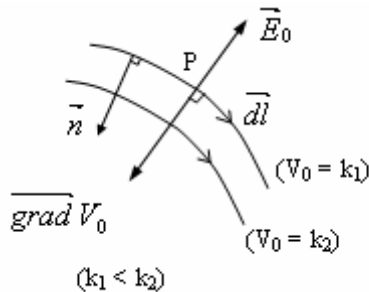
Ma il secondo membro della (4) non è altro che il differenziale totale dV_0 della funzione $V_0(x,y,z)$; possiamo quindi scrivere:

$$(5) \quad dV_0 = \overrightarrow{\text{grad } V_0} \times d\vec{\ell} \quad .$$

Il prodotto scalare $\overrightarrow{\text{grad}} V_0 \times d\vec{\ell}$ si può anche esprimere in funzione dei moduli dei due vettori del prodotto. Detto α l'angolo compreso fra i due vettori si ha:

$$(6) \quad dV_0 = \text{grad} V_0 \cdot d\ell \cos \alpha .$$

Dalla (6) si vede che la variazione dV_0 ha valore massimo quando $\cos \alpha = 1$, cioè quando $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$ ha lo stesso verso del vettore $d\vec{\ell}$. Dalla (6) si ricavano anche altre informazioni.



1^^a) Se il punto P si sposta su una superficie $V_0 = \text{cost}$, cioè su una superficie equipotenziale, si ha

$$dV_0 = 0 \text{ e dalla (6) si ricava } |\alpha| = \frac{\pi}{2};$$

ne segue che il vettore $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$ è perpendicolare alla superficie equipotenziale $V_0 = \text{cost}$ (fig. 1-4).

Figura 1-4

2^^a) Sia ora \vec{n} il vettore normale alla superficie equipotenziale $V_0 = k$ nel punto P e parallelo e concorde al vettore $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$ relativo a tale punto (fig. 1-5).

Allora $d\ell \cdot \cos \alpha$ è la componente del vettore $d\vec{\ell}$ secondo la normale \vec{n} e possiamo scrivere

$$(7) \quad d\ell \cdot \cos \alpha = dn .$$

Sostituendo nella (6) si ha

$$(8) \quad dV_0 = \text{grad} V_0 \, dn ,$$

ove $\text{grad} V_0 > 0$, essendo esso il modulo di un vettore. Se $\cos \alpha > 0$, come nel caso della figura 1-5, dalla (7) si ha $dn > 0$, e dalla (8) si ricava

$$(9) \quad dV_0 = V_2 - V_1 > 0 .$$

L'ipotesi $\cos \alpha > 0$ e la (9) ci dicono anche che il vettore $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$ è rivolto verso le superfici a potenziale maggiore (vedi Fig. 1-5). Dalla (9) si ottiene l'espressione

$$(10) \quad \frac{dV_0}{dn} = \text{grad} V_0 ;$$

questo rapporto si dice derivata direzionale della funzione scalare V_0 rispetto alla normale \vec{n} alla superficie di livello V_0 . La (10) ci dice che la derivata direzionale risulta massima quando lo spostamento $d\vec{l}$ avviene nello stesso verso del vettore $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$, cioè verso le superfici a potenziale maggiore.

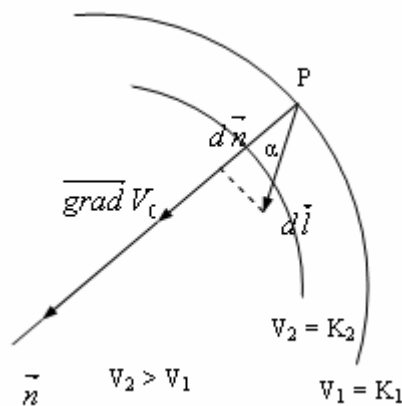


Figura 1-5

In particolare, supponiamo che V_0 sia il potenziale del campo elettrico \vec{E}_0 generato da una carica puntiforme q_0 posta sul punto O del riferimento Oxyz; quindi si ha:

$$V_0(r) = k \frac{q_0}{r} \quad \text{con} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0 .$$

Sappiamo allora che si ha

$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0$, cioè \vec{E}_0 è opposto al $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$. Ne segue che \vec{E}_0 è rivolto verso le superfici a potenziale decrescente (fig. 1-4). Ciò è in accordo con quanto si apprende con altri metodi.

N. 6 – Potenziale di un punto di un campo elettrico ed energia potenziale.

Torniamo alla formula che fornisce il lavoro che le forze del campo compiono quando una carica q si sposta da un punto A ad un punto B (parag. N. 1),

$$(1) \quad L_{AB} = q \left(k \frac{q_0}{r_A} - k \frac{q_0}{r_B} \right) ;$$

abbiamo visto che il lavoro non dipende dalla traiettoria seguita.

Se ora spostiamo la carica q fino ai limiti del campo, allora $\frac{1}{r_B} = 0$ e si ottiene la formula

$$(2) \quad L_{A\infty} = k \frac{qq_0}{r_A} .$$

Dalla (2) si ricava

$$\frac{L_{A\infty}}{q} = k \frac{q_0}{r_A} ,$$

e confrontando con la formula del potenziale elettrico [vedi la (10) del parag. N. 1] si ha:

$$(3) \quad V_0(P) = \frac{L_{P\infty}}{q} .$$

La (3) ci permette di dare la definizione di potenziale:

“Si dice potenziale in un punto P di un campo elettrico il rapporto fra il lavoro che le forze del campo compiono per trasportare la carica q dal punto P fino ai limiti del campo (qualunque sia la traiettoria seguita) e la carica stessa”.

Dalla (3) possiamo ricavare anche l'unità di potenziale; nel sistema MKSA essa si dice Volt e si ha:

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} .$$

Possiamo quindi dire:

“In un punto del campo elettrico c’è il potenziale di 1 Volt se le forze del campo compiono il lavoro di 1 Joule per trasportare la carica di 1 Coulomb dal punto P fino ai limiti del campo, qualunque sia la traiettoria seguita”.

Ciò premesso, si dice energia potenziale elettrica della carica q in un punto P del campo generato da una carica puntiforme q_0 la funzione

$$(4) \quad U(P) = k \frac{q_0 q}{r} + C ,$$

ove C è una costante additiva arbitraria.

Questa definizione ci permette di esprimere il potenziale elettrico nel punto P per mezzo del rapporto

$$(5) \quad V_0(P) = \frac{U(P)}{q} = k \frac{q_0}{r} + C_1 .$$

Una volta fissate le cariche, queste funzioni dipendono solo dalle coordinate cartesiane del punto P , quindi possiamo dire che si ha:

$$U(P) = U(x, y, z) \quad , \quad V_0(P) = V_0(x, y, z) .$$

Tenendo presente la (4) del N.1, la formula del lavoro elettrico diventa:

$$(6) \quad L_{AB} = U_A - U_B = -\Delta U ,$$

cioè il lavoro che le forze del campo compiono per spostare una carica q dal punto A al punto B , lungo una traiettoria qualsiasi, è uguale alla differenza dei valori che l’energia potenziale assume nei punti A e B.

È importante osservare che l’introduzione della costante C non porta alcuna difficoltà nei calcoli; infatti nei casi pratici interessano solo

differenze di energia potenziale e quindi la costante C si elimina automaticamente.

Se si assume che il potenziale sia nullo nei punti all'infinito, si ottiene $C_1 = C = 0$; in tal modo la formula dell'energia potenziale diventa

$$(7) \quad U(P) = k \frac{q_0 q}{r} .$$

Confrontando con la formula $V_0(P) = k q_0 / r$ si ottiene

$$U(P) = q V_0(P) .$$

Se invece confrontiamo la (7) con la formula $L_{P\infty} = k q_0 q / r$ si ottiene

$$(8) \quad U(P) = L_{P\infty} .$$

La (8) ci permette di dare la seguente definizione:

“L’energia potenziale elettrica della carica q in un punto P è uguale al lavoro che le forze del campo compiono quando esse spostano la carica q dal punto P fino ai limiti del campo lungo una traiettoria qualsiasi”.

Infine dalla formula del lavoro elettrico $L_{AB} = q[V(A) - V(B)]$ si ricava la formula

$$V(A) - V(B) = \frac{L_{AB}}{q} .$$

Essa ci permette di definire la differenza di potenziale (d.d.p.) unitaria tra due punti del campo elettrico nel sistema MKSA. Precisamente si ha:

“Tra due punti di un campo elettrico c’è la differenza di potenziale di 1 Volt se spostando la carica di 1 Coulomb da un punto all’altro, secondo una traiettoria qualsiasi, le forze del campo compiono il lavoro di 1 Joule”.

N. 7 – Dipolo elettrico.

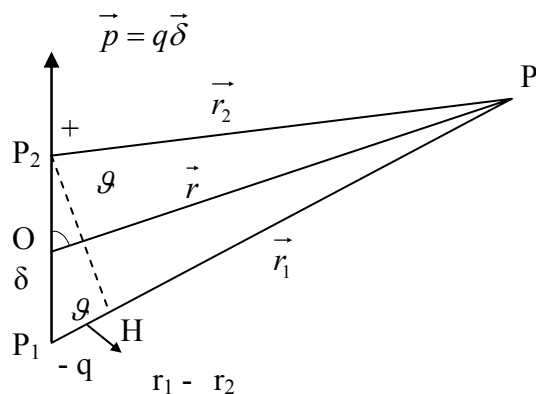


Figura 1-6

Si dice dipolo elettrico un sistema costituito da due cariche elettriche puntiformi, uguali e di segno contrario, $-q$ e $+q$, la cui distanza δ sia piccola rispetto alla distanza di queste cariche da un punto P dello spazio in cui si vuole calcolare il campo elettrico

(fig. 1-6).

Siano P_1 e P_2 le posizioni

delle cariche

$-q$ e $+q$ e $\vec{\delta}$ la distanza orientata $\overrightarrow{P_1P_2}$. Si chiama momento elettrico del dipolo il vettore

$$\vec{p} = q\vec{\delta} ;$$

il suo modulo è $p = q\delta$.

Siano r_1 e r_2 le distanze delle cariche $-q$ e $+q$ dal punto P ed r la distanza del punto medio O del segmento P_1P_2 dal punto stesso.

Il potenziale elettrostatico del dipolo nel punto P è dato dalla formula:

$$(1) \quad V_0(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} .$$

La differenza $r_1 - r_2$ si ottiene tracciando la circonferenza di centro P e di raggio r_2 fino a incontrare r_1 nel punto H ; quindi:

$$r_1 - r_2 = \overline{P_1H} .$$

Se r_1 ed r_2 sono molto grandi rispetto a δ , potremo trattare δ come un infinitesimo e potremo considerare l'arco di cerchio sopra menzionato come la normale abbassata da P_2 su r_1 .

Si ottiene così, a meno di termini infinitesimi

$$(2) \quad r_1 - r_2 = \delta \cos \vartheta ,$$

ove ϑ è l'angolo che il vettore $\vec{\delta} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ forma con il vettore $\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1 P}$ e praticamente con il vettore $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Sostituendo la (2) nella (1) si ha:

$$(3) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\delta \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2} ,$$

ove con $r = \sqrt{r_1 r_2}$ si indica la media geometrica delle distanze r_1 ed r_2 ; questa media r , a meno di infinitesimi, rappresenta anche la distanza del punto P dal centro O del dipolo.

Per il potenziale $V_0(P)$ possiamo quindi scrivere la formula:

$$(4) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^3} .$$

Come si vede, il potenziale elettrostatico di un dipolo è espresso da una formula semplice; questa formula, però, è valida solo per i punti le cui distanze dalle cariche $\pm q$ siano molto maggiori della distanza δ fra le cariche stesse. Quando si parla di dipolo si intende che ricorra questa condizione.

Prendendo il punto O come origine di un riferimento cartesiano e l'asse z nella direzione e verso del vettore \vec{p} si ha:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

In tal modo la (3) diventa

$$(5) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \frac{\frac{z}{r}}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Possiamo esprimere il campo elettrico \vec{E}_0 mediante il gradiente, cambiato di segno, della funzione potenziale $V_0(P)$. Si ha

$$\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}} V_0 = -\vec{\text{grad}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3} ,$$

e si trova che le tre componenti del campo elettrico si ottengono al solito facendo le derivate di V_0 , cambiate di segno, rispetto a x, y, z .
Si ottiene così:

$$(6)_1 \quad E_{0x} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5} ;$$

$$(6)_2 \quad E_{0y} = -\frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{pz}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5} ;$$

$$E_{0z} = -\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + z \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2z \right]$$

$$(6)_3 \quad E_{0z} = -\frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} .$$

Per la componente E_{0z} del campo elettrico \vec{E}_0 possiamo scrivere un'altra espressione; infatti, tenendo conto che $z = r \cos \vartheta$ si ha:

$$E_{0z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3r^2 \cos^2 \vartheta - r^2}{r^5} \right) ,$$

quindi: $(6)_4 \quad E_{0z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) .$

Ricordando che:

$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 = -\vec{i} \frac{\partial V_0}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial V_0}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial V_0}{\partial z} ,$$

possiamo dire che il campo elettrico generato dal dipolo in un punto P, posto a distanza $\vec{OP} = \vec{r}$, è dato dalla formula:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{i} \frac{3pzx}{r^5} + \vec{j} \frac{3pzy}{r^5} + \vec{k} \frac{3pz^2}{r^5} - \vec{k} \frac{p}{r^3} \right) ,$$

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3pz}{r^5} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) - \vec{k} \frac{p}{r^3} \right] .$$

Tenendo conto che $\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \vec{r}$ si ottiene:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3pz}{r^5} \vec{r} - \vec{k} \frac{p}{r^3} \right) .$$

Infine tenendo conto che

$$\vec{k}p = \vec{p} \quad \text{e che} \quad \vec{p} \times \vec{r} = pr \cos \vartheta = pz$$

si ha: (7)
$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{pz}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) ,$$

o anche (7)₁
$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) .$$

La (7)₁ mostra che il campo elettrico \vec{E}_0 di un dipolo può essere considerato come la somma di due vettori \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 (fig. 1-7).

Un vettore, $\vec{E}_1 = -\vec{p}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, è sempre antiparallelo a \vec{p} e il suo modulo dipende solamente dalla distanza r ; infatti il modulo $p = q\delta$ del momento di dipolo è costante.

L'altro vettore, $\vec{E}_2 = 3(\vec{p} \times \vec{r}) \vec{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3)$, è parallelo o antiparallelo al raggio vettore \vec{r} , a seconda che il prodotto scalare $\vec{p} \times \vec{r}$ sia positivo o negativo; il suo modulo dipende dalla distanza r , ma anche dal coseno dell'angolo ϑ compreso tra i due vettori \vec{p} ed \vec{r}

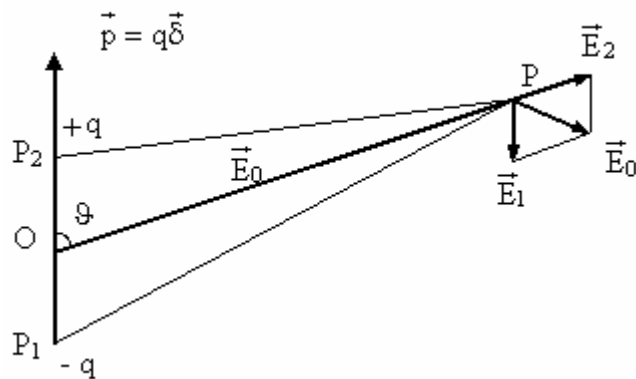


Figura 1-7

La formula (4) che esprime il potenziale di un dipolo elettrico, può essere scritta sotto un'altra forma. Infatti, ricaviamo preventivamente l'espressione cartesiana di

$$\overrightarrow{\text{grad}}(1/r) ;$$

ricordando che $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ si ha:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \\ &+ \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Se ora teniamo presente il calcolo della derivata in una funzione composta, si ottiene in successione:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} &= -\frac{1}{2} \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x - \frac{1}{2} \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2y + \\ &- \frac{1}{2} \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2z ; \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} (\vec{i}_x + \vec{j}_y + \vec{k}_z) ;$$

infine

$$\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} .$$

Sostituendo nella (4), per il potenziale del dipolo si ottiene la formula:

$$(8) \quad V_0(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \times \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} .$$

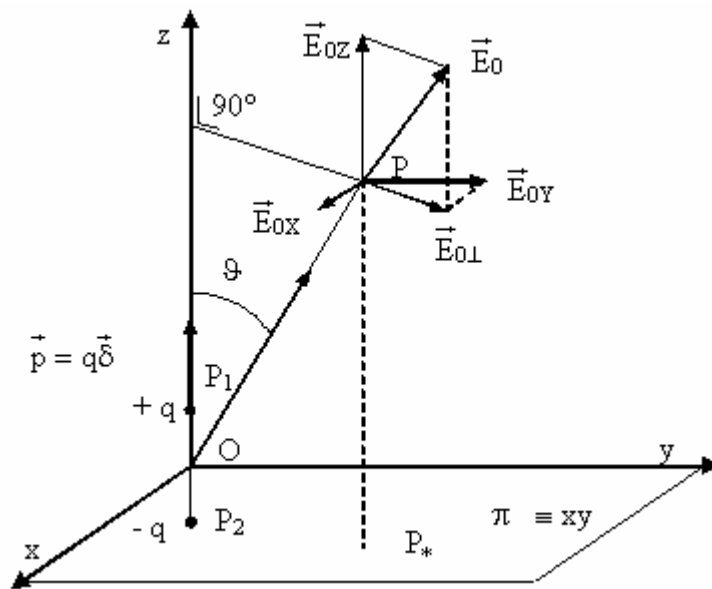


Figura 1-8

È opportuno, talvolta, conoscere il componente del campo elettrico \vec{E}_0 normale all'asse z e quello parallelo all'asse z ; li indicheremo rispettivamente con $\vec{E}_{0\perp}$ e con \vec{E}_{0z} (fig. 1-8).

Per trovare $\vec{E}_{0\perp}$ basta tener presente che esso è dato dalla somma vettoriale

$$\vec{E}_{0\perp} = \vec{E}_{0x} + \vec{E}_{0y} ;$$

infatti, ognuno dei componenti \vec{E}_{0X} ed \vec{E}_{0Y} è perpendicolare all'asse z . Poiché essi sono anche perpendicolari tra loro, si ha la relazione pitagorica:

$$(9) \quad E_{0\perp} = \sqrt{E_{0X}^2 + E_{0Y}^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tenendo conto che $\overline{OP_*} = \overline{OP} \cdot \cos(90^\circ - \vartheta)$ e che $\overline{OP_*} = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, si ha

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos(90 - \vartheta) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sin \vartheta = r \sin \vartheta.$$

Ricordando poi che $z/r = \cos \vartheta$, dalla (9) subito si ottiene

$$E_{0\perp} = \sqrt{E_{0X}^2 + E_{0Y}^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} 3 \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{r^4} r \sin \vartheta;$$

$$\text{infine (10)} \quad E_{0\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^3}.$$

Il componente \vec{E}_{0Z} del campo elettrico \vec{E}_0 secondo l'asse z è già noto e il suo modulo è dato dalla (6)₄; quindi si ha:

$$E_{0Z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^3}.$$

Per alcune considerazioni che potremo fare, è utile procurarsi le componenti del vettore \vec{E}_0 in due altre direzioni, sempre che il vettore \vec{E}_0 si riferisca ad un punto P a grande distanza dal dipolo.

Osserviamo che il campo elettrico \vec{E}_0 generato dal dipolo in un qualsiasi punto P , giace nel piano determinato da P e dall'asse del dipolo.

Riferiamoci a questo piano e consideriamo un sistema di coordinate polari (r, ϑ) associato al riferimento cartesiano Oyz .

Esso ci permette di determinare facilmente le componenti del vettore \vec{E}_0 nella direzione di \vec{r} e in direzione normale ad \vec{r} (fig. 1-9)

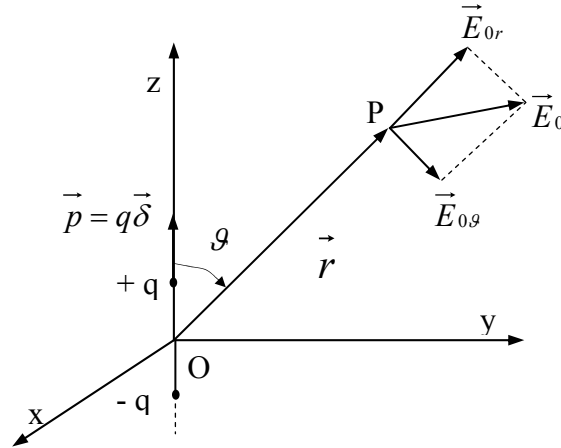


Figura 1-9

La componente del vettore \vec{E}_0 secondo \vec{r} è uguale a quella che si ha nel sistema Oxyz nella direzione del versore $\frac{\vec{r}}{r}$, cioè:

$$E_{0r} = \vec{E}_0 \times \frac{\vec{r}}{r} = E_{0X} \frac{x}{r} + E_{0Y} \frac{y}{r} + E_{0Z} \frac{z}{r} .$$

Ricordando le (6)₁, (6)₂, (6)₃ si ha:

$$E_{0r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3x^2z}{r^6} + \frac{3y^2z}{r^6} + \frac{3z^3}{r^6} - \frac{1}{r^3} \frac{z}{r} \right) .$$

Ricordando che $z/r = \cos \vartheta$ si ha:

$$E_{0r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos \vartheta \left[\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} - \frac{1}{r^3} \frac{z}{r} \right] \quad \text{ove} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$

$$E_{0r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cos \vartheta \left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) ,$$

quindi
$$E_{0r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3} ,$$

o anche (11)
$$E_{0r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2pz}{r^4} .$$

Per trovare $E_{0\vartheta}$ basta applicare il teorema di Pitagora, come ci suggerisce la fig. 1-7. Ricordando l'espressione di \vec{E}_0 data dalla (7) e l'espressione di E_{0r} data dalla (11), si ha:

$$(12) \quad E_{0\vartheta} = \sqrt{E_0^2 - E_{0r}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(3 \frac{pz}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)^2 - \left(\frac{2pz}{r^4}\right)^2} .$$

Per quanto riguarda il quadrato di una qualsiasi differenza $\vec{a} - \vec{b}$ di vettori si ha:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \times \vec{b} .$$

Possiamo quindi dire che per il radicando che figura nella (12) si ha:

$$\Delta = \frac{9p^2 z^2}{r^{10}} \cdot r^2 + \frac{p^2}{r^6} - 6 \frac{pz}{r^8} \vec{r} \times \vec{p} - 4 \frac{p^2 z^2}{r^8} ;$$

Poiché $\vec{r} \times \vec{p} = pr \cos \vartheta = pz$ ne segue:

$$\Delta = \frac{9p^2 z^2}{r^8} + \frac{p^2}{r^6} - 6 \frac{pz}{r^8} pz - 4 \frac{p^2 z^2}{r^8} ,$$

$$\Delta = \frac{9p^2 z^2}{r^8} + \frac{p^2}{r^6} - 6 \frac{p^2 z^2}{r^8} - 4 \frac{p^2 z^2}{r^8} ,$$

$$\Delta = \frac{p^2}{r^6} - \frac{p^2 z^2}{r^8} \quad .$$

Poiché $z = r \cos \vartheta$ ne segue:

$$\Delta = \frac{p^2}{r^6} - \frac{p^2 r^2 \cos^2 \vartheta}{r^8} \rightarrow \Delta = \frac{p^2}{r^6} - \frac{p^2}{r^6} \cos^2 \vartheta \quad ,$$

da cui

$$(13) \quad \Delta = \frac{p^2}{r^6} \sin^2 \vartheta \quad .$$

Sostituendo la (13) nella (12) si trova la definitiva espressione di $E_{0\vartheta}$; si ha:

$$(14) \quad E_{0\vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3} \quad .$$

Le formule (11) e (14) ci forniscono i moduli dei vettori \vec{E}_{0r} ed $\vec{E}_{0\vartheta}$ rappresentati in figura 1-9 già vista.

N. 8 – Azioni meccaniche sui dipoli elettrici posti in un campo elettrico esterno.

Consideriamo un dipolo costituito da due cariche uguali e di segno contrario $-q$ e q , poste nei punti P_1 e P_2 (figg. 1-10 e 1-11). Sia $\vec{\delta}$ il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{p} = q\vec{\delta}$ il momento elettrico del dipolo. Il modulo del vettore \vec{p} sarà quindi $p = q\delta$.

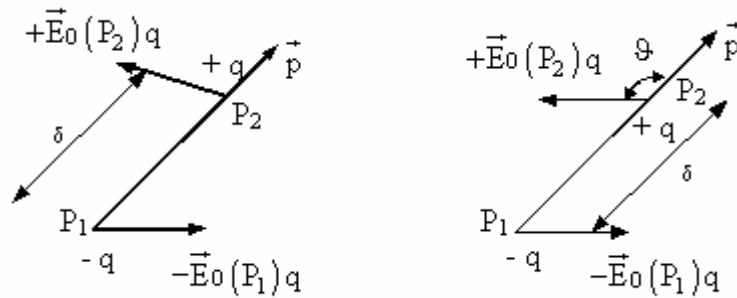


Figure 1-10 e 1-11

Vogliamo calcolare l'energia potenziale del dipolo in un campo elettrico esterno \vec{E}_0 . Se indichiamo con V_0 il valore del potenziale nel punto P_1 , l'energia potenziale della carica $-q$ è $-qV_0$. Il valore del potenziale nel punto P_2 è:

$$V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \ell} \delta,$$

dove $\vec{\ell}$ ha la direzione del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$; quindi l'energia della carica $+q$ è:

$$\left(V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \ell} \delta \right) q.$$

L'energia potenziale del dipolo è uguale alla somma delle energie potenziali delle due cariche che lo costituiscono ed è quindi data dalla somma

$$(1) \quad W = \left(V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \ell} \delta \right) q - qV_0 = q\delta \frac{\partial V_0}{\partial \ell}.$$

Ma $\frac{\partial V_0}{\partial \ell} = -E_0 \cos \vartheta$ quindi $\partial V_0 / \partial \ell = -E_0 \cos \vartheta$, ove ϑ è l'angolo che il campo elettrico esterno \vec{E}_0 forma con il vettore $\vec{p} = q\vec{\delta}$.
La (1) si può quindi scrivere nella forma:

$$(2) \quad W = -q\delta E_0 \cos \vartheta.$$

In forma di prodotto scalare di due vettori si ha:

$$(3) \quad W = -\vec{p} \times \vec{E}_0$$

Le due cariche che costituiscono il dipolo sono sottoposte a due forze $-\vec{E}_0(P_1)q$, $\vec{E}_0(P_2)q$. Come è noto dalla meccanica, dato un sistema rigido sottoposto a più forze, queste si possono ridurre ad una forza applicata al baricentro del sistema più una coppia di momento \vec{M} .

Possiamo calcolare le componenti di questa forza (che possiamo immaginare applicata nel baricentro del dipolo) partendo dall'energia potenziale (3); per fare ciò basta calcolare le derivate, cambiate di segno, dell'energia potenziale W rispetto ad x, y, z . Dato che, per ipotesi, il vettore $\vec{p} = q\vec{\delta}$ è costante si ottiene:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = \vec{p} \times \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = \vec{p} \times \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = \vec{p} \times \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z}.$$

Per ottenere il momento della coppia a cui è sottoposto il dipolo, basta osservare che il lavoro elementare fatto da una coppia di momento \vec{M} quando il sistema a cui la coppia è applicata ruota di un angolo $d\vartheta$

$$dL = M d\vartheta$$

Questo lavoro è fatto evidentemente, grazie al principio della conservazione dell'energia, a spese dell'energia potenziale W del sistema; quindi il

lavoro dovrà essere uguale alla variazione dW di questa grandezza, cambiata di segno. Si ottiene pertanto:

$$Md\vartheta = -dW ,$$

da cui

$$(5) \quad M = -\frac{dW}{d\vartheta} .$$

Possiamo quindi concludere che il momento della coppia di forze è uguale alla derivata dell'energia rispetto all'angolo ϑ cambiato di segno. Introducendo nella (5) l'espressione di W data dalla (2) si ottiene:

$$M = -\frac{dW}{d\vartheta} = q\delta E_0 \sin\vartheta = pE_0 \sin\vartheta .$$

In forma di prodotto vettoriale possiamo scrivere:

$$(6) \quad \vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 ,$$

dove \vec{E}_0 indica l'intensità del campo al centro del dipolo.

Nel caso in cui il campo \vec{E}_0 sia uniforme, le (4) si annullano identicamente dato che sono nulle le derivate di \vec{E}_0 ; ciò significa che in un campo elettrico uniforme un dipolo è sottoposto solo a una coppia di rotazione il cui momento è dato dalla (6).

A questo risultato si può anche giungere direttamente considerando che alle cariche $-q$ e $+q$ sono applicate due forze parallele aventi lo stesso modulo, ma versi opposti.

N. 9 – Energia di un campo elettrostatico.

Un sistema di cariche elettriche che interagiscono tra di loro possiede una certa energia elettrostatica; tale energia è misurata, operativamente, dal lavoro che le forze esterne debbono compiere per portare le cariche nella configurazione considerata a partire dalla configurazione in cui le cariche stesse si trovano a distanza infinita una dall'altra. A questa configurazione di partenza si assegna convenzionalmente energia nulla.

L'energia elettrostatica di interazione di un sistema di cariche può essere positiva o negativa. Ad esempio, due cariche puntiformi dello stesso segno hanno energia elettrostatica positiva. Infatti per portare le cariche nella configurazione finale le forze esterne debbono compiere un lavoro positivo, necessario a vincere la forza di repulsione tra di esse: in tal caso forza esterna e spostamento hanno lo stesso verso e quindi il lavoro della forza è positivo. L'energia che viene ceduta in questo modo al sistema può essere recuperata se le cariche si riportano all'infinito; ad esempio se esse vengono lasciate libere di muoversi l'energia elettrostatica si trasforma, almeno in parte, in energia cinetica (una parte, come si vedrà, viene irradiata sotto forma di energia elettromagnetica).

Viceversa un sistema di cariche di segno opposto ha energia negativa; infatti per portarle nella configurazione finale le forze esterne debbono opporsi alla forza di attrazione coulombiana e quindi compiono un lavoro negativo (vedi Mencuccini-Silvestrini, Fisica II pag. 80, Edizioni Liguori).

Calcoliamo, per esempio, l'energia elettrostatica di interazione di un sistema di tre cariche puntiformi.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ e immaginiamo di trasportare le tre cariche dall'infinito nei punti P_1 , P_2 , P_3 .

Possiamo indicare i tre punti con i vettori posizione; sia quindi (fig. 1-12)

$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1 \quad \overrightarrow{OP_2} = \vec{r}_2 \quad \overrightarrow{OP_3} = \vec{r}_3 \quad .$$

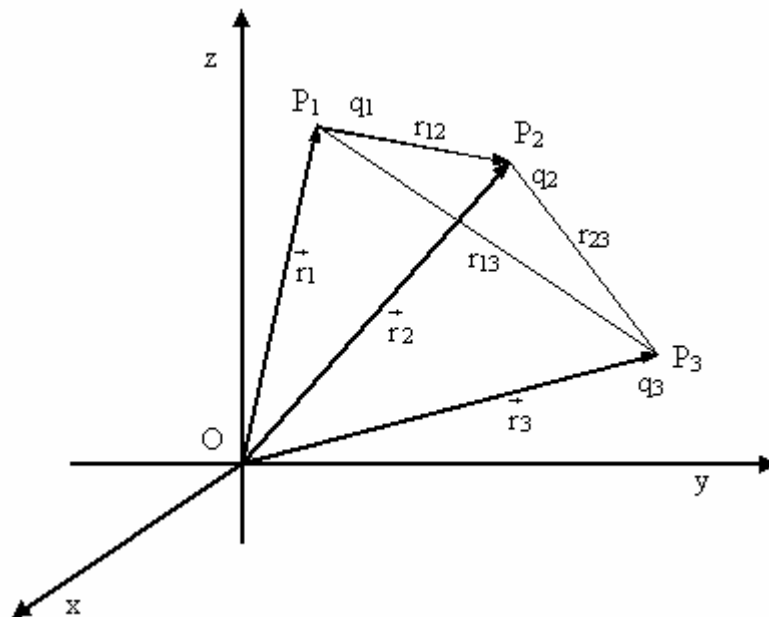


Figura 1-12

Poniamo inoltre

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}_{12} \quad \overrightarrow{P_1 P_3} = \vec{r}_{13} \quad \overrightarrow{P_2 P_3} = \vec{r}_{23} ,$$

ove

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \quad \vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 .$$

Come abbiamo detto, inizialmente le tre cariche sono tutte all'infinito; calcoliamo il lavoro necessario per portarle, una dopo l'altra, nella configurazione scelta.

Il posizionamento della prima carica q_1 , dall'infinito fino al punto P_1 , viene effettuato compiendo un lavoro nullo, perché inizialmente nello spazio non esiste alcun campo elettrico.

Lo spostamento della seconda carica q_2 dall'infinito fino al punto P_2 , posto a distanza \vec{r}_{12} dal punto P_1 , viene effettuato muovendo q_2 nel campo elettrostatico \vec{E}_{01} generato dalla prima carica.

La forza esterna che agisce sulla carica q_2 è $-q_2 \vec{E}_{01}$ e il lavoro L_2 che essa compie durante lo spostamento è

$$(1) \quad L_2 = - \int_{\infty}^{\eta_2} q_2 \vec{E}_{01} \times d\vec{l} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\eta_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} .$$

Se ora portiamo la carica q_3 dall'infinito al punto P_3 , dobbiamo muoverla nel campo prodotto dalle cariche q_1 e q_2 ; la forza esterna che deve essere applicata alla carica q_3 è uguale alla risultante delle forze $-q_3 \vec{E}_{01}$, $-q_3 \vec{E}_{02}$. Il lavoro L_3 che le due forze compiono, tenendo conto delle distanze dei punti P_1 e P_2 dal punto P_3 , è:

$$L_3 = - \int_{\infty}^{\eta_3} q_3 \vec{E}_{01} \times d\vec{l} - \int_{\infty}^{\eta_3} q_3 \vec{E}_{02} \times d\vec{l}$$

ossia

$$(2) \quad L_3 = - \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\eta_3} \frac{dr}{r^2} - \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\eta_3} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}} .$$

In definitiva, l'energia U posseduta dal sistema delle tre cariche è

$$(3) \quad U = L_2 + L_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} .$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ è stato introdotto perché la sommatoria $\sum_{i \neq j}$ contiene due

volte ogni termine, ad esempio essa contiene sia il termine $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ che il

termine uguale $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$.

L'espressione (3) può essere generalizzata estendendola ad un sistema composto da un numero qualsiasi di cariche elettriche. L'energia elettrostatica di interazione di tale sistema sarà

$$(4) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{(i,j \neq i)=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} .$$

La (4) può essere scritta anche nel modo

$$(5) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} q_j .$$

Indichiamo con V_i la quantità

$$V_i = \sum_{j \neq i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} q_j ;$$

questa quantità ha tutti i termini finiti dal momento che $i \neq j$ e quindi $r_{ij} \neq 0$. Notiamo che V_i rappresenta il potenziale generato nella posizione occupata dalla carica q_i da tutte le altre cariche. La (5) pertanto, può essere scritta come

$$(6) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i .$$

Se poi abbiamo a che fare con una distribuzione continua di cariche elettriche di densità $\rho(x,y,z)$, possiamo sostituire la sommatoria con un integrale di volume e si ha

$$(7) \quad U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau ,$$

ove $d\tau$ rappresenta l'elemento di volume attorno al punto $P(x,y,z)$, e τ è il volume della porzione di spazio che contiene la distribuzione di carica, tenendo presente che dove non c'è carica si ha $\rho = 0$.

Se si ha una distribuzione di carica superficiale con densità $\sigma(x,y,z)$ su una superficie S , la (7) assume la forma

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma V \, dS \quad .$$

N. 10 – Dimostrazione elementare della formula del lavoro elettrico.

Consideriamo il campo elettrico generato da una carica elettrica puntiforme q_0 posta in un punto O dello spazio (fig. 1-13).

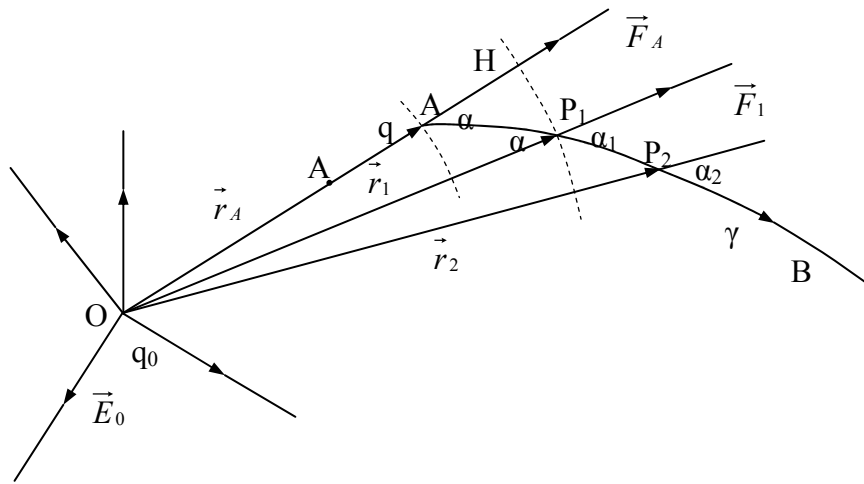


Figura 1-13

Seguendo un procedimento elementare, vogliamo calcolare il lavoro che le forze del campo compiono quando spostiamo una carica q da un punto A ad un punto B del campo.

La carica q posta nel punto A è soggetta alla forza

$$(1) \quad \vec{F} = k \frac{q_0 q}{r_A^2} \text{vers } \vec{r} \quad ,$$

ove $\text{vers } \vec{r}$ è il vettore unitario della semiretta orientata OA .

Se ora spostiamo la carica q dal punto A al punto B , la forza del campo che agisce sulla carica compie un certo lavoro che è difficile da calcolare in quanto la forza \vec{F} è continuamente variabile.

Vogliamo dimostrare che questo lavoro non dipende dal cammino seguito, ma dipende unicamente dalle posizioni dei due punti A e B , qualunque sia la curva γ che li unisce; cioè il campo delle forze elettriche è, come il campo gravitazionale, un campo conservativo. Come vedremo dalla dimostrazione, la proprietà del campo elettrico di essere conservativo è una conseguenza fondamentale della legge di Coulomb.

Scomponiamo la curva γ che unisce i due punti A e B in archetti così piccoli che in ciascuno di essi il modulo della forza, $F = k \frac{q_0 q}{r^2}$, rimanga praticamente costante e tali che ciascuno di essi possa essere assimilato ad un segmentino.

Orientiamo inoltre questi segmenti secondo il verso che va dal punto A al punto B .

Il lavoro elementare compiuto dalla forza elettrica \vec{F} nel 1° spostamento è:

$$(2) \quad \Delta L_1 = \vec{F}^* \times \Delta \vec{s} = F^* \Delta s \cdot \cos \alpha \quad .$$

Se per il modulo della forza assumiamo come valore medio la media geometrica dei valori che essa assume agli estremi del segmento, si ha:

$$F^* = k \frac{q_0 q}{r_A r_1} \quad .$$

Ne segue

$$(3) \quad \Delta L_1 = k \frac{q_0 q}{r_A r_1} \Delta s \cdot \cos \alpha \quad .$$

Se H è la proiezione ortogonale del punto P_1 sul raggio r_A , si ha

$$\overline{AH} = \Delta s \cdot \cos \alpha \quad ,$$

cioè $\Delta s \cdot \cos \alpha$ è la proiezione ortogonale dello spostamento AP_1 sulla direzione della forza.

Ma con buona approssimazione si ha:

$$\overline{AH} = r_1 - r_A ;$$

ne segue che

$$\Delta s \cdot \cos \alpha = r_1 - r_A .$$

Concludendo il primo lavoro elementare è:

$$(5) \quad \Delta L_1 = k \frac{q_0 q}{r_A r_1} (r_1 - r_A) = k \frac{q_0 q}{r_A} - k \frac{q_0 q}{r_1} .$$

Siccome questa formula è ricorrente possiamo scrivere (si prenda $n = 4$):

$$\Delta L_1 = k \frac{q_0 q}{r_A r_1} (r_1 - r_A) = k \frac{q_0 q}{r_A} - k \frac{q_0 q}{r_1}$$

$$\Delta L_2 = k \frac{q_0 q}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = k \frac{q_0 q}{r_1} - k \frac{q_0 q}{r_2}$$

$$\Delta L_3 = k \frac{q_0 q}{r_2 r_3} (r_3 - r_2) = k \frac{q_0 q}{r_2} - k \frac{q_0 q}{r_3}$$

$$\Delta L_n = k \frac{q_0 q}{r_{n-1} r_B} (r_B - r_{n-1}) = k \frac{q_0 q}{r_{n-1}} - k \frac{q_0 q}{r_B} ,$$

Sommando membro a membro e tenendo presente che la somma di tutti i lavori elementari fornisce il lavoro totale L_{AB} si ha:

$$(6) \quad L_{AB} = k \frac{q_0 q}{r_A} - k \frac{q_0 q}{r_B} .$$

Si vede così che il lavoro compiuto dalle forze del campo quando spostiamo la carica q dal punto A al punto B dipende solo dai due punti e non dalla curva γ che li unisce. Possiamo allora dire che il campo elettrico \vec{E} generato da una carica puntiforme q_0 è conservativo.

Se poi $r_A = r_B$, si ricava subito dalla (6) che il lavoro compiuto è nullo.

Infatti in tal caso possiamo pensare che la traiettoria γ , lungo la quale si

sposta la carica q , sia una circonferenza di centro O : allora la forza elettrica \vec{F} è sempre perpendicolare allo spostamento $\Delta \vec{s}$ e quindi il lavoro che esso compie è nullo.

Se invece spostiamo la carica q fino ai limiti del campo, allora $\frac{1}{r_B}$ si

annulla $\left(\frac{1}{r_B} = 0 \right)$ e la formula del lavoro elettrico diventa:

$$(7) \quad L_{A\infty} = k \frac{q_0 q}{r_A}$$

Come si vede, si ritrovano gli stessi risultati ottenuti con i procedimenti dell'analisi matematica.

N. 11 - Flusso del vettore campo elettrico \vec{E}_0 attraverso una superficie chiusa (Teorema di Gauss)

Consideriamo il campo elettrico \vec{E}_0 generato da una carica puntiforme posta in un punto O dello spazio; il campo in un punto P ($\overrightarrow{OP} = \vec{r}$) è dato

dalla formula
$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Vogliamo calcolare il flusso del vettore \vec{E}_0 uscente da una superficie chiusa S qualsiasi. Rappresenteremo con una linea chiusa una sezione piana di questa superficie.

1° caso. Supponiamo che la carica Q sia interna alla superficie S .

Consideriamo un elemento di superficie dS attorno al punto P e indichiamo con $d\omega$ l'angolo solido sotto cui dal punto O è vista la superficie dS (fig. 1-14).

Sia \vec{n} il versore normale alla superficie dS nel punto P , orientato verso l'esterno. Sia inoltre \vec{E}_0 il campo elettrico nel punto P : esso ha la direzione della retta OP e forma un certo angolo α con il versore \vec{n} . Indichiamo

infine con ds l'area della calotta che il cono elementare di apertura $d\omega$ intercetta sulla sfera di raggio $r = OP$.

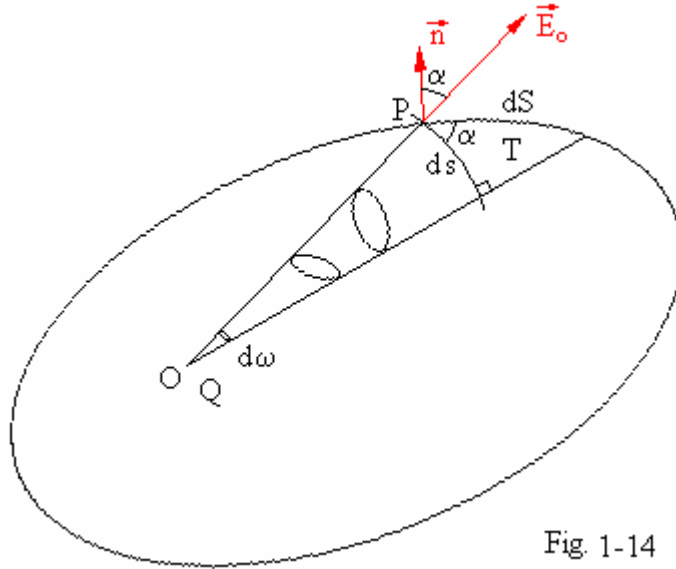


Fig. 1-14

Per definizione l'angolo $d\omega$ è dato dal rapporto

$$d\omega = \frac{ds}{r^2}, \quad \text{da cui} \quad (1) \quad ds = r^2 d\omega$$

Il flusso del vettore \vec{E}_0 attraverso l'elemento di superficie dS per definizione è:

$$(2) \quad d\Phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{n} \, dS = E_0 dS \cos \alpha.$$

Ma se i segmenti sono abbastanza piccoli, la figura T si può considerare un triangolo e si ricava:

$$(3) \quad ds = dS \cos \alpha.$$

Sfruttando la (1) e la (3), dalla (2) si ottiene:

$$d\Phi(\vec{E}_0) = E_0 \cdot ds = E_0 r^2 d\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} r^2 d\omega$$

ossia (4)
$$d\Phi(\vec{E}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega .$$

In questa espressione è scomparso sia l'elemento di superficie dS che il raggio r , che rappresenta la distanza dell'elemento di superficie dS dal punto O in cui è concentrata la carica. Possiamo quindi dire :

“Il flusso $d\Phi(\vec{E}_0)$ dipende solo dall'angolo $d\omega$: esso ha lo stesso valore attraverso una qualsiasi sezione del cono elementare, qualunque sia la sua distanza dal vertice O ”. In questo senso possiamo parlare del flusso del vettore \vec{E}_0 attraverso un cono elementare.

Per avere il flusso totale del vettore \vec{E}_0 attraverso la superficie chiusa S basta dividere questa superficie in tanti elementi infinitesimi, calcolare il flusso attraverso ogni elemento e fare la somma di tutti i contributi. Si ottiene così :

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{E}_0) &= d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + \dots + d\Phi_n = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_1 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_2 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_3 + \dots + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_n = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3 + \dots + d\omega_n) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi ,\end{aligned}$$

ove si è tenuto conto che la misura di tutto l'angolo solido è di 4π steradiani. Si ottiene così la formula

$$(5) \quad \Phi_S(\vec{E}_0) = \frac{Q}{\epsilon_0} .$$

Dalla (5) si vede che il flusso che esce attraverso la superficie chiusa S è indipendente dalla forma della superficie che si considera.

2° caso. La carica Q esterna alla superficie S (fig. 1-15).

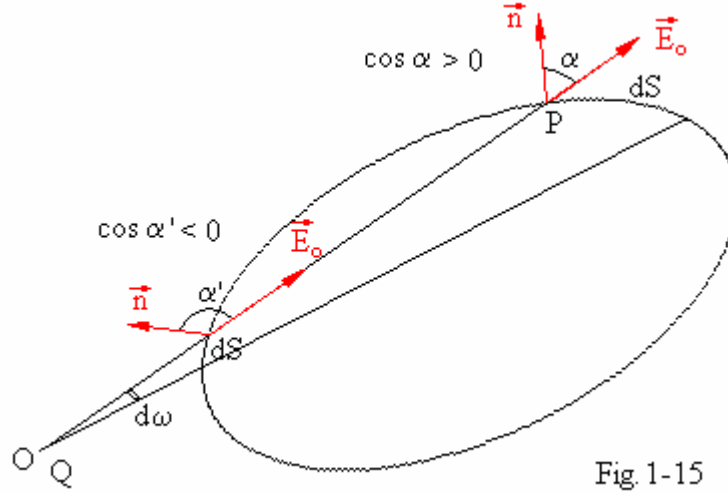


Fig. 1-15

Consideriamo un cono elementare di ampiezza $d\omega$ uscente dal punto O in cui è concentrata la carica Q; siano dS e dS' gli elementi di superficie che esso intercetta sulla superficie S e siano \vec{n} ed \vec{n}' i versori normali a questi elementi e orientati verso l'esterno.

Osserviamo subito che il versore \vec{n} forma un angolo acuto α con il vettore \vec{E}_0 di modo che $\cos \alpha > 0$; il versore \vec{n}' , invece, forma con \vec{E}_0 un angolo ottuso e quindi si ha $\cos \alpha' < 0$. Ne segue che

$$d\Phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{n} dS = E_0 \cdot dS \cos \alpha > 0,$$

$$d\Phi'(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{n}' dS' = E_0 \cdot dS' \cos \alpha' < 0.$$

Inoltre, come sappiamo, il flusso del vettore \vec{E}_0 ha lo stesso valore attraverso tutte le sezioni del cono elementare, solo che $d\Phi(\vec{E}_0) > 0$, mentre $d\Phi'(\vec{E}_0) < 0$.

Ne segue che i flussi elementari attraverso i due elementi di superficie sono uguali in valore assoluto, ma hanno segno contrario e quindi possiamo dire:

$$d\Phi(\vec{E}_0) + d\Phi'(\vec{E}_0) = 0.$$

Ora l'angolo solido ω sotto cui dal punto O è vista la superficie S si può

dividere in tanti coni infinitesimi $d\omega$, ognuno dei quali taglia sulla superficie S due elementi di superficie dS e dS' per i quali si può ripetere il ragionamento precedente. Concludiamo che “ quando la superficie chiusa S è esterna alla carica elettrica Q il flusso totale del campo elettrico generato dalla carica stessa attraverso la superficie S è nullo, quindi

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = 0 .$$

Se il campo elettrico è generato da N cariche puntiformi Q_1, Q_2, \dots, Q_N , il flusso del campo elettrico \vec{E}_0 attraverso una superficie chiusa S è dato dalla formula:

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i ,$$

ove la sommatoria va estesa a tutte e sole le cariche interne alla superficie S ; le cariche esterne, invece, contribuiscono a creare il campo elettrico totale, ma il loro flusso attraverso la superficie S è nullo. Infatti, se consideriamo il campo elettrico generato da una di esse, il flusso che entra attraverso la superficie chiusa S è uguale a quello che esce e quindi la carica dà un contributo nullo al flusso.

N. 12 - Spostamento delle cariche elettriche in un campo elettrico o in un conduttore

Consideriamo il campo elettrico \vec{E} generato da una carica puntiforme Q posta in un punto O dello spazio e introduciamo una carica q in un punto A del campo (fig. 1-16).

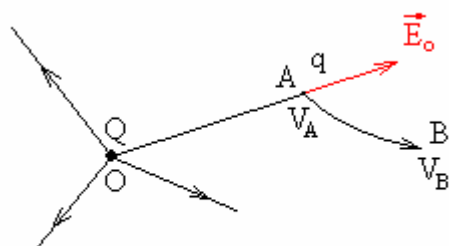


Fig. 1-16

Come sappiamo, il lavoro che le forze elettriche compiono quando la carica q si sposta dal punto A ad un punto B è dato dalla formula

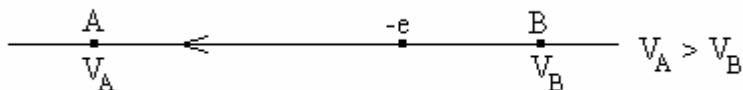
$$L_{AB} = q(V_A - V_B).$$

Questo lavoro è negativo se viene compiuto contro le forze del campo. Se sono invece le forze del campo a provocare lo spostamento della carica q , si ha un lavoro L motore, cioè $L > 0$. In questo caso

se $q > 0$, anche $V_A - V_B > 0$ cioè $V_A > V_B$;

se $q < 0$, anche $V_A - V_B < 0$ cioè $V_A < V_B$.

Ciò vuol dire che le cariche positive tendono spontaneamente a spostarsi dai punti del campo a potenziale maggiore ai punti a potenziale minore. Viceversa le cariche negative tendono a spostarsi dai punti a potenziale minore ai punti a potenziale maggiore.



Nei conduttori sono gli elettroni liberi di conduzione che possono muoversi; e siccome essi sono negativi si desume che nei conduttori soggetti a

differenza di potenziale gli elettroni di conduzione si spostano dai punti a potenziale minore ai punti a potenziale maggiore.

Per es., se $V_A > V_B$ gli elettroni liberi si spostano dal punto B al punto A.

Se il campo elettrico \vec{E} è generato da n cariche puntiformi Q_1, Q_2, \dots, Q_n , positive o negative, il potenziale nel punto P è dato dalla somma dei potenziali generati nel punto stesso dalle singole cariche (principio di sovrapposizione), cioè:

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) + \dots + V_n(P), \quad \text{ossia}$$
$$(1) \quad V(P) = k \frac{Q_1}{r_1} + k \frac{Q_2}{r_2} + \dots + k \frac{Q_n}{r_n},$$

ove r_1, r_2, \dots, r_n sono le distanze delle cariche Q_1, Q_2, \dots, Q_n dal punto P.

La formula (1) ci dice che

“se si escludono i punti in cui sono poste le cariche (sorgenti + o -), il potenziale $V(P)$ ha uno e un sol valore ben determinato e finito in ogni punto dello spazio, cioè è univocamente definito in tutti i punti del campo elettrico”.

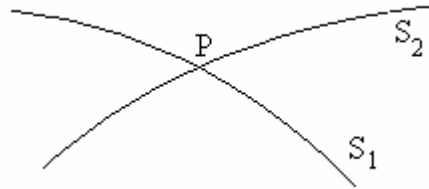
Come è ovvio, il campo elettrico \vec{E} è ancora conservativo. Possiamo quindi concludere dicendo che al campo vettoriale conservativo $\vec{E}(x, y, z)$ è associato un campo scalare dato dalla funzione potenziale $V(x, y, z)$.

N. 13 - Superfici equipotenziali del campo elettrico

Consideriamo il campo elettrico generato da una distribuzione qualsiasi di cariche. Si dice **superficie equipotenziale** il luogo geometrico dei punti dello spazio in cui il potenziale assume un valore costante. Se $V(x, y, z)$ è il potenziale in un generico punto P dello spazio, la superficie equipotenziale passante per il punto P ha l'equazione

$$V(x, y, z) = C = \text{cost.}$$

Poiché in ogni punto del campo elettrico il potenziale ha uno e un sol valore ben determinato e finito, è evidente che due superfici equipotenziali distinte S_1 ed S_2 non possono avere alcun punto P in comune. Quindi il caso indicato in figura non è possibile.



Infatti, se così fosse, il potenziale nel punto P assumerebbe due valori distinti K_1 e K_2 ; ma ciò non può verificarsi. Per ogni punto dello spazio passa quindi una e una sola superficie equipotenziale.

In particolare, se il campo elettrico \vec{E} è generato da una sola carica puntiforme, le superfici equipotenziali si ottengono imponendo la condizione

$$V(x,y,z) = k \frac{Q}{r} = \text{cost}, \quad \text{si ricava (1)} \quad r = \text{cost},$$

cioè le superfici equipotenziali sono superfici sferiche concentriche aventi il centro nel punto O in cui è concentrata la carica Q; ovviamente, per ogni valore della costante si ottiene una superficie equipotenziale.

Se è $Q > 0$, al crescere del raggio r le superfici sferiche hanno potenziale minore; se è $Q < 0$ si verifica il caso contrario.

Ricordiamo ora che linee di forza del campo elettrico generato da una carica puntiforme Q sono semirette orientate che escono dalla carica o convergono verso di essa, a seconda che sia $Q > 0$ o $Q < 0$. **Si conclude che il vettore \vec{E} è perpendicolare alle superfici equipotenziali e che, in ogni caso, esso è rivolto verso le superfici a potenziale minore (vedi fig. 1-17).**

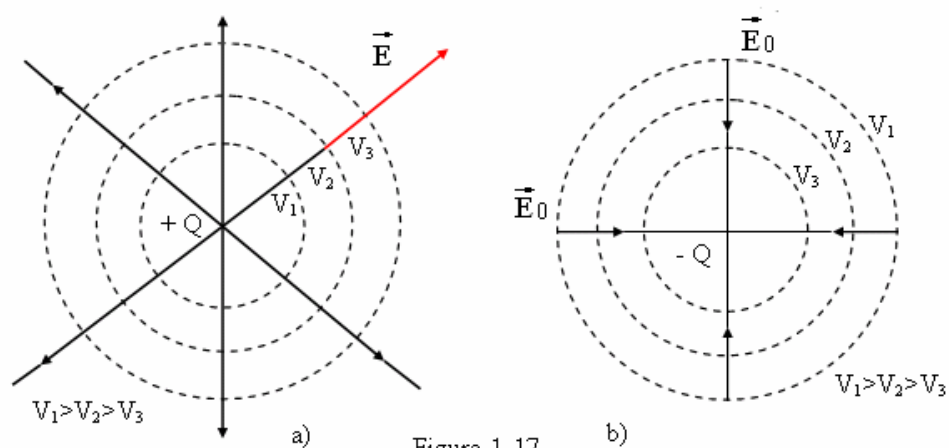


Figura 1-17

Più in generale consideriamo il campo elettrico generato da una distribuzione qualsiasi di cariche; quindi

$$\vec{E} = k \frac{q_1}{r_1^2} \text{vers } \vec{r}_1 + k \frac{q_2}{r_2^2} \text{vers } \vec{r}_2 + \dots + k \frac{q_n}{r_n^2} \text{vers } \vec{r}_n .$$

Sia S una qualsiasi superficie equipotenziale del campo e A, B due punti della superficie tanto vicini che l'arco \widehat{AB} si possa considerare rettilineo (vedi fig. 1-18).

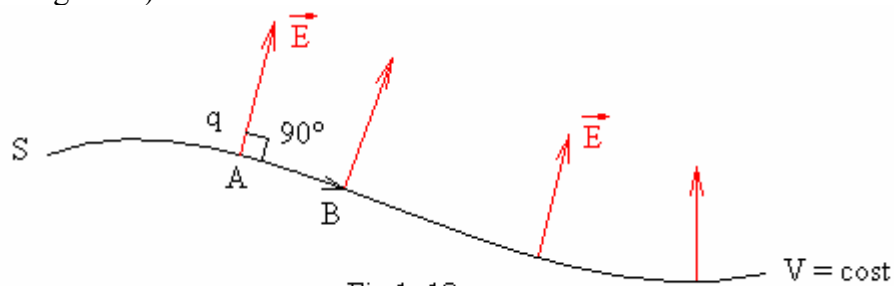


Fig 1-18

Il lavoro compiuto dalle forze elettriche del campo quando una carica q si sposta dal punto A al punto B è dato dall'espressione

$$(2) \quad L = \vec{F} \times \overline{AB} = q\vec{E} \times \overline{AB} = qE \cdot \overline{AB} \cos \alpha .$$

Ma il lavoro è dato anche dall'espressione

$$(3) \quad L = q(V_A - V_B) = 0 ;$$

infatti, essendo $V_A = V_B$ risulta $L=0$.

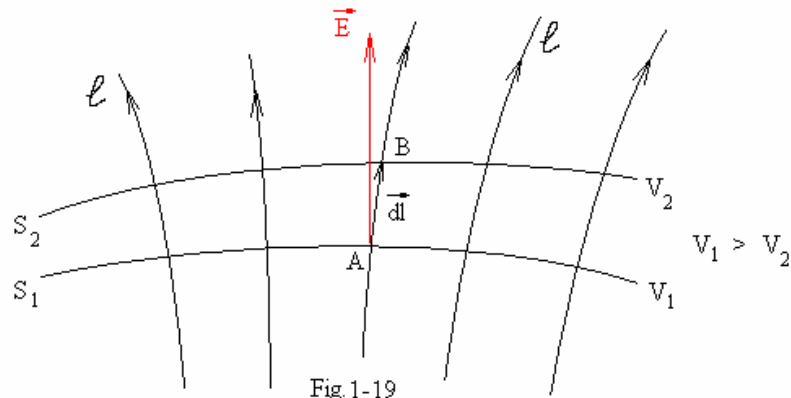
Confrontando la (2) con la (3) si ottiene

$$qE \cdot \overline{AB} \cos \alpha = 0 ,$$

$$\text{da cui} \quad |\alpha| = \frac{\pi}{2} \quad \text{e quindi} \quad \vec{E} \perp \overline{AB} .$$

Concludiamo che **in ogni punto A dello spazio il vettore elettrico \vec{E} è sempre perpendicolare alla superficie equipotenziale passante per quel punto.**

Facciamo anche vedere che il vettore campo elettrico \vec{E} è rivolto verso le superfici a potenziale minore (fig. 1-19).



Infatti siano V_1 e V_2 due superfici equipotenziali con $V_1 > V_2$; se esse sono abbastanza vicine fra di loro, il vettore campo elettrico \vec{E} sarà perpendicolare sia all'una che all'altra, anche se per il momento non ne conosciamo il verso.

Siano ora A un punto della superficie V_1 e B un punto della superficie V_2 posti su una stessa linea di forza del vettore \vec{E} . Lo spostamento $\overline{AB} = \Delta\vec{s}$ ha la stessa direzione del vettore \vec{E} , ma per il momento non sappiamo se essi sono concordi o discordi.

Se immaginiamo di spostare una carica positiva q dal punto A a potenziale maggiore al punto B a potenziale minore, le forze del campo compiono un lavoro positivo dato dall'espressione

$$(5) \quad \Delta L = q(V_A - V_B) > 0.$$

Ma questo lavoro è dato anche dall'espressione

$$(6) \quad \Delta L = q\vec{E} \times \Delta\vec{s} = qE \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha.$$

Poiché anche questa seconda espressione deve essere positiva sarà $\cos\alpha > 0$, cioè l'angolo α compreso fra i due vettori \vec{E} ed \overline{AB} deve essere acuto. Ma poiché questi due vettori hanno la stessa direzione, deve essere $\alpha = 0$, cioè i due vettori hanno anche lo stesso verso: infatti, se essi fossero opposti, l'angolo α fra essi compreso sarebbe ottuso e si avrebbe $\cos\alpha < 0$

e ciò andrebbe contro il risultato trovato.

Ne segue che il vettore campo elettrico \vec{E} ha il verso del vettore \overline{AB} e quindi è rivolto verso le superfici a potenziale minore.

Diamo un'altra dimostrazione.

Sia A un punto qualsiasi di una superficie equipotenziale $V_1 = \text{cost}$ e a partire da tale punto prendiamo uno spostamento $\overrightarrow{AB} = d\vec{\ell}$ nella direzione e verso della linea di forza del campo \vec{E}_0 . Ne segue che $d\vec{\ell}$ è normale alla superficie equipotenziale nel punto stesso (fig. 1-19).

Poiché, per definizione, si ha $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0$, moltiplicando scalarmente per $d\vec{\ell}$ ambo i membri dell'eguaglianza possiamo scrivere:

$$\vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 \times d\vec{\ell},$$

da cui (7): $E_0 d\ell \cos \alpha = -dV_0 = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2,$

ove α è l'angolo compreso fra i due vettori $d\vec{\ell}$ e $\overrightarrow{\text{grad}} V_0$.

Ma poiché $\alpha = 0$, si ha:

$$\cos \alpha = 1, \quad \text{quindi} \quad E_0 d\ell \cos \alpha = E_0 d\ell > 0,$$

e dalla (7) si ottiene $V_1 - V_2 > 0$, cioè $V_1 > V_2$.

Si conclude che: **“Le linee di forza di un campo elettrico, oltre ad essere perpendicolari alle superfici equipotenziali, sono anche rivolte verso le superfici a potenziale decrescente”.**

Torniamo a considerare un campo elettrico \vec{E} e spostiamo una carica q lungo una linea di forza dal punto A , a potenziale maggiore, al punto B , a potenziale minore (fig. 1-19). Eguagliando le espressioni (5), (6) del lavoro si ha:

$$qE \cdot \Delta s \cos \alpha = q(V_A - V_B);$$

poiché $\cos \alpha = 1$ si ottiene $E \cdot \Delta s = V_A - V_B$. da cui

$$(8) \quad E = \frac{V_A - V_B}{\Delta s}, \quad \text{infine} \quad (8') \quad E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

Questa formula ci permette di trovare il valore di un campo elettrico qualsiasi per mezzo del potenziale.

Dalle (8) possiamo anche ricavare le unità di misura del campo elettrico E .
Nel sistema MKSA ; si ottiene:

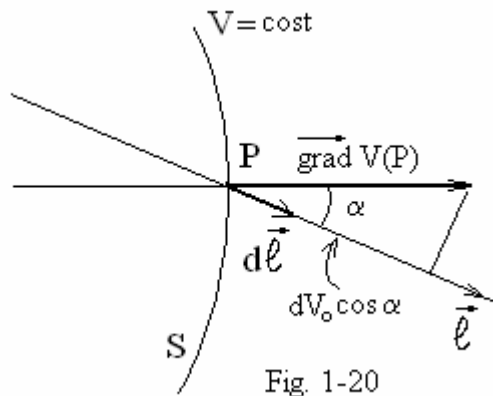
$$[E]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Volt}}{\text{metro}} .$$

N. 14 – Alcune considerazioni sul significato di gradiente

Sia \vec{E}_0 il campo elettrico generato da una distribuzione qualsiasi di cariche e $V_0(x, y, z)$ il suo potenziale elettrostatico. Sappiamo che si ha:

$$(1) \quad \vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = -dV_0 .$$

Essa ci ricorda che il campo elettrico è conservativo per il lavoro.



Sia ora P un punto qualsiasi di una superficie equipotenziale S e a partire da esso prendiamo uno spostamento $d\vec{\ell}$ concorde con una retta orientata $\vec{\ell}$ (fig. 1-20) .

Il vettore $\vec{\text{grad}} V_0(P)$ è perpendicolare alla superficie S nel punto P e forma con $d\vec{\ell}$ un certo angolo α . Moltiplicando scalarmene il vettore $\vec{\text{grad}} V_0$ per $d\vec{\ell}$ si ha:

$$(2) \quad \vec{\text{grad}} V_0 \times d\vec{\ell} = dV_0 ,$$

$$\text{da cui} \quad \vec{\text{grad}} V_0 \cdot d\vec{\ell} \cos \alpha = dV_0 ,$$

$$\text{e quindi (3):} \quad \frac{dV_0}{d\ell} = \text{grad} V_0 \cdot \cos \alpha .$$

Essa dice che:” La derivata direzionale della funzione scalare $V_0(x, y, z)$ nella direzione della retta orientata $\vec{\ell}$ è uguale alla componente del vettore $\vec{\text{grad}}V_0$ secondo la retta stessa.

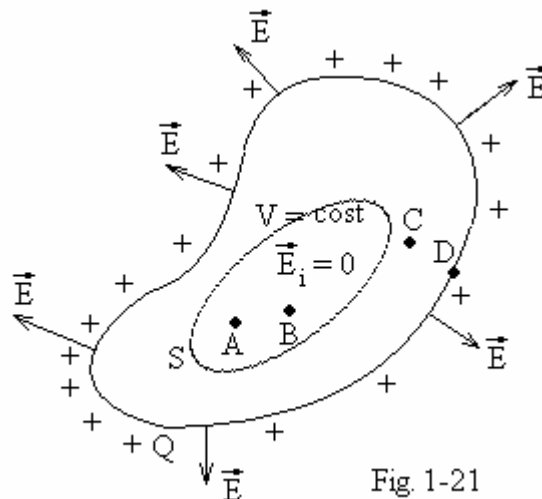
Se lo spostamento $d\vec{\ell}$ spiccato dal punto P ha verso concorde con il vettore $\vec{\text{grad}}V_0$, si ha $\alpha = 0$ e quindi $\cos \alpha = 1$. Inoltre possiamo indicare tale spostamento con dn , essendo esso normale alla superficie equipotenziale S. In tal caso dalla (3) si ha:

$$(4) \quad \frac{dV_0}{dn} = \text{grad}V_0,$$

cioè: “la derivata direzionale della funzione potenziale $V_0(x, y, z)$ risulta massima nelle direzioni perpendicolari alle superfici equipotenziali e coincide con il modulo del gradiente della funzione stessa”.

N. 15 - Campo elettrico e potenziale di un conduttore in equilibrio elettrostatico

Consideriamo un conduttore elettrizzato in equilibrio elettrostatico. Come sappiamo dall'esperienza di Cavendish, le cariche elettriche sono tutte localizzate sulla superficie esterna (fig. 1-21).



Ora, il campo elettrico \vec{E}_i all'interno del conduttore è nullo, perché in caso contrario esso eserciterebbe una forza sugli elettroni di conduzione, i quali verrebbero a muoversi e il conduttore non sarebbe più in equilibrio elettrostatico (E. Amaldi, Fisica II, pag. 53).

Possiamo dimostrare in un altro modo che nei punti interni di un conduttore in equilibrio elettrostatico il campo elettrico \vec{E}_i è nullo. Infatti, se applichiamo il teorema di Gauss ad una immaginaria superficie chiusa S interna al conduttore si ha:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i .$$

Ma sempre per l'esperienza di Cavendish all'interno della superficie S non ci sono cariche elettriche, nel senso che per ogni atomo o piccolo volume il numero delle cariche positive è uguale al numero delle cariche negative e quindi la loro somma algebrica è nulla. Ne segue che

$$\Phi_S(\vec{E}) = 0 .$$

Dividendo la superficie S in tanti piccoli elementi, si ha

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 + \dots + E_n S_n = 0 .$$

Poiché S_1, S_2 , ecc. sono diversi da zero, il campo elettrico \vec{E} è nullo in ogni punto della superficie S . Siccome la stessa conclusione vale per ogni altra superficie chiusa, possiamo dire:

“Il campo elettrico \vec{E} all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico è nullo”.

Si può vedere anche che il potenziale ha valore costante in ogni punto del conduttore. Infatti, siano A e B due punti interni al conduttore. Poiché il campo elettrico \vec{E} è nullo in ognuno di questi punti, la formula del lavoro elettrico ci permette di scrivere

$$L_{AB} = \vec{F} \times \overline{AB} = q \vec{E} \times \overline{AB} = 0 .$$

Ma si ha anche $L_{AB} = q(V_A - V_B)$.

Confrontando le due espressioni si ha

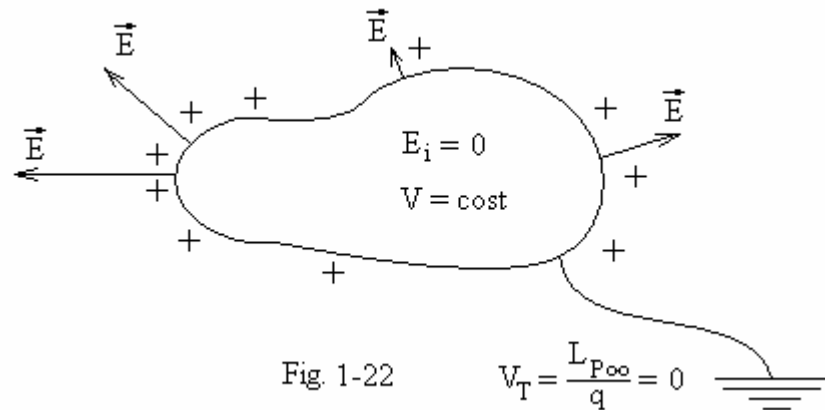
$$V_A - V_B = 0 , \quad \text{ossia} \quad V_A = V_B .$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per ogni coppia di punti, considerando anche coppie costituite da un punto interno al conduttore e da uno appartenente alla superficie esterna. Ciò ci permette di dire che :

“in condizioni di equilibrio elettrostatico tutti i punti di un conduttore hanno lo stesso potenziale e quindi il potenziale del conduttore è quello di un suo punto qualsiasi .

In particolare ne segue che la superficie che delimita il conduttore è una superficie equipotenziale e le linee di forza del campo elettrico esterno sono perpendicolari ad essa”.

Poiché un conduttore in equilibrio elettrostatico ha potenziale costante, possiamo dire (fig. 1-22):



“Il potenziale di un conduttore in equilibrio elettrostatico è misurato dal lavoro che le forze del campo elettrico (da esso generato) compiono per trasportare la carica unitaria positiva da un punto del conduttore sino all’infinito, lungo una traiettoria qualsiasi o, per una nota convenzione, fino a terra”.

N. 16 - Potenziale e campo elettrico di una sfera elettrizzata

Consideriamo una sfera metallica elettrizzata ed isolata , cioè non collegata a terra e lontana da altri conduttori, e sia Q la sua carica elettrica la quale, come sappiamo, risulta tutta distribuita sulla superficie esterna (fig. 1-23).

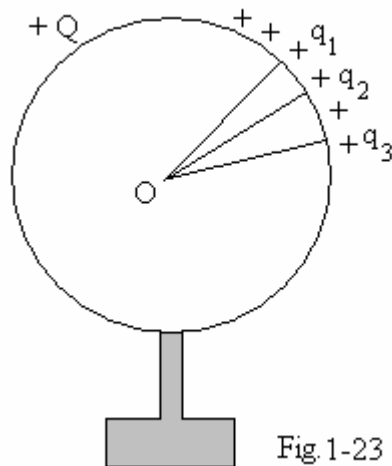


Fig. 1-23

Poiché il potenziale del conduttore è costante, possiamo calcolarlo determinando il suo valore nel centro O della sfera. Inoltre, siccome la sfera è lontana da altri conduttori, il potenziale nel punto O è dovuto esclusivamente alle cariche elementari q_1, q_2, \dots, q_n distribuite sulla superficie della sfera e quindi possiamo scrivere:

$$V(O) = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n, \quad \text{ossia:}$$

$$V(O) = k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_2}{R} + k \frac{q_3}{R} + \dots + k \frac{q_n}{R},$$

$$V = \frac{k}{R} (q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n), \quad \text{infine}$$

$$V = k \frac{Q}{R},$$

cioè : il potenziale di una sfera elettrizzata e isolata è quello che si avrebbe se la sua carica Q fosse tutta concentrata nel centro e poi si calcolasse il potenziale in un punto P a distanza R .

Naturalmente, se raddoppiamo la carica Q della sfera, la carica distribuita su ogni punto della superficie sferica raddoppia e quindi raddoppia anche il potenziale generato da ogni carica. Di conseguenza anche il potenziale della sfera diventa due volte maggiore.

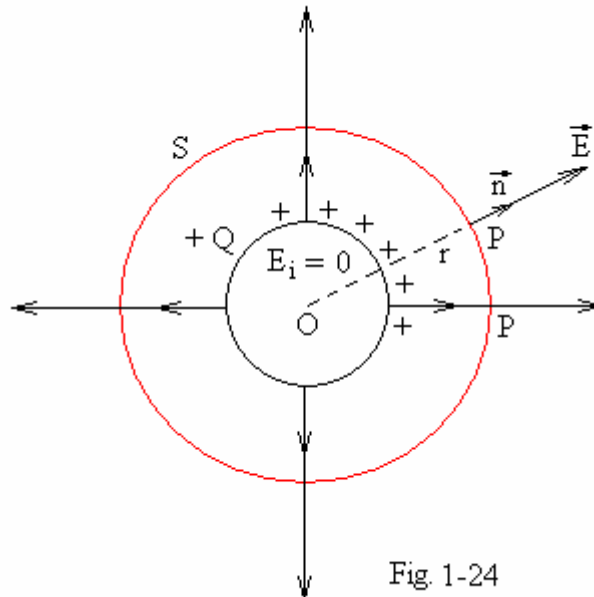


Fig. 1-24

Consideriamo ancora il nostro conduttore sferico, elettrizzato e isolato .
Vogliamo calcolare il valore del campo elettrico E in un punto esterno P a distanza r dal centro (fig. 1-24).

Sappiamo che il campo elettrico interno è nullo mentre il campo elettrico esterno , per ragioni di simmetria, è un campo elettrico radiale, sempre nell'ipotesi che la sfera sia lontana da altri conduttori

Consideriamo una superficie sferica S anche essa di centro O e passante per un punto P esterno al conduttore e sia \vec{n} un vettore unitario normale alla sfera.

Il vettore elettrico \vec{E}

1°) è perpendicolare in ogni punto alla superficie sferica S ;

2°) ha la direzione del versore \vec{n} ;

3°) ha lo stesso modulo in ogni punto della superficie S .

Applicando il teorema di Gauss si ha :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q , \quad \text{da cui}$$

$$E \cdot S = \frac{1}{\epsilon_0} Q , \quad \rightarrow \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q ,$$

infine
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} .$$

Questa formula ci dice che **il campo elettrico generato da un conduttore sferico elettrizzato in un punto esterno ad esso è quello che si avrebbe se la sua carica Q fosse tutta concentrata nel centro O della sfera.**

N. 17 – Campo elettrico generato da un distribuzione superficiale di cariche

Sia Σ' una superficie piana illimitata elettrizzata, per es. positivamente, e sia $\sigma = \text{cost}$ la densità superficiale di carica elettrica (fig. 1-25).

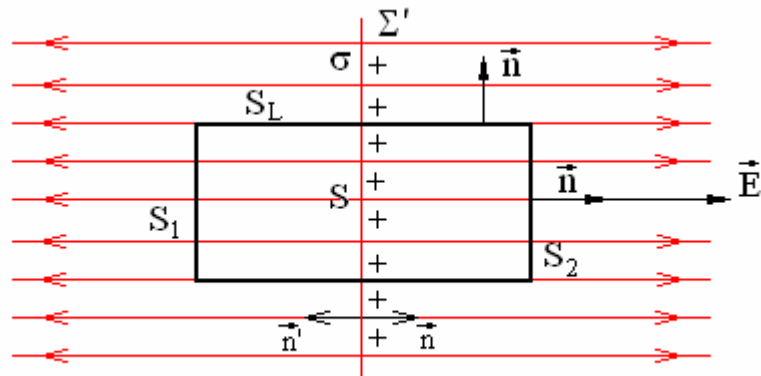


Fig. 1-25

Vogliamo calcolare il campo elettrico in un punto P dello spazio. Per ragioni di simmetria il campo elettrico \vec{E} è costante, è perpendicolare alla superficie Σ' ed è rivolto da una parte verso destra e dall'altra verso sinistra; esso è rappresentato da linee di forza parallele, rettilinee ed equidistanti.

Consideriamo ora un tubo di flusso di sezione S e chiudiamolo con due basi parallele alla superficie ed equidistanti da essa.

Il campo elettrico ha lo stesso valore sulle due basi e le linee di forza sono perpendicolari ad esse.

Sia ora \vec{n} un versore normale alla superficie Σ del tubo di flusso; esso è perpendicolare alle linee di forza sulla superficie laterale del tubo di flusso, mentre è parallelo ad esse sulle due basi. Per il teorema di Gauss si ha:

$$(1) \quad \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S,$$

ove S è la porzione di piano intercettata dal tubo di flusso e σS la carica elettrica distribuita su di essa. Ma il flusso totale è uguale alla somma dei flussi attraverso le basi S_1, S_2 e la superficie laterale S_ℓ ; pertanto si ha

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}) + \Phi_{S_2}(\vec{E}) + \Phi_{S_\ell}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S .$$

Il flusso $\Phi_{S_\ell}(\vec{E})$ è nullo perché il versore \vec{n} è perpendicolare alle linee di forza del campo elettrico. Possiamo quindi scrivere

$$ES_1 + ES_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S .$$

Poiché $S_1 = S_2 = S$ si ha $2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S$, e infine

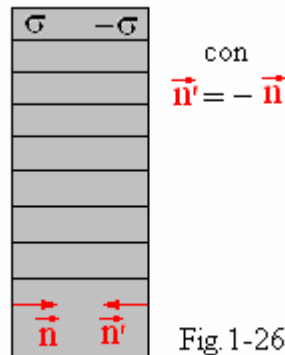
$$(2) \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} .$$

Infine, se indichiamo con \vec{n} ed \vec{n}' due versori normali alla superficie S e orientati come in figura, possiamo scrivere il campo elettrico in forma vettoriale; precisamente si ha

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{a destra della superficie } S ,$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}' \quad \text{a sinistra della superficie } S .$$

Nella (2) non figura la distanza delle basi del tubo di flusso dalla superficie S ; ne segue che **il campo elettrico generato da una superficie piana illimitata elettrizzata è costante in ogni punto dello spazio e non dipende dalla distanza d del punto P dalla superficie stessa**. Se invece la superficie è limitata, il valore del campo elettrico dipende da questa distanza. Ma anche in questo caso, se ci mettiamo in un punto P vicinissimo alla superficie S , le dimensioni di S sono praticamente infinite nei confronti della distanza d e si ricade così nel caso esaminato, cioè vale ancora la formula (2).



Consideriamo infine un doppio strato di cariche, realizzato con due superfici piane illimitate elettrizzate, ma aventi densità superficiali opposte (fig.1-26). Il campo elettrico nei punti interni al doppio strato è uniforme ed è dato dalla somma dei campi elettrici generati dalle due superfici, cioè:

$$(a) \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

$$\text{Ma } \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \text{ ed } \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}' ,$$

ove \vec{n} ed \vec{n}' sono due vettori unitari perpendicolari alle due superfici ed $\vec{n}' = -\vec{n}$. Ne segue che il campo elettrico all'interno del doppio strato è :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} .$$

$$\text{Si ricava} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{e in modulo si ha} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} ,$$

ossia **il campo elettrico interno allo strato è il doppio di quello generato dalle singole superfici.**

All'esterno del doppio strato, invece, i due versori \vec{n} ed \vec{n}' hanno lo stesso verso; ne segue che **il campo elettrico è nullo e quindi il potenziale è costante**.

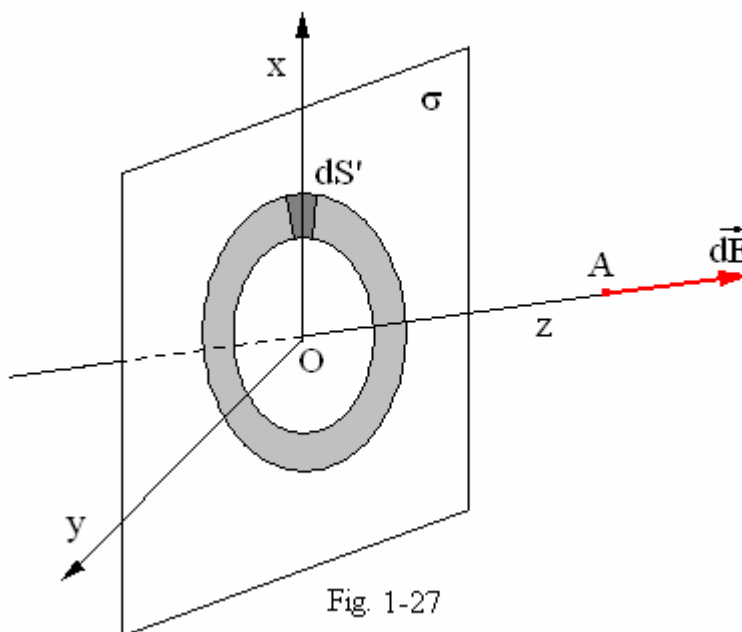
Detto V_{01} il potenziale a sinistra del doppio strato e V_{02} il potenziale a destra, per definizione di differenza di potenziale si ha:

$$(3) \quad V_{01} - V_{02} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_0 \times d\vec{\ell} = \int_0^{\delta} \frac{\sigma}{\epsilon_0} d\ell = \frac{\sigma\delta}{\epsilon_0} , \quad \rightarrow \quad V_{01} - V_{02} = \sigma\delta/\epsilon_0 ,$$

cioè il potenziale V_0 subisce una discontinuità, passando attraverso il doppio strato, pari a $\sigma\delta/\epsilon_0$.

N. 18 - Gli integrali nel calcolo dell'intensità dei campi elettrici

Primo esercizio



Consideriamo una superficie piana illimitata elettrizzata Σ , avente la densità elettrica superficiale σ ; supponiamo $\sigma > 0$ (fig. 1-27).

Come sappiamo, essa genera un campo elettrico uniforme \vec{E} , rappresentato da linee di forza parallele, rettilinee, equidistanti e perpendicolari alla superficie Σ .

Vogliamo calcolare l'intensità del campo elettrico in un punto A dello spazio, facendo uso del calcolo integrale. A tale scopo, si consideri un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ avente gli assi x, y sulla superficie Σ ; ne segue che l'asse z sarà perpendicolare ad essa.

Consideriamo su Σ una corona circolare di centro O , raggio x e larghezza dx e sia dS la sua area; evidentemente si ha

$$dS = 2\pi x dx.$$

E' anche evidente che il campo elettrico generato da questa zona anulare è perpendicolare alla superficie Σ nel punto O .

Consideriamo ora un elemento dS' di questa zona anulare e sia r la sua distanza da un generico punto A dell'asse z (fig. 1-28).

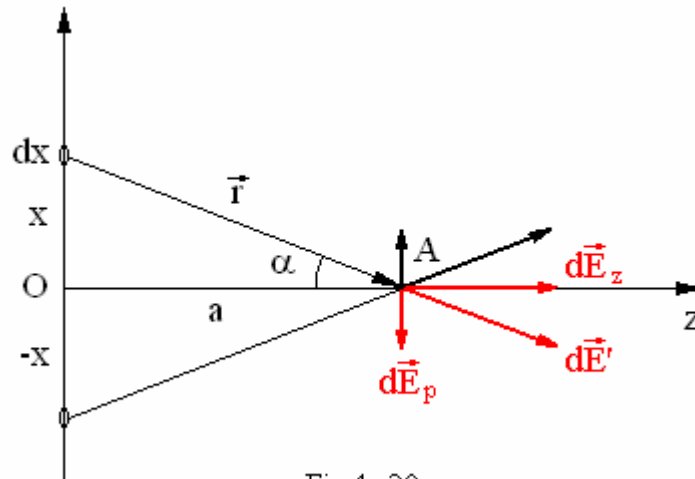


Fig. 1-28

Indicheremo con \vec{r} il vettore che ha l'origine in un punto della superficie dS' e l'estremo nel punto A. L'elemento di superficie dS' possiede la carica

$$dq = \sigma dS'$$

e genera nel punto A un campo elettrico elementare $d\vec{E}'$ orientato come il vettore \vec{r} e avente il modulo

$$d\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS'}{r^2} \text{vers } \vec{r} ;$$

di questo vettore a noi interessa solo la componente dE'_z secondo l'asse z.

Indichiamo con α l'angolo che il vettore \vec{r} forma con l'asse x e poniamo

$$a = \overline{OA} ; \quad \text{quindi} \quad r = \sqrt{a^2 + x^2} .$$

Evidentemente si ha:

$$dE'_z = dE' \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS'}{r^2} \cos \alpha .$$

Ma

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} .$$

Ne segue che si ha:

$$(1) \quad dE'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sigma dS'}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sigma dS'}{(a^2 + x^2)^{3/2}} .$$

La (1) rappresenta la componente secondo l'asse z del campo elettrico generato nel punto A dall'elemento dS' di corona circolare. Per ottenere la componente dE_z del campo elettrico generato da tutta la corona circolare, basta sostituire nella (1) dS' con dS , cioè con l'espressione $2\pi x dx$. Si ottiene

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\sigma \cdot 2\pi x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Se poi teniamo presente che **le componenti del vettore \vec{E} normali all'asse z si annullano a due a due**, possiamo dire che **il campo elettrico generato dalla corona circolare è diretto esclusivamente secondo l'asse z** ; il pedice che ricorda la direzione dell'asse z risulta quindi superfluo e si ha:

$$dE = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Per ottenere il modulo del campo elettrico generato nel punto A dalla superficie Σ basta integrare la (1) fra gli estremi $x = 0$ e $x = \infty$ e si ottiene

$$E = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma}{4\epsilon_0} \cdot \int_0^{+\infty} (a^2 + x^2)^{-3/2} d(a^2 + x^2).$$

Poiché $-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ si ha:

$$E = \left[\frac{a\sigma}{4\epsilon_0} : \left(-\frac{1}{2}\right) \right] \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right|_0^{+\infty} = -\frac{2a\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{a}\right);$$

infine si ha $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Si ritrova così la formula ottenuta applicando il teorema di Gauss.

Secondo esercizio

Consideriamo un filo conduttore rettilineo, indefinito ed elettrizzato e sia μ la densità lineare di carica. Vogliamo calcolare il campo elettrico generato dal filo in un punto P a distanza d da esso (fig. 1-29).

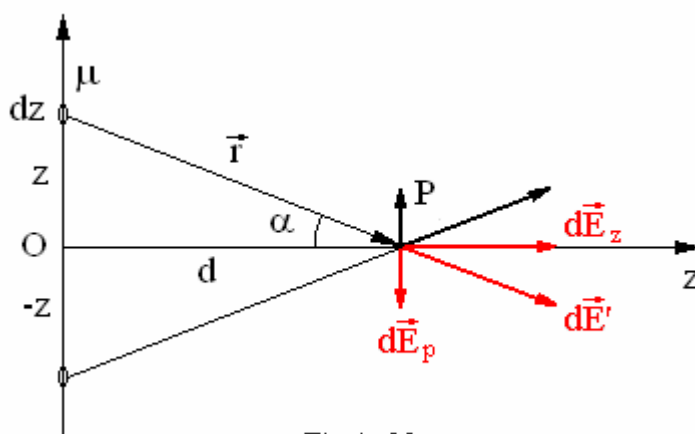


Fig. 1-29

Consideriamo un riferimento cartesiano Oxz avente l'asse z sovrapposto al filo e prendiamo su di esso un elemento di filo di lunghezza dz e avente la distanza z dall'origine O . Prendiamo il punto P sull'asse x e indichiamo con \vec{r} il vettore che l'origine in un punto del tratto di filo dz e l'estremo nel punto P . Ovviamente il modulo r del vettore rappresenta la distanza d fra i due punti e quindi si ha:

$$d = \overline{OP} \text{ ed } r = \sqrt{d^2 + z^2}.$$

Poiché il filo ha la densità lineare di carica ρ , il tratto dz possiede la carica elementare $dq = \mu dx$ e genera nel punto P un campo elettrico elementare $d\vec{E}$ orientato come il vettore \vec{r} e si ha:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu dz}{r^2} \text{vers } \vec{r}.$$

Di questo vettore a noi interessa solo la componente dE_x secondo l'asse x . Se indichiamo con α l'angolo che il vettore \vec{r} forma con il semiasse x positivo, per la componente dE_x si ha

$$(3) \quad dE_x = dE \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu dz}{r^2} \cos\alpha .$$

Ma ora, dal triangolo rappresentato in figura si ha:

$$d = r \cos\alpha , \quad \rightarrow \quad r = \frac{d}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad (4) \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos\alpha}{d} ;$$

$$z = d \operatorname{tg}\alpha , \text{ e differenziando si ha: } (5) \quad dz = \frac{d}{\cos^2\alpha} d\alpha .$$

Sostituendo le (4), (5) nella (3) si ottiene:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mu \cos\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{d^2} \cdot \frac{d}{\cos^2\alpha} d\alpha ,$$

$$\text{da cui (6)} \quad dE_x = \frac{\mu}{4\pi d \epsilon_0} \cos\alpha \, d\alpha$$

La (6) rappresenta la componente secondo l'asse x del campo elettrico generato nel punto P dall'elemento dz di filo.

Teniamo ora presente che **due tratti di filo, simmetrici rispetto all'origine O , generano due campi elettrici vettoriali che hanno i componenti secondo l'asse z opposti fra di loro. I due componenti, quindi, hanno somma nulla** e la stessa cosa si verifica per i componenti di ogni altra coppia costituita da elementi di filo simmetrici rispetto al punto O .

Ne segue che il campo elettrico generato dal filo rettilineo in un generico punto P dello spazio è perpendicolare al filo, ossia è parallelo all'asse x , e quindi è superfluo indicare la sua direzione.

Per ottenere il modulo del campo elettrico generato nel punto P da tutto il filo, basta integrare la (6) fra gli estremi di integrazione dell'angolo α , cioè

fra i valori $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ e $\alpha = +\frac{\pi}{2}$. Integrando si ottiene :

$$E = \frac{\mu}{4\pi d\epsilon_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu}{4\pi d\epsilon_0} [\sin \alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2\mu}{4\pi d\epsilon_0}.$$

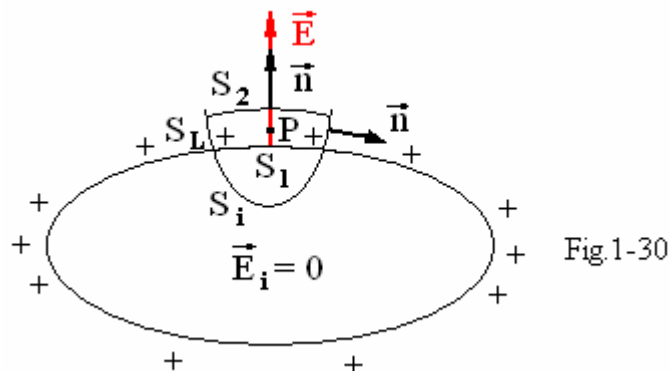
Il valore del campo elettrico nel punto P è quindi dato dalla formula

$$E = \frac{\mu}{2\pi d\epsilon_0}.$$

La formula ci dice che il valore del campo dipende dalla distanza del punto P dal filo che genera il campo.

N. 19 - Teorema di Coulomb

Consideriamo un conduttore elettrizzato e in equilibrio elettrostatico e sia σ la densità elettrica superficiale. Vogliamo calcolare il campo elettrico \vec{E} in un punto P esterno alla superficie del conduttore ma vicinissimo ad essa (vedi fig. 1-30). Come sappiamo le linee di forza del campo elettrico sono perpendicolari alla superficie del conduttore.



Consideriamo un elemento di superficie S_1 di fronte al punto P e un tubo di flusso attorno al punto. Chiudiamo il tubo con una superficie S_i interna al conduttore e una superficie S_2 esterna, ma vicinissima al punto P.

Sia \vec{n} un vettore unitario normale alla superficie del tubo di flusso; esso è normale alle linee di forza del campo elettrico \vec{E} sulla superficie laterale del tubo, mentre è parallelo alle linee sulla superficie esterna S_2 .

Applicando il teorema di Gauss si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \sigma S_1 ,$$

dove $Q = \sigma S_1$ è la carica elettrica distribuita sulla superficie S_1 .

Ma il flusso del vettore campo elettrico \vec{E} attraverso la superficie del tubo è uguale alla somma dei flussi attraverso la superficie interna S_i , attraverso la superficie laterale S_ℓ e attraverso la superficie S_2 ; e quindi si ha:

$$\Phi_{S_i}(\vec{E}) + \Phi_{S_\ell}(\vec{E}) + \Phi_{S_2}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S_1 .$$

Ma il flusso attraverso la superficie S_i è nullo perché il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo; il flusso attraverso la superficie S_ℓ è nullo perché il versore \vec{n} è perpendicolare al campo elettrico \vec{E} . Solo il terzo flusso è diverso da zero. E poiché sulla superficie S_2 i vettori \vec{E} ed \vec{n} sono paralleli, possiamo scrivere

$$E \cdot S_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S_1 . \quad \text{Poiché } S_1 \approx S_2 \text{ si ha:}$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \vec{n} ,$$

dove \vec{n} è il vettore unitario normale alla superficie S_1 e rivolto verso l'esterno.

N. 20 - Pressione elettrostatica

Il teorema di Coulomb ci dice che il campo elettrico in un punto P molto vicino alla superficie di un conduttore ed esterno ad esso è uguale a

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{vedi fig. 1-31}).$$

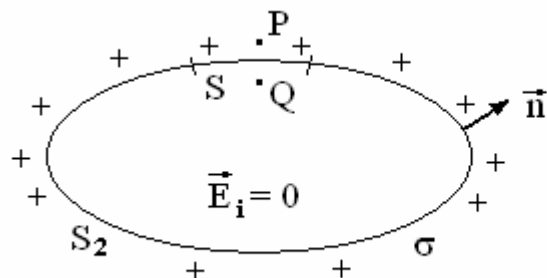


Fig. 1-31

In forma vettoriale si ha $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$, dove \vec{n} è un vettore perpendicolare alla superficie del conduttore e rivolto verso l'esterno.

Vogliamo calcolare ora il campo elettrico che agisce su un elemento di superficie S del conduttore, posto dinanzi al punto P .

Intanto il campo elettrico nel punto P si può considerare come la somma di due campi elettrici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 : il primo è quello dovuto alle cariche distribuite sull'elemento di superficie S , il secondo è quello generato dalle cariche distribuite su tutto il resto della superficie del conduttore, che chiameremo S_2 ; quindi si ha:

$$(1) \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Se ora passiamo dal punto P a un punto Q interno al conduttore, il campo elettrico \vec{E} diventa nullo (come ben sappiamo), il campo elettrico \vec{E}_1 cambia verso e il campo elettrico \vec{E}_2 rimane praticamente invariato perché le cariche distribuite sulla superficie S_2 sono così distanti dal punto P che il campo elettrico non cambia valore a causa di un piccolo spostamento.

Dalla (1) si ricava pertanto

$$0 = -\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \text{da cui si ha} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_1.$$

Per il campo elettrico \vec{E} nel punto P possiamo quindi scrivere $\vec{E} = 2\vec{E}_2$, e

$$\text{da questa si ricava} \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \vec{E}.$$

Ricordando l'espressione del campo \vec{E} dato dal teorema di Coulomb si ha:

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}; \quad \text{il suo modulo è} \quad E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Il vettore \vec{E}_2 è il campo elettrico generato in un punto P del conduttore o su un elemento di esso da tutte le cariche distribuite sulla superficie del conduttore, ad eccezione di quelle che si trovano vicine al punto stesso. Questo campo, come si vede, è la metà di quello dovuto al teorema di Coulomb, cioè è la metà di quello che esiste in un punto P vicinissimo alla superficie del conduttore ed esterno ad essa.

Poiché le cariche che generano i campi elettrici \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 hanno lo stesso segno, ne segue che il campo elettrico \vec{E}_2 tende a respingere le cariche distribuite sulla superficie S con la forza

$$F = E_2 \cdot \Delta q = E_2 \cdot \sigma S = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sigma S = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S .$$

Dividendo la forza per la superficie S si ottiene la pressione elettrostatica

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} .$$

Questa pressione elettrostatica tende a staccare le cariche elettriche distribuite sulla superficie del conduttore.

A causa di questa pressione, se facciamo cadere una bolla di sapone su una superficie elettrizzata, la bolla si elettrizza e la pressione elettrostatica tende a gonfiarla e a staccarla dalla superficie.

Analogamente, se per mezzo di una pompetta facciamo cadere delle goccioline d'acqua da un beccuccio elettrizzato, la pressione elettrostatica tende a sminuzzare le goccioline e a staccarle dal beccuccio. Il fenomeno si ripete anche se il beccuccio non è elettrizzato; infatti le goccioline si elettrizzano per strofinio quando esse vengono spinte dalla pompetta.

N. 21 - Potere dispersivo delle punte

Consideriamo una lastra metallica elettrizzata positivamente e collegata ad un elettroscopio. Alcune cariche giungono alle foglioline attraverso l'asta e le foglioline divergono (fig. 1-32).

Se ora poniamo di fronte alla lastra un conduttore a punta elettrizzato negativamente ed isolato da terra, vediamo che le foglie dell'elettroscopio si chiudono gradualmente, cioè la carica distribuita sulla lastra va diminuendo.

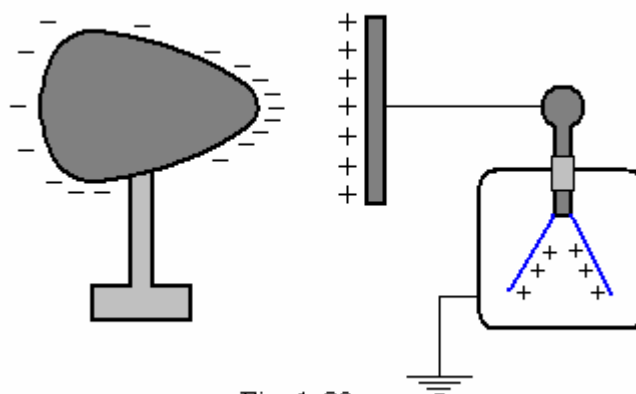


Fig. 1-32

Possiamo dare una spiegazione elettronica di questo fenomeno.

L'aria che ci circonda è sempre debolmente ionizzata, cioè i suoi atomi sono divisi in ioni positivi e ioni negativi. Tale ionizzazione è dovuta a varie cause tra le quali ricordiamo: i raggi ultravioletti, la radioattività dei minerali, le fiamme della combustione e le scariche elettriche dovute ai fulmini.

Si tratta di una ionizzazione atomica, cioè non molecolare. La ionizzazione dell'aria è continua; ma siccome gli ioni positivi tendono a ricombinarsi con gli elettroni, si raggiunge infine una condizione di equilibrio per cui il numero dei nuovi ioni che si formano è uguale a quello degli ioni che si ricombinano. In tal modo la ionizzazione dell'aria raggiunge un livello costante.

Ora, nei conduttori a punta le cariche elettriche si addensano sulle punte, dove si forma un forte campo elettrico. Nel nostro caso, questo campo attrae fortemente gli ioni positivi; mentre questi ioni precipitano sul conduttore urtano degli atomi neutri e li dividono in altri ioni positivi ed elettroni negativi. A loro volta questi nuovi ioni positivi sono attratti dal conduttore e urtano altri atomi mentre gli elettroni vengono respinti.

Naturalmente anche gli elettroni urtano contro gli atomi neutri e li dividono. Si ha dunque una valanga di ioni positivi che cadono sul conduttore elettrizzato negativamente, neutralizzando la sua carica e una valanga di elettroni che cadono sulla lastra neutralizzando la sua carica positiva.

Per questo motivo le foglioline dell'elettroscopio si chiudono rapidamente, indicando che la carica positiva della lastra va diminuendo.

All'atto pratico possiamo dire che si ha una specie di vento elettrico formato da cariche (negative) che sfuggono dalla punta del conduttore e che vanno a neutralizzare di segno contrario della lastra.

Nel caso di un mulinello elettrico con carica negativa si dice, erroneamente, che gli elettroni sfuggono dalle punte e per il principio di azione e reazione il mulinello ruota in senso contrario. In realtà il moto del mulinello è dovuto agli ioni positivi che cadono sulle punte e spingono in avanti la girandola. Sul potere delle punte si basa il funzionamento di alcune macchine elettriche come la macchina elettrostatica di Ramsden e quella di Van der Graaff.

N. 22 - Capacità elettrica di un conduttore isolato

Consideriamo un conduttore isolato e lontano da altri conduttori e supponiamo che esso abbia una carica elettrica Q . Come sappiamo questa carica è tutta distribuita sulla superficie del conduttore (esperienza di Cavendish), anche se in modo non uniforme e il potenziale V è costante in ogni punto interno e della superficie (vedi fig. 1-33).

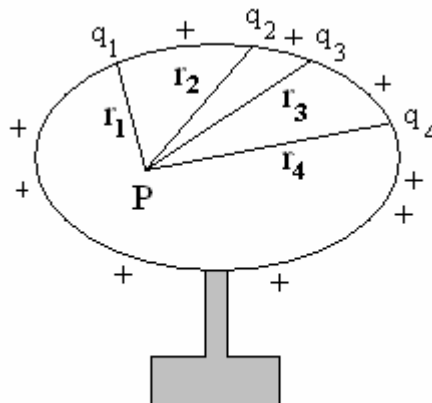


Fig. 1-33

Se il conduttore è lontano da altri conduttori, come abbiamo supposto, il suo potenziale V è uguale alla somma dei potenziali generati in un qualsiasi punto P dalle singole cariche distribuite sulla superficie del conduttore stesso e si ha la formula

$$(1) \quad V(P) = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2} + k \frac{q_3}{r_3} + \dots + k \frac{q_n}{r_n} .$$

Se ora raddoppiamo la carica Q , raddoppiano le cariche $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$

distribuite su ogni punto della superficie, raddoppia ogni termine della formula (1) e quindi raddoppia il potenziale V del conduttore .
 Se triplichiamo la carica Q anche il potenziale V diventa tre volte maggiore e quindi possiamo dire che il rapporto $\frac{Q}{V}$ è costante; quindi

$$(2) \quad \frac{Q}{V} = \text{cost} , \quad \text{ossia} \quad \frac{Q}{V} = C .$$

Questa costante si indica con la lettera C , si dice **capacità elettrica** del conduttore e dipende solo dalle caratteristiche geometriche di questo.
 Possiamo quindi dare la seguente definizione:

“ Si dice capacità di un conduttore isolato il rapporto costante tra la sua carica Q e il potenziale V che esso assume “.

La formula (2) ci dice che, a parità di carica, la capacità di un conduttore è inversamente proporzionale al suo potenziale. Ne segue che se diamo cariche uguali a due conduttori, quello che assume minor potenziale ha maggiore capacità.

Se nella (2) si pone $V = 1 \text{ Volt}$ si ha

$$C = Q ,$$

cioè la capacità di un conduttore è misurata dalla carica che esso richiede per assumere il potenziale di 1 Volt .

Nel sistema MKSA l'unità di capacità si chiama Farad ($=F$). Dalla formula

$$C = \frac{Q}{V} \text{ si ha}$$

$$(3) \quad 1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} ,$$

cioè: **il Farad è la capacità di un conduttore che richiede la carica di un Coulomb per assumere il potenziale di 1 Volt .**

In realtà questa unità di misura è molto grande, come si potrebbe vedere; per questo motivo si usano i suoi sottomultipli. Essi sono il microfarad (μF) e il micromicrofarad o picofarad ($\mu\mu F$ o pF), per i quali si ha:

$$1\mu F = 10^{-6} \text{ Farad} , \quad 1\mu\mu F = 1pF = 10^{-12} \text{ Farad} .$$

Capacità di una sfera isolata

Anche la capacità di una sfera isolata è data dal rapporto fra la sua carica Q e il potenziale V , cioè $C = \frac{Q}{V}$.

$$\text{Poiché } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad \text{si ha} \quad C = \cancel{Q} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R}{\cancel{Q}}$$

$$\text{ossia} \quad (4) \quad C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R ,$$

cioè la capacità di una sfera isolata è proporzionale al suo raggio.

Dalla (4) possiamo ricavare il raggio della sfera che ha la capacità $C = 1\text{Farad}$. Si ha :

$$1 = 4\pi\epsilon_0 \cdot R , \quad \text{ossia} \quad 1 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} R ,$$

$$\text{infine} \quad R = 9 \cdot 10^9 \text{ m} = 9 \cdot 10^6 \text{ Km} ,$$

ossia: **il Farad è la capacità di una sfera isolata che ha il raggio di 9 milioni di chilometri.**

N. 23 - Elementi da cui dipende la capacità di un conduttore

Con un elettrometro possiamo verificare sperimentalmente che si hanno le seguenti proprietà.

La capacità di un conduttore elettrizzato:

- 1) varia con la sua forma;
- 2) cresce con l'aumentare della superficie;
- 3) aumenta se avviciniamo al conduttore un altro conduttore;
- 4) aumenta ancor più se colleghiamo il secondo conduttore a terra;
- 5) subisce un ulteriore aumento se interponiamo un corpo isolante fra i due conduttori.

Spieghiamo il punto 2) (fig. 1-34); gli altri punti hanno una spiegazione analoga.

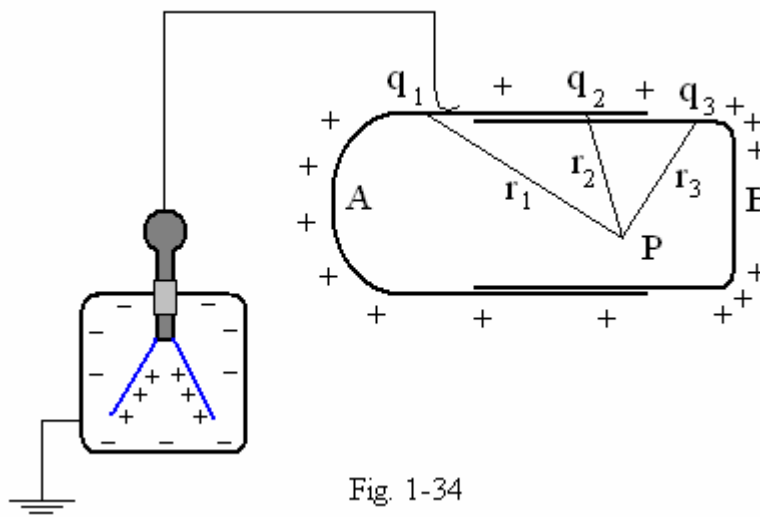


Fig. 1-34

Prima spiegazione. Consideriamo un conduttore elettrizzato M collegato con un elettroscopio, e sia Q la sua carica. Il conduttore è costituito da due cilindri, con le estremità arrotondate, che si possono incastrare fra di loro. Se ora sfiliamo un poco i due cilindri, notiamo che le foglioline dell'elettroscopio si chiudono un poco. Facciamo vedere che ciò è dovuto al fatto che il potenziale V del conduttore M diminuisce.

Infatti, il potenziale del conduttore è uguale alla somma dei potenziali generati in un punto interno P dalle cariche distribuite sulla sua superficie. Quando sfiliamo i due cilindri, le distanze dal punto P aumentano e quindi i potenziali generati dalle singole cariche diminuiscono e così diminuisce anche il potenziale totale V . **Ne segue che la parziale chiusura delle foglioline dell'elettroscopio è da attribuirsi proprio a questa diminuzione di potenziale. L'elettroscopio, quindi, funziona come elettrometro:** infatti, se facciamo strisciare il punto di contatto del filo sul conduttore, la divergenza delle foglioline dell'elettroscopio non varia. Ciò ci conferma che questa divergenza caratterizza il potenziale del conduttore con cui l'elettroscopio è collegato

Conclusione: “Quando la superficie di un conduttore elettrizzato aumenta e la sua carica Q rimane costante, il potenziale V del conduttore diminuisce e dalla formula $V = \frac{Q}{C}$ si ricava che la capacità C aumenta”.

Seconda spiegazione. Un conduttore elettrizzato genera un campo elettrico \vec{E} e il potenziale del conduttore è misurato dal lavoro che le forze del

campo compiono per trasportare la carica unitaria positiva q da un punto qualsiasi della sua superficie fino ai limiti del campo.

Teniamo anche presente che la forza \vec{F} che agisce sulla carica esploratrice posta in un punto P del campo è uguale alla somma delle forze esercitate dalle singole cariche distribuite sul conduttore.

Se ora sfiliamo i due cilindri, le cariche che essi hanno si distanziano e si allontanano dal punto P . **Ne segue che in tal punto diminuisce la forza \vec{F} che agisce sulla carica unitaria e quindi diminuisce anche il lavoro che la forza compie per trasportare la carica fino ai limiti del campo. Ricordando che il potenziale V del conduttore è dato dalla formula**

$$V_P = \frac{L_{P\infty}}{q},$$

si conclude che quando diminuisce il lavoro $L_{P\infty}$ diminuisce anche il potenziale V del conduttore. Possiamo dire pertanto che la parziale chiusura delle foglioline dell'elettroscopio è da attribuirsi proprio a questa diminuzione di potenziale.

Poiché la carica Q distribuita sul conduttore rimane costante, la formula

$$V = \frac{Q}{C}$$

ci dice che, al diminuire del potenziale, la capacità C del conduttore aumenta, essendo essa inversamente proporzionale al potenziale.

Spieghiamo ora i punti 3), 4) e 5).

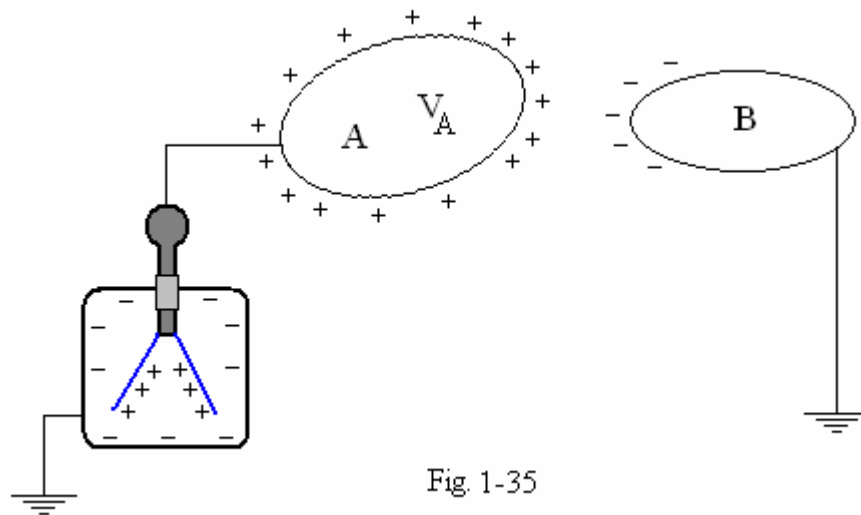


Fig. 1-35

Consideriamo un conduttore elettrizzato A , collegato con un elettrometro ma lontano da altri conduttori (fig. 1-35); sia Q la sua carica, V_A il potenziale che esso assume e C la sua capacità, quindi $C = \frac{Q}{V_A}$.

Se avviciniamo ad A un altro conduttore B , vediamo che le foglioline dell'elettrometro si chiudono un poco, cioè il potenziale V_A diminuisce, mentre la capacità C , essendo inversamente proporzionale al potenziale, aumenta.

Infatti, quando avviciniamo il secondo conduttore B , questo si elettrizza per induzione negativamente sulla parte vicina ad A e positivamente sulla parte lontana.

Le cariche negative generano nello spazio circostante un potenziale negativo V_1 , che fa abbassare il potenziale V_A del conduttore A , mentre le cariche positive generano un potenziale positivo che tende a farlo innalzare. Ma siccome queste sono più lontane, l'effetto che esse producono è minore di quello prodotto dalle cariche negative e quindi il potenziale V_A del primo conduttore complessivamente diminuisce, cioè

$$V_A - V_1 + V_2 = V' < V_A.$$

Poiché la carica Q del conduttore A è rimasta invariata, la formula

$C = \frac{Q}{V'}$ ci dice che la capacità C è aumentata rispetto al valore iniziale.

Se ora vogliamo riportare il potenziale del conduttore A da V' a V_A dobbiamo fornire ad esso una nuova carica, come si deduce dalla formula

$$V' = \frac{Q}{C}.$$

Infatti, poiché in questa operazione la capacità C rimane costante, aumentando la carica Q possiamo fare in modo che il potenziale V' riacquisti il primitivo valore V_A . In altre parole, a parità di potenziale il conduttore A possiede una carica maggiore quando esso è vicino ad un conduttore neutro che non quando esso ne è lontano.

Se ora colleghiamo il conduttore B a terra, le cariche positive indotte vengono neutralizzate dagli elettroni del suolo. Il conduttore elettrizzato A , allora, subisce solo l'effetto delle cariche negative: in tal modo il suo potenziale V diminuisce ancor più, mentre la capacità C aumenta maggiormente.

Infine interponiamo fra i due conduttori A e B una lastra di materiale isolante (fig. 1-36).

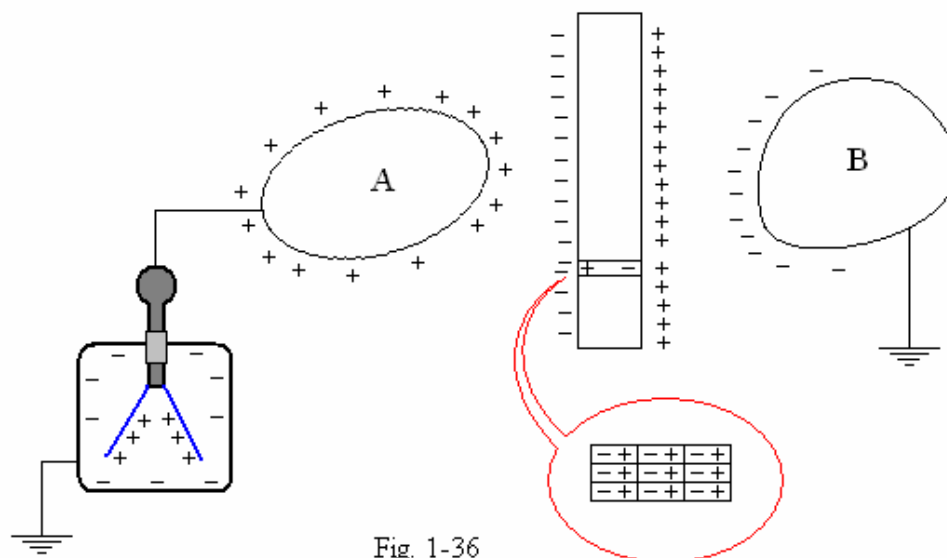


Fig. 1-36

Gli atomi della lastra si polarizzano per orientamento perché vengono a trovarsi in un campo elettrico esterno: le cariche di polarizzazione intermedie si neutralizzano a vicenda perché hanno segno contrario e così rimangono solo le cariche negative su una faccia della lastra e quelle positive sull'altra faccia. Precisamente, la faccia più vicina al conduttore A si elettrizza negativamente, mentre quella più lontana si elettrizza positivamente.

E siccome l'effetto delle cariche negative è maggiore, il potenziale del conduttore A subisce una ulteriore diminuzione e il fenomeno si ripete come prima.

N. 24 – L'elettroscopio come elettrometro

Tratteremo l'argomento ripetendo molte considerazioni svolte nel precedente paragrafo.

Consideriamo un conduttore elettrizzato M e sia Q la sua carica. Il conduttore è costituito da due cilindri A e B, con le estremità arrotondate, che si possono incastrare fra di loro (fig. 1-37).

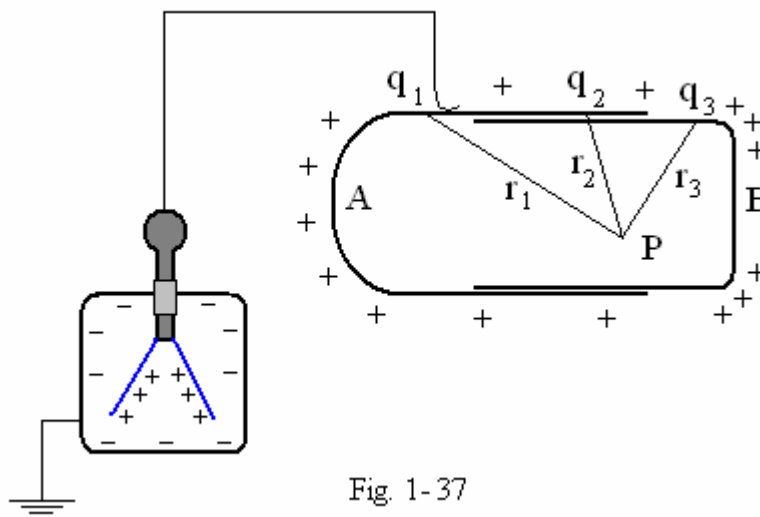


Fig. 1-37

Se colleghiamo il conduttore M con l'asticella di un elettroscopio, essi formano un unico conduttore che avrà la carica Q , un certo potenziale V e una certa capacità C e possiamo scrivere

$$C = \frac{Q}{V}, \text{ da cui} \quad V = \frac{1}{C} Q.$$

Naturalmente le foglioline dell'elettroscopio divergono. Se ora aumentiamo la carica Q del conduttore, cresce la divergenza delle foglioline e cresce anche il potenziale V , essendo esso proporzionale alla carica Q . Questa divergenza permette all'elettroscopio di misurare il potenziale V del conduttore stesso, **cioè l'elettroscopio funziona come elettrometro**. Infatti, se facciamo strisciare la punta di contatto del filo sul conduttore, la divergenza delle foglioline dell'elettroscopio non varia, anche quando la punta striscia sulle parti appuntite; ciò ci conferma che essa è un indice che caratterizza il potenziale del conduttore con cui l'elettroscopio è collegato.

Se ora sfiliamo un poco i due cilindri, notiamo che la divergenza delle foglioline diminuisce. Facciamo vedere che ciò è dovuto ad una diminuzione di potenziale del conduttore.

Possiamo dare al riguardo due spiegazioni.

Prima spiegazione. Il potenziale del conduttore M è uguale alla somma dei potenziali generati in un punto interno P dalle cariche distribuite sulla sua superficie. Quando sfiliamo i due conduttori, le distanze aumentano e i potenziali generati dalle singole cariche diminuiscono e quindi diminuisce

il potenziale totale. Ne segue che la parziale chiusura delle foglioline dell'elettroscopio è da attribuirsi proprio a questa diminuzione di potenziale. L'elettroscopio, quindi, funziona come elettrometro.

Poiché la carica Q distribuita sul conduttore rimane costante, la formula $V = Q/C$ ci dice che, al diminuire del potenziale, la capacità C del conduttore aumenta.

Seconda spiegazione. Il potenziale di un conduttore è misurato dal lavoro che le forze del campo compiono per trasportare la carica unitaria positiva q da un punto qualsiasi del conduttore fino ai limiti del campo. Inoltre in ogni punto P del campo agisce una forza risultante \vec{F} sulla carica esploratrice q .

Se ora sfiliamo i due conduttori, le cariche che essi hanno si distanziano e si allontanano dal punto P ; ne segue che in tal punto diminuisce la forza \vec{F} che agisce sulla carica unitaria e quindi diminuisce anche il lavoro che la forza compie per trasportare la carica fino ai limiti del campo. Ma allora il potenziale V del conduttore diminuisce, poiché per i suoi punti si ha

$V_P = \frac{L_{P\infty}}{q}$. Ancora una volta concludiamo che la parziale chiusura delle

foglioline dell'elettroscopio è da attribuirsi proprio a questa diminuzione di potenziale. La capacità C del conduttore, invece, aumenta, poiché essa è inversamente proporzionale al potenziale.

Per evitare che l'elettrometro sia influenzato dal campo elettrico generato dal conduttore, esso viene racchiuso in una custodia metallica, munita di una finestrella, che funziona da schermo elettrico.

Dobbiamo osservare che l'elettrometro non è altro che un condensatore in cui l'armatura interna è l'asticina con le foglie e l'armatura esterna è la custodia metallica, che, di regola, è collegata a terra. In tal modo la d.d.p. tra le armature del condensatore coincide con la d.d.p. tra il conduttore e la terra ed è proprio questa differenza che lo strumento sta a misurare.

Inoltre, se indichiamo con q la carica dell'asticina, si ha

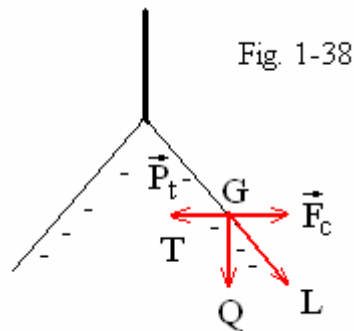
$$q = C_S \cdot V$$

è uguale al prodotto del potenziale V che essa assume rispetto alla terra per la capacità C_S dello strumento.

Questa carica q viene sottratta al conduttore A con cui l'elettrometro è collegato e ne fa abbassare il potenziale.

Per questo motivo, per non falsare la misura del potenziale, è necessario che lo strumento assorba solo una piccola carica elettrica, cioè che la sua capacità sia piccola in confronto a quella del conduttore.

Infine, è bene precisare che la scala di un elettrometro a foglie o ad ago non è lineare. Infatti la forza peso di ciascuna foglia ha una componente che si oppone alla forza elettrica di repulsione fra le cariche delle foglioline ed è uguale e contraria a questa (fig. 1-38). Come si vede dalla figura, questa componente $\vec{P}_t = \vec{G}\vec{T}$ cresce con la divergenza delle foglie, ma non in maniera lineare; infatti si ha $P_t = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha$.



Infine, dobbiamo fare un'altra osservazione: man mano che le foglie divergono, variano le caratteristiche geometriche dello strumento e quindi varia anche la sua capacità.

Per tutti questi motivi possiamo dire che alla formula

$$V = \frac{1}{C}Q$$

non può corrispondere una scala lineare. Ne segue che lo strumento non risulta molto preciso e deve essere tarato per mezzo di potenziali già noti.

N. 25 - Condensatori elettrici

Consideriamo un conduttore elettrizzato A collegato con un elettrometro (fig. 1-39).

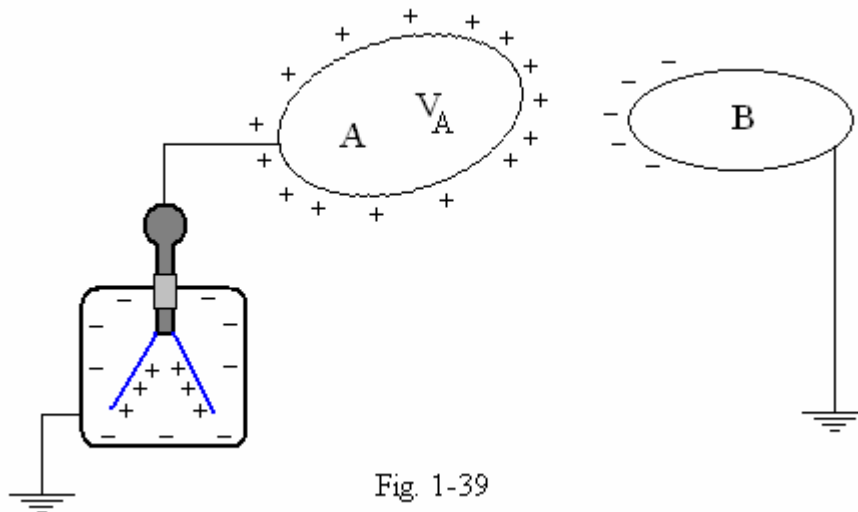


Fig. 1-39

Sia Q la carica, V il potenziale del sistema e C la capacità, ove $C = \frac{Q}{V}$.

Come sappiamo, se avviciniamo un altro conduttore B scarico, il potenziale V del conduttore A diminuisce (infatti le foglioline dell'elettrometro si chiudono un poco) e quindi la sua capacità aumenta e assume il valore

$$C' = \frac{Q}{V'} \quad \text{da cui si ricava} \quad (1) \quad V' = \frac{Q}{C'}.$$

La (1) ci dice che, se vogliamo riportare il conduttore A al potenziale V iniziale, dobbiamo aumentare la sua carica elettrica. Infatti, poiché la capacità C' rimane costante, aumentando Q aumenta anche V' .

In altre parole, a parità di potenziale, **il conduttore A ha una carica maggiore quando esso è in presenza di un altro conduttore che non quando è isolato. In altre parole, il conduttore A può acquistare una grande carica elettrica senza raggiungere un potenziale molto elevato.**

Su questa proprietà si basano i condensatori elettrici.

Un condensatore, quindi, è un sistema di grande capacità elettrica formato da conduttori, detti armature, separati dal vuoto o da un dielettrico.

Fra i condensatori più comuni ricordiamo: a) i condensatori piani, costituiti da due lastre piane e parallele poste una di fronte all'altra (fig. 1-40);

b) i condensatori cilindrici, costituiti da due cilindri coassiali di raggi diversi, disposti in modo che quello di raggio minore sia interno all'altro.

Per caricare un condensatore basta collegare le sue armature con i poli di una batteria di pile. L'armatura collegata con il polo positivo si dice

armatura interna; quella collegata con il polo negativo si dice armatura esterna e di regola viene messa a terra.

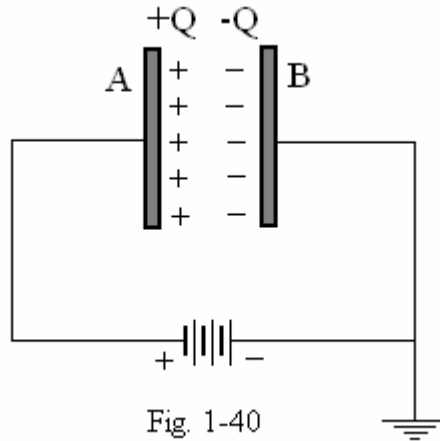


Fig. 1-40

Il condensatore si può caricare anche collegando un'armatura con una sorgente di elettricità; in tal caso l'altra armatura si elettrizza per induzione di segno contrario.

La capacità di un condensatore è data dalla formula

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1},$$

dove V_2 e V_1 sono rispettivamente i potenziali dell'armatura positiva e di quella negativa e Q la carica di una di esse presa in valore assoluto.

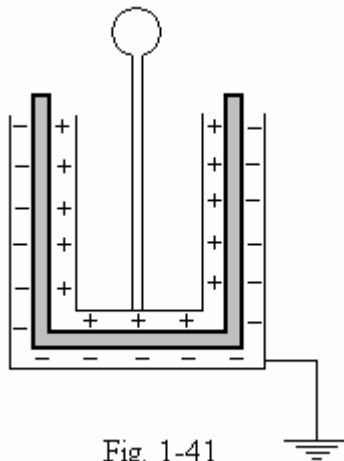


Fig. 1-41

Questa definizione di capacità è giustificata dal fatto che il rapporto indicato dalla formula, come vedremo, è costante; in altre parole la capacità non dipende dalla carica Q fornita alle armature.

Fra i vari tipi di condensatori dobbiamo ricordare quello a capacità variabile, usato negli apparecchi radio, e la bottiglia di Leyda. Il più antico condensatore è proprio la bottiglia di Leyda (fig. 1-41). Esso è costituito da un vaso di vetro rivestito sia all'interno che all'esterno da due cilindri di alluminio, o di altro metallo, che costituiscono le due armature. Il vetro, invece, rappresenta il dielettrico. Fra le armature della bottiglia possiamo stabilire d.d.p. che raggiungono alcune migliaia di Volt.

N. 26 – Elettroscopio condensatore di Volta

L'elettroscopio condensatore di Volta è uno strumento che ci permette di misurare differenze di potenziale molto piccole, che non potrebbero essere misurate con altri strumenti. Il suo funzionamento si basa sul fatto che la capacità di un conduttore aumenta quando esso è posto vicino ad un altro conduttore.

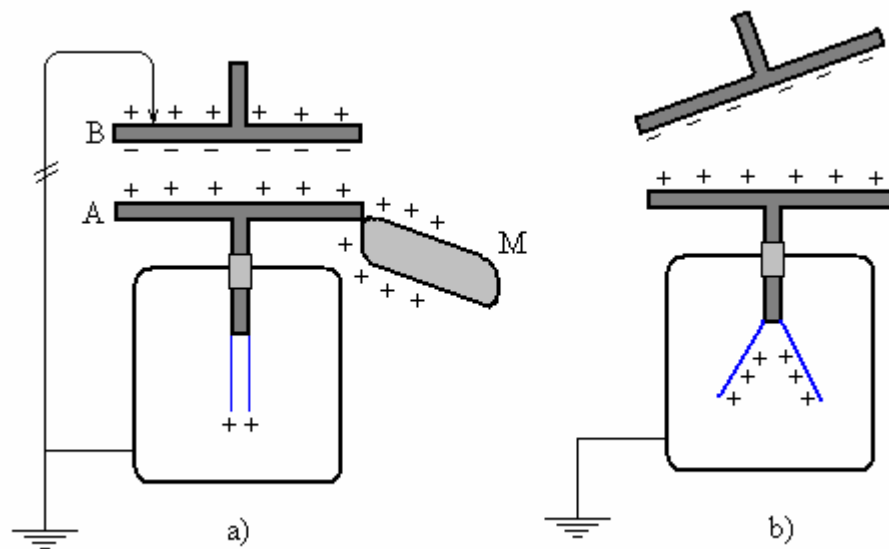


Fig. 1-42

Esso è un comune elettroscopio a foglie racchiuso in una scatola metallica (fig. 1-42a): l'astina è collegata al piatto inferiore di un condensatore piano costituito da due dischi metallici (per es. di rame) separati da uno strato di vernice isolante. Si deve fare attenzione che lo strato sia molto sottile e asciutto.

Il piatto superiore B è munito di un manico isolante ed è collegato a terra per aumentare la capacità del condensatore. Anche la custodia metallica è collegata a terra mediante un filo.

Mettiamo ora a contatto il disco inferiore con il conduttore M di cui si vuole misurare il potenziale V rispetto alla terra (cioè, la d.d.p. rispetto al suolo); allora una notevole carica Q passerà da M al disco e all'asticina, finché essi non raggiungano lo stesso potenziale V.

Possiamo quindi scrivere:

$$Q = C V ;$$

ma le foglioline rimangono chiuse perché lo strumento non riesce a misurare piccole d.d.p.

Togliamo ora il contatto fra il piatto inferiore A e il conduttore M e il contatto fra il piatto superiore B e la terra e poi solleviamo il piatto B. Si osserva allora che le foglie dell'elettroscopio divergono in modo sensibile. Infatti, quando si alza il piatto superiore, la capacità del condensatore diminuisce notevolmente; ma poiché la carica Q del piatto inferiore è rimasta invariata, il potenziale V dello stesso piatto B aumenta e le foglioline dell'elettroscopio divergono (fig. 1-42b).

Se indichiamo con C' e V' i nuovi valori della capacità e del potenziale del piatto B possiamo scrivere

$$Q = C V = C' V' , \text{ da cui si ha } (1) \quad V' = \frac{C}{C'} V ;$$

la (1) ci dice che l'elettroscopio condensatore di Volta è tanto più sensibile quanto maggiore è il rapporto C/C'.

Praticamente, con questo strumento Volta è riuscito a moltiplicare piccole differenze di potenziale, rendendo così possibile le loro misure.

N. 27 – Energia di un condensatore

L'energia di un condensatore è il lavoro che dobbiamo compiere per caricarlo, ossia per stabilire una d.d.p. fra le sue armature (fig. 1-43). In teoria, per caricare un condensatore si devono trasportare elettroni da un'armatura all'altra in modo da stabilire fra di esse una differenza di potenziale. Effettuata l'operazione, l'armatura A avrà una certa carica +Q mentre l'armatura B avrà la carica -Q.

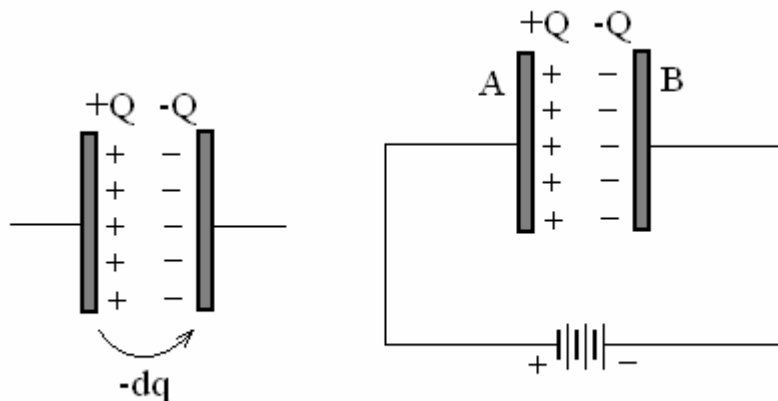


Fig. 1-43

Indichiamo con $-dq$ la carica trasportata dall'armatura A all'armatura B quando fra di esse esiste la d.d.p. $V = V_2 - V_1$.

Il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico esistente fra le due armature sarà allora

$$dL' = -dq(V_2 - V_1) , \quad \text{ossia} \quad dL' = -dq \cdot V ,$$

ed è negativo perché il trasporto della carica è compiuto contro le forze del campo.

Il lavoro elementare dL che dobbiamo compiere noi per trasportare la stessa carica $-dq$ sarà ovviamente uguale ma di segno contrario, ossia

$$(1) \quad dL = dq \cdot V , \quad \text{ove} \quad V = V_2 - V_1 .$$

Praticamente, poi, questo lavoro è compiuto dalla pila collegata con le armature del condensatore a spese della sua energia chimica.

Il lavoro totale che dobbiamo compiere per trasportare complessivamente la carica $-Q$ non sarà tuttavia

$$L = Q (V_2 - V_1) .$$

Infatti la d.d.p. non è costante, ma va crescendo gradualmente man mano che trasportiamo elettroni dall'armatura A all'armatura B.

Ecco il ragionamento da fare.

Indichiamo con $V = V_2 - V_1$ la differenza di potenziale fra le due armature quando esse hanno la carica di valore assoluto q ; allora la capacità del condensatore sarà

$$C = \frac{q}{V}, \text{ da cui} \quad (2) \quad V = \frac{1}{C}q,$$

e sostituendo nella formula (1) si ottiene

$$(3) \quad dL = \frac{1}{C}q \cdot dq.$$

Pertanto il lavoro che dobbiamo compiere per trasportare la carica $-Q$ dalla armatura A (che è quella positiva) all'altra sarà dato dall'integrale

$$L = \int_0^{-Q} \frac{1}{C}q \, dq = \frac{1}{C} \int_0^{-Q} q \, dq = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2}q^2 \right]_0^{-Q},$$

$$\text{infine} \quad (4) \quad L = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

Questo lavoro fornisce anche l'energia W del condensatore e viene restituito al momento della scarica. Poiché $Q = CV$ possiamo scrivere

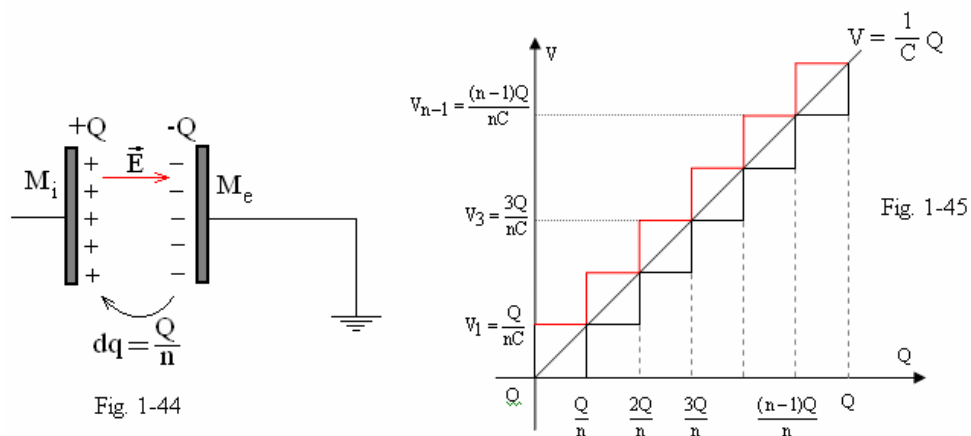
$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} QV \text{ Joule}.$$

In pratica possiamo caricare un condensatore collegando le sue armature ai poli di una batteria di pile: in tal caso l'armatura collegata con il polo positivo si elettrizza positivamente, mentre l'altra assume carica negativa e fra le due armature si stabilisce una d.d.p. $V_2 - V_1$. Ovviamente il lavoro di carica viene compiuto dalla pila a spese della propria energia chimica.

N. 28 – Energia di un condensatore; II° metodo.

Possiamo calcolare il lavoro di carica di un condensatore anche con il seguente procedimento grafico.

Collegiamo a terra l'armatura esterna M_e del condensatore, in modo che il suo potenziale sia sempre $V_0 = 0$, e immaginiamo di trasportare cariche positive dall'armatura esterna a quella interna (fig. 1-44).



Se ad un certo istante l'armatura positiva ha la carica q ed ha, rispetto al suolo, il potenziale V , la capacità del condensatore sarà

$$C = \frac{q}{V}, \quad \text{da cui} \quad V = \frac{1}{C} q.$$

Se riportiamo la carica q in ascisse e il potenziale V in ordinate, il grafico della funzione $V = \frac{1}{C} q$ sarà una retta passante per l'origine delle coordinate (fig. 1-45).

Immaginiamo ora di dividere il processo di carica in tante fasi elementari in ognuna delle quali la d.d.p. rimanga praticamente costante: sia $q = \frac{Q}{n}$ la carica elementare trasportata in ogni fase e Q la carica complessivamente trasportata.

In tal modo il potenziale dell'armatura positiva riferito al suolo va crescendo gradualmente assumendo i valori V_1, V_2, V_3, \dots ecc.

I lavori elementari che il generatore collegato con il condensatore compie nelle varie fasi per trasportare la carica $q = \frac{Q}{n}$ dall'armatura negativa a quella positiva sono dati rispettivamente dai prodotti

$$L_1 = qV_1,$$

$$L_2 = qV_2,$$

$$L_3 = qV_3, \quad \text{ecc.}$$

Ogni lavoro è rappresentato geometricamente dall'area di un rettangolo di base $\frac{Q}{n}$ e altezza V_1, V_2, V_3 , ecc. e quindi il lavoro totale che il generatore deve compiere per caricare il condensatore è dato dall'area del plurirettangolo disegnato in figura e, al limite, dall'area del triangolo OAB. Per il lavoro totale si ottiene in tal modo l'espressione

$$(1) \quad L = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} Q \cdot V,$$

ove V è la d.d.p. tra le due armature alla fine del processo di carica.

Poiché $V = \frac{Q}{C}$ dalla (1) si ottiene $L = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{Q}{C},$

ossia
$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

Ricordando poi che $Q = C V$ si ottengono le altre due espressioni

$$L = \frac{1}{2} C \cdot V^2 \quad \text{e} \quad L = \frac{1}{2} Q V.$$

Il lavoro necessario a caricare il condensatore si può determinare anche calcolando un opportuno limite con i metodi dell'analisi matematica.
Vediamo come è possibile.

Riportiamo sull'asse Q i valori crescenti della carica che l'armatura positiva del condensatore acquista ad ogni trasferimento elementare. Questi valori sono dati dai punti di ascisse

$$\frac{1}{n}Q, \frac{2}{n}Q, \frac{3}{n}Q, \dots, \frac{n-1}{n}Q, \frac{n}{n}Q.$$

In corrispondenza a questi valori della carica, i potenziali dell'armatura rispetto al suolo assumono i valori

$$V_1 = \frac{1}{C} \frac{Q}{n}, V_2 = \frac{1}{C} \frac{2Q}{n}, V_3 = \frac{1}{C} \frac{3Q}{n}, \dots, V_{n-1} = \frac{1}{C} \frac{(n-1)Q}{n}, V_n = \frac{1}{C} \frac{nQ}{n}.$$

Ricordiamo la formula del lavoro elettrico, $L = q(V - V_0)$, e teniamo presente che in ogni lavoro elementare viene trasferita la carica Q/n . Possiamo allora dire che il lavoro totale necessario a trasferire la carica Q da una armatura all'altra è:

$$L = \frac{1}{n^2} \frac{Q^2}{C} + \frac{2}{n^2} \frac{Q}{C} + \frac{3}{n^2} \frac{Q^2}{C} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \frac{Q^2}{C} + \frac{n}{n^2} \frac{Q^2}{C} .$$

Da qui si ricava successivamente:

$$L_t = \frac{Q^2}{n^2 C} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{Q^2}{n^2 C} \cdot \frac{(1+n)n}{2} ,$$

$$L_t = \frac{Q^2}{2C} \cdot \frac{1+n}{n} = \frac{Q^2}{2C} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) .$$

Quando le cariche trasportate da una armatura all'altra diventano molto piccole, possiamo operare un passaggio al limite per $n \rightarrow \infty$ e si ha:

$$L_t = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) , \text{ e infine } L_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

N. 29 – Elettrometri

L'elettrometro è uno strumento elettrostatico che ci permette di misurare differenze di potenziale, per questo motivo gli elettrometri di uso tecnico vengono detti volmetri elettrostatici.

Esistono due tipi fondamentali di elettrometri: 1) l'elettrometro assoluto; 2) l'elettrometro ad ago.

L'elettrometro assoluto, o di Lord Kelvin, **riconde la misura di una differenza di potenziale alla misura di una forza, per es. la forza peso, e pertanto non richiede di essere tarato per mezzo di potenziali noti**. In altre parole, questo strumento permette di ottenere la misura di una grandezza elettrica per mezzo delle misure di grandezze meccaniche.

L'elettrometro assoluto è costituito da un condensatore piano avente una armatura fissa e una mobile. L'armatura mobile è collegata al braccio di una bilancia e ne rappresenta uno dei piatti (fig. 1-46).

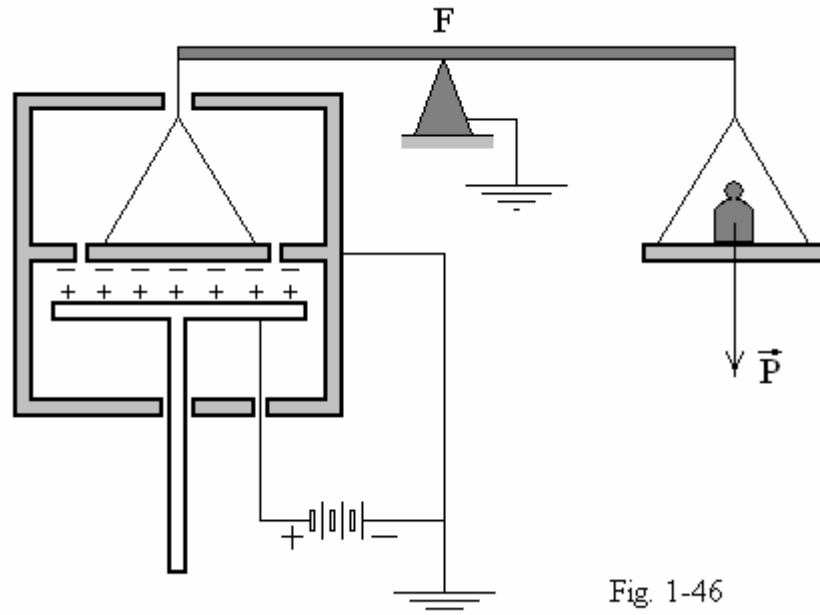


Fig. 1-46

Il piatto mobile è circondato dal così detto anello di guardia, ossia da una piastra metallica avente un foro in cui il piatto può scorrere. Anello di guardia e disco mobile sono connessi elettricamente fra di loro in modo da poterli mantenere sempre allo stesso potenziale. L'anello di guardia ha lo scopo di mantenere il campo elettrico uniforme anche in vicinanza del bordo del disco mobile, quando il condensatore viene caricato.

Per proteggere il sistema da campi elettrici esterni, il condensatore viene racchiuso in una scatola metallica, collegata a terra, che funge da schermo elettrostatico.

Anche il piatto mobile e l'anello di guardia sono collegati a terra; in tal modo tra questo piatto e la scatola metallica non esiste differenza di potenziale e quindi non esiste campo elettrico. **Il disco mobile non è allora soggetto a forze attrattive da parte della custodia e la sola forza attrattiva che esso risente è quella esercitata dal piatto inferiore del condensatore.**

Vogliamo ora trovare la condizione di equilibrio dell'elettrometro assoluto di Lord Kelvin, quando esso è stato caricato. A tale scopo, dobbiamo tener presente che l'energia elettrica totale del sistema risulta funzione della distanza x fra i due piatti.

Quando il piatto mobile si sposta di dx (avvicinamento), le forze elettrostatiche del campo compiono il lavoro $dL_{el} (> 0)$, il quale, per la conservazione dell'energia, ha luogo a scapito dell'energia elettrica totale del sistema; cioè

$$(1) \quad dW_{tot} + dL_{el} = 0 .$$

La condizione di equilibrio si ottiene imponendo che il lavoro delle forze elettrostatiche sia uguale e contrario al lavoro fatto dalla forza esterna F per lo stesso spostamento dx , cioè

$$dL_{el} = -Fdx$$

Sostituendo nella (1) si ha

$$dW_{tot} - Fdx = 0 , \quad \text{da cui} \quad (2) \quad F = \frac{dW_{tot}}{dx} .$$

Per trovare la condizione di equilibrio dobbiamo scrivere l'energia elettrica totale W_{tot} del sistema in funzione di x e sostituirla nella (2).

Bisogna ora distinguere due casi.

1° caso. L'elettrometro di Lord Kelvin viene fatto funzionare a carica costante; cioè la carica elettrica $|Q|$ che possiede ciascuno dei due piatti rimane costante al variare della distanza x del piatto mobile e ciò si ottiene isolando i due piatti.

In tal caso l'energia elettrostatica del sistema coincide con l'energia elettrostatica del condensatore e si ha

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} , \quad \text{cioè} \quad W_{tot} = \frac{1}{2} \frac{x}{\epsilon_0 S} Q^2$$

da cui
$$F = \frac{dW_{tot}}{dx} = \frac{1}{2\epsilon_0 S} Q^2 .$$

Ricordando che $Q^2 = C^2 V^2 = \left(\frac{\epsilon_0 S}{x} \right)^2 V^2$ si ha:

$$F = \frac{1}{2\epsilon_0 S} \cdot \frac{(\epsilon_0 S)^2}{x^2} V^2 , \quad (3) \quad F = \frac{dW_{tot}}{dx} = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} ;$$

da qui si ha $V^2 = \frac{2x^2 F}{\epsilon_0 S}$, ossia (4) $V = x \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}}$.

2° caso. L'elettrometro funziona a potenziale V_0 costante, ove V_0 è dato dalla formula

$$V_0 = \frac{Q}{C} .$$

Ora, poiché le armature tendono ad avvicinarsi per attrazione delle cariche, la capacità C del condensatore tende ad aumentare; e quindi il condensatore deve assorbire dall'esterno un'ulteriore carica dQ , affinché il potenziale V_0 rimanga costante.

Per trovare la forza esterna capace di equilibrare la forza di attrazione delle cariche elettriche distribuite sui piatti si potrebbe ora pensare di seguire questo procedimento. Si esprime l'energia elettrostatica del condensatore per mezzo della formula

$$W = \frac{1}{2} C V_0^2 ,$$

cioè in funzione della capacità C del condensatore. Se ora esprimiamo la capacità C per mezzo della distanza x fra i piatti si ottiene:

$$W = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x} V_0^2 .$$

Sostituendo nella (2) si otterrebbe la forza F che fa equilibrio all'attrazione dei piatti. Passando ai calcoli si avrebbe:

$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{d}{dx} (\epsilon_0 S x^{-1}) ,$$

e infine (5)
$$F = - \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2} .$$

Il ragionamento seguito ci fa trovare per la forza F un'espressione analoga alla (3), ma con il segno $-$, e ciò è assurdo.

Spieghiamo questa assurdità.

Quando l'elettrometro funziona a potenziale costante e la distanza x fra i piatti del condensatore diminuisce, il sistema subisce una variazione di energia elettrica totale dW_{tot} uguale alla somma algebrica seguente:

dW_{tot} = diminuzione dell'energia interna del generatore (dW_1) + aumento dell'energia elettrostatica del condensatore (dW_2).

1) La diminuzione dell'energia interna del generatore è uguale al lavoro, cambiato di segno, che il generatore stesso deve compiere per fornire la carica dQ all'armatura positiva del condensatore; quindi si ha

$$dW_1 = -V_0 dQ .$$

2) L'aumento dell'energia elettrostatica del condensatore è espresso da

$$dW_2 = d\left(\frac{1}{2} V_0 \cdot Q\right) = \frac{1}{2} V_0 dQ .$$

Quindi la variazione dell'energia elettrica totale è

$$dW_{\text{tot}} = dW_1 + dW_2 = -V_0 dQ + \frac{1}{2} V_0 dQ = -\frac{1}{2} V_0 dQ .$$

Essa si ritrova sotto forma di lavoro della forza equilibrante, cioè della forza esterna F . Quindi

$$dW_{\text{tot}} = -\frac{1}{2} V_0 \frac{dQ}{dx} dx = -\frac{1}{2} V_0 \frac{d}{dx} (C V_0) dx = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{dC}{dx} dx .$$

Si ricava (6)
$$\frac{dW_{\text{tot}}}{dx} = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{dC}{dx} .$$

Ricordando che $F = \frac{dW_{\text{tot}}}{dx}$ possiamo scrivere

$$F = \frac{dW_{\text{tot}}}{dx} = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{d(\epsilon_0 S x^{-1})}{dx} .$$

Infine si ha (7)
$$F = \frac{dW_{\text{tot}}}{dx} = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2} .$$

Si ritrova così la formula (3) già trovata nel funzionamento dell'elettrometro a carica costante. Come già ottenuto in precedenza, dalla (7) si ha

$$V_0^2 = \frac{2x^2 F}{\epsilon_0 S} , \text{ e da essa si ritrova } V_0 = x \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}} .$$

Nel seguito, quando tratteremo il funzionamento a potenziale costante di altri tipi di elettrometro, potremo prendere come variazione dell'energia elettrica totale del sistema l'espressione

$$dW_{\text{tot}} = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{dC}{dx} dx ,$$

ricordando che in questo caso l'applicazione del principio di conservazione dell'energia richiede un ragionamento più complesso di quello richiesto dal funzionamento a carica costante.

NOTARE

Quando l'elettrometro assoluto di Lord Kelvin funziona a potenziale costante, possiamo trovare la condizione di equilibrio anche con il seguente ragionamento. **Sappiamo che quando il piatto mobile si avvicina, la capacità C del condensatore aumenta; ne segue che, affinché il potenziale rimanga costante, una ulteriore carica dQ deve passare sull'armatura positiva del condensatore; e affinché ciò avvenga è necessario compiere il lavoro $V_0 \cdot dQ$.**

Quindi la pila deve fornire l'energia atta a compiere questo lavoro $V_0 dQ$.

L'aumento dell'energia elettrostatica del condensatore prodotto da questo aumento di carica è invece

$$dW_2 = d\left(\frac{1}{2} V_0 Q\right) = \frac{1}{2} V_0 \cdot dQ .$$

Possiamo quindi dire che l'energia fornita dalla pila per metà va ad aumentare l'energia de condensatore, l'altra metà si deve avere come lavoro delle forze elettrostatiche; cioè

$$(8) \quad V_0 dQ = \frac{1}{2} V_0 dQ + dL_{el}.$$

Ma il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche è uguale e contrario a quello a quello compiuto dalla forza peso F ; possiamo quindi dire che $dL_{el} = -Fdx$. Sostituendo nella (8) si ha

$$\frac{1}{2} V_0 dQ = -Fdx, \text{ da cui si ha } (9) \quad F = -\frac{1}{2} V_0 \frac{dQ}{dx}.$$

Poiché $Q = CV_0$ con $V_0 = \text{cost}$, dalla (9) si ha:

$$F = -\frac{1}{2} V_0^2 \cdot \frac{dC}{dx}.$$

Poiché $C = \epsilon_0 S \cdot x^{-1}$, facendo la derivata si ottiene

$$F = -\frac{1}{2} V_0^2 \cdot \epsilon_0 S \frac{dx^{-1}}{dx}, \text{ da cui} \quad F = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2},$$

e infine
$$V_0 = \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}}.$$

Ancora una volta si ritrova la formula che dà la d.d.p. fra i due piatti dell'elettrometro.

N. 30 - Procedimento elementare per la determinazione dei potenziali

Esistono procedimenti elementari di calcolo che ci permettono di determinare la d.d.p. fra le armature di un elettrometro di Lord Kelvin. Infatti, in condizioni di equilibrio, sia che esso funzioni a carica costante che a potenziale costante, possiamo scrivere:

$$(1) \quad F_{eletttrica} = F_{meccanica}.$$

La forza elettrica si ottiene calcolando la forza di attrazione che il campo generato dal piatto fisso esercita sulla carica $|Q| = \sigma S$ distribuita sul piatto mobile; precisamente si ha

$$(2) \quad F_{el} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \sigma S = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 \epsilon_0 S .$$

In condizioni di equilibrio, la forza meccanica F esercitata dalla forza peso sul piatto mobile deve avere anche essa il valore (2).

Ricordiamo ora che il campo elettrico esistente fra le due armature è dato dall'espressione $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ e che inoltre si ha $E = \frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V}{d}$, essendo d la distanza fra le due armature. Per la forza F possiamo quindi scrivere:

$$F = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 S , \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{2} \frac{V^2}{d^2} \epsilon_0 S , \quad \rightarrow \quad V^2 = \frac{2d^2 F}{\epsilon_0 S} ,$$

infine si ha
$$V = d \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}} .$$

Come si vede, la forza necessaria a mantenere la bilancia in equilibrio ci permette di misurare la differenza di potenziale V incognita.

N. 31 - Scarica di un condensatore attraverso una resistenza.

In un circuito elettrico è inserito un condensatore C e una resistenza R (fig. 1- 47).

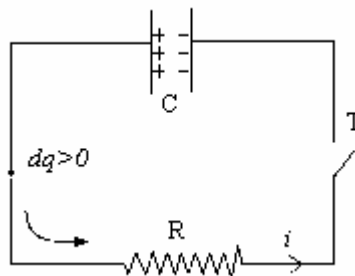


Figura 1-47

Sia $t = 0$ l'istante in cui l'interruttore T viene chiuso, $Q(t)$ la carica in valore assoluto di una delle due armature del condensatore all'istante t e $V(t)$ la differenza di potenziale. Come sappiamo, si dice capacità del condensatore il rapporto costante

$$(1) \quad \frac{Q}{V} = C \quad \text{da cui} \quad Q(t) = CV(t) .$$

Quando si chiude l'interruttore T il condensatore comincia a scaricarsi e il passaggio di una carica $dq > 0$ attraverso il circuito fa abbassare di dV la d.d.p. fra le sue armature. Possiamo pertanto scrivere, in valore e segno,

$$dq = - C dV \quad \text{da cui} \quad (2) \quad i dt = - C dV .$$

Si tenga presente che la carica dq che passa attraverso il circuito è uguale alla diminuzione di carica dQ delle armature del condensatore cambiata di segno, cioè $dq = -dQ$.

Poiché $i(t) = V(t)/R$, dalla (2) si ricava

$$\frac{V(t)}{R} dt = -CdV \quad \rightarrow \quad (3) \quad \frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC} dt .$$

Integrando fra gli estremi 0 e t si ottiene:

$$\int_{V_0}^{V_t} \frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt ,$$

$$\ln \frac{V(t)}{V_0} = -\frac{1}{RC} t \quad \rightarrow \quad \frac{V(t)}{V_0} = e^{-\frac{t}{RC}} ,$$

$$\text{infine:} \quad (4) \quad V(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} .$$

Come si vede, la d.d.p. fra le armature del condensatore diminuisce esponenzialmente e per $t \rightarrow \infty$ tende asintoticamente a zero.

La costante $\tau = RC$ è detta costante di tempo capacitiva.

Poiché $V_0 = \frac{Q_0}{C}$ e $V(t) = \frac{Q(t)}{C}$ si ricava anche $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.

N. 32 - Carica di un condensatore attraverso una resistenza.

In un circuito elettrico è inserito un condensatore di capacità elettrica C , una resistenza R e un generatore di f.e.m. f costante, come per es. una batteria di pile (fig.1-48).

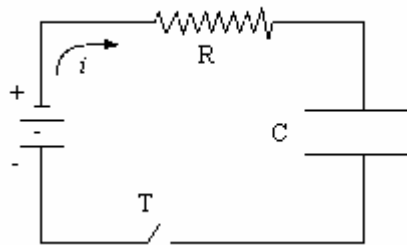


Figura 1-48

Quando si chiude il tasto T , al condensatore arriva una carica dq che genera una differenza di potenziale dV fra le sue armature ; quindi

$$dq = C dV \quad \text{e quindi} \quad (1) \quad i dt = C dV .$$

La d.d.p. $V(t)$ che si genera fra le armature del condensatore all'istante t si oppone evidentemente alla f.e.m. f della batteria di pile. Ne segue che la corrente $i(t)$ che passa nel circuito è

$$(2) \quad i(t) = \frac{f - V(t)}{R} .$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ha:

$$\frac{f - V(t)}{R} dt = C dV ,$$

da cui
$$\frac{f - V(t)}{RC} dt = -d(f - V) ,$$

quindi (3)
$$\frac{d[f - V(t)]}{f - V(t)} = -\frac{1}{RC} dt .$$

Con una integrazione indefinita si ha:

$$\ln \frac{f - V}{k} = -\frac{t}{RC} ,$$

$$\frac{f - V}{k} = e^{-\frac{t}{RC}} , \quad \text{quindi} \quad (4) \quad f - V(t) = k e^{-\frac{t}{RC}} .$$

Possiamo determinare k in base alle condizioni iniziali.

Poiché per $t=0$ è $V(0)=0$, si ricava $k = f$. Sostituendo nella (4) si ha

$$f - f e^{-\frac{t}{RC}} = V(t) \quad \rightarrow \quad (5) \quad V(t) = f \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) .$$

Il termine $\exp(-t/RC)$ tende asintoticamente a zero e quindi dopo un certo intervallo di tempo la d.d.p. fra le due armature del condensatore sarà uguale alla f.e.m. f della batteria di pile.

CORRENTE CONTINUA

N. 33 – Energia di una corrente continua ed effetto Joule

Consideriamo un conduttore percorso da una corrente continua (c.c.) di intensità i e sia $V = V_A - V_B > 0$ la d.d.p. tra i due punti A e B (fig.1-49). Vogliamo calcolare l'energia che la corrente elettrica sviluppa nel conduttore nel tempo t , cioè il lavoro che essa produce in questo intervallo di tempo.

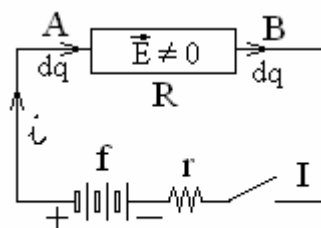


Fig. 1-49

In un intervallo di tempo dt una certa quantità di elettricità dq entra attraverso il punto A e una uguale quantità di elettricità esce attraverso B. Praticamente è come se si avesse un passaggio di carica dal punto A al punto B.

Le forze del campo elettrico generato dalla d.d.p. V applicata agli estremi del conduttore compiono sulla carica dq il lavoro

$$dL = dq(V_A - V_B) ,$$

e poiché $dq = idt$ si ha:

$$dL = i(V_A - V_B)dt .$$

Ma per la legge di Ohm si ha $V_A - V_B = iR$; ne segue che

$$(1) \quad dL = i^2 R dt .$$

Se poi ci riferiamo ad un intervallo finito di tempo si ha

$$(2) \quad L = i^2 R t \text{ Joule} .$$

Questo lavoro si manifesta nel circuito sotto forma di calore: infatti il campo elettrico esercita su ogni elettrone una forza $\vec{F} = -e\vec{E} = m_e \vec{a}$ che tende ad accelerarlo, cioè ad aumentarne l'energia cinetica.

Gli elettroni, però, urtano contro gli atomi del metallo cedendo ad essi l'energia cinetica acquistata e di conseguenza il conduttore si riscalda.

Ricordiamo ora il Principio di Equivalenza del lavoro:

$$\frac{L}{Q} = J = 4,186 \frac{\text{Joule}}{\text{p.calorie}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{L}{J} = Q.$$

Possiamo allora trasformare la (2) come segue:

$$\frac{L}{J} = \frac{1}{J} i^2 R t \text{ calorie}. \quad \text{Poiché} \quad \frac{1}{4,186} = 0,23889 \quad \text{si ha:}$$

$$(3) \quad Q = 0,24 i^2 R t \text{ calorie}.$$

Potenza di una corrente continua.

Come abbiamo visto, il lavoro che una corrente elettrica sviluppa nel tempo dt in un conduttore sottoposto alla d.d.p. $V = V_A - V_B$ è dato dalla formula

$$dL = iVdt \text{ Joule}.$$

Se la corrente è costante, la potenza della corrente elettrica, cioè il lavoro che essa può compiere nell'unità di tempo sarà

$$\frac{dL}{dt} = iV, \text{ ossia} \quad W = iV \text{ Watt}, \text{ o anche} \quad W = i^2 R \text{ Watt}.$$

Ricordiamo che per l'unità di misura della potenza si ha: $1 \text{ Watt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ sec}}.$

Ricordiamo che il voltaggio V e la potenza W sono le grandezze caratteristiche delle lampade elettriche. Es., lampada da 75 Watt e 220Volt.

Verifica sperimentale della legge di Joule.

La legge di Joule si può dimostrare con una semplice esperienza.

Consideriamo un recipiente di vetro contenente una massa M d'acqua; avvolgiamo una resistenza R attorno ad un termometro e immergiamolo nell'acqua. Al passaggio della corrente, l'acqua si riscalda e la temperatura del termometro sale dal valore T_1 al valore T_2 .

Naturalmente, il calore ceduto dalla corrente è uguale al calore assorbito dall'acqua che si riscalda e quindi possiamo dire:

$$Q = c_a M (T_2 - T_1) \text{ calorie}.$$

Sperimentalmente possiamo vedere che

$$Q = k i^2 R t, \quad \text{ove} \quad k = 0,24.$$

Ciò significa che: 1) la quantità di calore assorbita dall'acqua raddoppia se raddoppia il tempo t o il valore della resistenza R ; 2) quando l'intensità di corrente elettrica diventa due o tre volte maggiore, la quantità di calore assorbita dall'acqua diventa rispettivamente quattro o nove volte maggiore.

N. 34 – Legge di Ohm per un circuito chiuso

Consideriamo un circuito chiuso formato da una resistenza e da una batteria di pile. Indichiamo con R_e la resistenza del conduttore AB, con f la f.e.m. della pila e con r la sua resistenza interna (fig. 1-50).

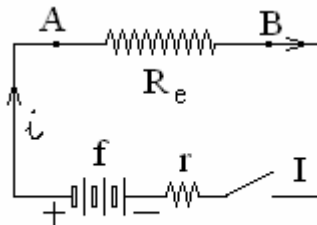


Fig. 1-50

Chiudendo l'interruttore nel circuito passa una corrente i ; per la legge di Ohm, possiamo far vedere che essa è data dalla legge

$$(1) \quad i = \frac{f}{R_e + r}.$$

E infatti, indichiamo con V_A il potenziale del punto A e immaginiamo di muoverci sul circuito nel verso della corrente a partire dal punto stesso.

Se sommiamo algebricamente tutte le variazioni di potenziale che si incontrano lungo il circuito, dopo un giro completo si deve ottenere ancora il potenziale V_A .

Ora, nell'attraversare la resistenza R_e il potenziale subisce una diminuzione, detta caduta di tensione, uguale a $-R_e i$. Infatti, per la legge di Ohm, si ha:

$$V_A - V_B = iR_e \rightarrow V_A = V_B + iR_e,$$

quindi (2) $V_B = V_A - iR_e.$

La (2) ci dice che, quando si passa dal punto A al punto B, il potenziale subisce una diminuzione pari a $-iR_e$.

Quando ci muoviamo attraverso il generatore di corrente il potenziale subisce contemporaneamente un aumento $+f$ uguale alla f.e.m. della pila e una diminuzione $-ir$, dovuta al fatto che il generatore ha una resistenza interna.

Sommando al potenziale V_A tutte queste variazioni di potenziale si deve tornare al potenziale stesso, cioè:

$$V_A - iR_e + f - ir = V_A, \quad \text{da cui}$$

$$f = iR_e + ir, \quad \text{infine (1)} \quad i = \frac{f}{R_e + r}.$$

N. 35 – Leggi di Kirchhoff

Prima legge. La somma delle intensità di correnti che arrivano ad un nodo è uguale alla somma delle intensità di correnti che se ne allontanano (fig1-51), cioè

(1)

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5.$$

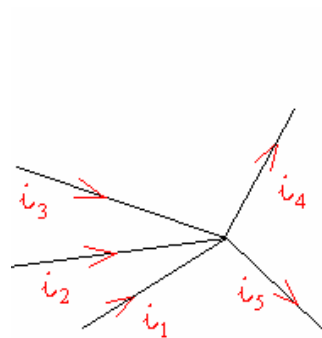


Fig. 1-51

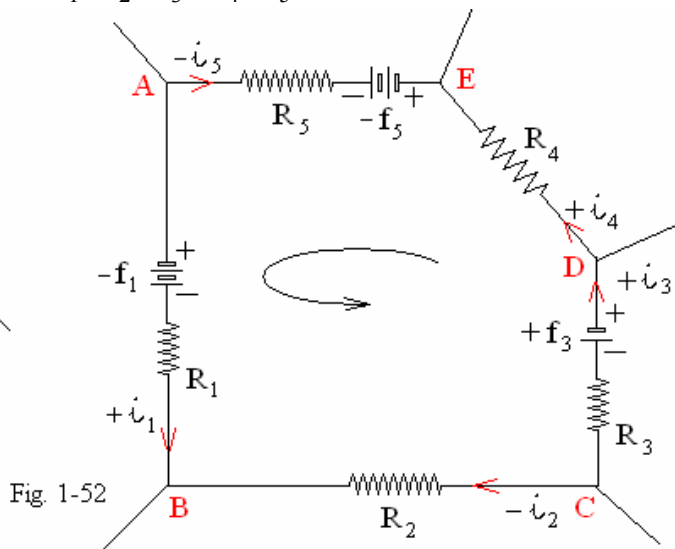


Fig. 1-52

Ciò si spiega con il principio di conservazione della carica elettrica, per cui la carica che arriva al nodo nel tempo Δt deve essere uguale a quella che si allontana nello stesso intervallo di tempo, cioè

$$(2) \quad \Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 = \Delta q_4 + \Delta q_5 .$$

Dividendo ogni carica per Δt e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene la legge enunciata.

Dalla (1) si ottiene anche $i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$.

Se ora consideriamo positive le correnti che arrivano al nodo e negative quelle che se ne allontanano, possiamo scrivere

$$(3) \quad i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0 ,$$

dove in ogni termine è inglobato il proprio segno.

Seconda legge. Consideriamo un circuito costituito da una maglia .Ogni ramo presenta una resistenza ed eventualmente una forza elettromotrice (fig. 1-52) e supponiamo che in ogni ramo la corrente circoli nel verso indicato in figura. Allora, poiché nel ramo $A \rightarrow B$ la corrente i_1 circola da A verso B , avremo $V_A - V_B > 0$, e analogamente per gli altri rami .

Applicando la legge di Ohm generalizzata ad ogni singolo ramo si ha:

$$(I) \quad \begin{cases} V_A - V_B - f_1 = i_1 R_1 \\ V_C - V_B = i_2 R_2 \\ V_C - V_D + f_3 = i_3 R_3 \\ V_D - V_E = i_4 R_4 \\ V_A - V_E + f_5 = i_5 R_5 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad (II) \quad \begin{cases} V_A - V_B - f_1 = i_1 R_1 \\ V_B - V_C = -i_2 R_2 \\ V_C - V_D + f_3 = i_3 R_3 \\ V_D - V_E = i_4 R_4 \\ V_E - V_A - f_5 = -i_5 R_5 . \end{cases}$$

Sommando membro a membro le equazioni del sistema (II) si ha:

$$-f_1 + f_3 - f_5 = i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_3 R_3 + i_4 R_4 - i_5 R_5 .$$

Stabiliamo ora un verso positivo di percorrenza nella maglia, per convenzione quello antiorario, e consideriamo positive le correnti che circolano nel verso fissato come positivo e negative le altre.

Analogamente, consideriamo positive le f.e.m. che tendono a far passare la corrente nel verso fissato come positivo e negative le altre. Con queste convenzioni avremo i seguenti segni, indicati anche in figura:

i_1 positiva , f_1 negativa ;
 i_2 negativa ;
 i_3 positiva , f_3 positiva ;
 i_4 negativa ;
 i_5 negativa , f_5 negativa .

Fatte queste convenzioni, dalla (4) si ottiene la seguente regola:

“La somma algebrica delle forze elettromotrici è uguale alla somma algebrica dei prodotti delle correnti dei singoli rami per le rispettive resistenze”.

Con questa regola possiamo ricavare direttamente la seconda legge di Kirchhoff senza fare i calcoli. Solo guardando la figura possiamo scrivere:

$$-f_1 + f_3 - f_5 = i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_3 R_3 + i_4 R_4 - i_5 R_5 .$$

Se ora inglobiamo in ogni grandezza il proprio segno si ha:

$$f_1 + f_3 + f_5 = \sum_{k=1}^5 i_k R_k .$$

N.B. Dobbiamo ricordare che R_1 è uguale alla resistenza esterna del ramo più la resistenza interna della pila, cioè

$$R_1 = R_{1e} + r_{1i} .$$

Considerazioni analoghe per le altre resistenze.

Dalle varie equazioni del sistema (II) si è visto che:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_A) = 0 ;$$

cioè: la somma algebrica delle d.d.p. che si incontrano lungo il circuito chiuso, e in genere lungo una maglia, è uguale a zero.

Problemi di applicazione

Problema n° 1. Abbiamo il circuito elettrico indicato in fig. 1-53. Calcolare le intensità delle correnti elettriche che circolano nelle maglie (1), (2) quando si conoscano le forze elettromotrici e le resistenze inserite nel circuito.

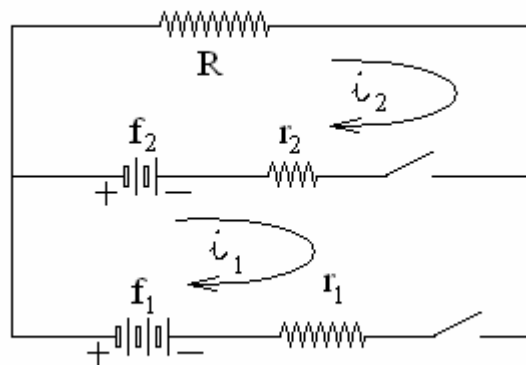


Fig. 1-53

Stabiliamo come verso positivo nelle due maglie il verso orario; applichiamo ad esse la 2^a legge di Kirchhoff e al nodo A la 1^a legge. Si ottiene:

$$(I) \quad \begin{cases} i_1 + i_2 = i \\ f_1 - f_2 = i_1 r_1 - i_2 r_2 \\ f_2 = i_2 r_2 + i R \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Per la terza equazione possiamo scrivere} \\ f_2 = i_2 r_2 + i_1 R + i_2 R \end{array}$$

Si ottiene così il sistema equivalente

$$\begin{cases} r_1 i_1 - r_2 i_2 = f_1 - f_2 \\ R i_1 + (R + r_2) i_2 = f_2 \end{cases}$$

Risolvendo con la regola di Cramer si ottiene la soluzione

$$i_1 = \frac{(f_1 - f_2)R + r_2 f_1}{r_1 R + r_2 R + r_1 r_2}, \quad i_2 = \frac{(f_2 - f_1)R + r_1 f_2}{r_1 R + r_2 R + r_1 r_2}, \quad i = \frac{r_1 f_2 + r_2 f_1}{r_1 R + r_2 R + r_1 r_2}.$$

Vediamo alcuni casi particolari.

Sia: $f_1 = 19\text{V}$, $f_2 = 14\text{V}$, $R = 0,8\text{ ohm}$, $r_1 = 2\text{ ohm}$, $r_2 = 0,5\text{ ohm}$.

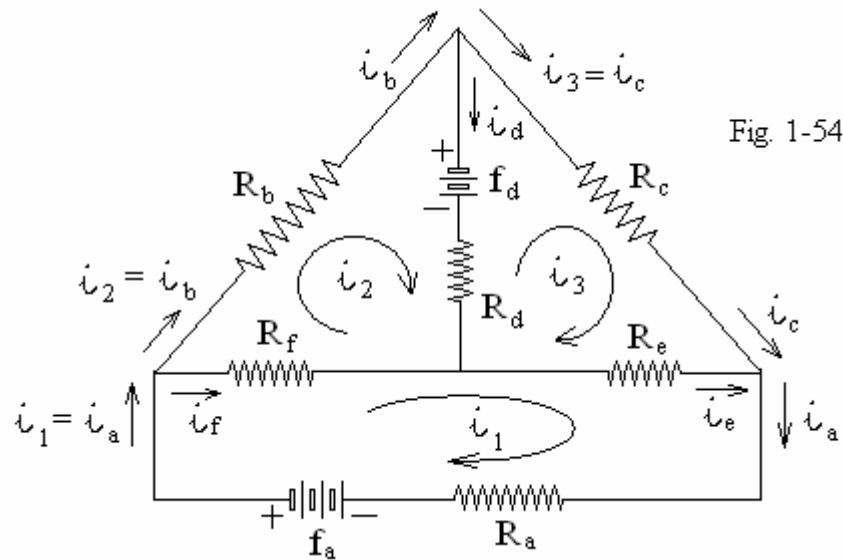
Si trova: $i_1 = 4,5\text{ A}$, $i_2 = 8\text{ A}$, $i = 12,5\text{ A}$.

Sia $f_1 = 12\text{V}$, $f_2 = 6\text{V}$, $R = 10\text{ ohm}$, $r_1 = 2\text{ ohm}$, $r_2 = 1\text{ ohm}$.

Si trova $i_1 = 2,25\text{ A}$, $i_2 = -1,5\text{ A}$, $i = 0,75\text{ A}$:

in tal caso il primo generatore invia corrente sia nell'utilizzatore che nel secondo generatore; cioè quest'ultimo non eroga corrente, ma la assorbe.

Problema n° 2. Scrivere le equazioni del circuito indicato in fig. 1-54
(I. F. Quecia – B. Rispoli, Problemi di Fisica pag. 123; C.E. Veschi).



Applicando la 2^a legge di Kirchhoff alle maglie (1), (2), (3), si ha il sistema:

$$(II) \quad \begin{cases} +f_a = +i_a R_a + i_f R_f + i_b R_b \\ -f_d = +i_d R_d - i_f R_f + i_b R_b \\ +f_d = -i_d R_d + i_c R_c - i_e R_e \end{cases}$$

Ma si ha: $i_a = i_1$, $i_f = i_1 - i_2$, $i_e = i_1 - i_3$;
 $i_d = i_3 - i_2$, " $i_b = i_2$; $i_c = i_3$.

Sostituendo le espressioni delle correnti nel sistema (II) si ha:

$$\begin{cases} +f_a = i_1 R_a + (i_1 - i_2) R_f + (i_1 - i_3) R_e \\ -f_d = i_2 R_b + (i_2 - i_3) R_d + (i_2 - i_1) R_f \\ +f_d = i_3 R_c + (i_3 - i_1) R_e + (i_3 - i_2) R_d \end{cases} .$$

Possiamo scrivere le equazioni del sistema anche nel seguente modo:

$$\begin{cases} +f_a = +i_1 (R_a + R_f + R_e) - i_2 R_f - i_3 R_e \\ -f_d = -i_1 R_f + i_2 (R_b + R_d + R_f) - i_3 R_d \\ +f_d = -i_1 R_e - i_2 R_d + i_3 (R_c + R_e + R_d) \end{cases} .$$

In tal caso, nelle equazioni del sistema intervengono solo le correnti di maglia e le f.e.m, con il segno che ad esse compete.

CAPITOLO SECONDO

MAGNETISMO

N. 1 - Campo magnetico di una calamita o di un circuito elettrico

Ricordiamo brevemente che una calamita genera attorno a sé un campo magnetico, ossia una porzione di spazio entro la quale essa fa sentire il suo momento di rotazione su un piccolo ago magnetico introdotto nel campo o su un piccolo circuito esploratore percorso da corrente elettrica.

Il campo magnetico della calamita è caratterizzato da linee di forza che vanno dal polo Nord al polo Sud della calamita (fig. 2-1).

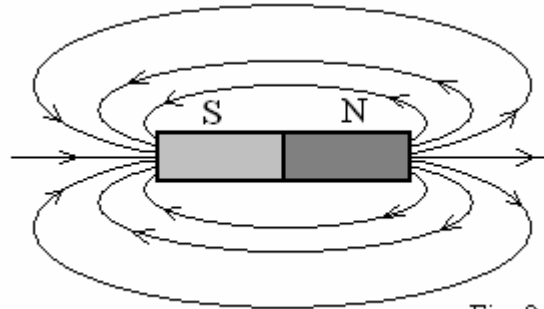


Fig. 2-1

Ricordiamo che una linea di forza è l'insieme delle posizioni secondo cui si dispone un ago magnetico immerso nel campo man mano che lo spostiamo lungo il suo asse. Per convenzione questa linea viene orientata dal polo Sud al polo Nord dell'ago.

Come una calamita si comporta un solenoide, cioè un filo conduttore avvolto ad elica in modo da formare un cilindro e percorso da corrente elettrica. La “regola del Sì e del No”, o la “regola della mano destra di Ampère”, ci permettono di riconoscere i due poli del solenoide (fig. 2-2).

Ricordiamo la prima regola.

Si guarda la spira finale ad una estremità di un solenoide e si pone la domanda: “La corrente circola in senso orario”?

Se la risposta è Sì il polo è Sud; se la risposta è No il polo è Nord.

Ricordiamo anche la regola di Ampère.

Si abbraccia il solenoide con la mano destra in modo che la corrente entri dal palmo ed esca dalle dita: il pollice disteso indica il polo Nord del solenoide.

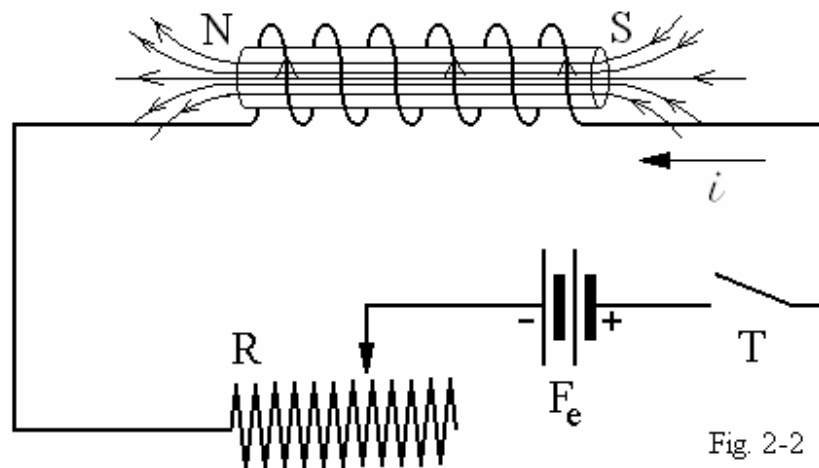


Fig. 2-2

Ricordiamo anche che un filo rettilineo percorso da corrente genera un campo magnetico le cui linee di forza sono circonferenze concentriche con il filo e che giacciono su un piano perpendicolare ad esso (fig. 2-3).

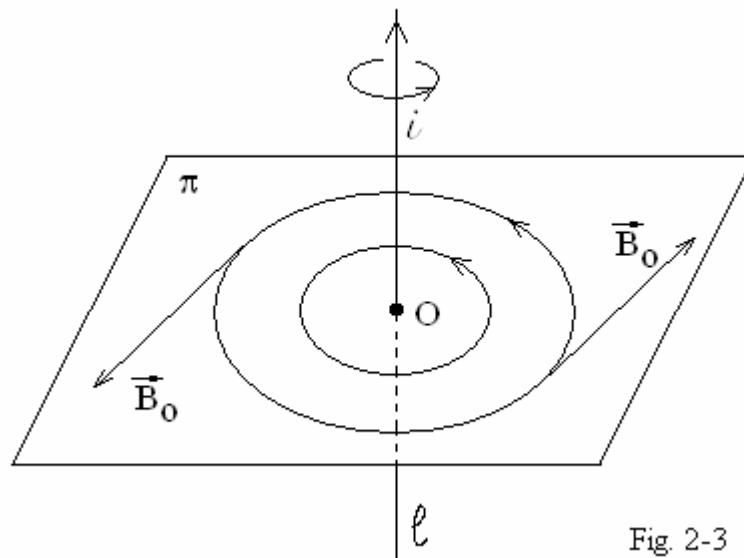


Fig. 2-3

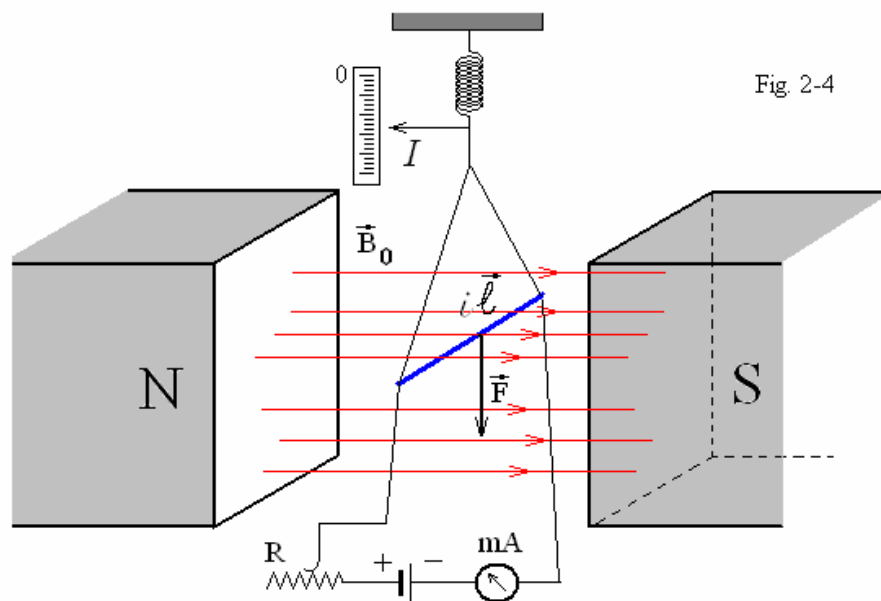
Il verso di queste linee è dato ancora dalla regola della mano destra di Ampère:

“Abbracciando il filo in modo che la corrente elettrica entri dal palmo ed esca dal pollice disteso sul filo, la punta delle dita ci dà il verso positivo delle linee di forza”. Anche questa regola si trova spostando un ago magnetico esploratore su un qualsiasi piano perpendicolare al filo elettrico: spostando successivamente l’ago esploratore lungo il suo asse si ottiene una linea di forza che viene orientata dal polo Sud al polo Nord dell’ago.

N. 2 – Vettore induzione magnetica \vec{B}_0

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che è possibile stabilire l’andamento e il verso delle linee di forza di un campo magnetico generato da una calamita o da una corrente elettrica.

Vogliamo ora introdurre un vettore \vec{B}_0 che abbia la direzione e il verso del campo magnetico e che ci permetta di calcolare l’azione meccanica del campo su un circuito percorso da corrente.



Per far ciò si usa un apparecchio detto “circuito esploratore” (fig. 2-4). Esso è un circuito elettrico avente un tratto rettilineo \vec{l} mobile e trattenuto nella sua posizione di riposo da un dinamometro, schematizzato in figura con una o due molle. Il tratto rettilineo è orientato positivamente nel verso della corrente. Nel circuito sono inseriti una pila, un amperometro e una resistenza variabile, in modo da far variare a piacimento l’intensità di corrente i .

E' chiaro che con questo dispositivo possiamo studiare agevolmente la forza esercitata da parte di un campo magnetico.

Si pone il circuito esploratore nel campo magnetico, con il centro del tratto mobile in un punto P. Indichiamo con α l'angolo formato dal segmento orientato $\vec{\ell}$ con il verso del campo magnetico (verso che possiamo conoscere con un ago posto preventivamente nel campo).

Ripetendo la misura della forza \vec{F} per diversi valori di i , ℓ ed α si è potuto vedere:

1°) il modulo della forza \vec{F} è direttamente proporzionale ad i , ℓ e $\sin\alpha$,
cioè (1) $F = B_0 i \ell \sin\alpha$,

ove B_0 è una costante di proporzionalità che dipende dal punto P del campo, ma non dalle altre variabili i , ℓ e $\sin\alpha$. Ne segue che la grandezza B_0 caratterizza il campo magnetico nel punto P.

2°) La direzione della forza \vec{F} è perpendicolare al piano individuato dal vettore $\vec{\ell}$ e dalla direzione del campo magnetico.

3°) Il verso della forza \vec{F} è tale il vettore \vec{F} personificato vede che $\vec{\ell}$ si sovrappone al verso positivo del campo magnetico dopo una rotazione in senso antiorario minore di un angolo piatto.

Collegando i risultati, si ha la formula vettoriale

$$(2) \quad \vec{F} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}_0,$$

dove \vec{B}_0 è un vettore che ha la direzione e il verso del campo magnetico e che ci permette di conoscere la forza che il campo magnetico esercita su un tratto rettilineo di conduttore di centro P, lunghezza orientata $\vec{\ell}$ e percorso da una corrente i . Esso quindi caratterizza tutte le proprietà del campo magnetico nel vuoto in un generico punto P del campo e si dice “ vettore induzione magnetica”.

Per quanto riguarda il verso della forza \vec{F} che il campo magnetico esercita sull'elemento di corrente $i \vec{\ell}$, possiamo ricordare la regola della mano sinistra di Fleming:

disponendo il dito indice nel verso del vettore \vec{B}_0 e il medio nel verso del vettore $i \vec{\ell}$, il pollice disteso ci dà il verso della forza \vec{F} .

Se nella (1) poniamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ possiamo ricavare facilmente le unità di misura del campo di induzione B_0 . Infatti si ha $[B_0] = \left[\frac{F}{i\ell} \right]$, e quindi nel sistema di misure MKSA abbiamo:

$$[B_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Newton}}{\text{Ampère} \cdot \text{metro}} = \frac{\text{Newton} \cdot \text{m}}{\text{Ampère} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{Ampère} \cdot \text{m}^2},$$

$$[B_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Joule} \cdot \text{sec}}{\text{Coulomb} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{Coulomb} \cdot \text{sec}}{\text{Coulomb} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{m}^2}.$$

Poiché per definizione è $1\text{Volt} \cdot 1\text{sec} = 1\text{Weber}$, si ha la formula

$$(3) \quad [B_0]_{\text{MKSA}} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} (=1\text{Tesla}).$$

Ora, quando il vettore \vec{B}_0 è perpendicolare al tratto di filo $\vec{\ell}$ si ha la formula

$$F = i\ell B_0, \text{ da cui si ricava } (3) \quad B_0 = \frac{F}{i\ell}.$$

Le (3), (4) ci permettono di dare la seguente definizione:

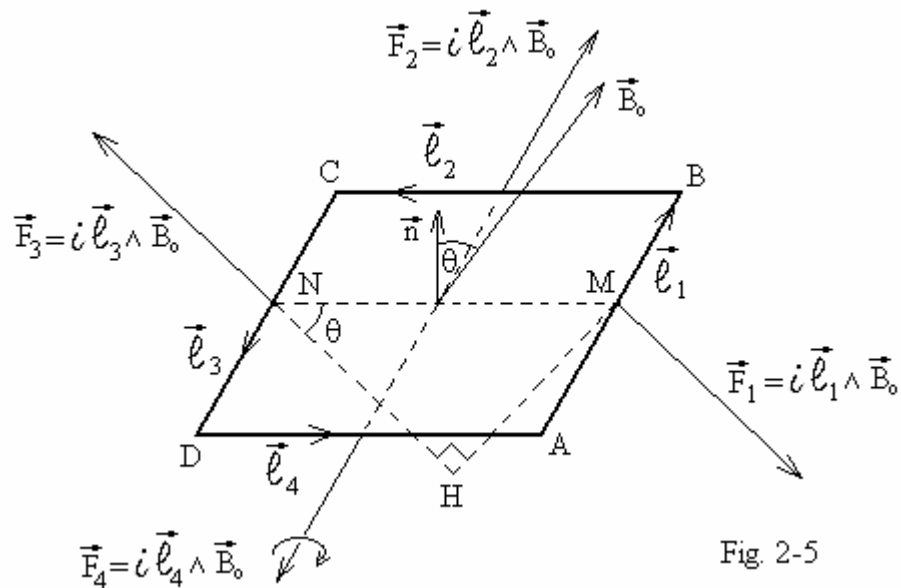
“In un punto di un campo magnetico si ha l’induzione di $1 \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}$ se un tratto di filo avente la lunghezza di un metro, percorso dalla corrente di un Ampère e disposto perpendicolarmente alla direzione del campo risulta soggetto alla forza di 1 Newton”.

La (2), nel caso di un tratto infinitesimo di filo $d\vec{\ell}$, ci dà la II^a formula elementare di Laplace:

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0.$$

N. 3 – Azioni meccaniche esercitate da un campo magnetico su una spira percorsa da corrente

Consideriamo una spira percorsa da una corrente i e sia \vec{n} un versore normale alla spira e orientato in modo tale che esso veda circolare la corrente in senso antiorario (fig.2-5).



Supponiamo che la spira sia immersa in un campo di induzione magnetica \vec{B}_0 formante un angolo θ con la normale \vec{n} alla superficie della spira. Vogliamo far vedere che **il campo magnetico esercita sulla spira un momento meccanico che tende a farla ruotare** in modo che i vettori \vec{n} e \vec{B}_0 abbiano lo stesso verso, **cioè in modo tale da disporre la spira in un piano perpendicolare al vettore \vec{B}_0** (Fig. 2-6).

Fissiamo sulla spira un verso positivo concorde con quello della corrente; supponiamo inoltre che il campo magnetico sia uniforme e che la spira sia un rettangolo di lati $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$, e che uno di questi lati, per esempio \vec{l}_2 , sia parallelo al piano dei vettori \vec{n} e \vec{B}_0 .

Come subito si vede, il vettore di induzione magnetica \vec{B}_0 è perpendicolare ai lati \vec{l}_1 ed \vec{l}_3 .

Applico la 2^a formula di Laplace ai quattro lati della spira; con la regola di Fleming possiamo vedere che:

1°) Le forze agenti sui lati $\vec{\ell}_1$ ed $\vec{\ell}_3$ $\left[\vec{F}_1 = i\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_0, \vec{F}_3 = i\vec{\ell}_3 \wedge \vec{B}_0 \right]$ hanno la stessa direzione, la stessa grandezza, ma versi opposti e sono inoltre perpendicolari ai lati stessi. In modulo si ha

$$(1) \quad F_1 = F_3 = i\ell_1 B_0 .$$

Queste forze \vec{F}_1 ed \vec{F}_3 formano una coppia il cui momento di rotazione \vec{M} è orientato come il lato $\vec{\ell}_1$. Se indichiamo con \overline{AH} il braccio della coppia di forze opposte \vec{F}_1, \vec{F}_3 , per il modulo del momento di rotazione si ha:

$$M = F_1 \cdot \overline{AH} ,$$

$$\text{ossia } (2) \quad M = F_1 \ell_2 \sin \vartheta = i\ell_1 B_0 \cdot \ell_2 \sin \vartheta ,$$

ove il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$ è uguale all'area S della spira. In forma vettoriale possiamo scrivere il momento di rotazione nel modo seguente:

$$(3) \quad \vec{M} = iB_0 S \sin \vartheta \text{ vers } \vec{\ell}_1 .$$

2°) Le forze agenti sui lati $\vec{\ell}_2$ ed $\vec{\ell}_4$ sono complanari alla spira, hanno lo stesso modulo, la stessa direzione ma versi opposti:

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = i\ell_2 B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = i\ell_2 B_0 \sin \vartheta .$$

Esse tendono semplicemente ad allargare la spira, ma poiché questa è rigida le due forze non danno luogo ad alcun effetto meccanico.

Concludendo, possiamo dire:

“Le azioni meccaniche esercitate dal campo di induzione magnetica sulla spira si riducono ad una coppia di momento

$$(3) \quad \vec{M} = iB_0 S \sin \vartheta \text{ vers } \vec{\ell}_1 .$$

Facciamo vedere che la (3) può essere messa nella forma

$$(4) \quad \vec{M} = iS\vec{n} \wedge \vec{B}_0 .$$

A tale scopo basta far vedere che i due vettori sono uguali in modulo, direzione e verso. Infatti si ha :

$$\vec{M} = iS\vec{n} \wedge \vec{B}_0 = iSB_0 \sin \vartheta \text{ vers } \vec{\ell}_1 .$$

$$\text{e in modulo} \quad M = iSB_0 \sin \vartheta .$$

Ne segue che i vettori (3), (4) hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo e quindi essi sono uguali.

La (4) ci dice che: “Una spira di area S , percorsa da una corrente i e immersa in un campo di induzione magnetica \vec{B}_0 è sottoposta ad una coppia meccanica il cui momento è $\vec{M} = iS\vec{n} \wedge \vec{B}_0$ ”.

Ricordiamo ora che si ha $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$, ove \vec{H}_0 è il vettore campo magnetico del vuoto. Possiamo quindi scrivere la (4) in un altro modo:

$$\vec{M} = \mu_0 i S \vec{n} \wedge \vec{H}_0, \text{ ossia (5) } \vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H}_0,$$

ove il vettore $\vec{m} = \mu_0 i S \vec{n}$ è detto momento magnetico della spira.

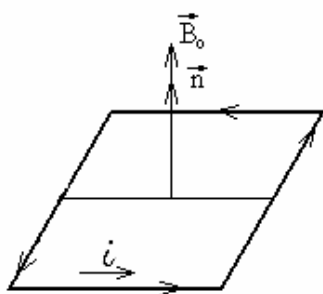


Fig. 2-6

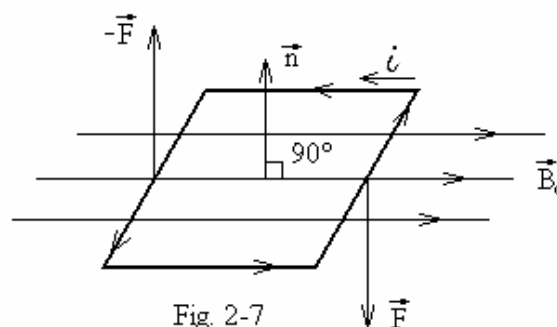


Fig. 2-7

Quando $\theta = 90^\circ$, cioè quando la spira è parallela alle linee di forza del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 (fig. 2-7), il momento \vec{M} di questa coppia meccanica ha il modulo

$$M = iS B_0, \text{ da cui (6) } B_0 = \frac{M}{iS}.$$

La (6) ci permette di dare una nuova definizione dell'unità di misura della induzione magnetica B_0 :

“In un punto del campo magnetico si ha l'induzione di $1 \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}$, quando il

campo esercita su una spira avente l'area di 1 m^2 , disposta parallelamente al campo \vec{B}_0 e nella quale circola la corrente di 1 Ampère, una coppia meccanica avente il momento di 1 Newton · metro.

N. 4 – Forza di Lorentz

Vogliamo calcolare la forza che un campo di induzione magnetica \vec{B}_0 esercita su una carica elettrica q che si muove con velocità \vec{v} nel campo.

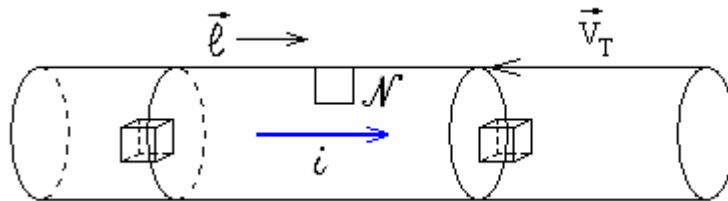


Fig. 2-8

Consideriamo un conduttore \vec{l} percorso da una corrente di intensità i e immerso nel campo (fig.2-8); ricordiamo che esso è soggetto alla forza

$$(1) \quad \vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}_0 .$$

Sia N il numero di elettroni di conduzione per unità di volume; allora il numero di elettroni liberi contenuti nel conduttore sarà NSl , ove S è l'area di una sezione del conduttore.

Sia ora v_t il modulo della velocità di trascinamento degli elettroni, cioè la misura dello spazio percorso da un elettrone nell'unità di tempo. Allora il numero degli elettroni che attraversano la sezione S del conduttore in un secondo è NSv_t e la carica da essi trasportata in un secondo attraverso la sezione S sarà

$$\frac{Q}{1\text{sec}} = -eNSv_t .$$

Poiché la corrente elettrica viene interpretata come flusso di cariche positive in senso contrario al moto degli elettroni, l'intensità di corrente elettrica sarà

$$(2) \quad i = \frac{dQ}{dt} = eNSv_t .$$

Sostituendo nella formula (1) si ottiene

$$\vec{F} = eNSv_t \vec{l} \wedge \vec{B}_0 .$$

Poiché i vettori $\vec{\ell}$ e \vec{v}_t hanno la stessa direzione ma verso opposto, cambiando segno possiamo spostare la freccia dal vettore $\vec{\ell}$ al modulo della velocità v_t e si ottiene

$$\vec{F} = -eNS\ell \cdot \vec{v}_t \wedge \vec{B}_0 ,$$

e quindi $\vec{F} = NS\ell(-e\vec{v}_t \wedge \vec{B}_0) ,$

dove $NS\ell$ rappresenta, come abbiamo detto, il numero di elettroni liberi contenuti nel conduttore ℓ , mentre il prodotto vettoriale entro parentesi rappresenta la forza che il campo di induzione \vec{B} esercita su un singolo elettrone. Quando $NS\ell = 1$ otteniamo la forza \vec{F} che agisce su un elettrone; essa è data dalla formula

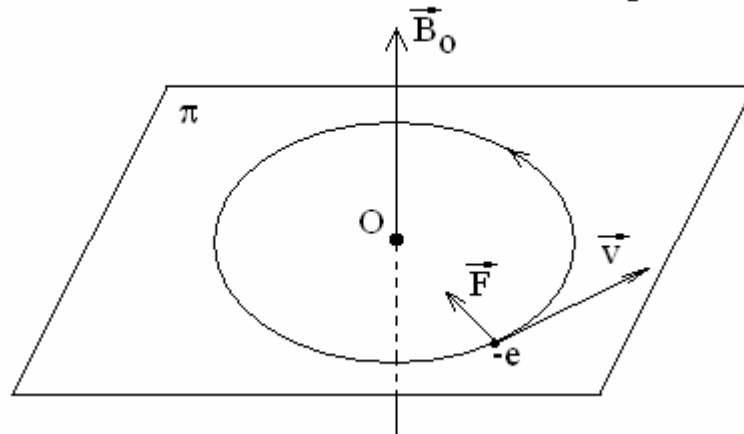
$$(3) \quad \vec{F} = -e\vec{v}_t \wedge \vec{B}_0 : \quad \text{detta "Forza di Lorentz"}.$$

In generale una carica q , positiva o negativa, che si muove in un campo magnetico \vec{B} (generato all'interno di un conduttore o in un dielettrico) è soggetta alla forza

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} .$$

Vediamo ora l'effetto pratico della forza di Lorentz su un elettrone che si muove in un campo di induzione magnetica uniforme \vec{B} (fig. 2-9).

Fig. 2-9

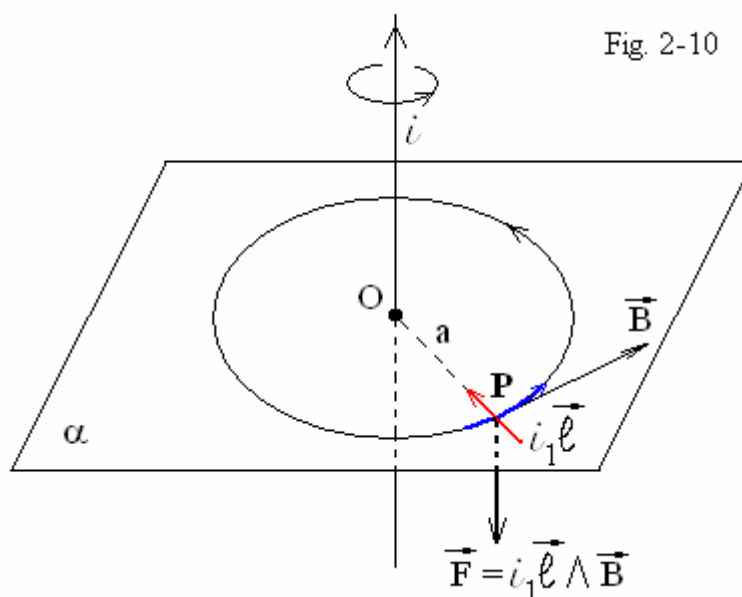


Se l'elettrone ha una velocità iniziale \vec{v} perpendicolare al campo, la forza di Lorentz esercita su di esso una forza centripeta che lo costringe a muoversi di moto circolare uniforme; se la velocità iniziale è obliqua

rispetto al vettore \vec{B} , l'elettrone si muoverà descrivendo un'elica cilindrica.

N. 5 – Legge di Biot e Savart

Consideriamo il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da una corrente di intensità i . Già sappiamo che le linee di forza sono circonferenze concentriche con il filo, che giacciono su tanti piani perpendicolari ad esso e che sono orientate secondo la regola della mano destra di Ampère (fig. 2-10).



Infatti se poniamo su uno di questi piani un aghetto magnetico, esso oscilla un poco e poi assume una posizione di equilibrio. Se ora spostiamo l'aghetto lungo il suo asse, esso oscilla ancora un pò e infine assume un'altra posizione di equilibrio. Così facendo si forma una linea spezzata che, al limite, possiamo considerare come una linea continua orientata secondo la regola della mano destra di Ampère.

Ciò premesso, vogliamo calcolare il modulo del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 in un punto P a distanza $\overline{OP} = a$ dal filo.

Sappiamo anche che il campo magnetico nel punto P ha la direzione della tangente alla circonferenza in tale punto ed è orientata come le linee di forza.

Prendiamo ora il circuito esploratore e poniamo il tratto mobile $\vec{\ell}$ nel piano della circonferenza, con il centro nel punto P in modo che esso risulti perpendicolare alla tangente, cioè perpendicolare alla direzione del campo. Supponiamo anche che il vettore $i_1 \vec{\ell}$, dato dal tratto mobile, sia orientato verso il punto O del filo.

Per la 2^a formula di Laplace il tratto mobile $i_1 \vec{\ell}$ del circuito esploratore è soggetto alla forza

$$\vec{F} = i_1 \vec{\ell} \wedge \vec{B}_0 ,$$

la quale risulta diretta verticalmente verso il basso. Il suo modulo è

$$F = i_1 \ell B_0 \sin 90^\circ , \quad \text{ossia} \quad F = i_1 \ell B_0 .$$

Poiché F , i_1 ed ℓ sono costanti, possiamo calcolare B_0 . Si ricava

$$(1) \quad B_0 = \frac{F}{i_1 \ell} .$$

Ora possiamo vedere sperimentalmente che se la corrente i , che attraversa il filo, diventa doppia, tripla o quadrupla anche la forza F diventa doppia, tripla o quadrupla; mentre se si raddoppia il raggio $\overline{OP} = a$, il modulo della forza F si dimezza.

Concludiamo, per la (1), che anche l'induzione magnetica B_0 è direttamente proporzionale alla corrente che attraversa il filo e inversamente proporzionale al raggio, cioè

$$(2) \quad B_0 = k \frac{i}{a} .$$

Naturalmente B_0 dipende anche da una costante k che possiamo determinare sperimentalmente. Infatti B_0 ed i sono noti perché si possono misurare con il dinamometro del circuito esploratore e con un amperometro inserito nel circuito elettrico, mentre il raggio a si può misurare con un regolo graduato: siamo quindi in grado di determinare la costante k . Si ricava

$$k = 2 \cdot 10^{-7} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} .$$

Ponendo $4\pi \cdot 10^{-7} = \mu_0$ si ottiene $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$ e la (2) diventa

$$(3) \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{a} ;$$

la costante μ_0 si dice "permeabilità magnetica del vuoto" e la (3) si dice "legge di Biot e Savart".

N. 6 – Prima formula di Laplace

La formula di Biot e Savart ci fa pensare che ogni tratto $d\vec{\ell}$ del filo generi in un punto P dello spazio un campo di induzione magnetica elementare dato dalla 1^a formula di Laplace

$$(4) \quad d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge d\vec{\ell} ,$$

ove \vec{r} è il vettore \overrightarrow{PA} , che ha l'origine nel punto P e l'estremo in un punto intermedio A del tratto $d\vec{\ell}$ di conduttore (fig. 2-11)

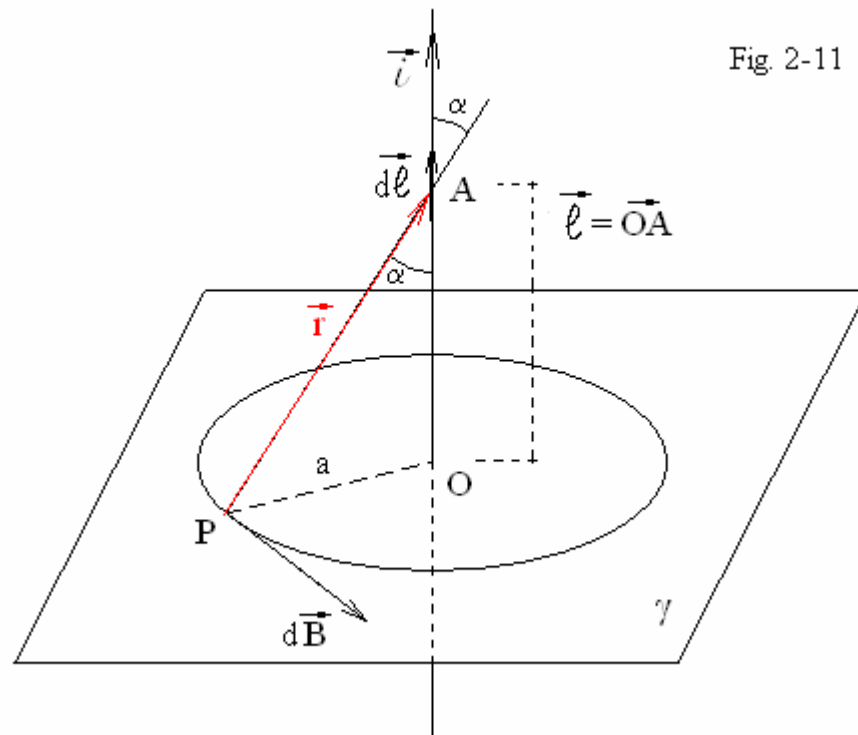


Fig. 2-11

Il campo magnetico nel punto P sarà uguale alla somma dei campi magnetici generati nel punto stesso da ogni tratto elementare del filo. Con la regola delle tre dita della mano sinistra possiamo vedere che la formula (4) è esatta per quanto riguarda la direzione e il verso. Facciamo vedere che questa formula è esatta anche per quanto riguarda il modulo: basta far vedere che da essa possiamo ricavare nuovamente la legge di Biot e Savart.

Consideriamo quindi un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente di intensità i e stabiliamo su di esso un verso positivo concorde con quello della corrente. Vogliamo calcolare l'induzione magnetica nel punto P .

Sia $d\vec{\ell}$ un tratto elementare di filo e indichiamo con \vec{r} il vettore \overrightarrow{PA} . Indichiamo poi con α l'angolo che il prolungamento del vettore \vec{r} forma con il verso positivo del filo. Poniamo infine $\overline{OA} = \ell$ e $\overline{OP} = a$. Per la 2ª formula elementare di Laplace ogni tratto $d\vec{\ell}$ di filo genera nel punto P una induzione magnetica elementare

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge d\vec{\ell}.$$

Il suo modulo è
$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r}{r^3} d\ell \sin\alpha,$$

da cui
$$dB_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} d\ell \sin\alpha.$$

L'induzione magnetica complessiva nel punto P sarà data dall'integrale

$$(5) \quad B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \int_{\pi}^0 \frac{1}{r^2} d\ell \sin\alpha,$$

ove abbiamo tenuto presente che l'angolo α varia da π a 0 rad.

Ora si ha $a = r \sin\alpha$, da cui $r = \frac{a}{\sin\alpha}$ e $\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\alpha}{a^2}.$

Si ha inoltre $\ell = a \cot \alpha$, e differenziando $d\ell = -\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha$.

Sostituendo le espressioni di r e $d\ell$ nell'integrale (5) si ha:

$$B_0 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{\pi}^0 \frac{\cancel{\sin^2 \alpha}}{a^2} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{a}{\cancel{\sin^2 \alpha}} d\alpha.$$

Si ottiene $B_0 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi a} \cdot \int_{\pi}^0 \sin \alpha d\alpha$, da cui

$$B_0 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi a} [-\cos \alpha]_{\pi}^0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} (1+1),$$

Infine $B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{a}$: Legge di Biot - Savart.

Abbiamo ritrovato così la legge di Biot – Savart. Possiamo concludere che la formula elementare di Laplace è esatta.

Questa formula, $d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge d\vec{\ell}$, vale non soltanto per un filo

rettilineo ma anche per un circuito di forma qualsiasi. Ricordiamo solo che la corrente i è >0 se essa si muove sul filo nel verso fissato come positivo; nel caso contrario è invece $i < 0$.

N. 7 – Campo magnetico nel centro di una spira

Vogliamo far vedere alcune applicazioni della prima formula di Laplace. Consideriamo una spira circolare di centro O e raggio R , percorsa da una corrente di intensità i e sia α il piano su cui essa giace (fig. 2-12). Vogliamo trovare l'induzione magnetica nel centro della spira. Fissiamo su di essa il verso positivo concorde con quello della corrente e sia $i d\vec{\ell}$ un elemento di circuito attorno al punto P della spira. Indichiamo infine con \vec{R} il vettore \overrightarrow{OP} .

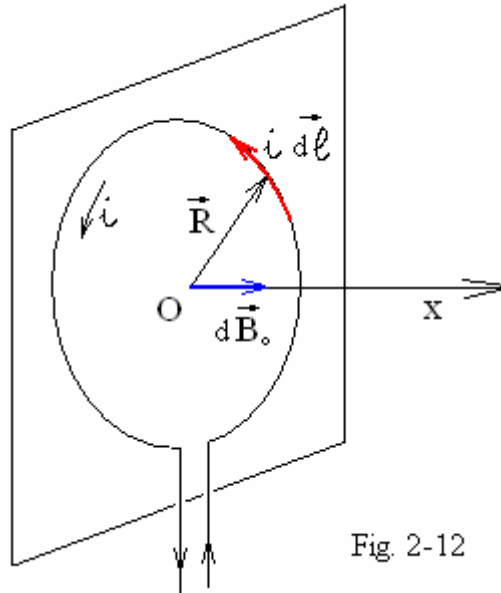


Fig. 2-12

Il tratto di filo genera nel punto O una induzione magnetica elementare data dalla formula

$$(1) \quad d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{R}}{R^3} \wedge d\vec{\ell}, \quad \text{ove} \quad \vec{R} \perp d\vec{\ell}.$$

La regola della mano sinistra di Fleming ci dice che il vettore $d\vec{B}_0$ è perpendicolare al piano della spira ed è orientato in modo tale che il vettore stesso, personificato, vede girare la corrente in senso antiorario. E ciò va d'accordo con la regola di Ampère e con la regola del Si e del No. Per il modulo del vettore si ha

$$dB_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{R^3} d\ell \sin \frac{\pi}{2}, \quad \text{quindi} \quad dB_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} d\ell.$$

L'induzione magnetica generata da tutti gli elementi di corrente della spira è dato dall'integrale esteso a tutta la circonferenza. Si ha:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int_C d\ell = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R;$$

infine
$$B_o = \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{i}{R} \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} .$$

N. 8 – Campo magnetico sull'asse di una spira

Consideriamo ancora una spira circolare di centro O e raggio R percorsa da una corrente di intensità i; vogliamo calcolare l'induzione magnetica \vec{B}_0 in un punto P dell'asse posto a distanza x dal centro della spira (fig. 2.13).

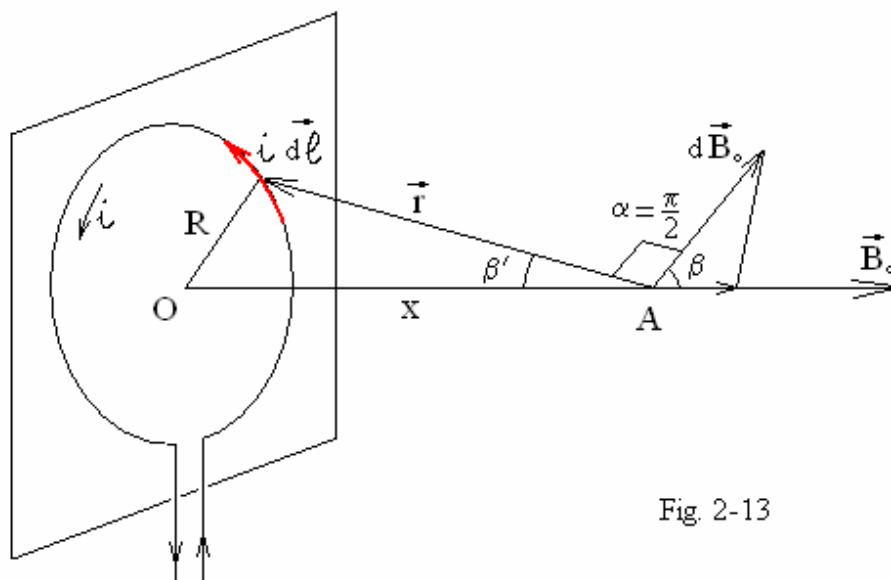


Fig 2-13

Per ragioni di simmetria il campo magnetico nel punto P è diretto lungo l'asse x.

Consideriamo il campo di induzione magnetica elementare $d\vec{B}_0$ generato da un elemento $i d\vec{\ell}$ del circuito:

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_o}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge d\vec{\ell} , \text{ e in modulo } dB_0 = \frac{\mu_o i}{4\pi r^2} \cdot d\ell \sin\gamma ,$$

ove \vec{r} è la distanza del punto P dall'elemento di circuito $d\vec{\ell}$ e γ è l'angolo fra essi compreso. Poiché $\vec{r} \perp d\vec{\ell}$, si ha $\gamma = \pi/2$, $\sin\gamma = 1$. Ne segue

$$dB_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\ell .$$

La componente del vettore $d\vec{B}_0$ lungo l'asse x sarà $dB_{0x} = dB_0 \cos\beta$.

Il campo di induzione magnetica nel punto P sarà uguale alla somma delle componenti relative a tutti gli elementi della spira .

Per avere questo campo basta calcolare l'integrale di $dB_0 \cos\beta$ esteso a tutta la spira; si ha:

$$B_0 = \oint_C dB_0 \cos\beta = \oint_C \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\ell \cos\beta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos\beta \int_0^{2\pi R} d\ell ,$$

ove si è tenuto conto che i fattori che abbiamo portato fuori del segno di integrale sono costanti . Procedendo nei calcoli si ha:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos\beta \cdot 2\pi R , \text{ e quindi (1) } \quad B_0 = \frac{\mu_0 R}{2r^2} i \cos\beta .$$

Sia ora α l'angolo individuato dai due vettori \vec{r} e $d\vec{B}_0$. Come si vede dalla figura si ha:

$$\beta' + \alpha + \beta = \pi .$$

Ma $\alpha = \frac{\pi}{2}$, poiché il vettore $d\vec{B}_0$ è normale al piano individuato dai

vettori \vec{r} e $d\vec{\ell}$; ne segue $\beta' + \beta = \frac{\pi}{2}$, da cui $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Poiché $R = r \sin\beta'$ si ha $R = r \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$, ossia (2) $R = r \cos\beta$.

Tenendo conto che $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ dalla (2) si ha

$$(3) \quad \cos\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} .$$

Sostituendo le (2), (3) nella (1) si ottiene:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{iR^2}{r^3}, \text{ infine} \quad (4) \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{iR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}.$$

N. 9 - Campo magnetico in un punto interno ad un solenoide

Consideriamo un solenoide di raggio R e lunghezza ℓ percorso da una corrente di intensità i ; vogliamo calcolare il campo di induzione magnetica B_0 in un punto P interno ad esso e situato sull'asse (fig. 2-14); la direzione e il verso del campo sono fin troppo noti.

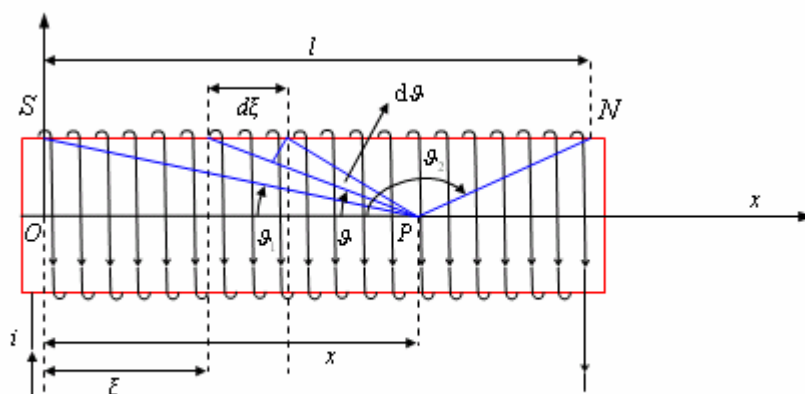


Fig. 2-14

Fissiamo sull'asse un riferimento cartesiano Ox , assumendo l'origine O ad una estremità del solenoide e sia P un punto dell'asse posto a distanza x dal punto O .

Consideriamo una fettina di solenoide di spessore $d\xi$ e sia ξ la sua distanza dall'origine O . Se n è il numero delle spire per unità di lunghezza, la fettina contiene un numero di spire uguale a $nd\xi$. Queste spire generano nel punto P un campo di induzione magnetica elementare dato dalla formula

$$(1) \quad dB_0 = \frac{\mu_0 i}{2} nd\xi \cdot \frac{R^2}{[R^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}},$$

ove $x - \xi$ è la distanza del punto P dalle spire dello strato considerato.

Il campo totale B_0 si ottiene integrando la (1) rispetto alla variabile ξ , al suo variare fra il valore 0 e il valore ℓ .

Per operare questa integrazione conviene introdurre la variabile angolare ϑ indicata in figura (angolo che l'asse x forma con il raggio visuale che parte dal punto P e va a sfiorare il bordo del solenoide).

Con gli elementi indicati in figura si ha:

$$R = (x - \xi) \operatorname{tg} \vartheta, \quad \text{da cui (2)} \quad x - \xi = \frac{R}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Differenziando si ha:

$$-d\xi = -\frac{R}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} \cdot d \operatorname{tg} \vartheta, \quad \rightarrow \quad -d\xi = -\frac{R}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta,$$

$$\text{da cui} \quad d\xi = R \frac{\cancel{\cos^2 \vartheta}}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{\cancel{\cos^2 \vartheta}}, \quad \text{cioè (3)} \quad d\xi = \frac{R}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta.$$

Sostituendo le (2),(3) nella (1) si ha:

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} \cdot \frac{R^2}{\left[R^2 + \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} \right]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sin \vartheta} d\vartheta,$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} \cdot \frac{R^2}{\left[\frac{R^2}{\sin^2 \vartheta} \right]^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta,$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} \cancel{R^3} \cdot \frac{\sin^3 \vartheta}{\cancel{R^3}} \cdot \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}, \quad (4) \quad dB_0 = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} \cdot \sin \vartheta d\vartheta.$$

Il campo di induzione magnetica nel punto P si ottiene integrando la (4) su tutto il solenoide, cioè tra i valori estremi ϑ_1 e ϑ_2 indicati in figura.

Pertanto si ha:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} [-\cos \vartheta]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2},$$

$$\text{infine: (5)} \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2} \operatorname{in} \cdot (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}.$$

Se il solenoide è indefinito (basta che la sua lunghezza sia una decina di volte il diametro), per i punti situati nella parte centrale dell'asse del solenoide si ha : $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$, e dalla (5) si ricava

$$(6) \quad B_0 = \mu_0 n \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} .$$

Infine, per quanto riguarda il campo magnetico entro il solenoide, tenendo conto che nel vuoto e praticamente nell'aria si ha $B_0 = \mu_0 H_0$, subito si ottiene:

$$H_0 = n \frac{Asp}{m} ,$$

ove $\frac{Asp}{m}$ è da leggere Ampère spire su metro.

Nella regione esterna al solenoide il campo magnetico è molto piccolo rispetto al campo che si ha nella parte interna. Infatti, consideriamo due elementi diametralmente opposti di una spira: essi si possono considerare due pezzettini rettilinei di filo che vengono percorsi dalla corrente secondo versi opposti.

I campi magnetici elementari generati da questi elementi di corrente hanno lo stesso verso all'interno del solenoide, e quindi essi si sommano.

All'esterno del solenoide, invece, i due campi magnetici hanno versi contrari e quindi i loro effetti si annullano reciprocamente.

N. 10 – Sulla proprietà fondamentale del campo di induzione magnetica

Vogliamo illustrare la proprietà fondamentale del campo di induzione magnetica, che si riassume nelle formule:

$$\Phi_S(\vec{B}_0) = 0 , \quad \text{div} \vec{B}_0 = 0 .$$

Sappiamo da molti esperimenti che le linee di flusso del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 sono sempre linee chiuse e quindi prive di punti di inizio e di fine, ossia il campo di induzione non ha sorgenti, nè positive nè negative. Ciò significa che, se si considera una qualsiasi superficie chiusa S tracciata entro un campo magnetico, il numero delle linee di flusso del vettore \vec{B}_0 che entrano attraverso la superficie è sempre uguale al numero delle linee di flusso che ne escono (E. Amaldi, Fisica II, pag. 287 ;C. E. Marves).

Ciò significa che il flusso del vettore \vec{B}_0 attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo:

$$(1) \quad \Phi_S(\vec{B}_0) = 0.$$

Indichiamo con V il volume della regione di spazio racchiuso dalla superficie S e ricordiamo il teorema della divergenza:

$$\int_S \vec{B}_0 \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{B}_0 dV.$$

Poiché questo teorema vale qualunque sia la superficie S e il volume della regione di spazio da essa racchiusa, ne segue che deve essere

$$\text{div} \vec{B}_0 = 0, \text{ o se si vuole } \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0.$$

Le (1),(2) seguitano a valere anche entro la materia e pertanto rappresentano la proprietà fondamentale del vettore induzione magnetica.

N. 11 - Elettrodinamometro assoluto

L'elettrodinamometro assoluto è uno strumento che ci permette di misurare l'intensità di una corrente elettrica e riconduce la misura di questa intensità alla misura di una forza, per esempio la forza peso, e pertanto esso non deve essere preventivamente tarato per mezzo di correnti elettriche di intensità note. In altre parole, questo strumento riconduce la misura di una grandezza elettrica alla misura di una grandezza meccanica (fig. 2-15).

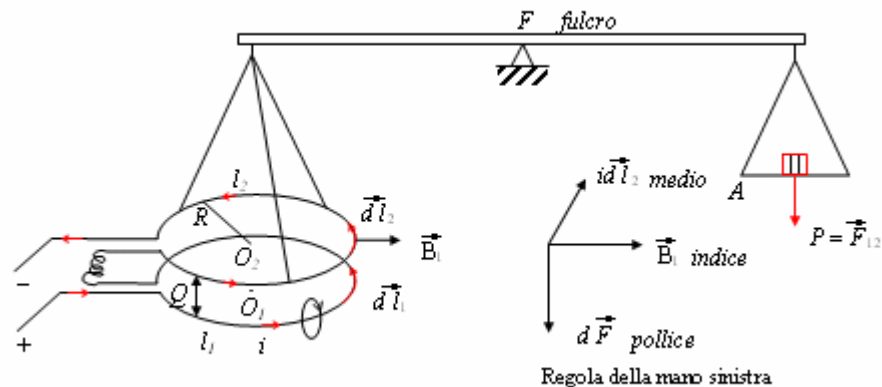


Fig. 2-15

Consideriamo due spire circolari ℓ_1 ed ℓ_2 , aventi lo stesso raggio R , in serie e sovrapposte. Supponiamo che i versi positivi fissati sulle due spire siano tali da apparire concordi ad un osservatore che percorra il circuito risultante sempre nello stesso verso. La corrente che percorre le due spire è

allora la stessa in valore e segno ed è positiva se essa si muove nel verso fissato come positivo sul circuito, come supponiamo. Sia i la sua intensità. Supponiamo che i centri O_1 e O_2 delle due spire siano posti sulla stessa verticale. Supponiamo anche che la spira ℓ_1 sia fissa e la spira ℓ_2 sia mobile e collegata al gioco di una bilancia a bracci uguali.

Poiché le due spire sono percorse dalla corrente in versi concordi, esse si attraggono fra di loro; per l'esattezza, la spira superiore viene attratta verso il basso e se vogliamo ristabilire l'equilibrio della bilancia dobbiamo porre sul piattello A un peso opportuno.

Supponiamo infine che la distanza a fra le due spire sia molto piccola rispetto ai raggi $R_1 = R_2$ e consideriamo due tratti $d\ell_1$ e $d\ell_2$ delle due spire posti uno di fronte all'altro.

In rapporto alla distanza a , i due tratti di spire $d\ell_1$ e $d\ell_2$ si possono considerare due fili rettilinei indefiniti, paralleli fra di loro e vicinissimi.

Allora ogni elemento di corrente $id\ell_2$ della prima spira genera in ogni punto del tratto $d\ell_2$ un campo di induzione magnetica \vec{B} dato, con buona approssimazione, dalla legge di Biot e Savart; in modulo si ha

$$(1) \quad B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{a} .$$

Ne segue che ogni elemento di corrente $id\ell_2$ della spira superiore è attratto dall'elemento opposto di corrente $id\ell_1$ con una forza

$$(2) \quad d\vec{F}_{12} = id\ell_2 \wedge \vec{B}_1 .$$

Poiché $d\ell_2 \perp \vec{B}_1$, in modulo si ha

$$(3) \quad dF_{12} = id\ell_2 B_1 .$$

Sostituendo la (1) nella relazione (3), si ricava che la forza di attrazione che agisce sull'elemento di corrente $d\ell_2$ della seconda spira è

$$(4) \quad dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i^2}{a} d\ell_2 .$$

Per trovare la forza totale F_{12} che attrae tutta la spira basta fare una integrazione. Si ha:

$$F_{12} = \int_0^{2\pi R} dF_{12} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a} \cdot \int_0^{2\pi R} d\ell_2 = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a} \cdot 2\pi R .$$

Semplificando si ottiene: (5) $F_{12} = \mu_0 i^2 \cdot \frac{R}{a} .$

Si ricava che l'intensità di corrente è data dalla formula

(6) $i = \sqrt{\frac{a \cdot F_{12}}{\mu_0 R}} .$

La forza F_{12} è uguale al peso $P = mg$ che viene posto sul piattello A della bilancia; il raggio R e la distanza a fra le due spire si possono misurare comodamente con un regolo graduato; il valore della permeabilità magnetica μ_0 è noto . Si perviene così ad una misura assoluta dell'intensità di corrente; essa è indipendente da ogni misurazione elettromagnetica.

Se a ed R sono misurati in metri, F_{12} in Newton e si pone

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{m}} \quad (\text{ove Henry} = \text{Ohm} \cdot \text{sec}), \text{ l'intensità di corrente } i$$

risulta misurata in Ampère.

Con l'elettrodinometro assoluto la corrente di 1 Ampère può essere misurata con una approssimazione dello 0,1 per mille.

N. 12 – Circuitazione di un vettore

Dato un campo vettoriale \vec{E} , sia ℓ una linea chiusa tracciata nel campo e sulla quale sia fissato un verso come positivo (fig. 2-16). In tal modo il vettore \vec{E} appare come una funzione vettoriale definita in ogni punto della linea.

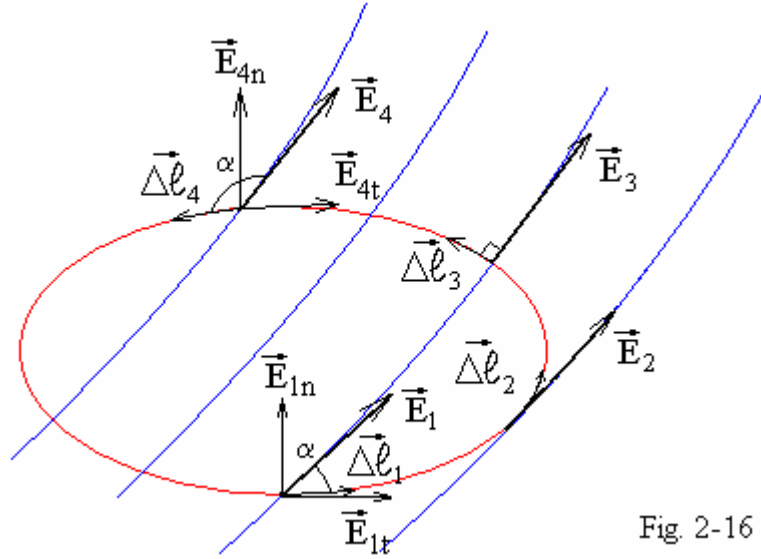


Fig. 2-16

Dividiamo ora la linea ℓ in tanti elementi così piccoli che in ognuno di essi il campo \vec{E} si possa ritenere praticamente costante e tali che ognuno di essi si possa considerare un vettore $\Delta\vec{\ell}$ avente la direzione della tangente alla linea ℓ nell'origine del vettore stesso e verso concorde con quello fissato sulla linea.

Ciò premesso, si dice circuitazione del vettore \vec{E} lungo la linea ℓ l'integrale di linea

$$\oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \times d\vec{\ell}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{E}_1 \times \Delta\vec{\ell}_1 + \vec{E}_2 \times \Delta\vec{\ell}_2 + \dots + \vec{E}_n \times \Delta\vec{\ell}_n).$$

Sia α_1 l'angolo formato dai due vettori \vec{E}_1 e $\Delta\vec{\ell}_1$; inoltre indichiamo con \vec{E}_{1t} il componente del vettore \vec{E}_1 secondo la tangente alla linea ℓ . La circuitazione del vettore \vec{E} avrà allora l'espressione:

$$\oint \vec{E} \times d\vec{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_1 \Delta\ell_1 \cos \alpha_1 + E_2 \Delta\ell_2 \cos \alpha_2 + \dots + E_n \Delta\ell_n \cos \alpha_n) =$$

$$\oint \vec{E} \times d\vec{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_{1t} \Delta\ell_1 + E_{2t} \Delta\ell_2 + \dots + E_{nt} \Delta\ell_n),$$

dove si ha: $E_{1t} = E_1 \cos \alpha_1$, $E_{2t} = E_2 \cos \alpha_2$, ecc; cioè E_{1t} è la componente scalare del vettore \vec{E}_1 secondo il vettore $\Delta \vec{\ell}_1$, ossia secondo la tangente t alla linea ℓ orientata nel verso del vettore $\Delta \vec{\ell}_1$, ed analogamente per E_{2t} , ecc. Naturalmente risulta

$$E_{1t} > 0 \quad \text{se} \quad \alpha_1 < \frac{\pi}{2} \quad , \quad E_{1t} = 0 \quad \text{se} \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$E_{2t} < 0 \quad \text{se} \quad \alpha_1 > \frac{\pi}{2} \quad .$$

Ciò premesso, ricordiamo che un campo vettoriale \vec{E} si dice conservativo se la circuitazione del vettore \vec{E} lungo una qualsiasi linea chiusa ℓ tracciata nel campo è nulla, cioè

$$\oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = 0 \quad .$$

Se il campo vettoriale \vec{E} è conservativo, come succede per il campo elettrico, possiamo definire una funzione scalare $V(x,y,z)$, detta potenziale, per la quale si ha

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad .$$

Ora, a differenza del campo elettrostatico, il campo di induzione magnetica \vec{B}_0 non è conservativo, e pertanto non si può introdurre un potenziale scalare analogo al potenziale elettrico. Infatti il seguente teorema della circuitazione di Ampère ci dice che la circuitazione del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 lungo una linea chiusa è in generale diversa da zero.

N. 13 – Teorema della circuitazione di Ampère (prima parte)

Sia \vec{B}_0 il campo di induzione magnetica generato da n correnti elettriche i_1, i_2, \dots, i_n e sia ℓ una linea chiusa tracciata nel campo e sulla quale sia fissato un verso come positivo. Vogliamo dimostrare il seguente teorema di Ampère (fig. 2-17):

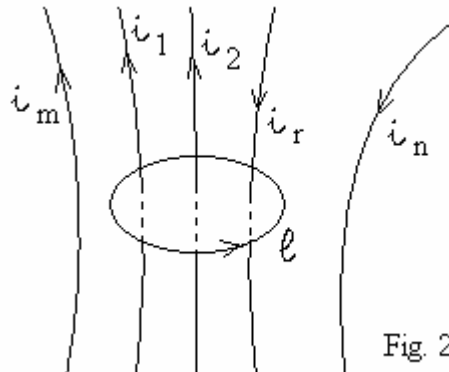


Fig. 2-17

“La circuitazione del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 lungo la linea chiusa ℓ è uguale al prodotto della permeabilità magnetica μ_0 per la somma algebrica delle intensità di corrente concatenate con la linea ℓ , cioè

$$\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{k=1}^r i_k$$

ove l'intensità di corrente i_k è positiva se la corrente stessa personificata vede che il verso fissato come positivo sulla linea ℓ è il verso antiorario; è negativa in caso contrario.

Dimostriamo il teorema in alcuni casi particolari; la generalizzazione sarà poi immediata (fig. 2-18).

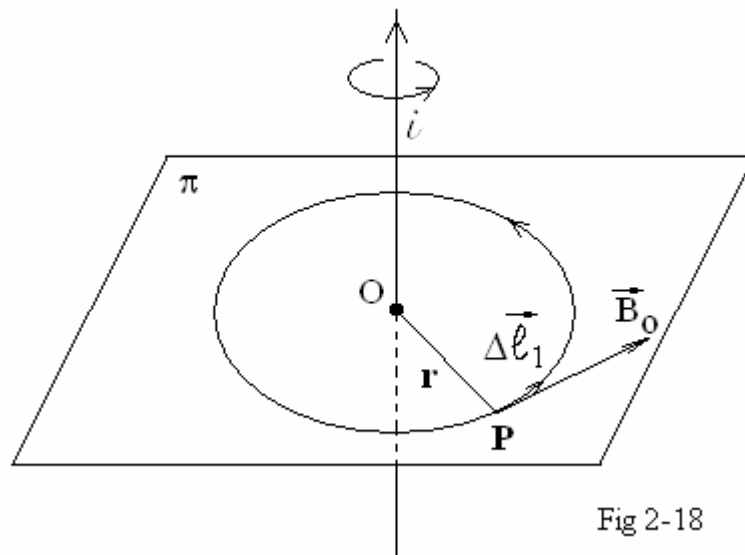


Fig 2-18

Supponiamo che il campo magnetico sia generato da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente di intensità i e supponiamo che la linea chiusa ℓ coincida con una linea di forza del campo e sia orientata nel verso del campo stesso. Quindi ℓ sarà una circonferenza che ha il centro sul filo, giace in un piano π perpendicolare ad esso ed ha il verso dato dalla regola della mano destra di Ampère.

Dividiamo ora la linea ℓ in tanti elementi infinitesimi e praticamente rettilinei $\Delta \vec{\ell}_k$. Al limite ognuno di essi risulta un vettore parallelo e concorde al campo \vec{B}_0 e quindi si avrà

$$\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \vec{B}_0 \times \Delta \vec{\ell}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_0 \Delta \ell_k \cos 0^\circ .$$

Ricordando che B_0 ha l'espressione $B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ si avrà

$$\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta \ell_k .$$

Ma il limite è la lunghezza $2\pi r$ della circonferenza; pertanto si ha:

$$\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot 2\pi r ;$$

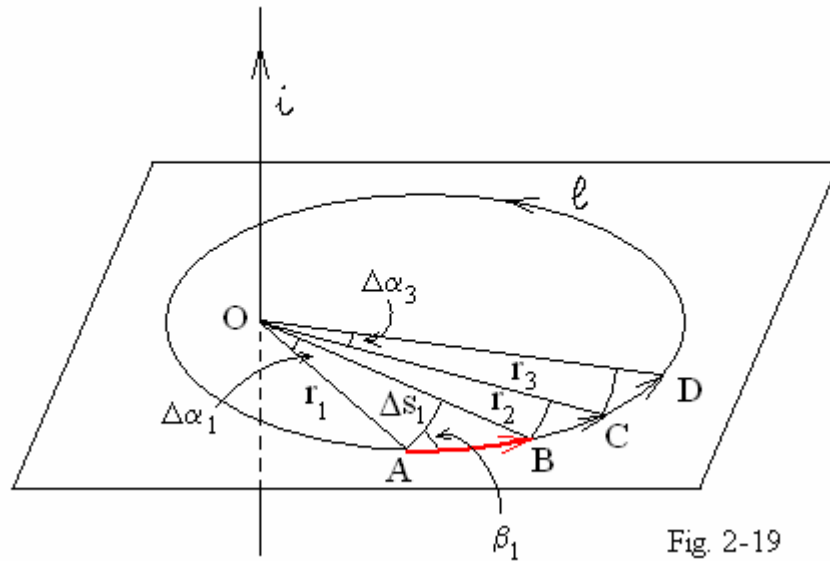
infine si ha $\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 i$.

Se il verso fissato sulla circonferenza è orario rispetto alla corrente personificata i , ogni spostamento $\Delta \vec{\ell}$ è discorde con il verso del vettore Induzione magnetica \vec{B}_0 e la circuitazione del vettore \vec{B}_0 sarà uguale in valore assoluto a quella del caso precedente, ma avrà segno negativo, cioè

$$\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = -\mu_0 i .$$

N. 14 – Teorema della circuitazione di Ampère (seconda parte)

Il teorema della circuitazione di Ampère è valido anche se ci poniamo in condizioni più generali. Per esempio, consideriamo ancora il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente e supponiamo che la linea chiusa ℓ giaccia in un piano perpendicolare al filo ma sia di forma qualsiasi (fig. 2-19).



Orientiamo la linea in modo che il verso fissato su di essa risulti antiorario rispetto al verso in cui si muove la corrente.

Dividiamo ora la linea ℓ in tanti tratti infinitesimi e praticamente rettilinei in modo che ognuno di essi si possa considerare un vettore. Avremo così i vettori $\overrightarrow{AB} = \Delta \vec{\ell}_1$, $\overrightarrow{BC} = \Delta \vec{\ell}_2$, $\overrightarrow{CD} = \Delta \vec{\ell}_3$, ...ecc.

Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ le linee di forza del campo magnetico passanti per i punti A, B, C, ... Esse sono circonferenze di centro O e raggi

$r_1 = \overline{OA}$, $r_2 = \overline{OB}$, $r_3 = \overline{OC}$, ...ecc.

Sia Δs_1 l'arco della γ_1 compreso fra i raggi r_1 ed r_2 ,

β_1 l'angolo compreso fra i vettori $\Delta \vec{s}_1$ e $\Delta \vec{\ell}_2$

e T_1 il triangolo individuato da questi due vettori.

Analogamente, sia Δs_2 l'arco della γ_2 compreso fra i raggi r_2 ed r_3 ,

β_2 l'angolo compreso fra i vettori $\Delta \vec{s}_2$ e $\Delta \vec{\ell}_2$

e T_2 il triangolo individuato da questi due vettori .

Poiché il triangolo T_1 è rettangolo con ipotenusa AB , possiamo scrivere:

$$(1) \quad \Delta s_1 = \Delta \ell_1 \cos \beta_1 .$$

Ma $\Delta s_1 = r_1 \Delta \alpha_1$, ove $\Delta \alpha_1$ è l'angolo di vertice O compreso fra i raggi vettori \overrightarrow{OA} ed \overrightarrow{OB} ; possiamo quindi scrivere

$$(2) \quad \Delta \ell_1 \cos \beta_1 = r_1 \Delta \alpha_1 .$$

Analogamente si ha (2') $\Delta \ell_2 \cos \beta_2 = r_2 \Delta \alpha_2$, ...ecc.

Calcoliamo la circuitazione del vettore \vec{B}_0 lungo la linea ℓ ; si ha:

$$\oint \vec{B}_0 \times d\vec{\ell}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \vec{B}_k \times \Delta \vec{\ell}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k \Delta \ell_k \cos \beta_k .$$

Ricordando le espressioni (2) possiamo scrivere :

$$\begin{aligned} \oint \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k r_k d\alpha_k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (B_1 r_1 \Delta \alpha_1 + B_2 r_2 \Delta \alpha_2 + \dots + B_n r_n \Delta \alpha_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} r_1 \Delta \alpha_1 + \frac{1}{r_2} r_2 \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{1}{r_n} r_n \Delta \alpha_n \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot (\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \dots + \Delta \alpha_n) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot 2\pi . \end{aligned}$$

La circuitazione del vettore \vec{B}_0 lungo la generica curva ℓ concatenata con la corrente i ha quindi l'espressione:

$$(3) \quad \oint \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 i .$$

E' facile dimostrare che, se ℓ_1 ed ℓ_2 sono due linee complanari fra loro, concatenate con il filo e aventi lo stesso verso si ha:

$$\oint_{\ell_1} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \oint_{\ell_2} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell}$$

Si dimostra anche che il teorema è ancora valido se la linea ℓ non è piana, purché essa sia sempre concatenata con il filo, anche se questo non è rettilineo (E. Amaldi, Fisica II, pag 291).

Linea chiusa non concatenata. Consideriamo ancora un filo percorso da una corrente di intensità i ; sia ℓ una linea chiusa non concatenata con il filo e supponiamo, per semplicità, che essa sia una linea piana giacente su un piano π . Vogliamo calcolare la circuitazione del campo di induzione magnetica generato dalla corrente lungo la linea stessa (fig. 2-20).

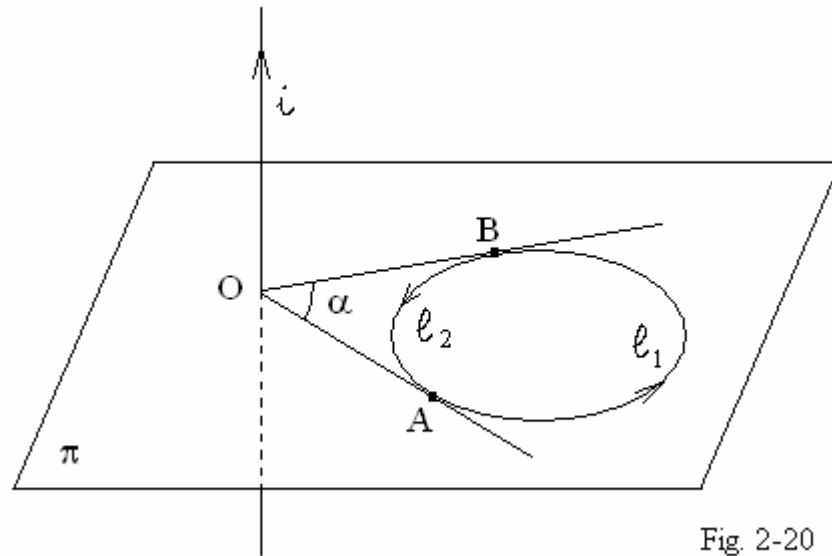


Fig. 2-20

Sia O l'intersezione del filo con il piano della figura. Se dal punto O conduciamo le tangenti alla linea chiusa ℓ , i punti di tangenza A e B dividono la linea in due linee aperte ℓ_1 ed ℓ_2 sulle quali si hanno versi di percorrenza opposti rispetto alla corrente che percorre il filo. Sia α l'angolo compreso fra le due tangenti.

Fatte queste precisazioni, per la circuitazione del vettore \vec{B}_0 lungo la linea ℓ_1 si ha :

$$C_1(\vec{B}_0) = \frac{\mu_0}{2\pi} i (2\pi - \alpha),$$

ed è positiva perché gli spostamenti sono concordi con il verso del campo magnetico.

Per la circuitazione lungo la linea ℓ_2 si ha:

$$C_2(\vec{B}_0) = -\frac{\mu_0}{2\pi} i(2\pi - \alpha),$$

ed è negativa perché gli spostamenti lungo la linea sono discordi con il verso del campo magnetico.

Ne segue che la circuitazione del vettore \vec{B}_0 lungo la linea chiusa ℓ è nulla, cioè

$$\oint \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = 0.$$

N. 15 – Espressione differenziale del teorema della circuitazione di Ampère

Riprendiamo il teorema della circuitazione di Ampère.

Sia ℓ una linea chiusa tracciata nel campo di induzione magnetica \vec{B}_0 generato da correnti stazionarie e sulla quale sia fissato un verso come positivo. Allora

“La circuitazione del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 lungo la linea chiusa ℓ è uguale al prodotto della permeabilità magnetica μ_0 per la somma algebrica delle intensità di correnti concatenate con la linea ℓ , cioè

$$\oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{r=1}^n i_r ;$$

l'intensità di corrente i_r è positiva se la corrente personificata vede che il verso fissato come positivo sulla linea ℓ è antiorario; è negativa nel caso contrario”.

Convienne esprimere la somma delle intensità di corrente mediante il flusso del vettore densità di corrente. Pertanto, sia S una superficie avente come contorno la linea ℓ ed \vec{n} un vettore unitario normale alla superficie S e orientato in modo tale che il verso fissato come positivo sulla linea ℓ gli appaia antiorario. Indichiamo poi con \vec{j} la densità della corrente che attraversa la superficie S . Si osservi che \vec{j} è nullo ovunque tranne che nelle aree dove la superficie S è intersecata dai conduttori. Con queste indicazioni possiamo scrivere la (1) nel modo seguente

$$(2) \quad \oint_{\ell} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j} \times \vec{n} dS .$$

Applicando il teorema di Stokes all'integrale che figura al primo membro della (2) si ha:

$$\int_S \text{rot} \vec{B}_0 \times \vec{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{j} \times \vec{n} dS ,$$

da cui
$$\int_S (\text{rot} \vec{B}_0 - \mu_0 \vec{j}) \times \vec{n} dS = 0 .$$

Poiché tale formula deve valere per una linea ℓ e una superficie S comunque piccole, l'integrando della (2) deve essere nullo. Si ottiene pertanto

$$(3) \quad \text{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} .$$

Usando l'operatore differenziale $\vec{\nabla}$ (nabla) possiamo scrivere

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} .$$

N. 16 - Il campo di induzione magnetica entro un solenoide

Consideriamo un solenoide percorso da corrente. Lo spettro magnetico ottenuto per mezzo della limatura di ferro ci dice che il campo magnetico è uniforme ed ha il valore massimo dentro il solenoide; nella parte esterna, invece, le linee di flusso sono distanti fra loro e quindi il campo magnetico è trascurabile (fig. 2-21).

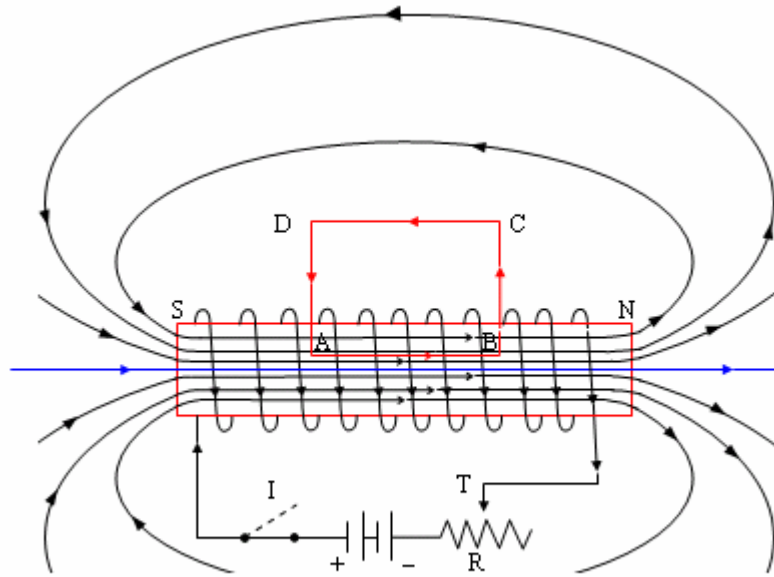


Fig. 2-21

Vogliamo calcolare il campo magnetico in un punto interno di un solenoide indefinito; esso si può ritenere tale quando la sua lunghezza sia più di dieci volte maggiore del diametro.

Consideriamo un rettangolo \$ABCD\$ concatenato con il solenoide, come indicato in figura, e sia $\overline{AB} = \ell$; stabiliamo un verso come positivo sul rettangolo e supponiamo che il vettore \overline{AB} abbia la direzione e il verso delle linee di forza del campo magnetico. Infine sia \$N\$ il numero delle spire del solenoide concatenate con il circuito.

Calcoliamo la circuitazione del vettore induzione magnetica \vec{B}_0 lungo il rettangolo \$ABCD\$. Ricordando il teorema di Ampère si ha:

$$\oint_{\square} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = N\mu_0 i, \quad \text{e quindi}$$

$$(1) \quad \int_{AB} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} + \int_{BC} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} + \int_{CD} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = N\mu_0 i.$$

Ora, il secondo integrale è nullo perché sul lato BC è $\vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = 0$, essendo $\vec{B}_0 \perp d\vec{\ell}$; per lo stesso motivo è nullo il quarto integrale. L'integrale sul lato CD è nullo perché all'esterno del solenoide il campo magnetico è trascurabile. Solo il primo integrale è $\neq 0$; esso è positivo perché sul lato AB i vettori \vec{B}_0 e $d\vec{\ell}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso. E poiché sul lato AB il campo di induzione magnetica è anche costante, abbiamo che il valore dell'integrale è

$$\int_{AB} \vec{B}_0 \times d\vec{\ell} = B_0 \ell.$$

Sostituendo nell'equazione (1) si ha

$$B_0 \ell = \mu_0 N i, \text{ da cui } B_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} i,$$

$$\text{e infine (2) } B_0 = \mu_0 n i.$$

In questa formula n è il numero delle spire del solenoide per unità di lunghezza; esso si ricava dalla proporzione

$$1 : n = \ell : N, \text{ dalla quale si ha : } n = \frac{N}{\ell}.$$

La formula (2) non dipende dalla particolare linea di forza del campo \vec{B}_0 sulla quale è preso il segmento AB; ciò ci dice che **il campo di induzione magnetica entro un solenoide indefinito ha lo stesso valore in ogni punto di una sua sezione.**

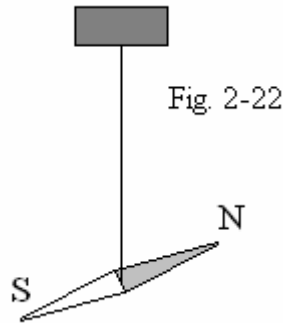
Ricordando che nel vuoto si ha $B_0 = \mu_0 H_0$, possiamo dire che il campo magnetico all'interno di un solenoide abbastanza lungo è dato dalla formula:

$$(3) \quad H_0 = n i \frac{A \cdot sp}{m},$$

ove $\frac{A \cdot sp}{m}$ sta ad indicare la misura in Ampère dell'intensità di corrente che percorre il solenoide per il numero delle spire per unità di lunghezza. Essa rappresenta una nuova unità di misura del campo magnetico.

N. 17 – Momento magnetico di un magnete

Consideriamo un ago magnetico $P_S P_N$ e facciamolo oscillare attorno ad un filo verticale privo di torsione, passante per il suo baricentro, sotto l'azione del solo campo magnetico terrestre (fig. 2-22).



Per l'equazione fondamentale della dinamica dei corpi rigidi si avrà

$$(1) \quad \vec{M} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \text{ ossia } \vec{M} = I\vec{\omega},$$

ove $\vec{P} = I\vec{\omega}$ è il momento della quantità di moto del corpo oscillante ed $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H}_{to}$ è il momento di rotazione a cui è soggetto l'ago sotto l'azione del componente orizzontale \vec{H}_{to} del campo magnetico terrestre. Proiettando la (1) su un asse verticale si ha la relazione scalare:

$$(2) \quad I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -m \cdot H_{to} \sin\vartheta;$$

abbiamo messo il segno $-$ perché la coppia di rotazione esercitata dal campo magnetico terrestre tende a far tornare l'ago nella posizione di equilibrio.

Per piccoli valori dell'angolo ϑ la (2) si riduce all'equazione differenziale del moto armonico:

$$(3) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{mH_{to}}{I} \vartheta = 0.$$

Ne segue che se l'ago è spostato di un piccolo angolo ϑ dalla posizione di equilibrio e poi viene lasciato all'azione del campo magnetico, esso si comporta come un pendolo ed esegue delle oscillazioni isocrone di periodo

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mH_{to}}} .$$

Il momento di inerzia I ed il periodo di oscillazione T si possono determinare meccanicamente; il modulo del componente orizzontale \vec{H}_{to} del campo magnetico terrestre si può determinare per mezzo della bussola delle tangenti. Ciò fatto, possiamo ricavare il modulo del momento magnetico \vec{m} dell'ago e potremo trovare una spira circolare di area S e percorsa da una corrente di intensità i per la quale si possa porre:

$$m = \mu_0 i S \quad \text{e quindi} \quad \vec{m} = \mu_0 i S \vec{n} \quad \text{con} \quad \vec{n} = \text{vettore unitario.}$$

N. 18 – Campo magnetico di un dipolo

Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, consideriamo un dipolo magnetico costituito da un piccolo ago magnetico disposto sull'asse z e con il centro nell'origine O del riferimento. E' facile trovare il campo magnetico in un punto P dello spazio, lontano dal dipolo e posto a distanza $\vec{OP} = \vec{r}$. Esso si può ricavare dal campo elettrico \vec{E}_o generato da un dipolo elettrico di momento $\vec{p} = q\vec{\delta}$ in un punto P dello spazio (Fig. 2-23).

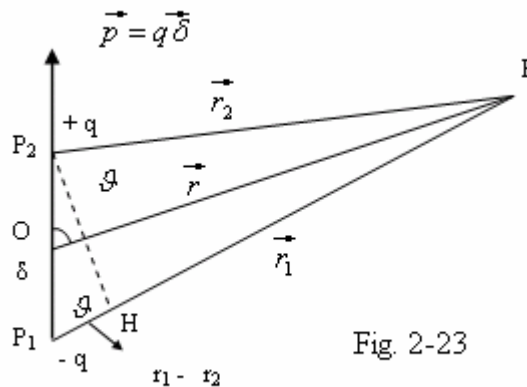


Fig. 2-23

Sappiamo che il potenziale nel punto P è

$$(1) \quad V_o(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{pr \cos \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{pz}{r^3} ,$$

ossia (2)
$$V_o(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

e che il campo elettrico in questo punto si può esprimere mediante il gradiente della funzione potenziale, cioè

$$(3) \quad \vec{E}_o = -\overrightarrow{\text{grad}} V_o = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{pz}{r^3}.$$

Il campo magnetico generato dal dipolo nel punto P si ottiene subito dalla (3) sostituendo \vec{E}_o con \vec{H}_o , ϵ_o con μ_o e il momento elettrico \vec{p} del dipolo con il momento magnetico \vec{m} dell'ago. Si ottiene:

$$(4) \quad \vec{H}_o = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{4\pi\mu_o} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{4\pi\mu_o} \frac{mz}{r^3}.$$

Se poi eguagliamo questo momento magnetico \vec{m} a quello di una spira circolare di area S e percorsa da una corrente i possiamo porre

$$\vec{m} = \mu_o i S \vec{n},$$

e la (4) diviene

$$\vec{H}_o = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{4\pi} \frac{iSz}{r^3} = -\frac{iS}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Per le componenti del campo magnetico generato dal dipolo, relative ad un punto P dello spazio, si ha:

$$H_{ox} = -\frac{iSz}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = -\frac{iSz}{4\pi} \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x.$$

Da qui si ricava H_{ox} ; procedendo in modo analogo si ricavano le altre due componenti del campo magnetico. Precisamente si ha:

$$(5) \quad H_{ox} = \frac{3}{4\pi} \frac{iSz_x}{r^5}, \quad H_{oy} = \frac{3}{4\pi} \frac{iSzy}{r^5} \quad \text{e} \quad H_{oz} = \frac{iS}{4\pi r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right).$$

In particolare, se il punto si trova sull'asse z si ha

$$r = (0 + 0 + z^2)^{1/2}, \text{ cioè } r = z$$

e per le componenti del campo magnetico si ottiene $H_{xo} = H_{yo} = 0$, mentre per la terza componente si ha

$$H_{oz} = \frac{iS}{4\pi z^3} \left(\frac{3z^2}{z^2} - 1 \right) = \frac{iS}{2\pi z^3}.$$

Poiché la spira è una circonferenza di raggio R si ottiene $H_{oz} = \frac{i2\pi R^2}{4\pi z^3}$.

Semplificando, si trova che in un punto dell'asse z il campo magnetico è dato dalla formula:

$$(6) \quad H_0 = \frac{1}{2} i \frac{R^2}{z^3}, \quad \text{e quindi} \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{z^3}.$$

Abbiamo trovato la formula (6) sfruttando le formule del campo magnetico generato da un dipolo magnetico. **E' importante osservare che se si vuole calcolare con la formula di Laplace il campo magnetico generato da una spira circolare in un punto P del suo asse si ritrova la formula (6).**

Più in generale, supponiamo che si vogliano trovare, con la formula di Laplace, le componenti del campo magnetico generato dalla spira circolare in un punto P qualsiasi dello spazio; in tal caso si ritrovano ancora una volta le formule (5) trovate attraverso le proprietà del dipolo magnetico.

N. 19 - Teorema dell'equivalenza di Ampère

Le proprietà di un dipolo magnetico espresse nei paragrafi (16),(17) ci permettono affrontare il teorema dell'equivalenza di Ampère; esso esprime l'equivalenza fra una spira percorsa da corrente e un ago magnetico.

Tale equivalenza ha due aspetti: a) il primo riguarda le azioni meccaniche che un campo magnetico esercita su una spira e su un ago; b) il secondo aspetto riguarda il campo magnetico generato dalla spira e dall'ago.

Per quanto riguarda il primo punto, consideriamo una spira percorsa da una corrente i immersa in un campo di induzione magnetica \vec{B}_0 , formante un angolo ϑ con la normale \vec{n} alla superficie della spira Fig. 2-24).

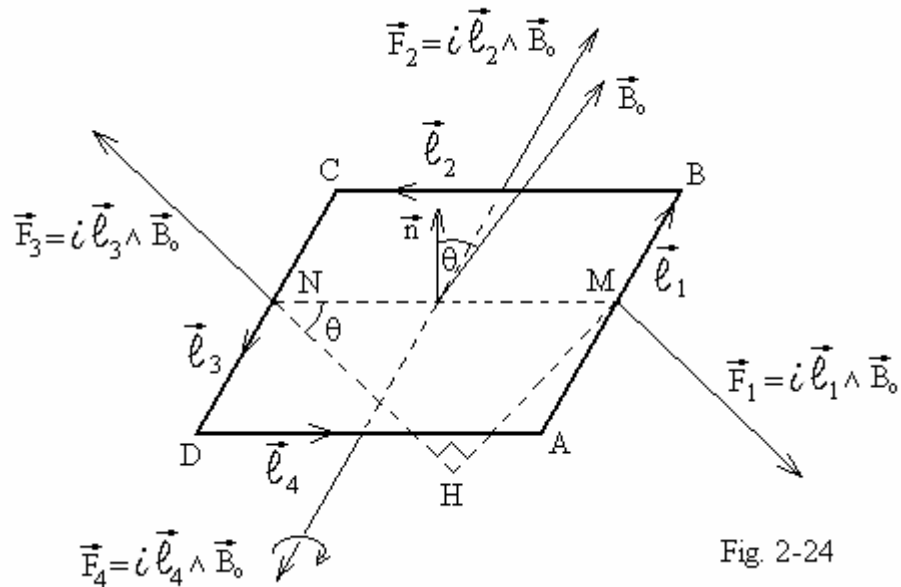


Fig. 2-24

Se il campo magnetico è uniforme, le azioni meccaniche esercitate dal campo magnetico sulla spira si riducono ad una coppia di rotazione. Per semplicità, supponiamo che la spira sia rettangolare, di lati consecutivi \vec{l}_1 ed \vec{l}_2 , e che uno di questi, per es. \vec{l}_2 , sia parallelo al piano dei vettori \vec{n} ed \vec{H}_0 ; pertanto \vec{H}_0 sarà perpendicolare ai lati \vec{l}_1 ed \vec{l}_3 .

Abbiamo già visto che le azioni meccaniche esercitate dal campo magnetico sulla spira si riducono ad una coppia di momento

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H}_0,$$

ove $\vec{m} = \mu_0 i S \vec{n}$ è il momento magnetico della spira.

Ma anche un ago magnetico di momento $\vec{m} = \mu_0 i S \vec{n}$ è soggetto ad una coppia di rotazione avente lo stesso momento.

Abbiamo anche visto, nel paragrafo precedente, che una spira percorsa da corrente e un ago magnetico aventi lo stesso momento polare $\vec{m} = \mu_0 i S \vec{n}$ generano campi magnetici uguali in uno stesso punto dello spazio.

In conclusione, una spira di area S piccolissima percorsa da una corrente di intensità i equivale ad un dipolo magnetico di momento $\vec{m} = \mu_0 i S \vec{n}$ nel senso che:

1°) da un lato il momento meccanico della coppia esercitata su di essa da un campo magnetico esterno si può scrivere nella forma

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H}_0 \quad \text{con} \quad \vec{m} = \mu_0 i S \vec{n},$$

come si verifica per il dipolo magnetico;
 2°) dall'altro lato, una spira percorsa da corrente e un ago magnetico aventi entrambi lo stesso momento magnetico $\vec{m} = \mu_0 i S \vec{n}$ generano campi magnetici uguali in uno stesso punto dello spazio, anche se il primo campo è calcolato con la formula di Laplace, mentre il secondo è calcolato come gradiente, cambiato di segno, del potenziale magnetico

$$V_o(P) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{i S \vec{n} \times \vec{r}}{r^3}.$$

N. 20 – Correnti indotte: leggi di Faraday e di Lenz.

Consideriamo un circuito chiuso costituito da un conduttore filiforme l sul quale è inserito un galvanometro G . Per comodità supponiamo che esso sia posto su un piano α (fig. 2-25).

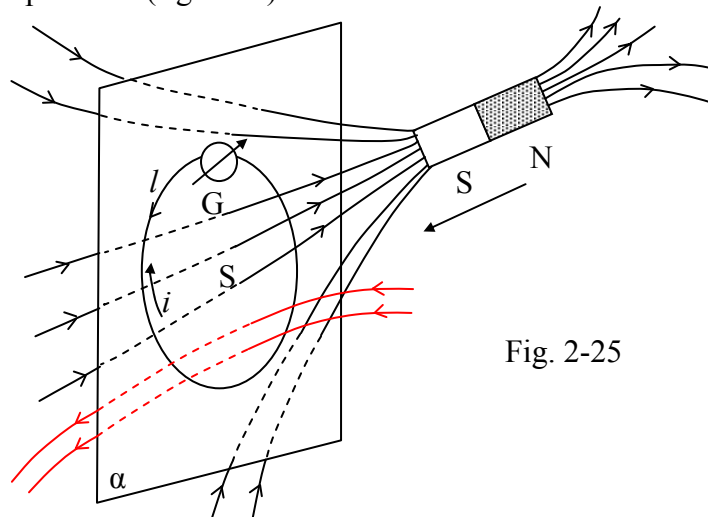


Fig. 2-25

Come ha riconosciuto per la prima volta Faraday, “tutte le volte che attraverso un circuito chiuso si ha una variazione di flusso di induzione magnetica si genera nel circuito stesso una corrente indotta; essa dura fin quando si ha la variazione di flusso”.

Spieghiamo questo fenomeno.

Supponiamo di avvicinare al circuito il polo Sud di una calamita; alcune linee di flusso del campo magnetico che prima passavano fuori si vanno a concatenare con il circuito, nel quale si genera una corrente indotta rilevata dal galvanometro. Lo strumento ci indica anche che la corrente circola in

senso orario. Quando la calamita si ferma, non c'è più variazione di flusso e il galvanometro torna a zero.

Se ora allontaniamo la calamita, nel circuito si genera una corrente indotta che si muove in senso contrario al precedente.

L'esperienza di Faraday è così dimostrata.

Torniamo ad esaminare l'esperimento. Sul piano α consideriamo come pagina positiva quella rivolta verso la calamita e sul circuito fissiamo come verso positivo il verso antiorario. Nel primo caso il galvanometro indica una corrente che circola in senso orario; quindi $i < 0$. Ricordando la regola del Si e del No, la faccia della spira genera un polo Sud che si oppone al moto della calamita. Possiamo anche dire che le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente indotta hanno verso contrario a quelle della calamita e quindi tendono a distruggere l'aumento di flusso dovuto a questa.

Possiamo fare una importante osservazione.

Le linee di forza del campo magnetico che fanno capo al polo Sud della calamita generano nella spira un flusso positivo: infatti esso esce dalla faccia positiva del piano α .

Quando avviciniamo il polo sud della calamita, le linee del campo magnetico concatenate con il circuito aumentano; quindi si ha:

$$\Delta\Phi_S(\vec{B}) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} > 0 \quad .$$

La corrente che passa nella spira, invece, è negativa perché circola in senso orario, quindi $i < 0$.

Il fatto che il rapporto $\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$ e la corrente i abbiano segni opposti si

ritrova, come vedremo, nella legge di Neumann-Lenz.

Quando allontaniamo la calamita, il galvanometro indica una corrente che si muove nel circuito in verso antiorario, quindi essa ha intensità $i > 0$.

Ricordando la regola del Si e del No, la faccia della spira rivolta verso la calamita genera un polo Nord che attrae il polo Sud della calamita e tende ad ostacolarne il moto. Questa volta la corrente indotta genera nella spira un campo magnetico le cui linee di forza escono dalla faccia positiva del piano

α , cioè della spira, e quindi hanno verso tale da compensare le linee di forza della calamita che sono uscite dal circuito indotto.

Possiamo ripetere l'osservazione precedente.

Quando allontaniamo il polo Sud, le linee di forza, del campo magnetico della calamita concatenate con il circuito diminuiscono; quindi si ha:

$$\Delta\Phi_S(\vec{B}) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} < 0 \quad .$$

La corrente i che passa nella spira, invece, è positiva perché circola nel verso fissato come positivo; quindi $i > 0$.

Il fatto che la variazione di flusso $\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$ e la corrente i abbiano segni contrari si ritrova nella legge di Neumann-Lenz.

Possiamo ora enunciare, in due modi diversi, la legge di LENZ :

- 1) **La corrente indotta ha verso tale da opporsi alla causa che l'ha generata.**

Abbiamo visto, infatti, che quando avviciniamo al circuito il polo Sud di una calamita, nella spira si genera una corrente che circola in senso orario. Essa, quindi, equivale a una seconda calamita il cui polo Sud è orientato in modo tale da respingere il polo omonimo della calamita inducente.

- 2) La corrente indotta ha verso tale da produrre un campo magnetico concatenato con il circuito indotto e che tende a distruggere la variazione di flusso che l'ha generata.

Illustriamo il fenomeno delle correnti indotte con un altro esperimento (fig. 2-26), per il quale si ha una spiegazione analoga a quella data per l'esperimento precedente.

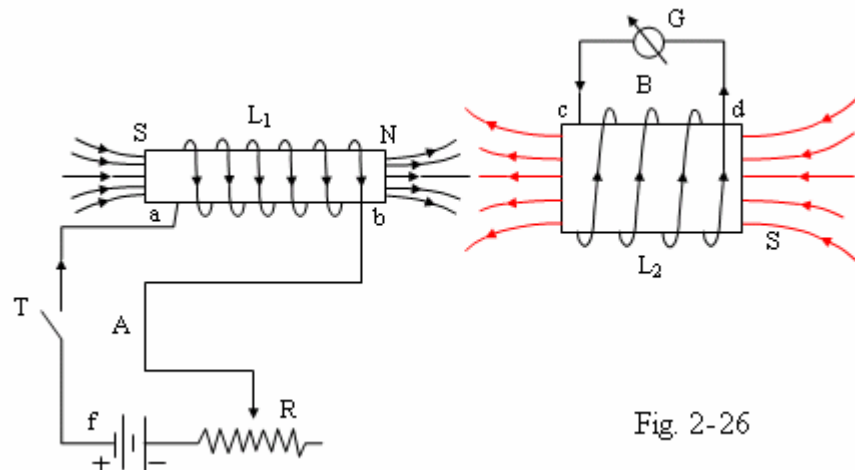


Fig. 2-26

Abbiamo un circuito A in cui sono inseriti un generatore di f.e.m. F_e costante, un reostato R, un solenoide L_1 e un interruttore T. Il circuito B è un solenoide L_2 in cui è inserito un galvanometro G.

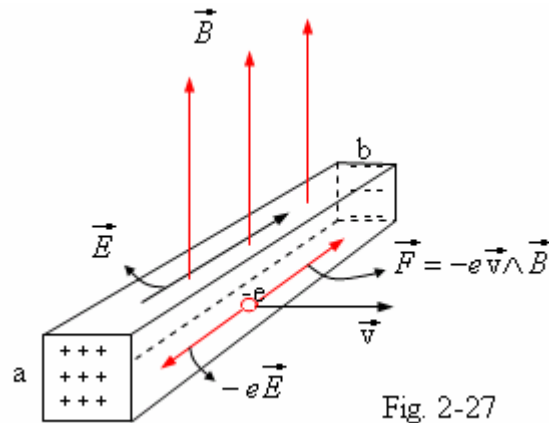
Quando si chiude il tasto T, nel circuito A passa una corrente che genera un campo magnetico $H_0 = ni$ As/m all'interno del solenoide L_1 , che pertanto si comporta come una calamita.

Nel nostro caso, ricordando la regola della mano destra di Ampère, il solenoide presenta un polo Nord alla sua estremità b. Le linee di flusso del campo magnetico che escono da questa estremità si vanno a concatenare con il solenoide L_2 nel quale si produce una variazione di flusso magnetico che fa nascere una corrente indotta i' ; quindi anche il secondo circuito si comporta come una calamita. La corrente indotta i' , per la legge di Lenz, ha verso tale da opporsi alla causa che l'ha generata e quindi essa circola in modo tale da generare un polo Nord all'estremità c del circuito indotto.

N. 21 – Induzione elettromagnetica e legge di Faraday-Neumann.

In alcuni circuiti la variazione di flusso di induzione magnetica $\Delta\Phi(\vec{B})$ che genera la corrente indotta è ottenuta spostando un tratto mobile del circuito.

Questi fenomeni di induzione elettromagnetica si possono spiegare da un punto di vista elettronico.



Consideriamo una sbarretta metallica e supponiamo che essa si muova con una certa velocità \vec{v} perpendicolare ad un campo di induzione magnetica \vec{B} uniforme e costante nel tempo (fig. 2-27).

Allora anche gli elettroni di conduzione si muovono con una velocità di insieme \vec{v} uguale a quella della sbarretta e quindi sono soggetti alla forza di Lorentz.

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad .$$

Questa forza spinge gli elettroni di conduzione verso l'estremità b della sbarretta, dove si avrà un accumulo di cariche negative, mentre all'altra estremità si avrà un addensamento di cariche positive.

Questa nuova distribuzione di cariche all'interno del conduttore genera un campo elettrico crescente \vec{E} (campo elettrico indotto) e quindi su ogni elettrone agisce una forza elettrica $-e\vec{E}$ che si oppone alla forza di Lorentz; in condizioni di equilibrio si avrà:

$$-e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} = 0 \quad ,$$

cambiando segno

$$(1) \quad e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} = 0 \quad .$$

Quando viene raggiunta questa eguaglianza termina lo spostamento di elettroni all'interno del conduttore.

Nella fase iniziale, invece, il campo elettrico che sta nascendo nel conduttore a causa dello spostamento di cariche è piccolo; anche la forza elettrica $-e\vec{E}$ che agisce su ogni elettrone è piccola e risulta minore della forza di Lorentz

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad .$$

Il campo elettrico indotto \vec{E} genera ai capi della sbarretta una d.d.p. $\Delta V = E \cdot \ell$ che sussiste fintanto che la sbarretta è in moto nel campo magnetico.

Se la sbarretta si ferma, sulle cariche interne al conduttore viene subito a mancare la forza di Lorentz e quindi la forza elettrica $-e\vec{E}$ riporterà in breve tempo gli elettroni ad una distribuzione uniforme e il campo elettrico si annulla. Anche in questa fase la sbarretta sarà sede di una corrente elettrica, ma di breve durata.

Fatta questa premessa possiamo ricavare la legge della f.e.m. indotta in un circuito.

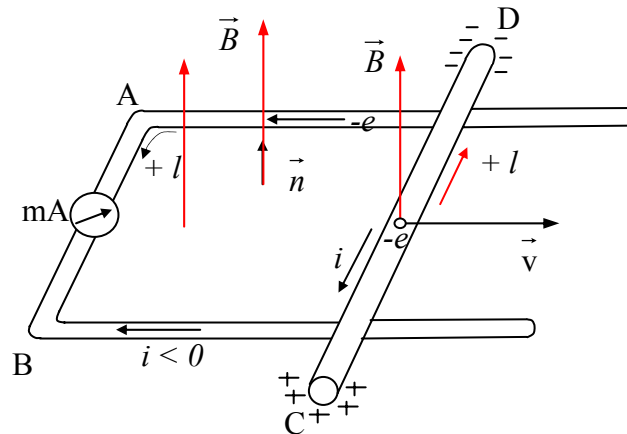


Figura 2-28

Consideriamo un circuito costituito da un telaio rettangolare su cui è poggiata una sbarretta mobile (fig. 2-28).

Immergiamo il circuito in un campo di induzione magnetica \vec{B} uniforme costante nel tempo e perpendicolare al piano del telaio; fissiamo inoltre sul

circuito un verso positivo che risulti antiorario rispetto al vettore \vec{B} personificato.

In tal modo il flusso del vettore \vec{B} attraverso il circuito risulta positivo

$$\Phi_S(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{n} \cdot \vec{S} = BS > 0 \quad .$$

Se ora spostiamo la sbarretta verso l'esterno con velocità \vec{v} anche gli elettroni di conduzione si muovono con velocità \vec{v} e su ognuno di essi agisce la forza di Lorentz

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad .$$

Questa forza spinge gli elettroni verso l'estremità b della sbarretta, dove si avrà un accumulo di cariche negative, mentre all'altra estremità si avrà un addensamento di cariche positive; nella sbarretta, invece, abbiamo un campo elettrico indotto \vec{E} generato dalla nuova distribuzione di cariche e una d.d.p. applicata agli estremi data dalla relazione

$$\Delta V = V_C - V_D = E \cdot \ell \quad .$$

Il campo elettrico (indotto) \vec{E} mette in moto gli elettroni nel circuito. Ma questi non possono tornare indietro lungo la sbarretta perché sono respinti dalla forza di Lorentz e quindi si spostano nel telaio in senso antiorario passando dal punto D , a potenziale minore, al punto C a potenziale maggiore.

Questo flusso di elettroni in senso antiorario equivale ad un flusso di cariche positive in senso opposto; pertanto il telaio sarà percorso da una corrente indotta e che circola nel verso fissato come negativo e quindi tale che $i < 0$. Ora, in condizione di equilibrio per gli elettroni della sbarretta si ha

$$-e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} = 0$$

da cui

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0 \quad .$$

Proiettando su un'asse x parallelo alla sbarretta si ottiene

$$E - vB = 0$$

da cui

$$(2) \quad E = v \cdot B \quad .$$

Ma agli estremi della sbarretta si ha una d.d.p. $\Delta V = E \cdot \ell$; si ricava

$$E = \frac{\Delta V}{\ell} \quad .$$

Sostituendo nella (2) si ha

$$\frac{\Delta V}{\ell} = Bv$$

e quindi

$$(3) \quad \Delta V = B\ell v$$

Se indichiamo con Δx lo spostamento della sbarretta nel tempo Δt si ottiene:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad .$$

Sostituendo nella (3) si ha

$$\Delta V = B\ell \frac{\Delta x}{\Delta t} = B \frac{\Delta(\ell x)}{\Delta t} = B \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad ,$$

ove $\Delta S = S_2 - S_1$ è la superficie spazzata dalla sbarretta nel tempo Δt .
Proseguendo, possiamo scrivere

$$\Delta V = \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} \quad .$$

Ma BS è il flusso del vettore \vec{B} attraverso la superficie S del telaio, ossia:

$$\mathcal{BS} = \vec{B} \times \vec{n} \quad S = \Phi_S(\vec{B}) \quad .$$

Si ricava:

$$(4) \quad \Delta V = \frac{\Delta \Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} \quad .$$

Poiché ΔV è mediamente la f.e.m. indotta possiamo scrivere

$$\bar{f}_i = - \frac{\Delta \Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} \quad .$$

Si è aggiunto il segno $-$ per ricordare che gli effetti di questa f.e.m. sono tali da opporsi alla variazione di flusso del campo magnetico, in accordo con la legge di Lenz.

Passiamo al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ e ricordiamo che il limite del rapporto incrementale è la derivata, si ha:

$$f_i = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad (5) \quad f_i = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} \quad .$$

La (5) è la legge di Faraday- Neumann-Lenz, che si può così enunciare:

“Ogni qualvolta il flusso di induzione magnetica concatenato con un circuito subisce una variazione, per una ragione qualsiasi, nel circuito si genera una f.e.m. indotta data dalla legge (5)”.

La variazione di flusso del campo magnetico può avvenire secondo varie modalità, cioè:

1°) moto del circuito indotto nel campo magnetico generato da un circuito elettrico fermo; 2°) moto del circuito inducente rispetto al circuito indotto; 3°) variazione della corrente elettrica che genera il campo magnetico; 4°) infine, la variazione del flusso magnetico nel circuito indotto può avvenire anche se questo circuito subisce una deformazione o possiede un tratto mobile, come nel caso da noi analizzato; e questo tratto è la vera sede della f.e.m. indotta.

Se ricordiamo che ΔV è la d.d.p. applicata agli estremi della sbarretta e indichiamo con i la corrente indotta che passa nel telaio, per la legge di Ohm si ha:

$$\Delta V = i \cdot R \quad ,$$

ove con R abbiamo indicato la resistenza totale del circuito. Sostituendo nella (4) si ha

$$iR = \frac{\Delta \Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} \quad .$$

Introducendo il segno $-$, in accordo con la legge di Lenz, si ricava

$$(6) \quad i = - \frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} \quad .$$

L'introduzione del segno $-$ nella (5) si giustifica con il seguente ragionamento:

ovviamente è $\Delta t > 0$; anche $\Delta \Phi_S(\vec{B}) > 0$, perché la sbarretta si sposta verso l'esterno e quindi il flusso attraverso il telaio aumenta; l'intensità di corrente i , invece, è negativa ($i < 0$), perché la corrente percorre il circuito nel verso negativo. È quindi necessario un cambiamento di segno per ristabilire l'eguaglianza dei valori dei due membri della formula (5). In altre parole il segno $-$ ricorda la legge di Lenz, ossia ricorda che la corrente indotta ha verso tale da opporsi alla variazione di flusso del campo magnetico che l'ha generata.

Se la velocità della sbarretta non è costante, la (6) fornisce la corrente media che attraversa il telaio; per ottenere l'intensità di corrente istantanea basta passare al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, ossia basta fare la derivata. Si ottiene

$$(7) \quad i(t) = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} \quad .$$

Tornando alla (6), da essa si può ricavare la carica elettrica ΔQ indotta nel circuito nel tempo Δt . Infatti si ottiene in successione

$$i\Delta t = -\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{R}.$$

Ricordiamo la definizione di intensità media di corrente

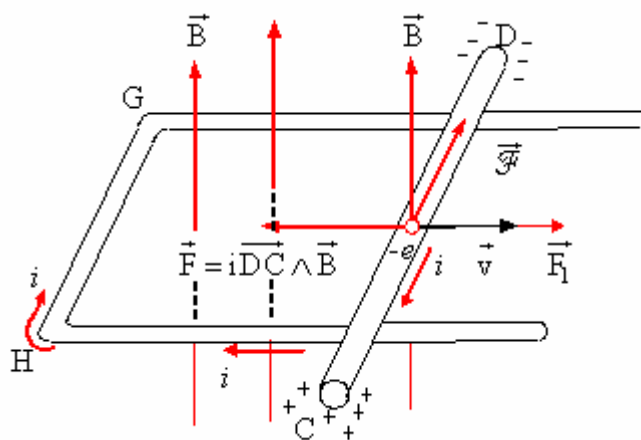
$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{da cui} \quad \Delta Q = i \Delta t \quad ;$$

Sostituendo nell'espressione precedente si ottiene

$$(8) \quad \Delta Q = - \frac{\Delta \Phi_s(\vec{B})}{R} \quad \underline{\text{Legge di Felici.}}$$

N. 22 – Corrente indotta e principio di conservazione dell'energia.

Consideriamo il circuito indicato in fig 2-29:

**Figura 2-29**

Sappiamo che quando si sposta la sbarretta mobile, in essa si genera una corrente indotta che circola nel telaio. Vogliamo vedere se la corrente indotta può essere prodotta gratuitamente o richiede un impiego di energia. Anzitutto osserviamo che quando la sbarretta si muove nel verso indicato, la forza di Lorentz

$$\vec{F} - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad .$$

spinge gli elettroni verso l'estremità D della sbarretta. Ma il flusso di cariche negative in un verso equivale al flusso di cariche positive in senso contrario. Possiamo quindi dire che una corrente convenzionale attraversa la sbarretta nel verso $D \rightarrow C$, percorrendo il telaio in senso orario. Ma quando un conduttore percorso da corrente è immerso in un campo di induzione magnetica \vec{B} esso è soggetto alla forza

$$(1) \quad \vec{F} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad 2^a \text{ formula di Laplace.}$$

Nel nostro caso se orientiamo la sbarretta nel verso della corrente $D \rightarrow C$ vediamo che la forza che agisce su di essa è

$$(2) \quad \vec{F} = i \overrightarrow{DC} \wedge \vec{B} .$$

La regola della mano sinistra di Fleming ci dice che questa forza è contraria al moto della sbarretta e tende a fermarla. Cioè la corrente indotta ha verso tale da opporsi alla causa che l'ha generata; e ciò è in accordo con la legge di Lenz. Riscriviamo, per comodità la legge di Faraday-Neumann

$$i = - \frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi_s(\vec{B})}{\Delta t} ;$$

Il segno - che compare in questa legge ci ricorda la legge Lenz. Se quindi vogliamo ottenere una corrente continua che percorra il telaio dobbiamo applicare alla sbarretta mobile una forza costante \vec{F}_1 uguale e contraria ad \vec{F} .

Il lavoro che questa forza \vec{F}_1 compie per spostare la sbarretta di un tratto Δs sarà:

$$\Delta L = F_1 ds ; \quad \text{poiché} \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

si ottiene

$$\Delta L = F_1 v \Delta t .$$

Poiché $\vec{F}_1 = -i \overline{DC} \wedge \vec{B}$, per il suo modulo si ha $F_1 = F = i \overline{DC} \cdot B$.
Sostituendo nell'espressione ΔL si ottiene:

$$(3) \quad \Delta L = i \overline{DC} \cdot B v \Delta t .$$

Ricordiamo ora che all'equilibrio si ha: $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$.

Proiettando su un'asse x orientato come il vettore \vec{E} si ottiene la relazione scalare

$$E - v \cdot B = 0 \quad \text{da cui} \quad (4) \quad B \cdot v = E .$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene

$$\Delta L = +i \overline{DC} E \Delta t .$$

Ma $E \overline{DC} = \Delta V$ cioè $E \overline{DC}$ è la d.d.p. applicata agli estremi della sbarretta.

L'espressione del lavoro elementare assume quindi la forma

$$(5) \quad \Delta L = +i \Delta V \cdot \Delta t$$

Ma per la legge di Ohm $\Delta V = iR$, ove R è la resistenza totale del circuito; sostituendo nella (5) si ottiene il lavoro necessario a spostare la sbarretta nell'intervallo di tempo Δt . Esso è

$$\Delta L = +i^2 R \Delta t \text{ Joule} .$$

Conclusione: la forza che trascina la sbarretta compie, nel tempo Δt , un lavoro uguale all'energia che la corrente elettrica sviluppa nel circuito nel tempo stesso.

N. 23 – Forma differenziale della legge di Faraday-Neumann-Lenz

Consideriamo la legge di Faraday-Neumann-Lenz sulla f.e.m. indotta in un circuito:

$$(1) \quad f_i = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} ,$$

e supponiamo, per semplicità, che il circuito indotto sia fermo e che la variazione del flusso di induzione magnetica con esso concatenato sia dovuta o al moto del circuito inducente o ad una variazione della corrente che percorre questo circuito.

Ora, la f.e.m. f_i che si desta nel circuito indotto è data dal lavoro totale che tutte le forze –elettriche, magnetiche o di altra origine- compiono per spostare l'unità di carica positiva lungo il circuito. Pertanto la f.e.m. f_i , è uguale all'integrale di linea del campo elettrico totale \vec{E} ; tale campo è dato dalla somma del campo elettrostatico \vec{E}_s , del campo elettrico indotto \vec{E}_i e di un eventuale campo elettromotore \vec{E}_m dovuto ad un generatore di corrente inserito nel circuito.

Indicando con ℓ la linea che rappresenta il circuito indotto si ha:

$$(2) \quad f_i = \oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = \oint_{\ell} (\vec{E}_s + \vec{E}_i + \vec{E}_m) \times d\vec{\ell} .$$

Possiamo escludere il campo elettromotore \vec{E}_m , perché a noi interessano solamente le f.e.m. prodotte dalla variazione di flusso del campo magnetico. Ne segue che:

$$f_i = \oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = \oint_{\ell} \vec{E}_s \times d\vec{\ell} + \oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} .$$

Poiché la circuitazione del campo elettrostatico \vec{E}_s è nulla, essendo tale campo conservativo, si ha:

$$(3) \quad f_i = \oint_{\ell} \vec{E} \times d\vec{\ell} = \oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} .$$

Tenendo presente la (3), se indichiamo con S la superficie avente per contorno la linea ℓ , possiamo dare un'altra forma alla (1); cioè

$$(4) \quad \oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \times \vec{n} dS ,$$

ove \vec{n} è un vettore unitario normale alla superficie S e orientato in modo tale che il verso fissato come positivo sulla linea ℓ gli appaia antiorario. Possiamo portare il segno di derivata sotto il segno di integrale, poiché l'operazione di derivata e quella di integrazione si riferiscono a variabili diverse e si ottiene

$$(5) \quad \oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{n} \, dS .$$

Essa ci dice che:

“Ogni variazione nel tempo di un campo magnetico genera la comparsa di un campo elettrico rotazionale, cioè non conservativo”.

L'origine della f.e.m. nel circuito indotto è dovuta all'insorgere, nello spazio, di questo campo elettrico indotto \vec{E}_i non conservativo, che esiste anche fuori del filo conduttore. Questo filo fornisce solo il supporto materiale attraverso il quale si propaga la corrente indotta, consentendo così di porre in evidenza l'esistenza del campo \vec{E}_i .

E' importante tenere presente che questo campo elettrico \vec{E}_i non è un campo elettrostatico e non è conservativo, come dimostra la formula già vista

$$\oint_{\ell} \vec{E}_i \times d\vec{\ell} = f_i .$$

Torniamo ora alla formula (5).

Applicando il teorema di Stokes (o teorema della circuitazione) all'integrale di linea che figura nella formula si ha:

$$(6) \quad \int_S \text{rot} \vec{E} \times \vec{n} dS = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{n} dS ,$$

da cui

$$\int_S \left(\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \times \vec{n} dS = 0 .$$

Poiché questa formula deve sussistere qualunque sia l'estensione della superficie S , ne segue che deve essere:

$$(7) \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} .$$

Facendo uso degli operatori differenziali possiamo anche scrivere:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

La (7) rappresenta l'espressione differenziale della legge di Faraday-Neumann-Lenz ed esprime una proprietà fondamentale del campo elettromagnetico. Essa rappresenta la III) equazione di Maxwell nel caso non stazionario. Ricordiamo che nel caso stazionario tale equazione è $\text{rot} \vec{E} = 0$.

N. 24 – Autoinduzione

Riprendiamo per un momento il fenomeno delle correnti indotte.

Nel parag. N. 20 abbiamo illustrato alcune esperienze di induzione elettromagnetica: esse ci dicono che ogni volta che in un circuito chiuso si ha una variazione di flusso di induzione magnetica si genera nel circuito stesso una corrente indotta che dura fin quando si ha la variazione di flusso (vedi figg. 2-25 e 2-26).

Le esperienze di Lenz ci dicono che la corrente indotta ha verso tale da produrre un flusso di induzione concatenato con il circuito indotto e che tende a distruggere la variazione di flusso che l'ha generata.

In altre parole: **la corrente indotta ha verso tale da opporsi alla causa che l'ha generata.**

Questa corrente è dovuta alle f.e.m. indotte che si generano in ogni elemento del circuito; esse producono una f.e.m. indotta totale data dalla formula

$$F_i = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt} \quad \text{legge di Neumann – Lenz.}$$

Consideriamo ora un circuito in cui sia inserito un generatore di f.e.m. F_e costante, un reostato R , una bobina di induttanza L e un interruttore T (fig. 2-30).

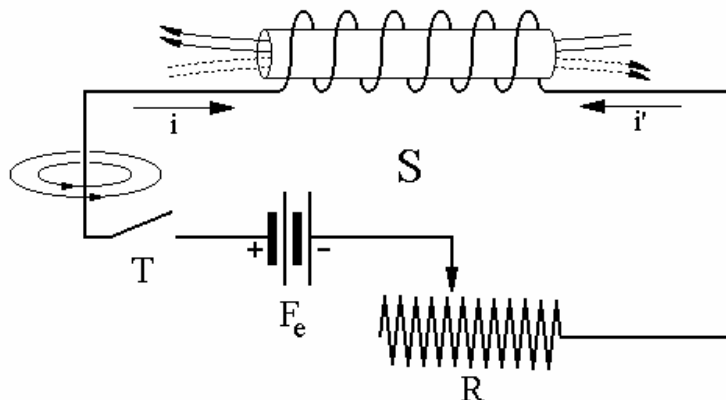


Figura 2-30

Quando questo circuito, che è del tutto generico, viene percorso da corrente, esso si trova immerso nel campo magnetico generato dalla corrente stessa. Il circuito, infatti, genera nello spazio circostante un campo di induzione magnetica \vec{B} le cui linee di flusso sono concatenate con esso.

Ne segue che il circuito è attraversato da un flusso di induzione $\Phi(\vec{B})$ concatenato con esso.

Il flusso attraverso un elemento di superficie dS è

$$d\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{n} dS$$

L'induzione magnetica generata da un elemento di circuito $d\vec{\ell}$ è data dalla 2^a legge elementare di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge d\vec{\ell}$$

Questa formula ci dice che l'induzione magnetica \vec{B} dipende dalla intensità i di corrente che percorre il circuito e dalle caratteristiche geometriche del circuito stesso. Ne segue che anche il flusso $\Phi(\vec{B})$ che attraversa il circuito sarà proporzionale alla intensità di corrente i e possiamo scrivere

$$\Phi(\vec{B}) = \mu L_0 i \quad \text{ossia} \quad \Phi(\vec{B}) = Li,$$

ove μ è la permeabilità magnetica relativa del mezzo mentre L è una grandezza fisica che dipende unicamente dalle caratteristiche geometriche del circuito e che si dice **coefficiente di autoinduzione magnetica**.

Il coefficiente di autoinduzione è nullo per un circuito costituito da un filo di andata e uno di ritorno, accostati uno all'altro, come accade per i cavi usati negli impianti elettrici.

Questo flusso $\Phi(\vec{B})$ risulta particolarmente intenso quando il circuito è avvolto a spire serrate in modo da formare una bobina.

Dalla formula $\Phi(\vec{B}) = Li$ ne segue che se varia la corrente i varia anche il flusso di induzione magnetica concatenato con il circuito e così in questo nasce una corrente indotta i . Questo fenomeno si dice “autoinduzione”.

Esso si verifica, per esempio, quando si chiude o si apre un circuito o quando facciamo variare l'intensità di corrente i che lo percorre.

Possiamo dire pertanto:

“L’autoinduzione è il fenomeno per cui ad ogni variazione di intensità di corrente in un circuito si genera nel circuito stesso una corrente indotta”.

Il verso della corrente indotta è dato ancora dalla legge di Lenz:

“la corrente indotta deve avere verso tale da produrre un flusso di induzione concatenato con il circuito indotto e che tende a distruggere la variazione di flusso che l’ha generata.”

La f.e.m. che genera la corrente di autoinduzione si dice forza contro elettromotrice (f.c.e.m.) di autoinduzione.

La sua formula si ricava dalla legge di Neumann

$$F_i = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} ;$$

poiché $\Phi(\vec{B}) = Li$ si ottiene

$$(1) \quad F_i = -L \frac{di}{dt} .$$

Nel caso del circuito di fig.8, quando si chiude l'interruttore si desta nel circuito una f.c.e.m. indotta che si oppone alla f.e.m. che tende a mettere in moto l'elettricità nel circuito stesso; sicché occorre un certo tempo prima che si stabilisca una corrente di regime stazionario.

Applicando la legge di Ohm generalizzata al nostro circuito si ha

$$(2) \quad F_e - L \frac{di}{dt} = Ri \quad ,$$

da cui

$$(3) \quad i(t) = \frac{F_e}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) .$$

N. 25 – Dinamo e alternatore

Ci sono molte macchine utili all'uomo che ci permettono di trasformare energia meccanica in energia elettrica . Il loro funzionamento si basa sui fenomeni di induzione elettromagnetica; da ciò scaturisce la grande importanza di questi fenomeni.

Tra le varie macchine ricorderemo l'alternatore e la dinamo: esse sono sorgenti di f.e.m. che trasformano energia meccanica in energia elettrica.

Alternatore monofase

Schematicamente un alternatore monofase è costituito da una spira girevole attorno ad un asse tra le espansioni polari di una elettrocalamita (fig. 2-31).

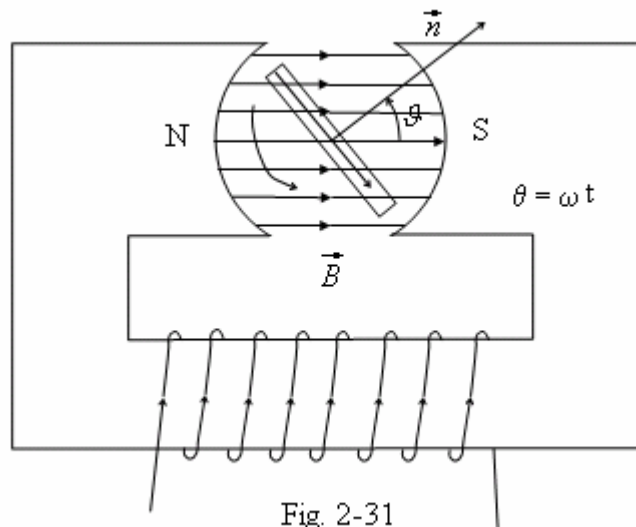


Fig. 2-31

Praticamente un alternatore monofase è fatto così:

su un telaio rettangolare è avvolto un circuito formato da N spire. Sia S l'area di ciascuna spira. Fissiamo un verso positivo sul circuito e sia \vec{n} un vettore unitario normale alla spira e orientato in modo tale che il verso positivo fissato sul circuito gli appaia antiorario.

I due estremi del circuito sono connessi a due anelli, che strisciano su due spazzole S ed S' collegate con il circuito esterno.

La bobina ruota con velocità angolare ω costante attorno ad un asse perpendicolare ad un campo di induzione magnetica uniforme \vec{B} . Questo campo può essere generato mediante un' elettrocalamita.

Supponiamo che per $t = 0$ \vec{B} coincida in direzione e verso con la normale \vec{n} alla spira. Se ϑ è l'angolo che la normale \vec{n} forma con il vettore induzione magnetica \vec{B} all'istante t si ha $\vartheta = \omega t$, ove ϑ è positivo se la rotazione avviene in senso antiorario, è negativo in caso contrario.

Ciò detto, il flusso concatenato con la bobina è

$$(1) \quad \Phi_c(\vec{B}) = N \cdot \vec{B} \times \vec{n} S = NBS \cos \omega t.$$

Al variare dell'angolo $\vartheta = \omega t$, varia il flusso concatenato con la bobina; entro ciascuna spira si genera una f.e.m. indotta e quindi agli estremi del circuito avremo una d.d.p. sinusoidale alternata che ci dà la f.e.m. dell'alternatore:

$$(2) \quad F_e = -\frac{d\Phi_c(\vec{B})}{dt} = -NBS \frac{d}{dt} \cos \omega t,$$

da cui
$$F_e = NBS\omega \cdot \sin \omega t = F_0 \sin \omega t.$$

Come si vede, si tratta di una f.e.m. alternata che varia sinusoidalmente in funzione del tempo. Quando fra le due spazzole della macchina è inserito un circuito esterno, si avrà un passaggio di corrente; sarà quindi necessario tener conto anche dei fenomeni di autoinduzione che si verificano sia nella spira stessa (ma sono trascurabili) che nel circuito esterno.

Corrente alternata

Supponiamo ora che all'istante $t = 0$ venga chiuso su un circuito esterno; siano r ed L la resistenza e l'induttanza dell'intero circuito ed sia $F_e = F_0 \sin \omega t$ la f.e.m. dell'alternatore (fig. 2.32).

Vogliamo vedere quale corrente $i(t)$ percorre il circuito.

Ammettiamo che la corrente $i(t)$ non perturbi in modo sensibile il campo inducente \vec{B} . Per la legge di Ohm generalizzata si ha:

$$(3) \quad F_e - L \frac{di}{dt} = ri,$$

ove $-L \frac{di}{dt}$ è la f.c.e.m. di autoinduzione che si manifesta nel circuito al variare della corrente $i(t)$.

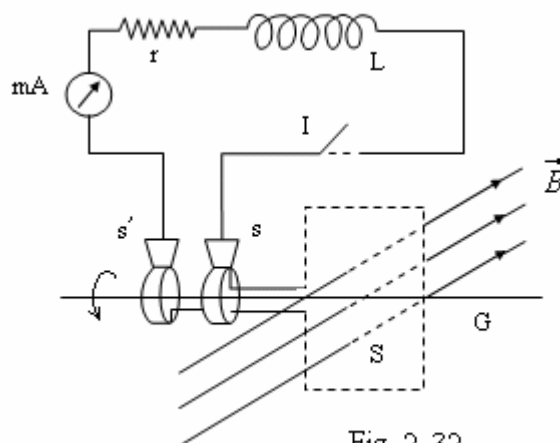


Fig. 2-32

Dalla (3) si ha:

$$(4) \quad L \frac{di}{dt} + ri = F_0 \sin \omega t.$$

Si tratta di un'equazione differenziale non omogenea del primo ordine. Scriviamo l'equazione omogenea associata e l'equazione caratteristica:

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0,$$

$$L\alpha + r = 0, \quad \text{radice} \quad \alpha = -\frac{r}{L}.$$

L'integrale dell'equazione omogenea è

$$i_1(t) = Ce^{-\frac{r}{L}t}.$$

Facciamo vedere che l'equazione differenziale (4) ha un integrale particolare della forma

$$(5) \quad i(t) = A \sin(\omega t - \Phi).$$

Evidentemente l'intensità della corrente risulta in ritardo di fase rispetto alla f.e.m. a causa dell'autoinduzione del circuito. Infatti, derivando la (4) si ha:

$$\frac{di}{dt} = A\omega \cos(\omega t - \Phi),$$

e sostituendo nella (4) si ottiene:

$$LA\omega \cos(\omega t - \Phi) + rAsen(\omega t - \Phi) = F_0 sen\omega t .$$

Sviluppando si ha:

$$LA\omega \cos \omega t \cos \Phi + LA\omega sen\omega t sen\Phi + rAsen\omega t \cos \Phi + \\ - \cos \omega t sen\Phi = F_0 sen\omega t ,$$

da cui

$$\cos \omega t (LA\omega \cos \Phi - rAsen\Phi) + \\ + sen\omega t (LA\omega sen\Phi + rA \cos \Phi) = F_0 sen\omega t .$$

Affinché l'eguaglianza sussista per ogni valore del tempo t, deve essere identicamente

$$\begin{cases} L\omega A \cos \Phi - rAsen\Phi = 0 \\ rA \cos \Phi + L\omega Asen\Phi = F_0 . \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, per esempio con la regola di Cramer, si ha:

$$A \cos \Phi = \frac{F_0 r}{L^2 \omega^2 + r^2} , \quad Asen\Phi = \frac{L\omega F_0}{L^2 \omega^2 + r^2} .$$

Da esse si ottiene: (6) $\operatorname{tg}\Phi = \frac{L\omega}{r}$. Si ha inoltre

$$A^2 = \frac{F_0^2 r^2 + L^2 \omega^2 F_0^2}{(L^2 \omega^2 + r^2)^2} , \quad A^2 = \frac{F_0^2 (r^2 + L^2 \omega^2)}{(r^2 + L^2 \omega^2)^2} ;$$

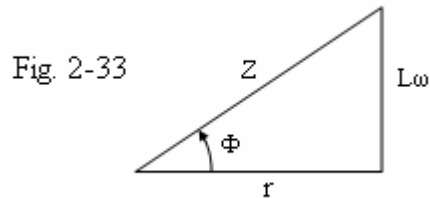
Infine: (7) $A = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} , \quad \text{ossia} \quad A = \frac{F_0}{Z} .$

L'integrale particolare (5) assume quindi la forma:

$$i(t) = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} sen(\omega t - \Phi) .$$

La quantità $Z = \sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}$ si dice “impedenza del circuito”,
 $L\omega$ si dice “reattanza induttiva”, mentre r resistenza ohmica.

I valori di r , $L\omega$, Z e il ritardo di fase Φ della corrente alternata rispetto alla f.e.m. indotta nella bobina sono collegati fra loro, come si può ricavare dalla figura 2-33.



L'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea (4) è dato dalla somma dell'integrale particolare (f) e dall'integrale dell'equazione omogenea associata, cioè:

$$i(t) = Ce^{-\frac{r}{L}t} + \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t - \Phi) :$$

Il primo termine tende rapidamente a zero ed esiste solo durante la fase transitoria iniziale.

N. 26 - La corrente elettrica in un circuito oscillante RLC.

Consideriamo un circuito elettrico con resistenza R , induttanza L e un condensatore di capacità C , ossia un circuito oscillante (fig. 2-34),

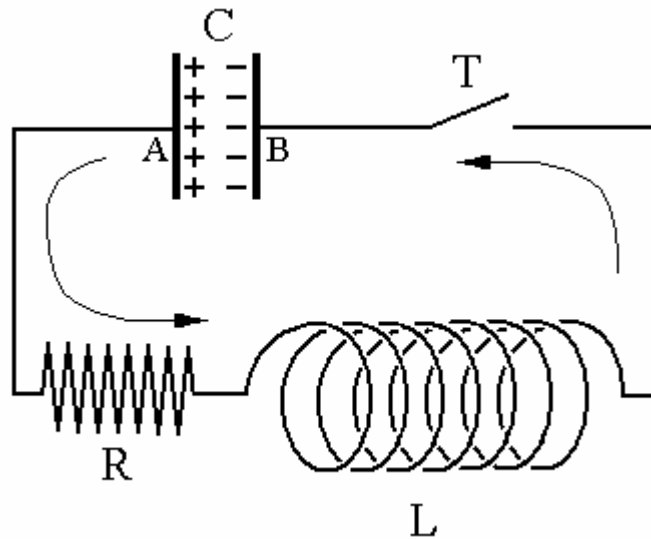


Figura 2-34

Nel circuito non è inserito alcun generatore di f.e.m. alternata. Supponiamo che all'istante iniziale il condensatore sia carico, cioè tra le sue armature A e B vi sia una d.d.p. $V_A - V_B = V(t)$.

Stabiliamo come verso positivo nel circuito il verso ARLB.

Sia $q(t)$ la carica sull'armatura A all'istante t e $(V_A - V_B)_t$ la d.d.p. fra le armature A e B allo stesso istante. Possiamo allora scrivere

$$C = \frac{q(t)}{(V_A - V_B)_t} \quad \text{da cui (1)} \quad q(t) = (V_A - V_B)_t C .$$

Se chiudiamo l'interruttore T , la corrente elettrica che passa nel circuito è data evidentemente dalla formula

$$(2) \quad i = \frac{dq}{dt} ,$$

ove dq è la carica che attraversa il circuito nel tempo dt : il segno $-$ è dovuto al fatto che la corrente $i(t)$ fa diminuire la carica $q(t)$ che si ritrova sull'armatura positiva del condensatore.

Applichiamo al circuito la legge di Ohm generalizzata, tenendo conto che bisogna considerare la d.d.p. $(V_A - V_B)_t$ fra le armature del condensatore e la f.c.e.m. di autoinduzione. Si ha

$$(3) \quad (V_A - V_B)_t - L \frac{di}{dt} = Ri \quad ,$$

da cui
$$\frac{q(t)}{C} - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad .$$

Poiché $i = -\frac{dq}{dt} = -\dot{q}(t)$, $\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2} = -\ddot{q}(t)$ si ottiene

$$q(t) + LC\ddot{q} + RC\dot{q} = 0 ;$$

ordinando si ha

$$(4) \quad LC\ddot{q}(t) + RC\dot{q}(t) + q(t) = 0.$$

Differenziando i termini dello (4) rispetto al tempo si ha:

$$LC \frac{d}{dt}(\ddot{q}) + RC \frac{d}{dt}(\dot{q}) + \dot{q} = 0,$$

quindi (5)
$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i(t) = 0 .$$

o se si vuole

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad \text{ove} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} .$$

La (5) è una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine, che già conosciamo: infatti abbiamo visto questa equazione nello studio del moto oscillatorio smorzato.

Anche ora si possono presentare tre casi del tutto analoghi a quelli visti nel moto oscillatorio di un punto materiale
Ricordiamo brevemente che l'equazione caratteristica della (5) è

$$(6) \quad LC\alpha^2 + RC + i = 0;$$

essa ha il discriminante $\Delta = R^2 C^2 - 4LC$.

Se $\Delta < 0$, cioè $R < 2\left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}}$, la (6) ha due radici complesse coniugate

$$\alpha = -\frac{RC}{2LC} \pm \frac{i}{2LC} \sqrt{4LC - R^2 C^2} = -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Posto $\Omega = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ possiamo dire che la (6) ha le radici

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + i\Omega, \quad \alpha_2 = -\frac{R}{2L} - i\Omega.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale (5) è

$$i(t) = C_1 e^{-\frac{R}{2L}t} (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) + C_2 e^{-\frac{R}{2L}t} (\cos \Omega t - i \sin \Omega t).$$

Posto $C_1 = K_1 - iK_2$ e $C_2 = K_1 + iK_2$ si ricava:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (H_1 \cos \Omega t + H_2 \sin \Omega t),$$

ove $H_1 = 2K_1$ e $H_2 = 2K_2$.

Posto $H = A \sin \varphi$, $H_2 = A \cos \varphi$ si ricava

$$(7) \quad i(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\Omega t + \varphi).$$

La Ω è detta pulsazione propria del circuito oscillante.

Quindi se il discriminante $\Delta = R^2 C^2 - 4LC$ della (6) è negativo, la corrente di scarica del condensatore compie delle oscillazioni sinusoidali smorzate, cioè delle oscillazioni la cui ampiezza $A \exp(-\frac{R}{2L} t)$ decresce nel tempo con legge esponenziale.

Notiamo infine che se la resistenza R è molto piccola, anche il coefficiente di smorzamento è piccolo, cioè le oscillazioni sono praticamente di tipo sinusoidale o, come si suol dire, armonico.

N. 27 – Oscillazioni forzate in un circuito RLC.

Consideriamo un circuito oscillante con resistenza $R < 2(\frac{L}{C})^{\frac{1}{2}}$ e supponiamo che in esso venga inserita una f.e.m. alternata $F_e(t) = F_0 \sin \omega t$ (fig.2-35).

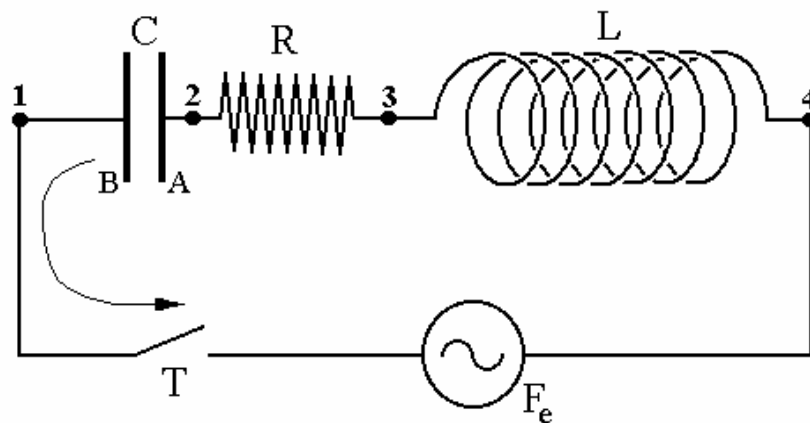


Figura 2-35

Indicando con $q(t)$ la carica istantanea del condensatore, la d.d.p. applicata fra le sue armature è $V(t) = \frac{q}{C}$. Questa d.d.p. tende a far passare nel circuito una corrente in verso opposto a quella prodotta dalla forza elettromotrice alternata F_e . Se per esempio si considera il mezzo ciclo nel quale la corrente prodotta da F_e circola in senso antiorario, l'armatura A viene a possedere cariche positive e l'armatura B cariche negative. Un

condensatore così carico tende a far passare nel circuito che collega le sue armature una corrente in senso orario.

Ne segue che la d.d.p. che agisce ai capi della resistenza R in un generico istante t è data dalla forza elettromotrice totale che agisce nel circuito $\left(F_e - L \frac{di}{dt}\right)$ alla quale va sottratta la d.d.p. $V(t) = \frac{q}{C}$, presente ai capi del condensatore.

Concludiamo che l'equazione del circuito è

$$(1) \quad Ri = F_e - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C}$$

Dobbiamo notare che la carica q è data dall'integrale $q = \int_0^t i dt$, dove l'integrazione va estesa dall'istante in cui è $q = 0$ (che possiamo assumere come istante iniziale) fino all'istante considerato t . Ricordiamo che la generica carica dq che attraversa una sezione qualsiasi del circuito è legata alla corrente i dalla relazione

$$dq = i dt$$

La (1) assume quindi l'espressione

$$Ri = F_e - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$R \frac{di}{dt} = \frac{dF_e}{dt} - L \frac{d^2i}{dt^2} - \frac{1}{C} i(t).$$

ordinando, si ricava che l'equazione del circuito è

$$(2) \quad L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = F_0 \omega \cos \omega t.$$

Si può verificare facilmente per sostituzione diretta che l'equazione differenziale (2) ha un integrale particolare della forma

$$(3) \quad i(t) = i_0 \sin(\omega t - \Phi),$$

dove Φ è l'angolo di sfasamento tra la corrente e la tensione alternata.
 Come sappiamo la (3) ci dice che dopo una fase iniziale di regime transitorio, nel circuito si ha una corrente stazionaria sinusoidale.
 Passando alla verifica si ha:

$$\frac{di}{dt} = i_0 \omega \cos(\omega t - \Phi), \quad \frac{d^2i}{dt^2} = -i_0 \omega^2 \sin(\omega t - \Phi).$$

Sostituendo nelle (2) si ottiene:

$$-i_0 \omega^2 L \sin(\omega t - \Phi) + R i_0 \omega \cos(\omega t - \Phi) + \frac{i_0}{C} \sin(\omega t - \Phi) = F_0 \omega \cos \omega t.$$

Sviluppando i calcoli si ha

$$\begin{aligned} & -i_0 \omega^2 L \sin \omega t \cos \Phi + i_0 \omega^2 L \cos \omega t \sin \Phi + \\ & + R i_0 \omega \cos \omega t \cdot \cos \Phi + R i_0 \omega \sin \omega t \sin \Phi + \\ & + \frac{i_0}{C} \sin \omega t \cdot \cos \Phi - \frac{i_0}{C} \cos \omega t \sin \Phi = F_0 \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

Poiché possiamo mettere in evidenza $\cos \omega t$ fra alcuni termini e $\sin \omega t$ fra gli altri, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \cos \omega t (i_0 \omega^2 L \sin \Phi + R i_0 \omega \cos \Phi - \frac{1}{C} i_0 \sin \Phi) + \\ & + \sin \omega t (-i_0 \omega^2 L \cos \Phi + R i_0 \omega \sin \Phi + \frac{1}{C} i_0 \cos \Phi) = F_0 \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

Affinché questa espressione sia un'identità, cioè sia soddisfatta per qualsiasi valore di t , è necessario e sufficiente che i coefficienti di $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ del primo membro soddisfino le due equazioni

$$\begin{cases} i_0 \omega^2 L \sin \Phi + R i_0 \omega \cos \Phi - \frac{1}{C} i_0 \sin \Phi = F_0 \omega \\ -i_0 \omega^2 L \cos \Phi + R i_0 \omega \sin \Phi + \frac{1}{C} i_0 \cos \Phi = 0 \end{cases}$$

ossia (4)
$$\begin{cases} R \omega i_0 \cos \Phi + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right) i_0 \sin \Phi = F_0 \omega \\ -\left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right) i_0 \cos \Phi + R \omega i_0 \sin \Phi = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni formano un sistema nelle incognite $i_0 \cos \Phi$ e $i_0 \sin \Phi$, che possiamo risolvere con la regola di Cramer.

Si ha

$$(5) \quad i_0 \cos \phi = \frac{\begin{vmatrix} F_0 \omega & \omega^2 L - \frac{1}{C} \\ 0 & R \omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R \omega & \omega^2 L - \frac{1}{C} \\ -\left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right) & R \omega \end{vmatrix}} = \frac{F_0 \omega^2 R}{R^2 \omega^2 + \omega^2 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2}$$

$$(5') \quad i_0 \sin \phi = \frac{\begin{vmatrix} R \omega & \omega^2 L - \frac{1}{C} \\ -\left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right) & 0 \end{vmatrix}}{R^2 \omega^2 + \omega^2 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2} = \frac{F_0 \omega^2 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)}{R^2 \omega^2 + \omega^2 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2}$$

Dividendo membro a membro si ottiene

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{F_0 \omega^2 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)}{F_0 \omega^2 R} \rightarrow (6) \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)$$

con
$$-\frac{\pi}{2} \text{ rad} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Se invece quadriamo e sommiamo si ha

$$i_0^2 = \frac{F_0^2 \omega^4 R^2 + F_0^2 \omega^4 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2}{\left[R^2 \omega^2 + \omega^2 \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2 \right]^2}$$

$$i_0^2 = \frac{F_0^2 \omega^4 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2 \right]}{\omega^4 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2 \right]^2} = \frac{F_0^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2}$$

infine (7)
$$i_0 = \frac{F_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2}} = \frac{F_0}{Z}$$

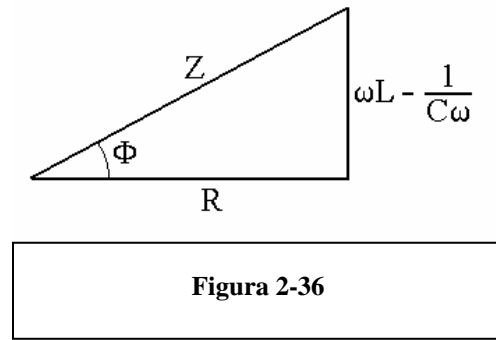
La (7) dà l'ampiezza della corrente stazionaria che percorre il circuito oscillante, cioè l'intensità massima di corrente.

Una volta calcolato il valore di i_0 , le formule (5) ci permettono di determinare univocamente l'angolo φ .

La quantità

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C \omega} \right)^2}$$

è chiamata resistenza apparente o impedenza del circuito e viene misurata in Ohm: Z rappresenta la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti R ed $(\omega L - \frac{1}{C\omega})$ (fig.2-36)



L'angolo tra l'ipotenusa e il cateto R è lo sfasamento dell'intensità di corrente elettrica; infatti si ha

$$\omega L - \frac{1}{C\omega} = R \tan \Phi \rightarrow$$

$$\rightarrow \tan \Phi = \frac{1}{R} (\omega L - \frac{1}{C\omega})$$

L'espressione $\omega L - \frac{1}{C\omega}$ si dice reattanza del circuito. Dalla (6) si vede che $\Phi = 0$ quando

$$\omega L - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{da cui} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Per tale valore di ω risulta dunque $\Phi = 0$, cioè la fase della corrente coincide con quella della f.e.m. esterna F_e , l'impedenza Z coincide con la resistenza R e la corrente ha intensità massima $i_0 = F_0 R$.

Una corrente per la quale l'angolo Φ è prossimo a $\pm \frac{\pi}{2}$ rad si dice corrente swattata.

N. 28 – Potenza di una corrente alternata

Consideriamo un circuito RLC in cui è inserito un generatore di f.e.m. alternato $F_e = F_0 \sin \omega t$ (vedi fig.2-35).

Come sappiamo, passata la fase transitoria iniziale, il circuito è percorso da una corrente stazionaria di intensità

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t - \Phi)$$

$$\text{ove } I_0 = F_0 / \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

La potenza media sviluppata entro il circuito, durante un periodo T , dalla corrente alternata è

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T F_i(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \Phi) dt.$$

Procedendo nei calcoli si trova

$$W = \frac{1}{T} F_0 I_0 \frac{T}{2} \cos \Phi = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \Phi,$$

$$\text{ossia (2) } W = (F_e)_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \Phi \text{ Watt}$$

La (2) è detta formula di Galileo Ferraris. Essa ci dà la potenza media assorbita da un circuito qualsiasi percorso da corrente alternata; $\cos \Phi$ è detto fattore di potenza e per esso si ha $0 \leq \cos \Phi \leq 1$

Una corrente alternata $i(t) = I_0 \cos(\omega t - \Phi)$ per la quale l'angolo di fase

Φ è prossimo a $\pm \frac{\pi}{2}$ si dice corrente swattata.

La (2) ci dice che per ridurre il consumo di corrente, e quindi il suo costo, si deve fare in modo da ridurre il fattore di potenza $\cos \Phi$, e ciò si ottiene facendo crescere l'angolo di fase Φ della corrente.

N. 29 - Energia del campo magnetico generato da una corrente

Per stabilire un campo magnetico in una regione dello spazio bisogna spendere un'energia U , cioè bisogna compiere un lavoro. Vediamo come possiamo calcolarlo.

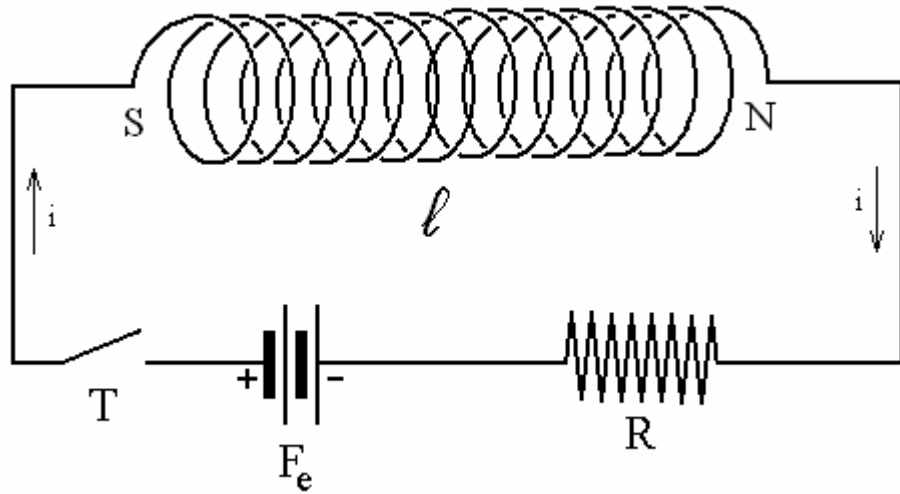


Figura 2-37

Consideriamo un solenoide di sezione S e di lunghezza ℓ molto grande rispetto al diametro: esso è inserito in un circuito che contiene un generatore di f.e.m. F_e costante (es. una batteria di pile), una resistenza R e un interruttore T (vedi fig. 2-37).

Come sappiamo, al passaggio della corrente i fornita dalla pila si genera nel solenoide un campo di induzione magnetica B che nella sua parte centrale è espresso dalla formula

$$(1) \quad B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i, \quad \text{cioè} \quad B = \mu_0 n i,$$

ove N è il numero delle spire del solenoide ed $\frac{N}{\ell} = n$ è il numero delle spire per unità di lunghezza. Ricordiamo anche che l'induzione magnetica B si misura in Weber / m².

Nei primi istanti dopo la chiusura del circuito si ha una fase transitoria durante la quale l'intensità di corrente i ha un valore variabile. Ciò è dovuto al fatto che nel circuito si genera una forza contro elettromotrice (f.c.e.m.) di induzione

$$F_i = - \frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt},$$

che si oppone al passaggio della corrente fornita dalla pila.

Per la legge di Ohm generalizzata si ha

$$(2) \quad F_e - \frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt} = R i.$$

Se N è il numero delle spire del solenoide si ha:

$$\Phi_s(\vec{B}) = NBS$$

e quindi la (2) diventa

$$(3) \quad F_e - NS \frac{dB}{dt} = R i .$$

Moltiplicando per idt ambo i membri questa equazione si ottiene:

$$(4) \quad F_e i dt = i^2 R dt + iNS dB :$$

- a) $F_e i dt$ è l'energia fornita dalla pila nell'intervallo di tempo dt ;
- b) $i^2 R dt$ è l'energia che si sviluppa nel circuito sotto forma di calore, per effetto Joule, nel tempo dt ;
- c) $iNS \cdot dB$ è l'energia immagazzinata nel solenoide al crescere dell'intensità di corrente dal valore iniziale al valore i (vedi L.Lovitch-. -S. Rosati, Fisica generale II, pag. 329; Casa Ed. Ambrosiana).

Ricordando che all'interno del solenoide l'intensità del campo magnetico H è data dalla formula

$$H = \frac{N}{\ell} i \text{ Asp/m}$$

possiamo scrivere il terzo termine c) nella forma

$$iNS \cdot dB = i \frac{N}{\ell} S \ell \cdot dB = v \cdot H dB ,$$

dove $v = S\ell$ indica il volume dello spazio all'interno del solenoide. Quando l'intensità di corrente passa dal valore iniziale nullo al valore i , l'intensità del campo magnetico passa dal valore nullo al valore H . Possiamo allora dire che l'energia totale immagazzinata nel solenoide per generare il campo magnetico è:

$$U = v \int_0^B H \cdot dB .$$

Poiché il campo magnetico all'interno del solenoide è uniforme ($H = ni \text{ Asp/m}$), possiamo pensare che l'energia U sia distribuita nello spazio che è sede del campo magnetico con densità

$$(5) \quad w = \frac{U}{v} = \int_0^B H \cdot dB .$$

Notiamo che per ricavare la (4) non è stato necessario fare alcuna ipotesi sulla natura del materiale che riempie il solenoide. Quando tale materiale è omogeneo, isotropo e non ferromagnetico si ha $\vec{B} = \mu \vec{H}$, con μ costante indipendente da H , cosicché dalla (4) si ottiene:

$$(6) \quad w = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B \cdot H \text{ Joule/m}^3 .$$

Concludendo:

“Il lavoro fatto dal generatore di corrente, alla chiusura del circuito elettrico, in parte va speso in effetto Joule e in parte va speso per creare il campo magnetico entro il solenoide inserito nel circuito”.

E' ovvio che quando la corrente i raggiunge il valore di regime, il campo magnetico ha valore costante e l'energia fornita dal generatore di corrente elettrica va dissipata solo sotto forma di calore per effetto Joule.

Dalla (6) si può ricavare un'altra espressione per l'energia U necessaria a generare il campo magnetico entro il solenoide.

Infatti, ricordando che $B = \mu \frac{N}{\ell} i$ e che $H = \frac{N}{\ell} i$, dalla (6) si ha:

$$U = wS\ell = S\ell \cdot \frac{1}{2} \mu H^2 = S\ell \cdot \frac{1}{2} \mu \left(\frac{N}{\ell} \right)^2 \cdot i^2 ,$$

$$U = \frac{1}{2} i S \ell \frac{N}{\ell} \cdot \mu \frac{N}{\ell} i ,$$

e quindi
$$U = \frac{1}{2} i \cdot S N B .$$

Ricordando infine che $\Phi_s(\vec{B}) = NBS = Li$, si ottiene

$$(7) \quad U = \frac{1}{2} Li^2 \text{ Joule} .$$

N. 30 - Energia del campo magnetico generato da una corrente elettrica (altra dimostrazione)

Si ha un circuito elettrico di resistenza R e autoinduttanza L nel quale è inserito un generatore di f.e.m. F_e costante (per es. una pila) e un interruttore T (vedi fig.2-37).

Nei primi istanti dopo la chiusura del circuito si ha una fase transitoria durante la quale l'intensità di corrente i ha un valore variabile: Ciò è dovuto al fatto che nel circuito si genera una f.c.e.m. di autoinduzione

$F_i = -L \frac{di}{dt}$ che si oppone al passaggio della corrente fornita dalla pila. Per la legge di Ohm generalizzata si ha:

$$(1) \quad F_e - L \frac{di}{dt} = Ri .$$

Moltiplicando per idt ambo i membri di questa equazione si ottiene

$$(2) \quad F_e idt = i^2 R dt + Lidi :$$

- a) $F_e idt$ è l'energia fornita dalla pila nell'intervallo di tempo dt ;
- b) $i^2 R dt$ è l'energia che si sviluppa nel circuito sotto forma di calore, per effetto Joule, nel tempo dt ;
- c) $Lidi$ è il lavoro che deve compiere la pila per produrre un aumento di dell'intensità di corrente .

Dalla (2) si ottiene

$$(3) \quad Lidi = F_e idt - i^2 R dt .$$

Da questa espressione si vede che $Lidi$ è anche l'energia dU , fornita dalla pila, che non viene trasformata in calore per effetto Joule .

Dopo un tempo t dalla chiusura del circuito, dalla (3) si ha :

$$U = \int_0^t (F_e - iR) i dt = \int_0^t L i di = \frac{1}{2} L i^2(t) .$$

Se all'istante t la corrente $i(t)$ ha raggiunto il valore di regime, si ha :

$$(4) \quad U = \frac{1}{2} L i^2 \text{ Joule.}$$

Come detto nel punto c), U è l'energia fornita dalla pila per far crescere l'intensità di corrente dal valore 0 al valore di regime e che non viene recuperata sotto forma di calore di Joule; possiamo quindi pensare che l'energia U serva a generare il campo magnetico della spira e che essa venga immagazzinata nel circuito.

Questa energia U cresce finché cresce $i(t)$; una volta che l'intensità di corrente $i(t)$ ha raggiunto il suo valore di regime F_e/R , si ha $di = 0$ e quindi

$U = 0$: ciò vuol dire che non viene più impiegata energia per generare il campo magnetico e tutto il lavoro fatto dalla pila va speso in effetto Joule.

Possiamo dire pertanto :

"L'energia totale assorbita da un circuito elettrico durante il tempo dell'extracorrente di chiusura è

$$U = \frac{1}{2} L i^2 \text{ Joule " .}$$

Vogliamo ora far vedere che questa energia immagazzinata nel circuito viene restituita sotto forma di calore quando cessa il passaggio della corrente fornita dalla pila : è questa una operazione che possiamo fare cortocircuitando la pila.

Infatti, facendo questa operazione la legge di Ohm per un circuito diventa :

$$-L \frac{di}{dt} = Ri , \text{ da cui} \quad (5) \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} dt .$$

Con un integrale indefinito dalla (5) si ricava:

$$\ln \frac{i}{k} = -\frac{R}{L} t , \text{ da cui} \quad \frac{i}{k} = e^{-\frac{R}{L} t} ,$$

e quindi (6)
$$i(t) = k \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Possiamo determinare k in base alle condizioni iniziale della corrente. Poiché per $t = 0$ (cioè al momento di escludere la pila dal circuito) si ha $i(0) = F_e/R$, dalla (6) si ricava $k = F_e/R$; possiamo quindi dire che l'extracorrente di apertura del circuito è data dalla formula :

(7)
$$i(t) = \frac{F_e}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Questa corrente, passando nel circuito dopo che la pila è stata cortocircuitata, dà luogo ad uno sviluppo di calore per effetto Joule. Questo calore si calcola con un semplice integrale; si ha :

$$Q = \int_0^{+\infty} i^2 R dt = \int_0^{+\infty} \frac{F_e^2}{R^2} R e^{-\frac{2R}{L}t} dt,$$

$$Q = -\frac{F_e^2}{R^2} \frac{L}{2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} d\left(-\frac{2R}{L}t\right),$$

$$Q = -i^2 \frac{L}{2} \left[e^{-\frac{2R}{L}t} \right]_0^{+\infty} = -i^2 \frac{L}{2} \left(\frac{1}{2^{+\infty}} - \frac{1}{e^0} \right),$$

infine:
$$Q = \frac{1}{2} L i^2 \text{ Joule}.$$

Abbiamo così dimostrato che l'energia (4) immagazzinata nel circuito viene restituita sotto forma di calore quando cessa il passaggio della corrente elettrica fornita dalla pila.

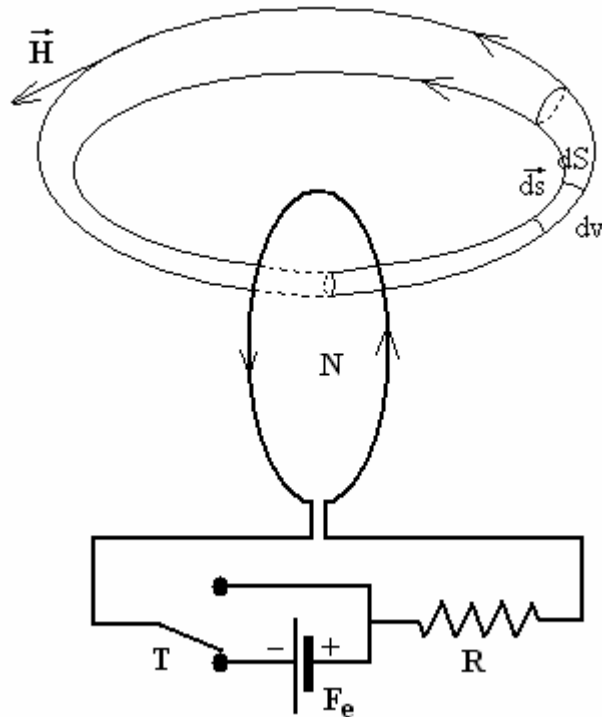


Figura 2-38

Vogliamo ora far vedere che l'energia $U = \frac{1}{2} Li^2$ ottenuta con questo procedimento matematico è proprio l'energia necessaria a creare il campo magnetico entro un solenoide.

Per semplicità, supponiamo che la bobina di induttanza del circuito sia costituita da una sola spira ℓ , ma i risultati valgono anche per circuiti più complessi (Fig. 2-38).

Diciamo subito che tutte le linee di flusso del vettore induzione magnetica \vec{B} sono concatenate con il circuito ℓ , sicché il campo magnetico si può immaginare diviso in tanti tubi infinitesimi di flusso, ciascuno chiuso in se stesso e concatenato con ℓ .

Sia dv un pezzettino elementare di un tubo di flusso avente base dS e lunghezza ds , onde $dv = dS \cdot ds$.

L'energia immagazzinata in questo pezzettino di tubo si ottiene

moltiplicando la densità del campo magnetico $w = \frac{1}{2} H B$ per il volume dell'elemento di tubo. Quindi si ha:

$$(7) \quad w \cdot dw = \frac{1}{2} H B dv = \frac{1}{2} H B \cdot dS ds ,$$

$$\text{quindi} \quad w \cdot dw = \frac{1}{2} B dS \cdot H ds .$$

Ma ora si ha

$$B \cdot dS = d\Phi_s(\vec{B}) = \text{cost} ;$$

infatti $B \cdot dS$ è il flusso di induzione magnetica attraverso una generica sezione del tubo di flusso ed è costante perché il vettore \vec{B} è solenoidale. Quindi l'energia magnetica immagazzinata in un intero tubo di induzione sarà

$$(8) \quad dU = \frac{1}{2} B ds \cdot \oint_{\ell} H ds .$$

Ma per il teorema della circuitazione di Ampère si ha

$$\oint_{\ell} H ds = \sum_{k=1}^n i_k ,$$

ove i_k sono le correnti concatenate con la linea ℓ . Poiché nel nostro caso si ha una sola corrente, la (8) assume la forma:

$$dU = \frac{1}{2} i B \cdot dS , \quad \text{da cui} \quad (9) \quad dU = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{n} dS .$$

Consideriamo ora tutti i tubi di flusso concatenati con la linea ℓ , in modo da prendere tutto lo spazio occupato dal campo magnetico. Possiamo calcolare l'energia totale U del campo con una integrazione estesa alla superficie S della spira ; si ha

$$(10) \quad U = \frac{1}{2} i \cdot \int_S \vec{B} \times \vec{n} dS .$$

Ma come sappiamo, per definizione si ha:

$$\Phi_s(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \times \vec{n} dS = Li .$$

Sostituendo nella precedente si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} i \cdot Li, \quad \text{ossia} \quad (11) \quad U = \frac{1}{2} Li^2 \text{ Joule .}$$

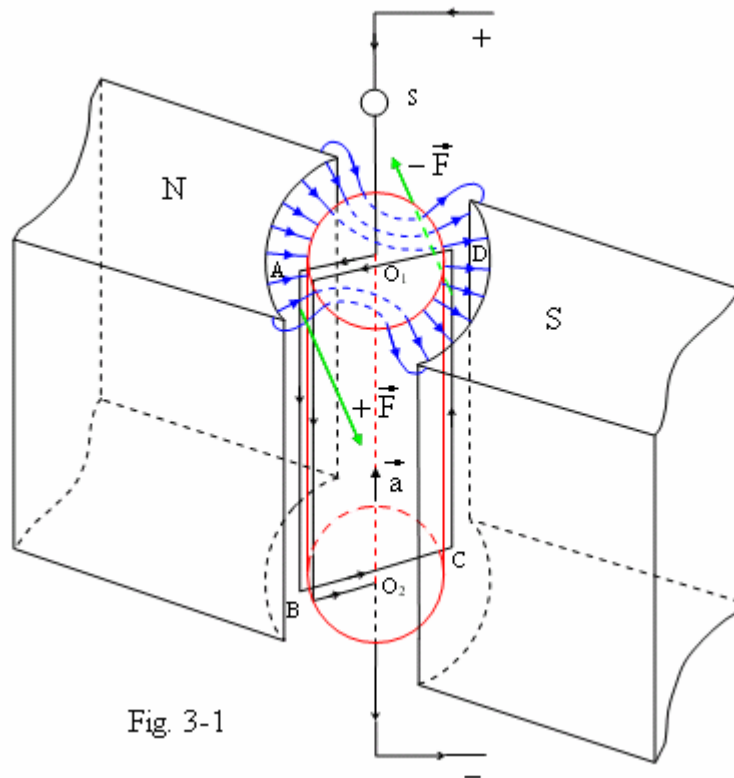
c.v.d.

CAPITOLO TERZO

IL GALVANOMETRO BALISTICO

N. 1 – Elementi costruttivi di un galvanometro balistico

I galvanometri balistici, o a bobina mobile, presentano di regola un nucleo di ferro dolce, di forma cilindrica, che ha il compito di aumentare il campo magnetico entro l'interferro e di renderlo radiale. Sul nucleo è avvolta una bobina rettangolare, destinata ad essere percorsa dalla corrente elettrica che si vuole misurare (fig. 3.1).



Come si vedrà dalla spiegazione, l'importanza del campo radiale è dovuta al fatto che esso produce sulla bobina percorsa da corrente una coppia di forze sempre perpendicolari al piano della bobina. In tal modo il momento meccanico che fa ruotare la bobina non dipende dall'angolo di rotazione.

Consideriamo ora una bobina rettangolare di N spire avvolta sul cilindro (diametro d , altezza ℓ) e giacente in un piano passante per l'asse. Come al solito, fissiamo sulla bobina un verso positivo concorde con quello della corrente che vi passerà, e sia \vec{n} un vettore unitario perpendicolare alla generica spira e orientato in modo che il verso fissato come positivo sulla spira gli appaia antiorario.

Quando una corrente $i(t)$, costante o variabile, percorre la bobina si trovano i seguenti elementi:

$$\begin{aligned} \text{forza sul lato } \overrightarrow{AB} = \vec{\ell}_1 \quad \vec{F}_1 = i\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}, \quad \text{modulo } F_1 = i\ell_1 B, \\ \text{forza sul lato } \overrightarrow{CD} = \vec{\ell}_2 \quad \vec{F}_2 = i\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}, \quad \text{modulo } F_2 = i\ell_2 B \end{aligned}$$

$$\text{Ma } \ell_1 = \ell_2 = \ell; \quad \text{quindi si ha} \quad F_1 = F_2 = F.$$

Le due forze \vec{F}_1 ed \vec{F}_2 sono tangenti alla superficie laterale del cilindro, sono dirette in versi opposti e quindi formano una coppia. Per completezza di analisi, si hanno anche i seguenti dati:

$$\begin{aligned} \text{forza sul lato } \overrightarrow{BC} \quad \vec{F} = i\overrightarrow{BC} \wedge \vec{B} = 0, \quad \text{infatti } \overrightarrow{BC} \parallel \vec{B}; \\ \text{forza sul lato } \overrightarrow{DA} \quad \vec{F}' = i\overrightarrow{DA} \wedge \vec{B} = 0, \quad \text{infatti } \overrightarrow{DA} \parallel \vec{B}. \end{aligned}$$

Nasce così una coppia di forze che tendono a far ruotare la bobina attorno all'asse del cilindro e che risultano sempre perpendicolari al piano della bobina, qualunque sia la posizione che questa va occupando nell'interferro della calamita.

Se ci riferiamo a tutte le N spire della bobina, possiamo dire che il modulo del momento di rotazione è

$$M = NF \cdot d = Ni(t)\ell B \cdot d,$$

Poiché $\ell d = S = \text{area di una spira}$ possiamo scrivere:

$$M = NBS \cdot i(t) = N\mu HS \cdot i(t),$$

$$\text{o anche (1) } M = \Phi^* i(t), \quad \text{ove si è posto} \quad (2) \quad \Phi^* = N\mu HS.$$

Come si vede dalla (1), il momento meccanico di rotazione non dipende dall'angolo di rotazione della bobina.

Introduciamo un vettore unitario \vec{a} , diretto come l'asse del cilindro e orientato in modo tale che rispetto ad esso la coppia di forze produca una rotazione della bobina in senso antiorario. Possiamo scrivere in forma vettoriale

$$(3) \quad \vec{M} = N \cdot i S B \vec{a} ;$$

poiché $\vec{B} = \mu \vec{H}$, e in modulo $B = \mu H$, abbiamo anche :

$$(4) \quad \vec{M} = N i S \mu H \cdot \vec{a} .$$

Ricordiamo che sulla bobina abbiamo fissato un verso positivo concorde con quello della corrente e che abbiamo indicato con \vec{n} un vettore unitario normale alla bobina e orientato in modo tale che il verso fissato come positivo su di essa gli appaia antiorario. Poiché il vettore $\vec{B} = \mu \vec{H}$ giace sempre nel piano della bobina, come ben si vede dalla figura sovrastante, ne segue che il versore \vec{n} sarà sempre normale al vettore \vec{H} ($\vec{n} \perp \vec{H}$) e che il prodotto $\vec{n} \wedge \vec{H}$ avrà lo stesso verso dei vettori \vec{a} ed \vec{M} (cioè $\vec{n} \wedge \vec{H} \uparrow \vec{M}$).

Se allora introduciamo il vettore

$$(5) \quad \vec{m} = N \mu i S \cdot \vec{n} ,$$

detto “**momento magnetico della bobina**”, possiamo scrivere

$$(6) \quad \vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H} :$$

essa esprime il momento meccanico che agisce sulla bobina, per effetto del campo magnetico che agisce sulla corrente che la percorre.

Se tra le espansioni polari della calamita non si interpone un nucleo di ferro dolce, il campo magnetico non è radiale, ma è rappresentato da linee di forza parallele che vanno dal polo Nord al polo Sud della calamita e il momento di rotazione \vec{M} che agisce sulla bobina, quando si invia la corrente elettrica, è ancora dato dall'espressione

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H} .$$

Ma in tal caso, come si vede dalla fig. 3.2, il modulo del vettore \vec{M} è

$$M = mH \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = mH \cos \vartheta .$$

Ciò vuol dire che il momento che agisce sulla bobina dipende dal suo angolo di rotazione. In tal caso, se vogliamo semplificare lo studio del suo moto, siamo costretti a considerare solo piccole deviazioni dell'equipaggio mobile, in modo che si abbia $\cos \vartheta \approx 1$.

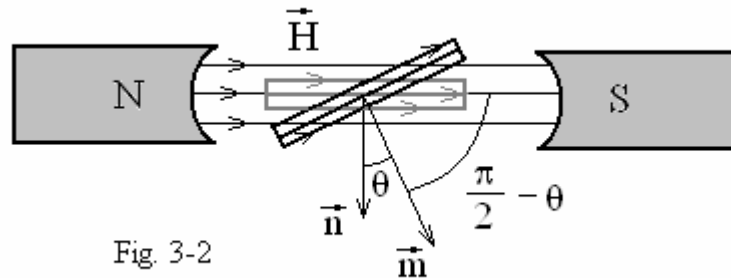


Fig. 3-2

Se invece la bobina è avvolta su un nucleo di ferro dolce, come noi stiamo supponendo, non è necessario fare questa approssimazione perché risulta sempre $\vec{m} \perp \vec{H}$, e quindi $M = mH$; in altre parole, il modulo della coppia che fa ruotare la bobina non dipende dall'angolo di rotazione.

N. 2 – Moto dell'equipaggio di un galvanometro

Il moto dell'equipaggio di un galvanometro è dato dall'equazione differenziale

$$(1) \quad I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \beta_o \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = M,$$

I è il momento di inerzia dell'equipaggio mobile;

β_o è la costante delle resistenze passive;

C è la costante delle forze elastiche di torsione del filo di sospensione;

M è il modulo del momento della coppia di rotazione esercitata dal campo magnetico sulla bobina percorsa dalla corrente elettrica.

Abbiamo visto che, se N è il numero di spire della bobina, si ha

$M = NBS i(t)$, ossia $M = \Phi^* \cdot i(t)$, ove $\Phi^* = NBS$;
ne segue che l'equazione (1) diventa

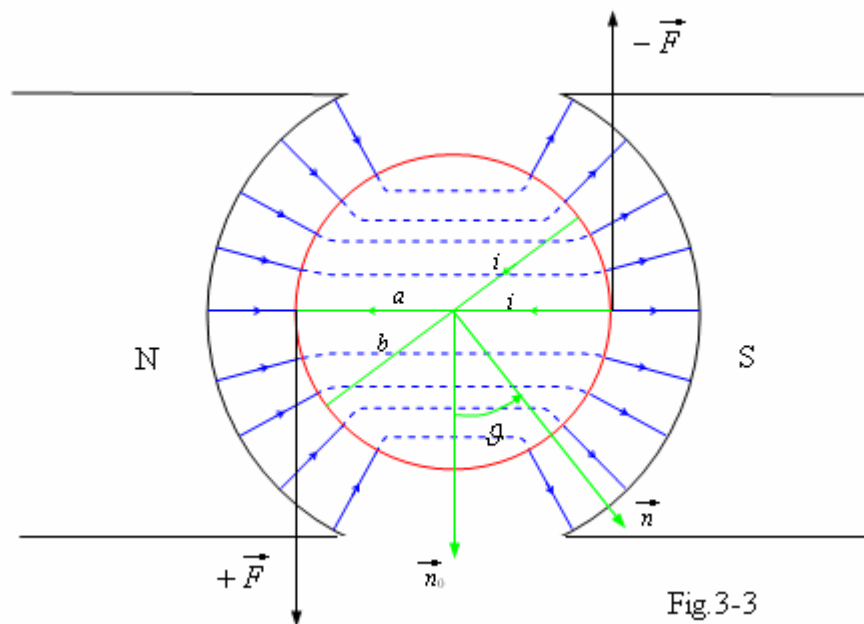
$$(2) \quad I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \beta_o \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = \Phi^* \cdot i(t).$$

Ricordiamo ora che si ha $i(t) = \frac{F_e + F_i}{R}$, ove $F_e + F_i$ è la somma algebrica delle f.e.m. presenti nel circuito, mentre R è la resistenza totale di questo. Poiché F_i rappresenta le f.e.m. indotte che si destano nel circuito, si ha:

$$(3) \quad F_i = -L \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt},$$

ove la f.e.m. di autoinduzione è trascurabile. Per quanto riguarda il flusso $\Phi(\vec{B})$ che compare nella (3) dobbiamo fare un ragionamento.

Sia a la posizione di riposo della bobina in assenza di corrente; in questa posizione il flusso di induzione magnetica $\Phi(\vec{B})$ attraverso il circuito è nullo. Fissiamo su una spira un verso positivo concorde con quello che avrà la corrente al suo passaggio nella bobina e sia \vec{n}_0 un vettore normale alla spira e orientato in modo tale che il verso fissato come positivo su di essa gli appaia antiorario (fig.3-3).



Se ora lanciamo una corrente nel circuito, la bobina ruota sotto l'effetto di una coppia di rotazione e il vettore normale alla spira assumerà una nuova posizione \vec{n} , formando un angolo di rotazione θ con il primo vettore \vec{n}_0 . Per il flusso del vettore \vec{B} attraverso la bobina possiamo quindi scrivere:

$$\Phi(\vec{B}) = NBS \cdot \vartheta(t) = \Phi^* \cdot \vartheta(t).$$

Per la forza elettromotrice F_i indotta nel circuito possiamo quindi scrivere

$$(4) \quad F_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\Phi^* \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Ne segue che la corrente $i(t)$ che passa nel circuito mobile sarà:

$$i(t) = \frac{F_e + F_i}{R} = \frac{F_e}{R} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}, \Rightarrow (5) \quad i(t) = i_o - \frac{\Phi^*}{R} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Per l'equazione del moto dell'equipaggio mobile si avrà quindi:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta_o \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = \Phi^* \left(i_o - \frac{\Phi^*}{R} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \right),$$

da cui (6)

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \left(\beta_o + \frac{(\Phi^*)^2}{R} \right) \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = \Phi^* i_o.$$

L'equazione ci dice che:

“Quando il circuito galvanometrico è chiuso, l'induzione magnetica nella bobina equivale ad un aumento del coefficiente delle resistenze passive, in accordo con la legge di Lenz”.

Nei galvanometri molto sensibili si verifica che

$$\beta_o \ll \frac{\Phi^{*2}}{R}, \quad \text{e pertanto } \beta_o \text{ è trascurabile.}$$

Posto $\beta_o + \frac{\Phi^{*2}}{R} = \beta$, l'equazione del moto dell'equipaggio mobile diventa:

$$(7) \quad I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = \Phi^* \cdot i_o,$$

alla quale è associata l'equazione differenziale omogenea

$$(8) \quad I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = 0.$$

L'integrale generale di questa equazione è:

$$(9) \quad \vartheta(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{\Phi^*}{R} i_o,$$

dove α_1 e α_2 sono le radici dell'equazione $I\alpha^2 + \beta\alpha + C = 0$, detta equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea (8). Queste radici sono

$$\alpha = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4IC}}{2I}.$$

1° caso. Sia $\beta^2 - 4IC < 0$. Si ha:

$$\alpha = \frac{-\beta \pm i\sqrt{4IC - \beta^2}}{2I}, \Rightarrow \alpha = -\frac{\beta}{2I} \pm i\sqrt{\frac{C}{I} - \frac{\beta^2}{4I^2}}.$$

Poniamo per semplicità $\alpha = -\beta \pm i\gamma$. Per l'integrale generale della (8) possiamo scrivere:

$$\vartheta(t) = C_1 e^{(-\eta + i\gamma)t} + C_2 e^{(-\eta - i\gamma)t} + \frac{\Phi^*}{C} i_o, \quad \text{da cui}$$

$$\vartheta(t) = e^{-\eta t} \cdot C_1 e^{i\gamma t} + e^{-\eta t} \cdot C_2 e^{-i\gamma t} + \frac{\Phi^*}{C} i_o.$$

Ora, affinché $\vartheta(t)$ sia una grandezza reale, come deve essere, occorre che C_1 e C_2 siano numeri complessi coniugati. Facendo i calcoli a parte si ha:

$$\begin{aligned} C_1 e^{i\gamma t} + C_2 e^{-i\gamma t} &= (A_1 - iB_1)e^{i\gamma t} + (A_1 + iB_1)e^{-i\gamma t} = \\ &= (A_1 - iB_1)(\cos \gamma t + i\sin \gamma t) + (A_1 + iB_1)(\cos \gamma t - i\sin \gamma t) = \\ &= A_1 \cos \gamma t + i A_1 \sin \gamma t - i B_1 \cos \gamma t + B_1 \sin \gamma t + \\ &A_1 \cos \gamma t - i A_1 \sin \gamma t + i B_1 \cos \gamma t + B_1 \sin \gamma t = \end{aligned}$$

Quindi $C_1 e^{i\gamma t} + C_2 e^{-i\gamma t} = 2A_1 \cos \gamma t + 2B_1 \sin \gamma t,$

ossia $C_1 e^{i\gamma t} + C_2 e^{-i\gamma t} = h_1 \cos \gamma t + h_2 \sin \gamma t.$

Concludendo, l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea (7) è dato dalla funzione:

$$(10) \quad \vartheta(t) = e^{-\eta t} (h_1 \cos \gamma t + h_2 \sin \gamma t) + \frac{\Phi^*}{C} i_o.$$

Poniamo ora $\frac{h_1}{h_2} = \tan \varphi$, cioè $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, $\Rightarrow \frac{h_1}{\sin \varphi} = \frac{h_2}{\cos \varphi} = A.$

Si ricava: $h_1 = A \sin \varphi, \quad h_2 = A \cos \varphi,$ con $A = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$

Sostituendo le espressioni di h_1 e h_2 nella (10) si ottiene:

$$\vartheta(t) = A e^{-\eta t} (\sin \varphi \cdot \cos \gamma t + \cos \varphi \cdot \sin \gamma t) + \frac{\Phi^*}{C} i_o,$$

Ponendo $\frac{\Phi^*}{C} i_o = \vartheta_o$, possiamo dire che l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea (7) è

$$(11) \quad \vartheta(t) = A e^{-\eta t} \cdot \sin(\gamma t + \varphi) + \vartheta_o.$$

Ricordando le espressioni di η e γ , possiamo anche scrivere:

$$(12) \quad \vartheta(t) = A e^{-\frac{\beta}{2I} t} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{C}{I} - \frac{\beta^2}{4I^2}} t + \varphi \right) + \vartheta_o.$$

OSSERVAZIONE

Se $\beta^2 - 4IC < 0$, l'equipaggio mobile compie delle oscillazioni armoniche smorzate attorno alla posizione di equilibrio $\vartheta_o = \frac{\Phi^*}{C} i_o$. Teoricamente, esso

raggiunge questa posizione nel tempo $t = \infty$, ma praticamente questa posizione viene raggiunta nel tempo di qualche minuto.

All'occorrenza, si ricordi che $\vartheta_0 = \frac{\Phi^*}{C} \cdot \frac{F_e}{R}$, quindi $\vartheta_0 = \frac{NBS}{C} \cdot \frac{F_e}{R}$.

Le grandezze fisiche che intervengono nello studio del fenomeno sono riassunte nella seguente tabella:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{C/I} , \quad \text{pulsazione del moto oscillatorio in assenza} \\ \quad \text{di smorzamento, cioè per } \beta_0 = 0 ; \quad \eta = \beta/2I ; \\ T_0 = 2\pi/\omega_0 , \quad \text{periodo di oscillazione corrispondente;} \\ \omega = \sqrt{\frac{C}{I} - \frac{\beta^2}{4I^2}} , \quad \text{pulsazione del moto oscillatorio smorzato;} \\ T = 2\pi/\omega , \quad \text{periodo del moto oscillatorio smorzato.} \end{array} \right.$$

Troviamo anzitutto la derivata della funzione $\vartheta(t)$; dalla (11) si ha:

$$(13) \quad \dot{\vartheta}(t) = -A\eta e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) + A\omega e^{-\eta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Determiniamo ora le costanti A e φ dell'equazione (11) in base alle condizioni iniziali; sapendo che per $t = 0$ si ha $\vartheta(0) = 0$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$, possiamo scrivere il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta(0) = A \sin \varphi + \vartheta_0 = 0 \\ \dot{\vartheta}(0) = -A\eta \cdot \sin \varphi + A\omega \cos \varphi = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \sin \varphi = -\vartheta_0 \\ A\omega \cos \varphi = \eta \cdot (A \sin \varphi) \end{array} \right. ;$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \sin \varphi = -\vartheta_0 \\ A \cos \varphi = -\frac{\eta \vartheta_0}{\omega} \end{array} \right. .$$

Risolvendo il sistema (14) si ricava:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\eta} \text{ , da cui } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\eta} \text{ ,}$$

$$\text{e} \quad A^2 = \vartheta_o^2 + \vartheta_o^2 \cdot \frac{\eta^2}{\omega^2} \text{ , da cui } A = \vartheta_o \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 + \eta^2}{\omega^2}} \text{ .}$$

L'equazione del moto dell'equipaggio di un galvanometro si può quindi scrivere nella forma:

$$(15) \quad \vartheta(t) = \vartheta_o \sqrt{\frac{\omega^2 + \eta^2}{\omega^2}} \cdot e^{-\eta t} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \vartheta_o \text{ ,}$$

ove ϑ_o si legge sullo strumento perché è la deviazione dell'equipaggio mobile in condizioni di equilibrio .

La formula (15) può avere una significativa semplificazione. Infatti, ricordando la tabella (A) si ottiene:

$$\frac{\omega^2 + \eta^2}{\omega^2} = \frac{\left[\frac{C}{I} - \left(\frac{\beta}{2I} \right)^2 \right] + \left(\frac{\beta}{2I} \right)^2}{\omega^2} = \frac{\frac{C}{I}}{\omega^2} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \text{ ;}$$

$$\text{quindi} \quad \sqrt{\frac{\omega^2 + \eta^2}{\omega^2}} = \frac{\omega_o}{\omega} = \frac{2\pi}{T_o} : \frac{2\pi}{T} = \frac{T}{T_o} \text{ .}$$

Abbiamo inoltre

$$\frac{\omega}{\eta} = \frac{2\pi}{T} : \frac{\beta}{2I} \text{ , } \Rightarrow \quad \frac{\omega}{\eta} = \frac{4\pi I}{\beta T} \text{ ,}$$

$$\text{e} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\eta} = \operatorname{arctg} \frac{4\pi I}{\beta T} \text{ .}$$

Con questi dati la (15) assume la forma:

$$(16) \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \frac{T}{T_0} e^{-\frac{\beta}{2I}t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \arctg \frac{4\pi I}{\beta T}\right) + \vartheta_0 .$$

Possiamo facilmente determinare in modo sperimentale le grandezze ϑ_0, T e T_0 che compaiono nella formula (16) ; è più difficile, invece, determinare le grandezze I e β . Ricordiamo che

$$\beta = \beta_0 + \frac{\Phi^{*2}}{R} = \beta_0 + \frac{(NBS)^2}{R} ,$$

e che nei galvanometri molto sensibili si ha $\beta_0 \ll \frac{\Phi^{*2}}{R}$.

Per semplificare ulteriormente la formula (16) si introduce la grandezza decremento logaritmico δ , che può essere determinata più facilmente di I e β . Per semplificare i calcoli, consideriamo il moto oscillatorio di ritorno a zero dell'equipaggio mobile del galvanometro e due oscillazioni consecutive ϑ_1 e ϑ_2 , ove ϑ_2 è successivo a ϑ_1 . Il rapporto è:

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{Ae^{-\frac{\beta}{2I}(t+T)}}{Ae^{-\frac{\beta}{2I}t}} = e^{-\frac{\beta}{2I}T} .$$

Prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri si ha:

$$(17) \quad \delta = \left| \ln \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \right| = \left| \ln e^{-\frac{\beta}{2I}T} \right| = \frac{\beta}{2I} T ;$$

δ si dice decremento logaritmico delle oscillazioni.

Dalla (17) si ricava:

$$(18)_1 \quad \frac{\beta}{2I} = \frac{\delta}{T} , \quad \text{da cui} \quad (18)_2 \quad \frac{\beta T}{4\pi I} = \frac{\delta}{2\pi} .$$

Sostituendo le $(18)_1, (18)_2$ nella (16) si ottiene:

$$(19) \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \frac{T}{T_0} e^{-\frac{\delta}{T}} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} + \arctg \frac{2\pi}{\delta}\right) + \vartheta_0 .$$

La formula è notevole perché tutte le grandezze che in essa figurano si possono determinare sperimentalmente.

NOTARE

Per ridurre al minimo gli errori sperimentali è bene ricavare il decremento logaritmico δ ricorrendo a due oscillazioni distanti fra loro ϑ_m e ϑ_n , con $n > m$. Si ha:

$$\begin{aligned} \vartheta_m &= Ae^{-\eta t} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) , \\ \vartheta_n &= Ae^{-\eta[t+(n-m)T]} \cdot \text{sen}\{\omega[t+(n-m)T] + \varphi\} , \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \vartheta_n &= Ae^{-\eta[t+(n-m)T]} \cdot \text{sen}\left[\omega t + \omega(n-m)\frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right] , \\ \text{infine} \quad \vartheta_n &= Ae^{-\eta[t+(n-m)T]} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) . \end{aligned}$$

Per il rapporto $\vartheta_m / \vartheta_n$ si ottiene :

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} = \frac{Ae^{-\eta t} \text{sen}(\omega t + \varphi)}{Ae^{-\eta[t+(n-m)T]} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{e^{-\eta(n-m)T}} = e^{\eta(n-m)T} .$$

Prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri si ha:

$$\ln \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} = (n-m)\eta T = (n-m) \frac{\beta}{2I} T .$$

Poiché $\frac{\beta}{2I} T = \delta$, come si vede dalla (17), si ricava che il valore del decremento logaritmico è dato dalla formula:

$$\delta = \frac{1}{n-m} \cdot \ln \frac{\vartheta_m}{\vartheta_n} .$$

3° caso : $\beta^2 - 4IC = 0$.

Torniamo a considerare l'equazione differenziale che descrive il moto dell'equipaggio mobile di un galvanometro balistico:

$$(7) \quad I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = \Phi^* \cdot i_o,$$

$$\text{ove} \quad \beta = \beta_o + \Phi^{*2}/R \quad \text{cioè} \quad \beta = \beta_o + (NBS)^2/R;$$

l'equazione differenziale omogenea ad essa associata è

$$(8) \quad I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = 0.$$

L'equazione caratteristica della (8) è $I\alpha^2 + \beta\alpha + C = 0$; se $\beta^2 - 4IC = 0$, questa equazione ha due radici coincidenti $\alpha = -\beta/2I$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea (7) sarà:

$$(20) \quad \vartheta(t) = \vartheta_o + (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\beta}{2I}t}, \quad \text{con} \quad \vartheta_o = \frac{\Phi^*}{C} i_o,$$

la cui derivata è

$$\dot{\vartheta}(t) = C_2 e^{-\frac{\beta}{2I}t} - \frac{\beta}{2I} (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\beta}{2I}t}.$$

Le condizioni iniziali del moto ci permettono di determinare le costanti C_1 e C_2 che figurano nella (20). Tenendo presente che all'istante $t = 0$ l'apparato mobile del galvanometro ancora sta fermo, possiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} \vartheta(0) = 0 \\ \dot{\vartheta}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow (21) \quad \begin{cases} \vartheta_o + C_1 = 0 \\ C_2 - C_1 \frac{\beta}{2I} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\vartheta_o \\ C_2 = C_1 \frac{\beta}{2I} \end{cases}.$$

Il sistema (21) ammette quindi la soluzione

$$C_1 = -\vartheta_0, \quad C_2 = -\vartheta_0 \frac{\beta}{2I}.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione (20) si trova che, nell'ipotesi $\beta^2 - 4IC$, l'integrale generale dell'equazione differenziale che descrive il moto dell'equipaggio mobile del galvanometro ha la soluzione:

$$(22) \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 - \vartheta_0 \left(1 + \frac{\beta}{2I} t \right) e^{-\frac{\beta}{2I} t}.$$

3° caso.

Rimane da discutere il caso che sia $\beta^2 - 4IC > 0$. In questa ipotesi lo smorzamento del moto dell'equipaggio mobile è grande; l'equipaggio non riesce a compiere oscillazioni e tende a raggiungere la posizione di equilibrio ϑ_0 molto lentamente, teoricamente in un tempo infinito. Per tale motivo bisogna evitare la condizione $\beta^2 - 4IC > 0$.

N. 3 - Uso del galvanometro balistico nella misura della corrente di scarica di un condensatore.

Il galvanometro balistico ci permette di misurare la carica elettrica portata da una corrente "impulsiva", come la corrente di scarica di un condensatore; oppure la quantità di elettricità Δq indotta in una bobina quando attraverso di essa si ha una brusca variazione del flusso di induzione magnetica \bar{B} .

Per affrontare questo problema, consideriamo un galvanometro balistico il cui equipaggio mobile abbia un momento di inerzia I notevole e in cui sia piccolo il momento $M_e = -C\vartheta$ delle forze elastiche di torsione che si manifestano nel filo di sospensione quando l'equipaggio mobile ruota di un angolo ϑ .

In queste condizioni lo smorzamento delle oscillazioni è molto piccolo e il periodo di oscillazione T dell'equipaggio mobile è lungo.

All'equipaggio mobile si aggiungono eventualmente due sferette A e B che aumentano il momento di inerzia e quindi il periodo di oscillazione, che deve essere più lungo della durata Δt della corrente impulsiva (fig. 3-4)

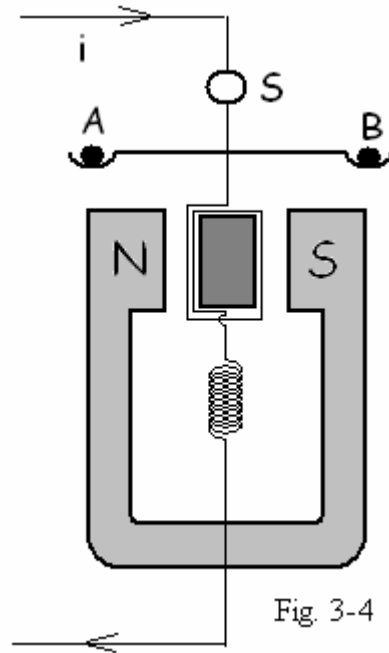


Fig. 3-4

Quando si chiude il circuito, l'equipaggio si muove e il suo moto è dato dall'equazione differenziale lineare e non omogenea

$$(1) \quad I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = M, \quad \text{dove}$$

I è il momento di inerzia dell'equipaggio mobile,

β è la costante delle resistenze passive,

C è la costante delle forze elastiche di torsione,

M è il modulo del momento della coppia di rotazione esercitata dal campo magnetico sulla bobina percorsa da corrente

Vettorialmente si ha $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H}_0$;

in modulo $M = mH_0 = \mu_0 i(t) NS \cdot H_0 = \mu_0 H_0 NS \cdot i(t)$,

e quindi (2) $M = \Phi^* i(t)$,

ove si è posto $\Phi^* = \mu_0 H_0 NS$.

Con ciò, l'equazione differenziale (1) diventa

$$I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = \Phi^* i(t) ,$$

o anche (3)
$$\ddot{\vartheta} + \frac{\beta}{I} \dot{\vartheta} + \frac{C}{I} \vartheta = \frac{\Phi^*}{I} i(t) .$$

Supponiamo che la corrente lanciata nel galvanometro abbia una durata di tempo $(t_2 - t_1)$ molto piccola rispetto al periodo di oscillazione T dell'equipaggio mobile .

Moltiplichiamo la (3) per dt e integriamo da $t_1 = 0$ a $t = t^*$ (istante successivo a quello che segnala la fine della scarica). Si ha

$$(4) \quad \int_0^{t^*} \ddot{\vartheta} dt + \frac{\beta}{I} \int_0^{t^*} \dot{\vartheta} dt + \frac{C}{I} \int_0^{t^*} \vartheta dt = \frac{\Phi^*}{I} \int_0^{t^*} i(t) dt .$$

Anzitutto si ha (a)
$$\int_0^{t^*} i(t) dt = Q ,$$

cioè l'integrale ci dà la carica totale che attraversa il galvanometro.

Poi, se $t_2 - t_1$ è molto piccolo rispetto al periodo T , all'istante $t = t^*$ l'equipaggio mobile, pur avendo acquistato una certa velocità angolare ω^* , praticamente non si è ancora mosso dalla posizione di riposo che aveva all'istante iniziale $t = 0$.

In altri termini possiamo dire che nell'ipotesi $t^* \ll T$

per $t = 0$ è $\vartheta(0) = 0$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$,

per $t = t^*$ è $\vartheta(t^*) = 0$ e $\dot{\vartheta}(t^*) = \omega^*$.

Dopo l'istante t^* , fino all'istante in cui l'equipaggio si ferma, la corrente impulsiva dovuta alla scarica del condensatore viene a mancare del tutto e la

bobina è sede di una f.e.m. indotta $f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ che non genera corrente perché il circuito è aperto.

Tornando all'equazione (4), possiamo vedere:

$$(b) \quad \int_0^{t^*} \ddot{\vartheta} dt = [\dot{\vartheta}(t)]_0^{t^*} = \dot{\vartheta}(t^*) - \dot{\vartheta}(0) = \omega^* ;$$

$$\frac{\beta}{I} \int_0^{t^*} \dot{\vartheta} dt = \frac{\beta}{I} [\vartheta(t)]_0^{t^*} = \frac{\beta}{I} [\cancel{\vartheta(t^*)} - \cancel{\vartheta(0)}] = 0 ,$$

e poiché ϑ è sempre nullo nell'intervallo $(0, t^*)$, si ottiene

$$(c) \quad \frac{\beta}{I} \int_0^{t^*} \vartheta(t) dt = 0 .$$

Sostituendo i valori delle espressioni (a), (b) e (c) nella (4) si ricava

$$\omega^* = \frac{\Phi^*}{I} Q , \quad \text{da cui si ha} \quad (5) \quad Q = \frac{I}{\Phi^*} \omega^* .$$

Vogliamo ora esprimere la carica Q in funzione di ϑ_{\max} , cioè dell'elongazione massima raggiunta dall'equipaggio mobile del galvanometro in seguito al passaggio della corrente impulsiva.

Possiamo raggiungere questo scopo con il seguente ragionamento, che parte un pò da lontano.

Negli istanti successivi a t^* si ha sempre $i = 0$ e l'equazione differenziale (3) diventa

$$(6) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{\beta}{I} \dot{\vartheta} + \frac{C}{I} \vartheta = 0 .$$

Esaminiamo due casi che si possono presentare.

Primo caso. $\beta = 0$, cioè lo smorzamento del moto della bobina è nullo e la (6) diventa

$$\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 , \quad \text{ove si è posto} \quad (7) \quad \omega_0^2 = \frac{C}{I} .$$

In tal caso si ha un moto armonico di equazione

$$(8) \quad \vartheta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

e di periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, ossia $(9) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} .$

Determiniamo i parametri A e φ dell'equazione (8) in base alle condizioni iniziali del moto, tenendo presente che agli effetti del moto della bobina, l'istante $t = t^*$ può essere confuso con l'istante $t = 0$, se $t^* \ll T_0$.

Deriviamo anzitutto la (8) e poi scriviamo le condizioni iniziali:

$$\dot{\vartheta}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\begin{cases} \vartheta(0) = A \sin \varphi = 0 \\ \dot{\vartheta}(t^*) = \dot{\vartheta}(0) = A\omega_0 \cos \varphi = \omega^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A\omega_0 = \omega^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \frac{\omega^*}{\omega_0} \end{cases}.$$

Tenendo presente che $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ si ottiene: $A = \frac{T_0}{2\pi} \omega^*$.

Ne segue che l'equazione che fornisce il moto dell'equipaggio mobile del galvanometro è:

$$(9) \quad \vartheta(t) = \frac{T_0}{2\pi} \omega^* \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} t.$$

Per $t = \frac{T_0}{4}$ la (9) fornisce ovviamente l'elongazione massima

$$\vartheta_{\max} = \frac{T_0}{2\pi} \omega^* \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{4}, \quad \rightarrow \quad \vartheta_{\max} = \frac{T_0}{2\pi} \omega^* ;$$

e da questa espressione si ricava : (10) $\omega^* = \frac{2\pi}{T_0} \vartheta_{\max}.$

Sostituendo la (10) nella (5) si ottiene:

$$(13) \quad Q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{I}{\Phi^*} \vartheta_{\max}.$$

Lanciamo ora nel galvanometro una corrente costante di intensità i_c nota e sia ϑ_c la deviazione corrispondente dell'equipaggio mobile, tenendo

presente che essa può essere facilmente determinata. In condizioni di equilibrio si ha:

$$(14) \quad \vec{M}_i + \vec{M}_e = 0 ,$$

dove \vec{M}_e è il momento elastico di torsione esercitato dal filo che sorregge la bobina, mentre \vec{M}_i è il momento di rotazione dovuto all'azione del campo magnetico sulla bobina percorsa da corrente.

Proiettando scalarmente la (14) sull'asse di rotazione della bobina si ha

$$(16) \quad M_i + M_e = 0 ,$$

ove, ricordando la (2) si ha :

$$M_i = mH = \mu_0 N S i H = \Phi^* i .$$

Tenendo presente che i vettori \vec{M}_i ed \vec{M}_e hanno versi opposti si ha:

$$\Phi^* i - C \vartheta = 0 ,$$

da cui

$$\Phi^* = \frac{C \vartheta_c}{i_c} .$$

Sostituendo l'espressione di Φ^* nella (13) si ottiene:

$$Q = \frac{2\pi I}{T_0} \cdot \frac{i_c}{C \vartheta_c} \vartheta_{\max} , \text{ ossia} \quad (16) \quad Q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{I}{C} \frac{i_c}{\vartheta_c} \vartheta_{\max} .$$

Ricordando ora la (7) si ha :

$$\frac{C}{I} = \omega_0^2 , \text{ ossia} \quad \frac{C}{I} = \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \rightarrow \frac{I}{C} = \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 .$$

Sostituendo l'espressione di I/C nella (16) si ottiene:

$$Q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0^2}{(2\pi)^2} \frac{i_c}{\vartheta_c} \vartheta_{\max},$$

infine (17)
$$Q = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{i_c}{\vartheta_c} \vartheta_{\max}.$$

Secondo caso. Il coefficiente di smorzamento del moto dell'equipaggio mobile raggiunge il valore critico β_c .

Dopo l'istante $t = t^*$ che segnala la fine del processo di scarica elettrica, si ha $i = 0$ e il moto dell'equipaggio mobile è dato dall'equazione

$$(18) \quad I\ddot{\vartheta} + \beta\dot{\vartheta} + C\vartheta = 0.$$

L'equazione caratteristica associata a questa equazione differenziale è

$$It^2 + \beta t + C = 0,$$

la quale ha le radici
$$t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4IC}}{2I}.$$

Sappiamo che il moto dell'equipaggio raggiunge la fase di smorzamento critico quando β raggiunge il particolare valore critico β_c per cui si ha $\beta_c^2 - 4IC = 0$. In tal caso, l'integrale generale dell'equazione differenziale (18) è

$$(19) \quad \vartheta(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\frac{\beta_c}{2I} t}, \quad \text{che ammette la derivata}$$

$$(20) \quad \dot{\vartheta}(t) = k_2 e^{-\frac{\beta_c}{2I} t} - \frac{\beta_c}{2I} (k_1 + k_2 t) e^{-\frac{\beta_c}{2I} t}.$$

Determiniamo k_1 e k_2 in base alle condizioni iniziali del moto, tenendo presente che all'istante $t = t^*$ ($t^* \ll T$) l'equipaggio mobile sta per muoversi con la velocità angolare ω^* , ma esso è ancora fermo nella posizione iniziale. Agli effetti pratici, l'espressione che la derivata $\dot{\vartheta}(t)$ ha all'istante $t = t^*$ è eguale all'espressione che essa ha all'istante $t = 0$.

Possiamo quindi dire che le condizioni iniziali del moto sono:

$$\begin{cases} \vartheta(t^*) = \vartheta(0) = 0 \\ \dot{\vartheta}(t^*) = \dot{\vartheta}(0) = \omega^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 - \frac{\beta_c}{2I} k_1 = \omega^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \omega^* \end{cases}$$

L'equazione del moto dell'equipaggio mobile e della derivata con cui esso ruota attorno al suo asse sono quindi

$$(21) \quad \vartheta(t) = \omega^* t \cdot e^{-\frac{\beta_c}{2I}t}$$

$$\dot{\vartheta}(t) = \omega^* e^{-\frac{\beta_c}{2I}t} - \frac{\beta_c}{2I} \omega^* t e^{-\frac{\beta_c}{2I}t}.$$

Quando l'equipaggio mobile raggiunge la massima elongazione ϑ_{\max} al tempo t , esso si ferma un istante prima di tornare indietro; ne segue che al tempo t la sua velocità è nulla e pertanto si ha $\dot{\vartheta}(t) = 0$, ossia:

$$\omega^* e^{-\frac{\beta_c}{2I}t} - \frac{\beta_c}{2I} \omega^* t e^{-\frac{\beta_c}{2I}t} = 0.$$

Semplificando si ha $1 - \frac{\beta_c}{2I}t = 0$, da cui (22) $t = \frac{2I}{\beta_c}$.

Quindi $t = \frac{2I}{\beta_c}$ è il tempo che l'equipaggio mobile impiega per raggiungere la massima elongazione ϑ_{\max} quando esso ha lo smorzamento critico $\beta_c = \sqrt{4IC}$.

Sostituendo la (22) nella (21) troviamo l'espressione di ϑ_{\max} ; si ha:

$$\vartheta_{\max} = \omega^* \frac{2I}{\beta_c} e^{-\frac{\beta_c}{2I} \cdot \frac{2I}{\beta_c}}, \text{ da cui (23) } \vartheta_{\max} = \frac{2I}{\beta_c} \cdot \frac{\omega^*}{e}.$$

Tenendo presente che $\beta_c = \sqrt{4IC}$, ossia $\beta_c = 2\sqrt{IC}$ possiamo scrivere:

$$\frac{\beta_c}{2I} = \frac{2\sqrt{IC}}{2I}; \text{ ne segue (24) } \quad \frac{\beta_c}{2I} = \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

Ma, come sappiamo, $\sqrt{\frac{C}{I}} = \omega_0$, cioè $\sqrt{\frac{C}{I}}$ è la pulsazione della bobina in assenza di attriti e smorzamenti dovuti alle correnti indotte. Pertanto si ha:

$$\sqrt{\frac{C}{I}} = \frac{2\pi}{T_0} \text{ e sostituendo nella (24) si ha}$$

$$\frac{\beta_c}{2I} = \frac{2\pi}{T_0}, \text{ da cui (26) } \quad \frac{2I}{\beta_c} = \frac{T_0}{2\pi}.$$

Sostituendo la (26) nell'espressione (24) si ha: $\vartheta_{\max} = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{\omega^*}{e},$

e da essa si ottiene (27) $\omega^* = \frac{2\pi}{T_0} \cdot e \vartheta_{\max}.$

Ricordiamo ora che sia nel caso di smorzamento nullo del moto della bobina ($\beta = 0$), sia nel caso di smorzamento critico ($\beta_c = \sqrt{4IC}$), la carica che passa nel galvanometro all'istante t^* è: (5) $Q = \frac{I}{\Phi^*} \omega^*.$

Sostituendo la (27) nella (25) si ottiene:

$$(28) \quad Q = \frac{I}{\Phi^*} \cdot \frac{2\pi}{T_0} e \vartheta_{\max} .$$

Infine, sempre in condizioni critiche $\beta_c = \sqrt{4IC}$, lanciamo nel galvanometro una corrente costante di intensità i_c nota e sia ϑ_c la deviazione permanente corrispondente, che possiamo agevolmente leggere sullo strumento. In condizioni di equilibrio si ha che i due momenti di rotazione che agiscono sulla bobina hanno somma nulla, cioè $\vec{M}_i + \vec{M}_e = 0$. Proiettando scalarmente sull'asse di rotazione della bobina, opportunamente orientato, si ha

$$M_i + M_e = 0, \text{ ossia } \Phi^* i_c - C \vartheta_c = 0 .$$

$$\text{Si ricava così (29) } \Phi^* = \frac{C \vartheta_c}{i_c} .$$

$$\text{Sostituendo la (29) nella (28) si ha : (30) } Q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{I}{C} \cdot \frac{i_c}{\vartheta_c} e \vartheta_{\max} .$$

Ricordiamo ora che per la pulsazione dell'equipaggio mobile in assenza di attrito si ha:

$$\omega_0^2 = \frac{C}{I} \rightarrow \frac{C}{I} = \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \rightarrow \frac{I}{C} = \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 .$$

Sostituendo l'ultima espressione nella (30) si ottiene:

$$Q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0^2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{i_c}{\vartheta_c} e \vartheta_{\max} ,$$

$$\text{e infine (31) } Q = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{i_c}{\vartheta_c} \cdot e \vartheta_{\max} .$$

N. 4 – Misura della costante dielettrica ϵ_0 del vuoto per mezzo dell'elettrometro assoluto

Consideriamo un elettrometro assoluto di Lord Kelvin e carichiamo il condensatore che ne fa parte a carica costante, mettendo a terra l'armatura esterna e la custodia metallica che fa da schermo elettrostatico. Possiamo anche caricare il condensatore collegando le armature con i poli di una batteria di pile, purché poi si stacchino i collegamenti con la batteria, in modo che la carica delle armature rimanga costante (fig.3-5).

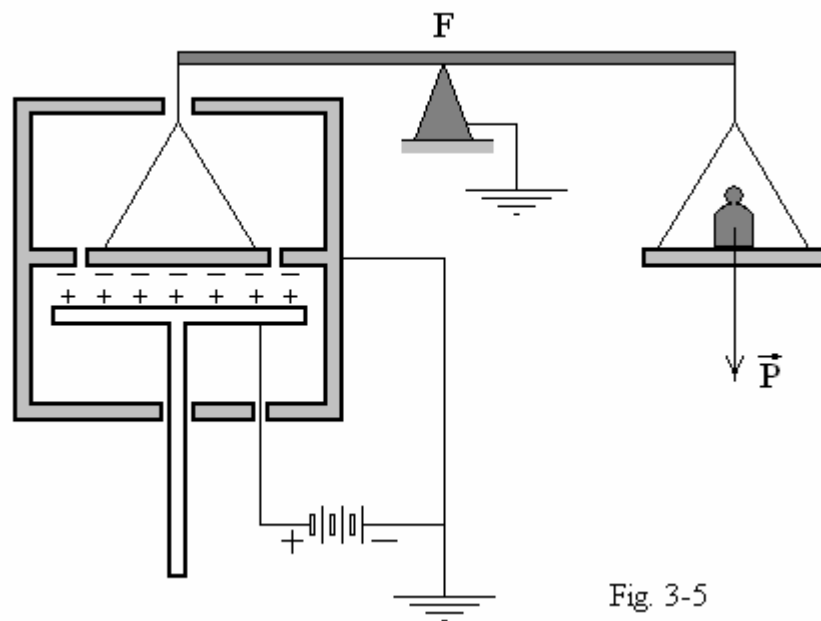


Fig. 3-5

In queste condizioni sia $+Q$ la carica dell'armatura positiva, V la d.d.p. fra le due armature, o meglio il potenziale dell'armatura positiva rispetto al potenziale della terra. Sia poi $\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$ il peso del corpo posto sul piatto B della bilancia per equilibrare la forza di attrazione elettrostatica fra le armature del condensatore. Sia infine C la capacità del condensatore. Sappiamo che si hanno le relazioni:

$$(1) \quad C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad (2) \quad V = d \cdot \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}},$$

ove S è la superficie delle armature e d la loro distanza.

Dall'equazione (1) si ricava

$$(3) \quad V = d \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

Eguagliando membro a membro le (2),(3) si ha:

$$\sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, \rightarrow \frac{2F}{\epsilon_0 S} = \frac{Q^2}{(\epsilon_0 S)^2}, \rightarrow \epsilon_0 S = \frac{Q^2}{2F};$$

e infine (4)
$$\epsilon_0 = \frac{Q^2}{2FS} .$$

Ora S è nota; il peso $F = mg$ poggiato sul piatto della bilancia è noto; la carica Q si può misurare con un galvanometro balistico, come abbiamo spiegato nel paragrafo precedente.

Possiamo così ricavare il valore della costante dielettrica ϵ_0 del vuoto.

Ricordiamo solo che se lo smorzamento β del moto dell'equipaggio mobile è nullo, il valore della carica Q del condensatore è dato dall'espressione

$$Q = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{i_c}{\vartheta_c} \vartheta_{\max} ;$$

se invece lo smorzamento β del moto dell'equipaggio raggiunge il valore critico $\beta_c = \sqrt{4IC}$, allora il valore della carica Q è dato dall'espressione

$$Q = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{i_c}{\vartheta_c} e \vartheta_{\max} .$$

Il significato dei simboli che intervengono nelle due formule è stato spiegato al tempo opportuno.

APPENDICE MATEMATICA

N. 1 – Integrale di una particolare forma indeterminata

Dimostrare che (1)
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} .$$

Dim. Se poniamo $e^{-x} = t$, si vede facilmente che si ha:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{t}{1 - t} = t \cdot \frac{1}{1 - t} .$$

Osserviamo ora che

quando $x = 0$ allora $t = 1$, e quando $x \rightarrow +\infty$ allora $t \rightarrow 0$;
ne segue che $0 < t \leq 1$

Se ora sviluppiamo in serie di Mac Laurin la funzione $\frac{1}{1-t}$ si ha:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k , \text{ con } |t| < 1 .$$

Ricordando che $t = e^{-x} < 1$ si ha: $\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{1 - t} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} .$

Ne segue che

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{t}{1 - t} = e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-kx} ,$$

ossia (2)
$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)x} ,$$

ne segue che (3)
$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} x e^{-(k+1)x} .$$

Integrando la (3) si ottiene

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx .$$

Dobbiamo ora calcolare l'integrale definito

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx \quad \text{e la sommatoria} \quad (6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-(k+1)x} dx .$$

Calcoliamo a parte l'integrale indefinito

$$(7) \quad \int x e^{-(k+1)x} dx , \quad \text{ove } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Notiamo che: } (8) \quad e^{-(k+1)x} dx = -\frac{1}{k+1} d e^{-(k+1)x} .$$

Sostituendo la (8) nella (7) si ha:

$$\int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{1}{k+1} \int x d e^{-(k+1)x} .$$

Integrando per parti si ha:

$$\int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{1}{k+1} x e^{-(k+1)x} + \frac{1}{k+1} \int e^{-(k+1)x} dx ,$$

$$\text{da cui} \quad \int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{x e^{-(k+1)x}}{(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2} \int e^{-(k+1)x} d[-(k+1)x] .$$

Calcolando l'ultimo integrale si ricava:

$$\int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{x e^{-(k+1)x}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} e^{-(k+1)x} ,$$

$$\text{ossia : } (9) \quad \int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{x}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)x}} .$$

La formula (9) ci dà la possibilità di calcolare l'integrale definito (5) . Si ha:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x e^{-(k+1)x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{(k+1)e^{(k+1)x}} \right]_0^t - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)x}} \right]_0^t = \\
&= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(k+1)e^{(k+1)t}} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(k+1)e^{(k+1)t}} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)e^{(k+1)t}} + \\
&+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)t}} .
\end{aligned}$$

Il primo e il terzo limite sono nulli, come subito si vede applicando il teor. di de L'Hospital; il terzo integrale è evidentemente nullo. Ne segue che:

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)t}} = \frac{1}{(k+1)^2} .$$

La (9) ci permette di dire che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Sostituendo questa espressione nella (5) si ottiene infine:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

N. 2 – Altro integrale notevole

$$\text{Dimostrare che (1)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} .$$

L'integrale (1) ha una grande importanza perché interviene nello studio del corpo nero. Per dimostrare la (1) partiamo dalla formula (2) del par. N.1. Si

$$\text{ha:} \quad \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)x} .$$

Ne segue: (2)
$$\frac{x^3}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^3 e^{-(k+1)x} .$$

Poiché nell'intervallo $(0 < x < 1)$ la serie è totalmente convergente, essa è anche assolutamente e uniformemente convergente e quindi l'integrale della serie è uguale alla serie degli integrali. Possiamo quindi dire che:

(3)
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx .$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito corrispondente. Si ha:

(4)
$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-(k+1)x} dx &= -\frac{1}{k+1} \int x^3 de^{-(k+1)x} = \\ &= -\frac{1}{k+1} x^3 e^{-(k+1)x} + \frac{1}{k+1} \int e^{-(k+1)x} \cdot 3x^2 dx = \\ &= -\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{3}{(k+1)^2} \int x^2 de^{-(k+1)x} = \\ &= -\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{3}{(k+1)^2} x^2 e^{-(k+1)x} + \frac{3}{(k+1)^2} \int e^{-(k+1)x} \cdot 2x dx = \\ &= -\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{3x^2}{(k+1)^2 e^{(k+1)x}} + \frac{6}{(k+1)^2} \int x e^{-(k+1)x} dx . \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato nel paragrafo precedente e abbiamo visto che si ha:

$$\int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{x}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)x}} .$$

Sostituendo questo integrale nell'espressione finale della formula (3) si ha:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-(k+1)x} dx &= -\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{3x^2}{(k+1)^2 e^{(k+1)x}} + \\ &\quad -\frac{6x}{(k+1)^3 e^{(k+1)x}} - \frac{6}{(k+1)^4 e^{(k+1)x}} . \end{aligned}$$

Passando a calcolare l'integrale definito si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{x^3}{e^x - 1} dx ,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}} \right]_0^t - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{(k+1)e^{(k+1)x}} \right]_0^t +$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{(k+1)^3 e^{(k+1)x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{(k+1)^3 e^{(k+1)x}} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{6}{(k+1)^4 e^{(k+1)x}} \right]_0^t .$$

I primi quattro termini sono nulli: infatti abbiamo termini frazionari nei quali si verifica che o il numeratore è nullo, o il denominatore è un infinito di ordine maggiore rispetto al numeratore. Solo l'ultimo limite è diverso da zero. Tenendo conto del suo evidente valore si ha:

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \frac{6}{(k+1)^4} .$$

La (5) ci permette di dire che:

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(k+1)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^4} .$$

Sostituendo la (6) nell'ultimo membro della (3) si ottiene la notevole formula:

$$(7) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^4} = \frac{\pi^4}{15} .$$

N. 3 – Studio di un particolare problema differenziale

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare e omogenea del terzo ordine, della quale sono date anche le condizioni al contorno:

$$(1) \quad y''' + y'' + \lambda^2(y' + y) = 0$$

con $y(0) = 0, \quad y(+1) = 0, \quad y(-1) = 0$ e λ parametro reale.

La soluzione va a merito del mio amico Gianni Barbato, di Latina, stimato cultore di questioni scientifiche.

Trattandosi di una equazione lineare a coefficienti costanti, essa avrà soluzioni del tipo $y = e^{\alpha x}$, con α appartenente al campo complesso. Sostituendo nella (1) si ha:

$$e^{\alpha x} [\alpha^3 + \alpha^2 + \lambda^2(\alpha + 1)] = 0.$$

Essendo poi $e^{\alpha x} \neq 0 \quad \forall \alpha, x \in \mathbb{C}$, deve essere

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \lambda^2(\alpha + 1) = 0, \quad (\text{equazione caratteristica dell'eq. differenziale});$$
$$\alpha^2(\alpha + 1) + \lambda^2(\alpha + 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad (2) \quad (\alpha + 1)(\alpha^2 + \lambda^2) = 0,$$

radice	$\alpha_1 = -1,$	integrale particolare	$y_1 = e^{-x},$
“	$\alpha_2 = i\lambda,$	“	$y_2 = e^{i\lambda x},$
“	$\alpha_3 = -i\lambda,$	“	$y_3 = e^{-i\lambda x}.$

L'integrale generale dipende da tre costanti arbitrarie ed è dato dalla somma di questi tre integrali particolari, fra loro indipendenti:

$$(3) \quad y(x) = Ae^{-x} + Be^{i\lambda x} + Ce^{-i\lambda x}.$$

Prendendo le costanti B e C in modo opportuno, e utilizzando la formula di Eulero $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, possiamo anche scrivere:

$$y(x) = Ae^{-x} + (k_1 - ik_2)(\cos \lambda x + i \sin \lambda x) + (k_1 + ik_2)(\cos \lambda x - i \sin \lambda x);$$
$$y(x) = Ae^{-x} + 2k_1 \cos \lambda x + 2k_2 \sin \lambda x,$$

ossia (4) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos \lambda x + c_3 \sin \lambda x$.

Le costanti c_1, c_2, c_3 si ricavano dalle condizioni al contorno del problema:

$$y(0) = 0, \quad y(+1) = 0, \quad y(-1) = 0.$$

Esse devono quindi soddisfare il sistema:

$$(5) \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + 0 \cdot c_3 = 0 \\ c_1 e + c_2 \cos \lambda + c_3 \sin \lambda = 0 \\ c_1/e + c_2 \cos \lambda - c_3 \sin \lambda = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette una soluzione non tutta nulla solo se il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è nullo, cioè se

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e & \cos \lambda & -\sin \lambda \\ e^{-1} & \cos \lambda & \sin \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

da cui $\cos \lambda \sin \lambda - \frac{1}{e} \sin \lambda + \cos \lambda \sin \lambda - e \sin \lambda = 0$.

Ne segue che deve essere

$$2 \cos \lambda \sin \lambda - \left(e + \frac{1}{e}\right) \sin \lambda = 0,$$

ossia: (7) $2 \cos \lambda = e + \frac{1}{e}$ e (8) $\sin \lambda = 0$:

L'equazione (7) non ha soluzioni,

mentre la (8) ha la soluzione $\lambda = k\pi$, ove $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Con questa soluzione, la matrice del sistema diventa:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e & \pm 1 & 0 \\ e^{-1} & \pm 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice (9) ha sicuramente rango 2. Si conclude che delle 3 equazioni del sistema (5) solo 2 sono indipendenti; **ne segue che delle tre equazioni al contorno solo 2 sono indipendenti. Il sistema è quindi risolubile e ammette ∞^1 soluzioni.**

Risolvi il sistema (5) prendendo come equazioni indipendenti la 1^a e la 2^a. Si ha:

$$(10) \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + 0 \cdot c_3 = 0 \\ c_1 e + c_2 \cos k\pi - c_3 \sin k\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 e + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo nella 2^a equazione del sistema si ha:

$$c_1 e - c_1 = 0, \Rightarrow c_1 \left(e - \frac{1}{e} \right) = 0; \text{ quindi } c_1 = 0.$$

Collegando i risultati, le tre condizioni al contorno del problema differenziale ci permettono di trovare:

$$\lambda = k\pi, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \text{costante arbitraria}.$$

Sostituendo nella (4), possiamo dire che **il problema differenziale ha ∞^1 soluzioni date dall'equazione:**

$$(11) \quad y_k(x) = c_k \sin(k\pi x).$$

Abbiamo posto $c_3 = c_k$ per indicare che i valori della costante c_3 possono variare assieme ai valori $k\pi x$ dell'argomento della funzione goniometrica.

I valori $\lambda = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono gli autovalori del problema differenziale; le funzioni $c_k \sin(k\pi x)$ sono le autosoluzioni.

Per la linearità dell'equazione differenziale (1), data dal quesito iniziale, una qualsiasi somma delle funzioni $c_k \cdot \sin(k\pi x)$ è ancora una soluzione dell'equazione stessa; ne segue che la soluzione più generale è data dalla funzione:

$$(9) \quad y_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot \sin(k\pi x).$$

Verifichiamo tale soluzione.

Per $k = 0$, si ha ovviamente $y(0) = y(1) = y(-1) = 0$. Per $k \neq 0$ si ha:

$$y' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\pi c_k \cdot \cos(k\pi x), \quad y'' = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 \pi^2 c_k \cdot \sin(k\pi x),$$

$$y''' = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^3 \pi^3 c_k \cdot \cos(k\pi x), \quad \lambda = k\pi, \quad \lambda^2 = k^2 \pi^2.$$

Sostituendo y, y', y'', y''' e $\lambda^2 = k^2 \pi^2$ nell'eq. differenziale (1)

$$y''' + y'' + \lambda^2 y' + \lambda^2 y = 0$$

si ha

$$c_k \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [-k^3 \pi^3 \cos(k\pi x) - k^2 \pi^2 \sin(k\pi x) + \\ + k^3 \pi^3 \cos(k\pi x) + k^2 \pi^2 \sin(k\pi x)] = 0$$

c.v.d.

N. 4 – Prima identità goniometrica

Dimostrare che se $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ha:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Dimostrazione. Ricordando formule goniometriche notevoli si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma &= \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \\ &= \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \\ &= \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \beta) + \operatorname{sen} \beta (1 + \cos \alpha) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cdot 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{sen} \beta \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= 4 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} + 4 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$

Riprendendo dall'inizio possiamo dire:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \right).\end{aligned}$$

Ne segue

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \left[\frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2} \right].$$

Poiché $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, si ha $180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma$; e sostituendo nell'eguaglianza precedente si ha:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Si ottiene così l'identità goniometrica che volevamo dimostrare.

N. 5 – Seconda identità goniometrica

Dimostrare che se $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ha:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Dimostrazione. Ricordando formule goniometriche notevoli si ha:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + [-\cos(\alpha + \beta)]^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta) = \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + [\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta]^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \\ &+ \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) + \\ &+ (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta.\end{aligned}$$

Riprendendo la dimostrazione dalla somma iniziale si ha:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \\
 &+ \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta = \\
 &= 2 \cos^2 \alpha + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \\
 &- 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\
 &= 1 + 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\
 &= 1 + 2 \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta .
 \end{aligned}$$

Possiamo quindi dire che si ha:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 + 2 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta = \\
 &= 1 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \\
 &= 1 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = 1 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(180^\circ - \gamma), \\
 &\text{ove si è tenuto conto che, per ipotesi iniziale, si ha: } \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma .
 \end{aligned}$$

Con un ultimo passaggio, per $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ha:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma .$$

N. 6 – Terza identità goniometrica

Dimostrare che se $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ha:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2(1 + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma) .$$

Dimostrazione. Sviluppiamo a parte $\sin^2 \gamma$ tenendo presente che $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \gamma &= \sin^2 [180^\circ - (\alpha + \beta)] = [-\cos(\alpha + \beta)]^2 = \cos^2(\alpha + \beta); \\
 \sin^2 \gamma &= [\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta]^2 \\
 \sin^2 \gamma &= \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin^2 \gamma &= (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \\ &+ 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Usufruento della (1) possiamo dire che si ha:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta \cos^2 \alpha + \\ &+ \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta . \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= 2 - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \\ &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) . \end{aligned}$$

Ma per l'ipotesi iniziale si ha: $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Pertanto possiamo scrivere:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot \cos(180^\circ - \gamma) .$$

Con un ultimo passaggio, possiamo dire che per $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ha:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 (1 + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma) .$$

N. 7 – Problema geometrico.

Inscrivere in una circonferenza di raggio $r = 1$ un triangolo isoscele di area uguale a k . Discussione.

Sia BC la base del triangolo isoscele e AH l'altezza ad essa relativa.

Posto $\overline{AH} = x$, si ha $\overline{BC} = 2\sqrt{x(2-x)}$ (2° Teor. di Euclide).

Area del triangolo: $S = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH}$, da cui $S = x\sqrt{2x - x^2}$.

Si ha il sistema risolvibile:

$$\begin{cases} x \cdot \sqrt{2x - x^2} = k \\ 0 < x < 2 \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = k/x \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 < x < 2.$$

In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy , il problema ha la seguente interpretazione: si tratta di intersecare l'arco di circonferenza

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ [centro $C(1;0)$ e raggio $r = 1$] posto al di sopra dell'asse

x con il fascio di iperboli equilateri $y = \frac{k}{x}$.

Determiniamo il valore di k per cui l'iperbole del fascio è tangente alla circonferenza e le coordinate del punto di tangenza (fig. 4-1).

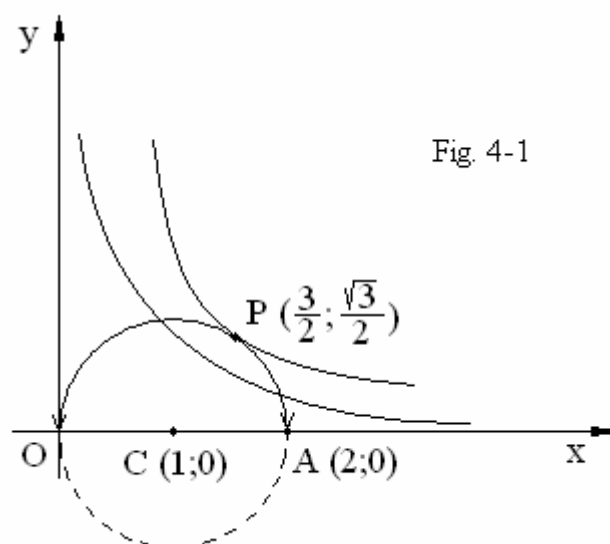


Fig. 4-1

Per un opportuno valore del parametro k , c'è un'iperbole Γ del fascio che tocca la circonferenza in un certo punto $P_0(x_0, y_0)$, il quale cade ovviamente nel primo quadrante.

Per trovare Γ imponiamo le condizioni che le due curve passino per il punto P_0 e che le tangenti alle due curve in tale punto coincidano, ossia che queste abbiano coefficienti angolari m ed m' uguali.

Tangente alla circonferenza:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0) = 0, \text{ ove } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Il suo coefficiente angolare è :

$$m = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = -\frac{2(x_0 - 1)}{2y_0}, \text{ quindi } m = \frac{1 - x_0}{y_0}.$$

Tangente all'iperbole:

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0), \text{ ove } g'(x_0) = m' = -\frac{k}{x_0^2}.$$

$$\text{Deve essere } m = m', \text{ cioè } \frac{1 - x_0}{y_0} = -\frac{k}{x_0^2}; \text{ da cui } \frac{x_0 - 1}{y_0} = \frac{k}{x_0^2}.$$

Dobbiamo ora risolvere il sistema:

$$(A) \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 = 0, & x_0 y_0 = k, \\ \frac{x_0 - 1}{y_0} = \frac{k}{x_0^2}. \end{cases}$$

Si ricava $k = \frac{x_0^2(x_0 - 1)}{y_0}$; sostituendo nella (A)₂ si ha:

$$x_0 y_0 = \frac{x_0^2(x_0 - 1)}{y_0}, \rightarrow y_0^2 = x_0^2 - x_0, \rightarrow x_0^2 - y_0^2 = x_0.$$

Il sistema (A) si riduce al sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 2x_0 \\ x_0^2 - y_0^2 = x_0 \end{cases} \text{ che ha le soluzioni } x_0 = 0 \text{ e } x_0 = \frac{3}{2}.$$

Alla soluzione $x_0 = 0$ corrisponde il valore del fascio $k = 0$, cioè l'iperbole (degenere) spezzata nelle rette $x = 0$ e $y = 0$.

Alla soluzione $x_0 = 3/2$ corrisponde l'ordinata

$$y_0 = \pm \sqrt{x_0^2 - x_0}, \text{ da cui } y_0 = +\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \text{ cioè } y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si trova così che il valore di k è $k = x_0 y_0, \Rightarrow k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Conclusione: l'iperbole del fascio tangente alla circonferenza è

$$xy = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ e il punto di tangenza è } P_0 \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Il problema ha due soluzioni distinte per $0 < k \leq 3\sqrt{3}/4$.

N. 8 – Quando si viaggiava in carrozza

Una carrozza impiega un certo tempo per andare dal paese A al paese B; una seconda carrozza, che in 4 ore fa Km 7 meno della prima, impiega per fare il medesimo cammino 4 ore più dell'altra. Una terza carrozza, che in 3 ore fa km 12,25 di cammino più della seconda, impiega a percorrere quel cammino 7 ore meno di quest'ultima.

Trovare in quanto tempo ogni carrozza percorre quel cammino e quale è la distanza dei due paesi.

Soluzione

Sia \overline{AB} la distanza fra i due paesi, y la velocità della prima carrozza e x il tempo che essa impiega a percorrere la distanza \overline{AB} . Possiamo quindi scrivere l'equazione: $x \cdot y = \overline{AB}$.

Possiamo ora scrivere il seguente prospetto:

	Tempo	Velocità
1 ^a carrozza	x	y
2 ^a carrozza	$x+4$	$\frac{4y-7}{4}$
3 ^a carrozza	$x+4-7 = x-3$	$\left(3 \cdot \frac{4y-7}{4} + 12,25 \right) : 3$

Possiamo quindi impostare il seguente problema:

$$\begin{cases} \overline{AB} = xy \\ \overline{AB} = (x+4) \cdot \left(\frac{4y-7}{4} \right) \\ \overline{AB} = (x-3) \cdot \left[\left(3 \cdot \frac{4y-7}{4} + 12,25 \right) : 3 \right]. \end{cases}$$

Uguagliando membro a membro la 1^a e la 2^a equazione, e poi la 1^a e la 3^a equazione, si ha il sistema:

$$\begin{cases} xy = (x+4) \cdot \left(\frac{4y-7}{4} \right) \\ xy = (x-3) \cdot \left(3 \cdot \frac{4y-7}{4} + 12,25 \right) \cdot \frac{1}{3} ; \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} xy = \frac{4xy - 7x + 16y - 28}{4} \\ xy = (x-3) \cdot \left(\frac{12y-21+49}{4} \right) \cdot \frac{1}{3} , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy = 4xy - 7x + 16y - 28 \\ 12xy = (x-3) \cdot 2(6y+14) . \end{cases}$$

Con qualche altro passaggio si ha il sistema:

$$\begin{cases} 7x - 16y = -28 \\ 6xy = 6xy + 14x - 18y - 42 , \end{cases} \text{ ossia } \begin{cases} 7x - 16y = -28 \\ 7x - 9y = 21 . \end{cases}$$

Si ricava la soluzione: $y = 7$ e $x = 12$.

Ne segue che la distanza fra i due paesi è

$$\overline{AB} = km(12 \cdot 7), \quad \overline{AB} = 84 \text{ km}.$$

Per tempi di percorrenza delle tre carrozze si trovano i valori:

$$1^a \text{ carrozza: } T_1 = 12 \text{ ore,} \quad 2^a \text{ carrozza: } T_2 = 16 \text{ ore,}$$

$$3^a \text{ carrozza: } T_3 = 9 \text{ ore.}$$

N. 9 – Un problema sull'uso delle frazioni

Vediamo ora un problema che è un ricordo dei lontani anni del Liceo.

Due operai, M ed N, lavorando insieme, compirebbero un lavoro in giorni d. Dopo giorni a l'operaio M si ammala e l'operaio N è costretto a lavorare da solo, terminando così il lavoro dopo altri b giorni. In quanti giorni, lavorando da soli, quei due operai farebbero il lavoro?

Soluzione.

I due operai in un giorno compiono $\frac{1}{d}$ del lavoro.

Nei primi a giorni i due operai compiono la frazione $\frac{a}{d}$ del lavoro;

rimane da compiere la frazione di lavoro $1 - \frac{a}{d} = \frac{d-a}{d}$, che il secondo operaio N compie da solo in altri b giorni.

Ne segue che il secondo operaio compirà in un giorno $\frac{1}{b}$ di questo lavoro, ossia compirà in un giorno una frazione di lavoro pari a

$$(1) \quad F_2 = \frac{1}{b} \cdot \frac{d-a}{d}.$$

Per compiere tutto il lavoro, cioè il lavoro unitario, il secondo operaio impiegherà un numero di giorni pari a

$$g_2 = 1 : \frac{d-a}{bd}, \quad \text{ossia} \quad (2) \quad g_2 = \frac{bd}{d-a}.$$

Veniamo ora al primo operaio M. La frazione di lavoro F_1 compiuto in un giorno da questo operaio si ottiene sottraendo da $\frac{1}{d}$ la frazione di lavoro (1) compiuto in un giorno dal secondo operaio. Questa frazione giornaliera è data dall'espressione:

$$F_1 = \frac{1}{d} - \frac{d-a}{bd}, \text{ ossia } (3) \quad F_1 = \frac{b-d+a}{bd}.$$

Per compiere da solo tutto il lavoro, cioè il lavoro unitario, il primo operaio impiegherà un numero g_1 di giorni pari a:

$$g_1 = 1 : \frac{a+b-d}{bd}, \text{ ossia } (4) \quad g_1 = \frac{bd}{a+b-d}.$$

Se, per esempio, $d = 16$ giorni, $a = 4$ giorni e $b = 18$ giorni si trova che

l'operaio N farebbe da solo il lavoro in 24 giorni, mentre
l'operaio M farebbe da solo quel lavoro in 48 giorni.