

Prof. Nazario Magnarelli

Latina

GEOMETRIA ANALITICA E PROIETTIVA

Parte seconda

BIBLIOGRAFIA

- 1) **Pappus Alexandrinus**: La Collection Mathématique. Oeuvre traduite avec une introduction par P. Ver Eecke ; Parigi Bruges 1993 (testo reperibile presso la Biblioteca Nazionale di Roma).
- 2) **Luigi Campedelli**: Lezioni di Geometria Vol. 1, CEDAM – Bologna
- 3) **L. Campedelli** : Lezioni di Geometria ed esercizi, 4^a edizione, 1966 - CEDAM – Padova.
- 4) **G. Roghi**: Lezioni di matematiche complementari; “La Sapienza” - Roma.
- 5) **E. Martinelli**: Lezioni di Geometria, 3^a edizione, anno 1954 - Librerie Bozzi – Bologna.
- 6) **F. Conforto**: Geometria Descrittiva; Edizioni universitarie Docet – Roma.
- 7) **G. Vaccaro** – Teoria delle curve e delle superficie; Ed. Veschi – Roma.

INDICE

BIBLIOGRAFIA.....	1
OMOLOGIE.....	4
n. 1 – Equazioni di una omologia di elementi assegnati.....	4
n. 2 – Omografie aventi le proprietà di una omologia.....	7
n. 3 – Posizione di una circonferenza rispetto alla 2^a retta limite di una omologia.....	10
n. 4 – Verifica grafica dell'allineamento di due punti corrispondenti con il centro dell'omologia.....	11
n. 5 – Applicazioni algebriche delle omologie nelle trasformazioni di una circonferenza.....	12
n. 6 – Coordinate proiettive su un piano punteggiato.....	15
n. 7 – Trasformazioni proiettive collegate al triangolo autopolare di una conica.....	16
n. 8 – Esempi di trasformazione dell'equazione di una conica quando essa venga riferita ad un riferimento ottenuto dal suo triangolo autopolare.....	17
DESARGUES E PAPPO.....	25
N. 1 – Sui metodi della geometria proiettiva.....	25
N. 2 – Proiettività e involuzioni fra due punteggiate.....	25
N. 3 – Involuzione.....	27
N. 4 – Quadrangolo completo.....	28
N. 5 – Teorema di Désargues.....	30
N. 6 – Sulla proposizione 130, libro VII.....	32
N. 7 – Dimostrazione della proposizione 128, libro VII.....	35
N. 8 – Proposizione 127.....	40
TEORIA DELLE CURVE PIANE.....	43
n. 1 – Curve osculatrici.....	43
n. 2 – Teorema di Dini.....	45
n. 3 – Sviluppo di una funzione secondo la formula di Taylor.....	46
n. 4 – Curve osculatrici relative a curve trascendenti.....	47
n. 5 – Curve osculatrici della funzione $y = \sin x$ (Lezioni Prof. Roghi).....	48
n. 6 – Parabole osculatrici di curve trascendenti in forma implicita.....	50
n. 7 – Cuspidi di 1^a specie di una curva algebrica (Lezioni Prof. Roghi).....	51
n. 8 – Tacnodi di 1^a specie di una curva algebrica.....	52
n. 9 – Cuspidi di 2^a specie di una curva algebrica.....	55
n. 10 – Tacnodi di 2^a specie e cuspidi di 3^a specie.....	57
n. 11 – Tacnodi di 3^a specie.....	60
n. 12 – Tabelle riassuntive.....	61
n. 13 – Punti semplici non ordinari di una curva.....	62
n. 14 – Punti singolari di una curva algebrica (Lezioni Prof. Roghi).....	64
n. 15 – Esercizio 1R (Y_∞ è una cuspidi di 1^a specie).....	71
n. 16 – Esercizio 2R (Il punto Y_∞ è un punto doppio nodale).....	72
n. 17 – Esercizio 3R (L'origine O è un tacnodo di 1^a specie).....	73
n. 18 – Esercizio 4R (L'origine O è un tacnodo di 1^a specie).....	75

n. 19 – Esercizio 5R (Chiellini, pg. 225; X_{∞} è un tacnodo isolato di 1 ^a specie)	77
n. 20 – Esercizio 6R (I punti ciclici sono nodi semplici isolati)	84
n. 21 – Esercizio 7R (L'origine O è un tacnodo di 2 ^a specie)	88
n. 22 – Esercizio 8R (L'origine O è una cuspidi di 2 ^a specie)	95
n. 23 – Esercizio 9R (L'origine O è un tacnodo di 1 ^a specie)	100
n. 24 – Esercizio 10R (Y_{∞} è un tacnodo isolato di 1 ^a specie)	107
n. 25 – Esercizio 11R (L'origine O è una cuspidi di 3 ^a specie)	110
n. 26 – Esercizio 12R (O: tacnodo di 1 ^a specie; Y_{∞} : cuspidi tripla di 1 ^a specie)	113
n. 27 – Esercizio 13R (O : tacnodo di 1 ^a specie; Y_{∞} : cuspidi tripla di 1 ^a specie)	118
n. 28 – Esercizio 14R (O = punto triplo: cuspidi + ramo lineare)	119
n. 29 – Esercizio 15R (L'origine O è una cuspidi tripla di 1 ^a specie)	122
n. 30 – Esercizio 16R (O= tacnodo; Y_{∞} = cuspidi tripla di 1 ^a specie)	123
n. 31 – Esercizio 17R (O = tacnodo di 1 ^a specie; Y_{∞} = punto doppio)	126
n. 32 – Esercizio 18R (quartica bicircolare)	129
n. 33 – Punti simmetrici in un riferimento polare	130
n. 34 – Studio di curve date in coordinate polari (Lezioni Prof. G. Roghi)	131
n. 35 – Teorema di Clebsch (Lezioni Prof. G. Roghi)	136
n. 36 – Involuppo di una famiglia di curve	137
n. 37 – Esercizi proposti	139

OMOLOGIE

n. 1 – Equazioni di una omologia di elementi assegnati

Vogliamo svolgere un esercizio sulle omologie. Percorreremo poi il cammino inverso per riconoscere quando una omografia piana di equazioni assegnate si riduce ad una omologia. Faremo ciò con l'intenzione di mostrare che, da un punto di vista omografico o omologico (e quindi proiettivo), una circonferenza è equivalente ad una qualsiasi parabola, iperbole o ellisse.

Consideriamo due piani sovrapposti α e α' e fissiamo su di essi un medesimo sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$.

Vogliamo trovare le equazioni dell'omologia avente l'asse $u \equiv x_1 + x_2 = 0$, il centro $U(0;1;1)$ e la coppia di punti corrispondenti $A(2;-1;1)$ e $A'(1;0;1)$, allineati con U .

Possiamo assegnare l'asse imponendo che due punti scelti arbitrariamente su di esso siano uniti.

Scegliamo i punti $O(0;0;1)$ ed $N(-1;1;1)$.

Ricordiamo che le equazioni generali di una omografia e quindi di una omologia, che è un suo caso particolare, sono (E. Martinelli, Geometria II, pag. 125 e 150):

$$(1.1) \quad \begin{cases} \rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad |A| = \det|a_{ik}| \neq 0.$$

Imponendo le condizioni date si ha:

$$(1.2) \quad \begin{cases} (0;0;1) \rightarrow (0;0;1) & \begin{cases} 0 = 0 + 0 + a_{13} \\ 0 = 0 + 0 + a_{23} \\ \rho = 0 + 0 + a_{33} \end{cases} \\ -1;1;1 \rightarrow (-1;1;1) & \begin{cases} -m = -a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ m = -a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ m = -a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{cases} \\ U(0;1;1) \rightarrow U(0;1;1) & \begin{cases} 0 = 0 + a_{12} + a_{13} \\ n = 0 + a_{22} + a_{23} \\ n = 0 + a_{32} + a_{33} \end{cases} \\ A(2;-1;1) \rightarrow A'(1;0;1) & \begin{cases} t = 2a_{11} - a_{12} + a_{13} \\ 0 = 2a_{21} - a_{22} + a_{23} \\ t = 2a_{31} - a_{32} + a_{33} \end{cases} \end{cases}$$

Si ha un sistema di 12 equazioni in 13 incognite.

Si vede subito che $a_{13} = a_{23} = 0$;

quindi, dalla 7^a equazione del sistema (1.2) si ha $a_{12} = 0$.

Ricordiamo che i coefficienti ρ, m, n, t sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo; posto quindi $m = 1$, dalla 4^a equazione del sistema (1.2) si ha $a_{11} = 0$.

Seguitando con l'ausilio di un computer si trova la soluzione:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 2 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 1 & a_{32} = 1 & a_{33} = 1 \end{array} .$$

Si ricava così che le equazioni della nostra omologia sono:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ \rho x'_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} .$$

Si vede che $|A| = \det |a_{ik}| = 2 \neq 0$ con $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$

Nella fig. 1 abbiamo disegnato l'omologia indicando l'asse u , il centro U , la retta limite j del piano α , corrispondente alla retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α' , e la retta limite j' del piano α' . Abbiamo anche indicato varie coppie di punti corrispondenti nell'omologia; essi, ovviamente, sono allineati con il centro $U(0;1;1)$.

2) la distanza $d = \sqrt{2}/2$ fra l'asse dell'omologia e la retta limite del piano α è uguale alla distanza fra il centro U dell'omologia e la retta limite del piano α' .

n. 2 – Omografie aventi le proprietà di una omologia

Percorriamo ora il cammino inverso. A prescindere da ogni elemento già fornito in precedenza, consideriamo l'omografia di equazioni (1.3) e facciamo vedere che essa è una omologia. Ciò ci darà modo di rivedere molti aspetti della teoria sulle trasformazioni omografiche nel piano.

Notiamo anzitutto che si ha un punto unito quando la terna (x'_1, x'_2, x'_3) è proporzionale alla terna (x_1, x_2, x_3) poiché, in tal caso, le due terne rappresentano lo stesso punto. Deve essere quindi

$$x'_1 = \lambda x_1, \quad x'_2 = \lambda x_2, \quad x'_3 = \lambda x_3.$$

Sostituendo nel sistema (1.3) si ha

$$(2.1) \quad \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 0 + 0 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + 0 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{con la matrice} \quad B = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Abbiamo così un sistema omogeneo di tre equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 . Affinché esso ammetta soluzioni non tutte nulle (dette **autosoluzioni del sistema**) è necessario e sufficiente che sia

$$(2.2) \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione di 3° grado (2.2) è detta **equazione caratteristica dell'omografia o della matrice quadrata A**, mentre le radici dell'equazione si dicono anche **autovalori della matrice A**.

Nel nostro caso le radici dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2.$$

E' ovvio che per ognuno di tali valori la matrice B acquista rango $r < 3$.

Ora, per quanto riguarda lo studio delle omografie, il punto essenziale da ricordare è il seguente:

a) se l'equazione (2.2) ha le radici $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ e per $\lambda = \lambda_1$ il rango della matrice B è $r = 2$, allora si ha una omografia nella quale coincidono due delle tre rette unite e due dei tre punti uniti.

b) Se l'equazione (2.2) ha sempre le radici $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ e per $\lambda = \lambda_1$ il rango della matrice B è $r = 1$, allora si ha una omografia che in pratica ha una sola retta unita e un sol punto unito fuori di essa. Una tale omografia si dice **omologia generale**.

La retta unita si dice **asse dell'omologia**, mentre il punto unito si dice **centro dell'omologia**.

Nella nostra omografia si verifica proprio il caso b). Infatti già si è visto che si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ e per $\lambda = 1$ si ha

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè la matrice B assume rango $r = 1$ e quindi l'omografia di equazioni (1.3) si riduce ad una omologia generale.

Riprendiamo il sistema (2.1) e troviamo il punto unito e la retta unita dell'omologia.

Per $\lambda = 1$ il sistema (2.1) si riduce a

$$(2.3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema è indeterminato e ammette le infinite soluzioni date dalle terne di numeri $(x_1, -x_1, k)$ con k arbitrario. Ricordando che le coordinate cartesiane omogenee di un punto sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, tali terne si riducono a $(t, -t, 1)$. Ciò vuol dire che sono uniti tutti i punti della retta

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Troviamo ora il punto unito corrispondente alla radice $\lambda_3 = 2$.

Il sistema (2.1) fornisce

$$(2.4) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione è $x_1 = 0$ $x_2 = t$ $x_3 = t$.

Ricordando ancora una volta che le coordinate omogenee di un punto sono determinate a meno di un coefficiente di proporzionalità, a questa soluzione corrisponde il solo punto unito $U_3 (0;1;1)$.

Troviamo anche la retta unita corrispondente alla radice $\lambda_3 = 2$; in coordinate plückeriane essa è data dall'equazione generale

$$(2.5) \quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \quad .$$

Se questa retta è unita le sue coordinate di retta (v_1, v_2, v_3) debbono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 = 0 \\ a_{12}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + a_{32}v_3 = 0 \\ a_{13}v_1 + a_{23}v_3 + (a_{33} - \lambda)v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ove} \quad \begin{matrix} a_{11} = 1 & a_{21} = 1 & a_{31} = 1 \\ a_{12} = 0 & a_{22} = 2 & a_{32} = 1 \\ a_{13} = 0 & a_{23} = 0 & a_{33} = 1 \end{matrix}$$

Sostituendo le terne dei coefficienti si ha il sistema

$$(2.6) \quad \begin{cases} (1 - \lambda)v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 0 + (2 - \lambda)v_2 + v_3 = 0 \\ 0 + 0 + (1 - \lambda)v_3 = 0 \end{cases}$$

la nuova equazione caratteristica ha anch'essa le radici $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Per $\lambda = 2$ si ha il sistema (2.6) diventa

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad v_3 = 0 \quad \text{e} \quad v_1 = v_2 \quad .$$

Poiché le coordinate v_1, v_2, v_3 sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità, si ha la soluzione

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 0 \quad ,$$

alla quale corrisponde la retta unita già vista

$$x_1 + x_2 = 0 \quad .$$

L'omologia ha quindi la retta unita (o asse) $x_1 + x_2 = 0$ e il punto unito (o centro) $U (0;1;1)$, che cade fuori di essa. Si ha quindi una omologia generale; che l'omografia sia una omologia è già stato detto a seguito del punto b).

Facciamo vedere infine che per $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ il sistema (2.6) fornisce una delle rette unite (ma non luogo di punti uniti) del fascio di centro $U (0;1;1)$. Infatti si ha il sistema

$$(2.7) \quad \begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione $v_2 = v_3 = 0$ e v_1 arbitrario .

La (2.5) si riduce quindi la retta $x_1 = 0$,

che è una retta del fascio di centro $U(0;1;1)$

n. 3 – Posizione di una circonferenza rispetto alla 2^a retta limite di una omologia

Riprendiamo ora le equazioni generali di una omografia, ma ciò che diremo vale esattamente anche per una omologia:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \rho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \rho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \rho x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad |A| = \det |a_{ik}| \neq 0$$

Ponendo $x'_3 = 0$ si ottiene la retta

$$(3.2) \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 .$$

Essa è la retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α' e si dice **retta limite del piano α o seconda retta limite dell'omologia** .

Risolvendo le (3.1) rispetto a x_1, x_2, x_3 (e lo faremo in seguito con la nostra particolare omografia), si ottengono le equazioni della trasformazione inversa T^{-1} della omografia T .

Queste equazioni permettono di trasformare una conica Γ del piano α in una conica Γ' , del piano α' , che può essere un'ellisse, un'iperbole o una parabola indipendentemente dalla natura di Γ : ciò dipende dalla posizione rispetto a Γ della retta limite (3.2) del piano α .

Se questa retta ($a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$) ha in comune con Γ due punti reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari coniugati, la retta $x'_3 = 0$ avrà rispettivamente in comune con Γ' due punti impropri reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari coniugati. In corrispondenza Γ' sarà un'iperbole, una parabola o un'ellisse. Questo fatto è molto importante perché ci mostra che da un punto di vista omografico o omologico tutte le coniche sono uguali.

Tale punto di vista è detto anche proiettivo perché le omografie e le omologie si possono generare mediante operazioni di proiezioni e sezioni. Il fatto è ancora più rilevante se si pensa che esso non si desume dalla teoria delle coniche come ci è pervenuta dal trattato di Apollonio.

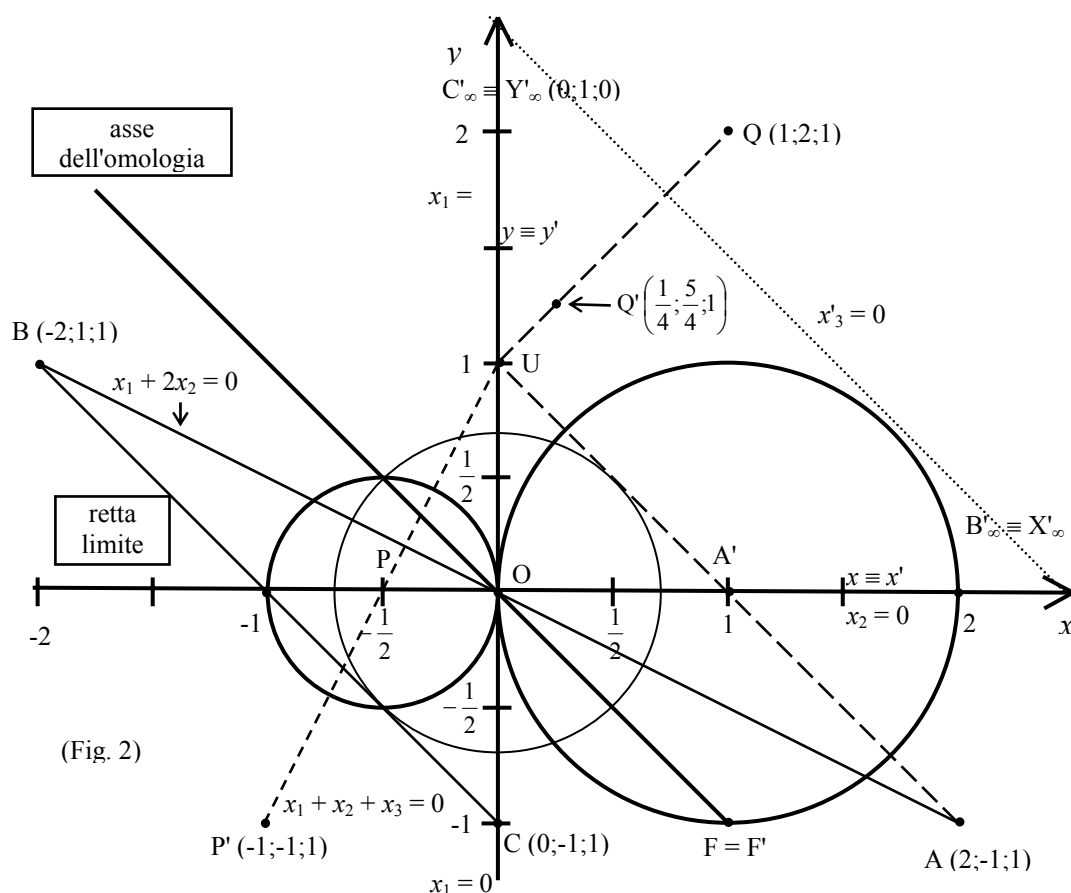
n. 4 – Verifica grafica dell'allineamento di due punti corrispondenti con il centro dell'omologia

Ricordiamo che abbiamo fissato un medesimo sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$ sui piani sovrapposti α e α' ; quindi i riferimenti cartesiani $RC = Oxy$ e $RC = Ox'y'$ che abbiamo su di essi coincidono.

Tracciamo ora (fig. 1) le rette

$$x_1 = 0, \quad x_1 + 2x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

che si ricavano dal sistema (1.3) dell'omologia eguagliando a zero i secondi membri delle equazioni.



Le tre rette si incontrano in tre punti determinando così un triangolo di vertici

$$O(0;0;1) \quad B(-2;1;1) \quad C(0;-1;1)$$

L'omologia, come è facile verificare, fa corrispondere ad essi i punti

$$O(0;0;1) \quad B'_\infty \equiv X'_\infty(1;0;0) \quad C'_\infty \equiv Y'_\infty(0;1;0)$$

che sono i vertici (due di essi sono punti impropri) di un altro triangolo.

Diciamo per inciso che il primo triangolo, più un punto unità M scelto sul piano α , costituisce un referimento proiettivo sul piano stesso.

Sul piano α' possiamo prendere un altro riferimento proiettivo costituito dal triangolo $O Y'_\infty X'_\infty$ e da un punto unità M' . Le equazioni della nostra omologia (1.3) si possono ottenere scegliendo come punti corrispondenti i punti unità M $(1;0;1)$ ed M' $(1;1;2)$.

Sfruttando le equazioni dell'omologia, il lettore potrà verificare con semplici calcoli che i punti dell'asse sono effettivamente uniti; esempio

$$F(1;-1;1) \equiv F'(1;-1;1)$$

mentre punti corrispondenti sono allineati con il centro $U(0;1;1)$. Sono tali le coppie di punti

$$P\left(-\frac{1}{2};0;1\right) \text{ e } P'(1;2;1), \quad Q(1;2;1) \text{ e } Q'\left(\frac{1}{4};\frac{5}{4};1\right),$$

$$R\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right) \text{ ed } R'\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};1\right).$$

n. 5 – Applicazioni algebriche delle omologie nelle trasformazioni di una circonferenza.

Verifichiamo ora algebricamente la proprietà più importante di una omologia. Di questa proprietà abbiamo già parlato estesamente nel paragrafo n. 3; cioè, a seconda che una circonferenza Γ del piano α sia tangente, secante o esterna rispetto alla retta limite $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$ del piano stesso, l'omologia trasformerà la Γ rispettivamente in una parabola, in un'iperbole o in una ellisse del piano α' . Questa proprietà, è utile ripeterlo, ci fa vedere che da un punto di vista proiettivo tutte le coniche sono eguali.

Prendiamo le equazioni della nostra omologia T e le equazioni della trasformazione inversa che subito si ricavano:

$$T \begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ x'_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \quad T^{-1} \begin{cases} x_1 = \rho x'_1 \\ x_2 = \frac{\rho}{2}(x'_2 - x'_1) \\ x_3 = \frac{\rho}{2}(2x'_3 - x'_2 - x'_1) \end{cases}.$$

Le rette limite dei piani α e α' sono rispettivamente:

$$j: x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{e} \quad i': x'_1 + x'_2 - 2x'_3 = 0.$$

Per comodità di scrittura **indicheremo** x_1, x_2, x_3 **con le lettere** x, y, z e x'_1, x'_2, x'_3 **con le lettere** x', y', z' .

1° caso

Consideriamo la circonferenza di centro $O(0;0;1)$ e raggio $r = \sqrt{2}/2$.

Essa è tangente alla retta limite $x + y + z = 0$ e quindi si trasformerà in una parabola.

Equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$.

Trasformazione T^{-1} $2\rho^2 x'^2 + 2\frac{\rho^2}{4}(y' - x')^2 - \frac{\rho^2}{4}(2z' - x' - y')^2 = 0$

Semplifichiamo e passiamo a coordinate non omogenee ponendo $z' = 1$; si ha

$$8x'^2 + 2(y' - x')^2 - (2 - x' - y')^2 = 0.$$

Con semplici calcoli si vede che l'omologia trasforma Γ nella conica di equazione

$$(y' - 3x')^2 + 4x' + 4y' - 4 = 0.$$

Si è ottenuta effettivamente una parabola.

2° caso

Consideriamo la circonferenza di centro $C_1\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ e raggio $r = \frac{1}{2}$.

Essa interseca la retta limite $x + y + z = 0$ in due punti distinti e quindi si trasformerà in un'iperbole.

Troviamo prima l'equazione in coordinate cartesiane non omogenee e passiamo poi a coordinate omogenee

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + x = 0.$$

In coordinate omogenee l'equazione della Γ è $x^2 + y^2 + xz = 0$.

Applicando la trasformazione T^{-1} si ha:

$$x'^2 + \frac{1}{4}(y' - x')^2 + \frac{1}{2}x'(2z' - x' - y') = 0.$$

Semplifichiamo e passiamo a coordinate cartesiane non omogenee sul piano α' ponendo $z' = 1$; si ha:

$$\begin{aligned} 4x'^2 + (y' - x')^2 + 2x'(2 - x' - y') &= 0, \\ 4x'^2 + y'^2 - 2x'y' + x'^2 + 4x' - 2x'^2 - 2x'y' &= 0, \\ (1) \quad 3x'^2 - 4x'y' + y'^2 + 4x' &= 0. \end{aligned}$$

La conica effettivamente è un'iperbole. Trovo il centro e gli asintoti:

$$f_{x'} = 0 \rightarrow 6x' - 4y' + 4 = 0; \quad f_{y'} = 0 \rightarrow -4x' + 2y' = 0.$$

Mettendo a sistema si ha
$$\begin{cases} y' = 2x' \\ 3x' - 2y' + 2 = 0 \end{cases};$$

Si ha la soluzione $x' = 2, \quad y' = 4.$

Ne segue che il centro dell'iperbole è $C(2;4).$

Eguagliamo a zero il complesso dei termini di 2° grado della (1) e poniamo $x'/y' = m$. Si ha la seguente equazione di 2° grado

$$(2) \quad m^2 - 4m + 3 = 0; \quad \text{le sue radici sono} \quad m_1 = 1 \quad \text{ed} \quad m_2 = 3.$$

$$1^\circ \text{ asintoto} \quad y - 4 = x - 2, \quad y = x + 2.$$

$$2^\circ \text{ asintoto} \quad y - 4 = 3(x - 2), \quad y = 3x - 2.$$

3° caso

Consideriamo infine la circonferenza del piano α di centro $C_2(1;0;1)$ e raggio $r = 1$. Essa è esterna alla retta limite $x + y + z = 0$ del piano α , cioè è esterna alla retta che si trasforma nella retta impropria $z' = 0$ del piano α' . Quindi la circonferenza si trasformerà in un'ellisse.

$$\text{Coordinate non omogenee} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

$$\text{Coordinate omogenee} \quad x^2 + y^2 - 2xz = 0.$$

Applicando la trasformazione T^{-1} si ha:

$$x'^2 + \frac{1}{4}(y' - x')^2 - 2x' \cdot \frac{1}{2}(2z' - x' - y') = 0.$$

Passiamo a coordinate cartesiane non omogenee ponendo $z' = 1$. Si ottiene

$$4x'^2 + (y' - x')^2 - 4x'(2 - x' - y') = 0;$$

$$4x'^2 + (y' - x')^2 - 4x' \cdot (2 - x' - y') ;$$

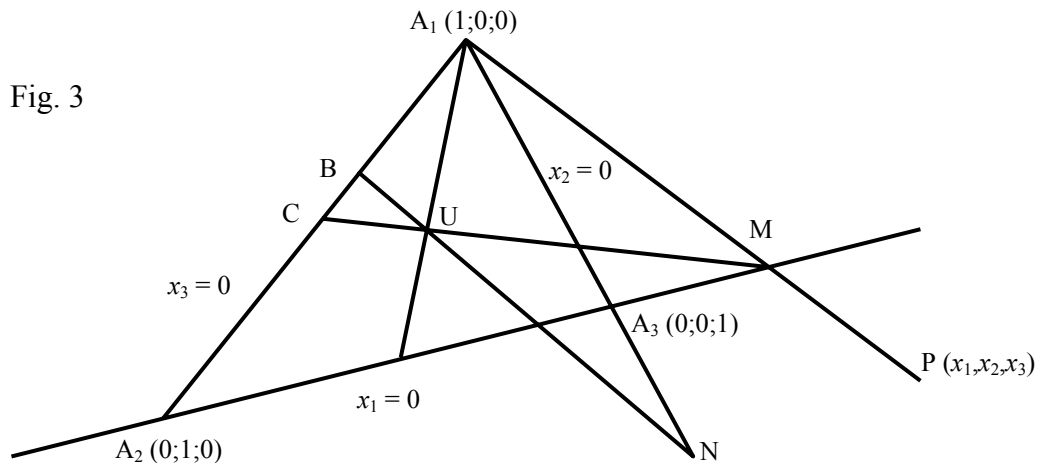
$$9x'^2 + 2x'y' + y'^2 - 8x' = 0 .$$

L'omologia trasforma effettivamente la circonferenza Γ in una ellisse .

n. 6 – Coordinate proiettive su un piano punteggiato

Prima di affrontare problemi di altro tipo è bene ricordare la nozione di coordinate proiettive su una forma di 2^a specie, per esempio, su un piano punteggiato.

Si dice riferimento proiettivo su un piano α un sistema costituito da tre punti non allineati A_1, A_2, A_3 , vertici di un triangolo fondamentale, e da un quarto punto U , detto punto unità, che non cada su alcuna delle tre rette che congiungono a due a due i vertici del triangolo.



Orbene (fig. 3), si dicono coordinate proiettive omogenee di un punto P del piano tre numeri x_1, x_2, x_3 tali che i mutui rapporti siano dati dalle espressioni

$$A_3(A_1A_2UP) = \frac{x_1}{x_2}, \quad A_1(A_2A_3UP) = \frac{x_2}{x_3}, \quad A_2(A_3A_1UP) = \frac{x_3}{x_1} .$$

I tre rapporti $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_3}{x_1}$ permettono di definire x_1, x_2, x_3 a meno di un

comune coefficiente di proporzionalità non nullo; essi, infatti, non sono

indipendenti perché sono legati dalla relazione $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_1} = 1$.

Terne fra loro proporzionali individuano un medesimo punto del piano.
Con questo procedimento, dunque, è possibile stabilire sul piano un sistema di coordinate proiettive.

E' facile provare che le rette $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ e $A_1 A_2$ hanno rispettivamente le equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$.

Consideriamo, infatti, un qualsiasi punto N della retta $A_3 A_1$ e dal punto A_1 proiettiamo i punti A_2, A_3, U, N sulla retta UN , che interseca in B la retta $A_1 A_2$: i punti U, N restano fermi, mentre A_2 si proietta in B e A_3 in N . Siccome il birapporto rimane invariato per operazioni di proiezione e sezione si ha (fig. 3):

$$\frac{x_2}{x_3} = A_1(A_2 A_3 UN) = (BNUN) = \frac{(BNU)}{(BNN)},$$

$$\text{cioè} \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{BU}{NU} \cdot \frac{NN}{BN} = 0 \quad \text{da cui} \quad x_2 = 0.$$

Quindi, in coordinate proiettive, l'equazione della retta $A_3 A_1$ sarà

$$x_2 = 0.$$

Consideriamo ora un qualsiasi punto M della retta $A_2 A_3$ e dal punto A_2 proiettiamo i punti A_3, A_1, U, M sulla retta MU , che interseca in C la retta $A_1 A_2$: otteniamo rispettivamente i punti M, C, U, M . Per la conservazione dei birapporti si ha:

$$\frac{x_3}{x_1} = A_2(A_3 A_1 UM) = (MCUM) = \frac{(MCU)}{(MCM)} = \frac{(MCU)}{0} = \infty.$$

$$\text{Quindi} \quad \frac{x_3}{x_1} = \infty, \quad \text{da cui} \quad x_1 = 0.$$

Ne segue che, in coordinate proiettive, l'equazione della retta $A_2 A_3$ sarà $x_1 = 0$. Analogamente la retta $A_1 A_2$ avrà l'equazione $x_3 = 0$.

Il vertice A_1 , intersezione delle rette $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, ha le coordinate proiettive $A_1 (1;0;0)$. Gli altri due vertici del triangolo hanno le coordinate proiettive $A_2 (0;1;0)$, $A_3 (0;0;1)$.

n. 7 – Trasformazioni proiettive collegate al triangolo autopolare di una conica

Vogliamo ampliare un poco la nostra ricerca considerando quelle particolari trasformazioni proiettive che si ottengono quando si assume un qualsiasi triangolo autopolare di una conica come triangolo fondamentale di un riferimento

proiettivo. Questo particolare riferimento permette di ridurre l'equazione di una qualsiasi conica Γ alla forma canonica

$$(7.1) \quad ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 0.$$

Naturalmente in questa equazione solo due dei tre coefficienti a, b, c hanno lo stesso segno, perché altrimenti la Γ non avrebbe alcun punto reale (E. Martinelli, Geometria II, pag. 189).

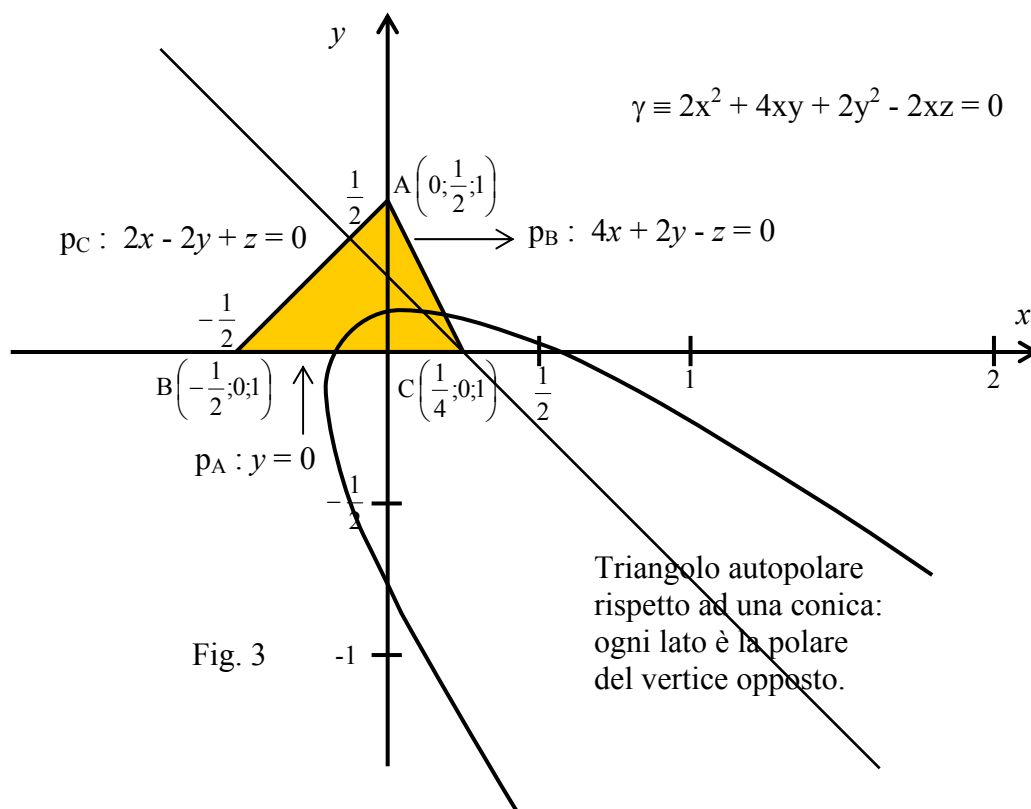
Scegliendo opportunamente il punto unità del riferimento proiettivo e l'ordine dei vertici del triangolo fondamentale, l'equazione della conica assume poi la forma

$$(7.2) \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

In tal modo risulta nuovamente dimostrato che tutte le coniche irriducibili reali sono proiettivamente uguali.

Nei nostri esempi ci limiteremo a far vedere che l'equazione di una qualsiasi Γ può ridursi alla forma (7.1).

n. 8 – Esempi di trasformazione dell'equazione di una conica quando essa venga riferita ad un riferimento ottenuto dal suo triangolo autopolare



Primo esempio.

Fissiamo inizialmente su un piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico RC-Oxy e consideriamo la conica di equazione

$$(8.1) \quad \gamma \equiv x^2 + 2xy + y^2 - x = 0 \quad \text{ossia} \quad \gamma \equiv (y+x)^2 - x = 0.$$

Si riconosce subito (fig. 3) che la γ è una parabola di asse

$$y = -x + \frac{1}{4} \quad [4x + 4y - 1 = 0].$$

Essa è tangente all'asse y nell'origine $O(0,0)$ e passa inoltre per i punti $P(1,0)$ e $T\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, ove è tangente alla retta $y = \frac{1}{4}$.

Passiamo a coordinate omogenee e ricordiamo che l'equazione della polare di un generico punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0)z = 0.$$

Da essa si ricava che la polare del punto $A\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ha l'equazione

$$\left(0 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)x + \left(0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 0\right)y + 0z = 0 \quad ; \quad p_A: y = 0 \quad (\text{asse } x)$$

Prendiamo il punto $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ sulla retta p_A e troviamo l'equazione della sua polare p_B , così da avere due rette fra loro coniugate rispetto a γ .

Polare del punto B: $(\gamma \equiv 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xz = 0)$

$$\left[2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 1\right]x + \left[2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 0\right]y + \left[-1\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 0\right]z = 0;$$

da cui $-2x - y + \frac{1}{2}z = 0$, quindi $p_B: 4x + 2y - z = 0$.

Sappiamo che p_B passa per il polo A. Si vede subito che le polari p_A e p_B si intersecano nel punto $C\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right)$ dell'asse x .

Troviamo la polare del punto C :

$$\left(2 \cdot \frac{1}{4} + 0 - 1\right)x + \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 0 + 0\right)y + \left(-1 \cdot \frac{1}{4} + 0 + 0\right)z = 0,$$

da cui $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z = 0$; quindi $p_C: 2x - 2y + z = 0$.

E' facile verificare che p_C passa per i punti $A\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ e $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

Abbiamo così un triangolo autopolare ABC con i seguenti elementi:

polare del punto $A\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ $y = 0$,

polare del punto $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ $4x + 2y - z = 0$;

la polare del punto $C\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right)$ è $2x - 2y + z = 0$.

Passiamo ora ad un riferimento proiettivo avente come triangolo fondamentale il triangolo autopolare; per esempio:

$$T \begin{cases} x_1 = 0 + y + 0 \\ x_2 = 4x + 2y - z \\ x_3 = 2x - 2y + z \end{cases} \quad \text{trasformazione inversa} \quad T^{-1} \begin{cases} x = \frac{1}{6}(x_2 + x_3) \\ y = x_1 \\ z = \frac{1}{3}(2x_3 - x_2 + 6x_1) \end{cases}.$$

Sostituendo le espressioni della T^{-1} nell'equazione cartesiana omogenea della parabola si ottiene la sua equazione canonica nel riferimento proiettivo autopolare:

$$\frac{(x_2 + x_3)^2}{36} + 2x_1 \frac{(x_2 + x_3)}{6} + x_1^2 - \frac{(x_2 + x_3)}{6} \cdot \frac{(2x_3 - x_2 + 6x_1)}{3} = 0.$$

Procedendo nei calcoli con l'aiuto di un computer si trova

$$12x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Questa è l'equazione canonica della parabola nel riferimento proiettivo scelto. Può accadere che il triangolo autopolare della parabola, e quindi il triangolo fondamentale, abbiano come vertice un punto improprio.

Ciò nulla cambia perché punti propri e punti impropri sono considerati alla stessa stregua e l'equazione della parabola rispetto al nuovo riferimento proiettivo assumerà sempre la forma canonica.

Se, per esempio, prendiamo come secondo polo il punto $B\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ il triangolo

autopolare ABX_∞ rispetto alla conica $\gamma \equiv 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xz = 0$ ha i

seguenti elementi :

$$\text{polare del punto } A\left(0;\frac{1}{2};1\right) \quad p_A : y = 0 ,$$

$$\text{polare del punto } B\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad p_B : 2y - z = 0 ,$$

$$\text{polare del punto } X_\infty (1;0;0) \quad p : 2x + 2y - z = 0 .$$

ove X_∞ è il punto di intersezione delle polari p_A e p_B .

Questa volta possiamo assumere la trasformazione proiettiva seguente

$$T \begin{cases} x_1 = 2x + 2y - z \\ x_2 = 0 + y + 0 \\ x_3 = 0 + 2y - z ; \end{cases} \quad \text{trasformazione inversa} \quad T^{-1} \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \\ y = x_2 \\ z = 2x_2 - x_3 . \end{cases}$$

Sostituendo queste nuove espressioni di T^{-1} nell'equazione omogenea $x^2 + 2xy + y^2 - xz = 0$ della parabola si ha :

$$\frac{1}{4}(x_1 - x_3)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(x_1 - x_3)x_2 + x_2^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)(2x_2 - x_3) = 0 ,$$

$$\text{ossia } (*) \quad x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 0 .$$

Questa è la nuova equazione in forma canonica della parabola. Notiamo che la parabola è esterna alla retta $2y - z = 0$ del riferimento proiettivo, cioè alla retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x_3 = 0$ del piano α' . **Ossia la parabola interseca la retta limite del piano α (o seconda retta limite della omologia) in due punti complessi coniugati.** Per questo motivo la parabola si trasforma in una ellisse , come si vede dall'equazione (*).

Secondo esempio

Fissato come al solito un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy , consideriamo l'iperbole di equazione

$$x^2 - xy + y + 3 = 0 \quad \text{o anche} \quad 2x^2 - 2xy + 2y + 6 = 0.$$

La curva non taglia l'asse x e si trovano i seguenti elementi:

centro della conica $C(1;2)$

asintoto verticale $x = 1$,

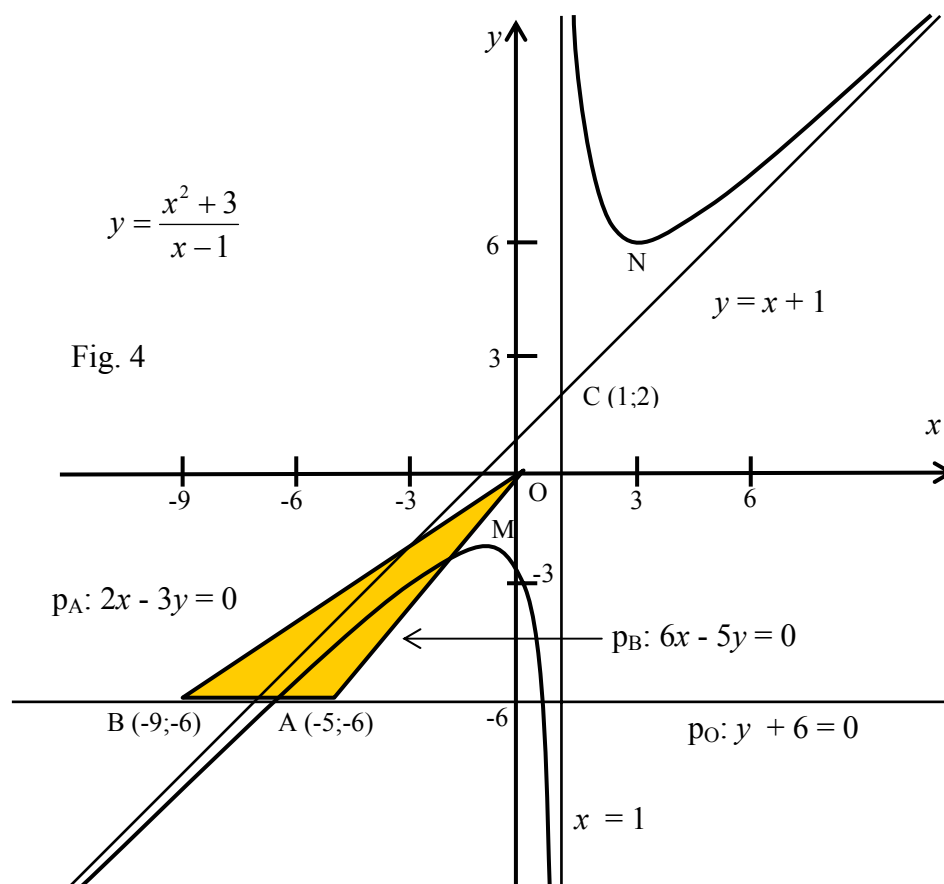
asintoto obliquo $y = x + 1$,

massimo relativo $M(-1; -2)$,

minimo relativo $N(3;6)$;

altri punti: $P_1(0;3)$, $P_2(-3;-3)$, $P_3(5;7)$, $P_4(2;7)$.

Possiamo disegnare l'iperbole (fig. 4):



Passando a coordinate omogenee si trova un triangolo autopolare OAB con i seguenti elementi:

polare del punto $O(0;0;1)$

$$y + 6z = 0,$$

polare del punto A (-5;-6;1)

$$2x - 3y = 0 ,$$

polare del punto B (-9;-6;1)

$$6x - 5y = 0 .$$

Consideriamo un riferimento proiettivo avente come triangolo fondamentale il triangolo autopolare OAB ; per es.

$$T \begin{cases} x_1 = 2x - 3y + 0 \\ x_2 = 6x - 5y + 0 \\ x_3 = 0 + y + 6z \end{cases} \quad \text{trasformazione inversa} \quad T^{-1} \begin{cases} x = (3x_2 - 5x_1)/8 \\ y = (x_2 - 3x_1)/4 \\ z = (3x_1 - x_2 + 4x_3)/24 \end{cases} .$$

L'equazione dell'iperbole, in coordinate omogenee, è

$$x^2 - xy + yz + 3z^2 = 0 .$$

Sostituendo le espressioni date dalla trasformazione T^{-1} si ha

$$\frac{1}{64}(3x_2 - 5x_1)^2 - \frac{1}{32}(3x_2 - 5x_1) \cdot (x_2 - 3x_1) + \\ + \frac{1}{96}(x_2 - 3x_1) \cdot (3x_1 - x_2 + 4x_3) + \frac{3}{576}(3x_1 - x_2 + 4x_3)^2 = 0 .$$

Eseguendo i calcoli con l'aiuto di un computer si trova

$$-24x_1^2 + 8x_2^2 + 16x_3^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 = 0 .$$

Questa è l'equazione canonica dell'iperbole nel riferimento proiettivo scelto.

Terzo esempio

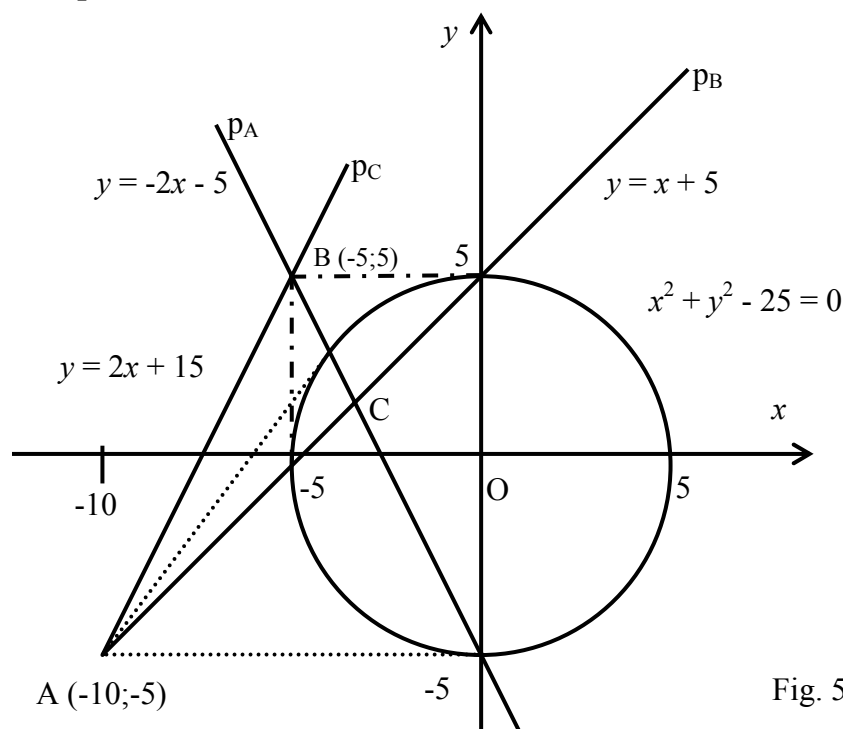


Fig. 5

Vogliamo infine trovare l'equazione di una circonferenza in un riferimento proiettivo autopolare.

Partiamo, come al solito, da un riferimento cartesiano ortogonale Oxy e consideriamo l'equazione della circonferenza γ di centro $O(0;0)$ e raggio $r=5$ (fig. 5):

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 .$$

Troviamo la polare p_A rispetto γ del punto $A(-10;-5)$, preso a piacere :

$$(-10)x + (-5)y - 25 = 0; \text{ da cui } -10x - 5y - 25 = 0 , \text{ ossia } 2x + y + 5 = 0 .$$

$$p_A: \quad y = -2x - 5 . \quad \text{Si vede subito che essa passa per il punto } B(-5;5).$$

Troviamo ora la polare del punto $B(-5;5)$:

$$\begin{aligned} & -5x + 5y - 25 = 0 , \\ \text{ossia} \quad & x - y + 5 = 0 , \text{ quindi } p_B : \quad y = x + 5 . \end{aligned}$$

Sia C il punto di intersezione delle due polari, cioè $C = p_A \cap p_B$.

$$\text{Risolvendo il sistema } \begin{cases} y = x + 5 \\ y = -2x - 5 \end{cases} \text{ subito si trova } C\left(-\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right) .$$

Polare del punto $C\left(-\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$:

$$-\frac{10}{3}x + \frac{5}{3}y - 25 = 0; \text{ da cui } -10x + 5y - 75 = 0, \text{ quindi}$$

$$p_C : \quad 2x - y + 15 = 0 .$$

Si verifica subito che p_C passa per i punti A e B .

Passando a coordinate cartesiane omogenee abbiamo quindi un triangolo autopolare ABC con i seguenti elementi

$$\text{polare del punto } A(-10;-5;1) \quad 2x + y + 5z = 0 ,$$

$$\text{polare del punto } B(-5;5;1) \quad x - y + 5z = 0 ,$$

$$\text{polare del punto } C\left(-\frac{10}{3}; \frac{5}{3}; 1\right) \quad 2x - y + 15z = 0 .$$

Consideriamo ora un riferimento proiettivo avente il triangolo autopolare ABC come triangolo fondamentale. Esso ci consente una trasformazione in sé del piano

α su cui giace la circonferenza γ , o se si vuole una trasformazione fra due piani sovrapposti α e α' :

$$T \begin{cases} x_1 = 2x + y + 5z \\ x_2 = x - y + 5z \\ x_3 = 2x - y + 15z \end{cases} \quad \text{Trasformazione inversa} \quad T^{-1} \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ y = \frac{1}{4}(x_1 - 4x_2 + x_3) \\ z = -\frac{1}{20}(x_1 + 4x_2 - 3x_3) \end{cases}$$

Abbiamo scelto di proposito la retta $2x - y + 15z = 0$, esterna alla circonferenza γ , come retta limite del piano α . In tal modo la retta impropria $x_3 = 0$ del piano α' avrà in comune con γ' due punti impropri immaginari coniugati e quindi γ' sarà un'ellisse.

Sostituiamo le T^{-1} nell'equazione cartesiana omogenea della circonferenza γ

$$x^2 + y^2 - 25z^2 = 0.$$

Avremo così l'equazione di γ nel riferimento proiettivo autopolare.

Si ottiene

$$\frac{1}{4}(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{16}(x_1 - 4x_2 + x_3)^2 - \frac{25}{400}(x_1 + 4x_2 - 3x_3)^2 = 0,$$

$$4(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_1 - 4x_2 + x_3)^2 - (x_1 + 4x_2 - 3x_3)^2 = 0.$$

Sviluppando i calcoli con l'aiuto di un computer si trova

$$(*) \quad x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 4\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 = 1.$$

Passando a coordinate proiettive non omogenee si trova infine

$$(8.2) \quad x'^2 + 4y'^2 = 1.$$

La (8.2) è una equazione di forma canonica e rappresenta chiaramente un'ellisse.

DESARGUES E PAPPO

N. 1 – Sui metodi della geometria proiettiva

Vogliamo esporre una dimostrazione del "teorema di Désargues sul quadrangolo completo", che trova applicazione nello studio delle coniche dal punto di vista proiettivo. Considerando che tale studio viene di preferenza condotto con metodi analitici, pensiamo che questo piccolo lavoro possa stimolare il lettore ad avvicinarsi ai metodi sintetici della geometria proiettiva . Faremo anche vedere che il teorema in oggetto trova una notevole connessione con la proposizione 130 del libro VII della "Collezione matematica" di Pappo, matematico alessandrino del III - IV secolo d.C.

Già in un precedente articolo, apparso sulla rivista del Centro di Ricerche Didattiche “U. Morin” (Paderno del Grappa) nel mese di Agosto 1996, abbiamo dato una dimostrazione, basata su metodi proiettivi, di un noto teorema contenuto nelle proposizioni 138 e 139 del libro VII del matematico alessandrino. Rimandiamo il lettore a quell’articolo per rivedere la nozione di birapporto e delle sue principali proprietà.

N. 2 – Proiettività e involuzioni fra due punteggiate

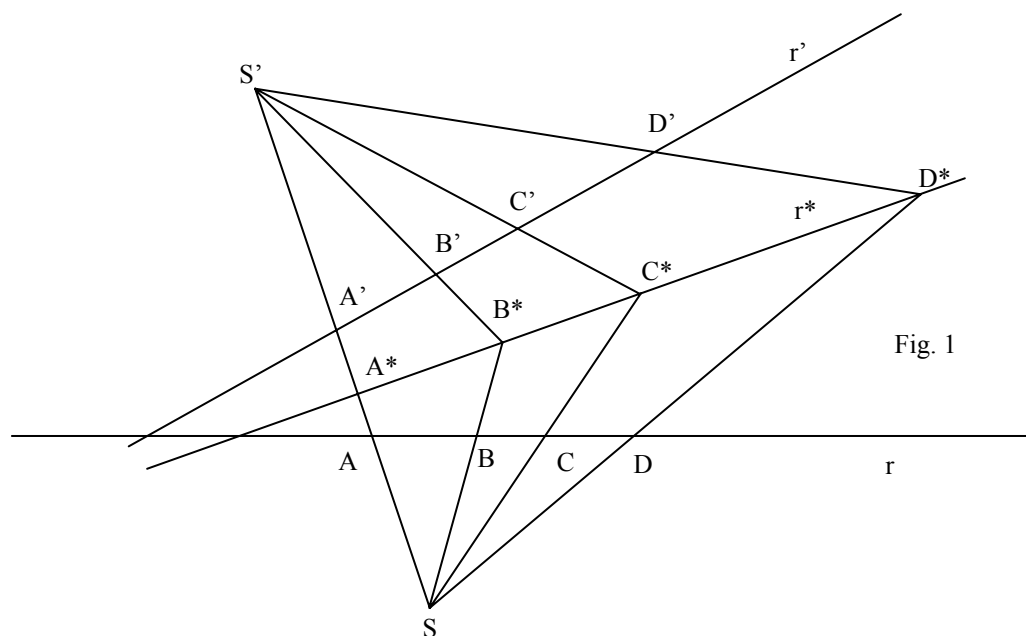
Prima di passare alla dimostrazione del teorema di Désargues dobbiamo illustrare la definizione di proiettività e di involuzione fra due rette, che talvolta chiameremo forme di prima specie o punteggiate: con questo aggettivo si vuole intendere che una retta è concepita come totalità dei suoi punti.

Proiettività

Si dice proiettività fra due rette r ed r' ogni corrispondenza biunivoca fra i punti delle due rette (detti anche elementi) generabile mediante una o più operazioni di proiezione e sezione.

Dalla proprietà di invarianza del birapporto per le operazioni dette (si veda articolo citato) ne segue che la proiettività è una corrispondenza biunivoca che conserva i birapporti fra quaterne di elementi corrispondenti.

Sussiste il seguente teorema fondamentale, che spieghiamo con la fig. 1.



“ Una proiettività tra due punteggiate r, r' (distinte o coincidenti) è perfettamente individuata da tre coppie di elementi corrispondenti (A, A') , (B, B') , (C, C') .”

Si traccia la retta SS' che unisce la coppia di punti corrispondenti (A, A') . Dai punti S, S'

si proiettano rispettivamente i punti B, C e B', C' . Chiamiamo B^*, C^* i punti di intersezione delle coppie di raggi $SB, S'B'$ ed $SC, S'C'$; indichiamo con r^* la retta B^*C^* e con A^* il suo punto di intersezione con la retta SS' .

Preso un punto D sulla retta r , la retta SD interseca r^* in D^* , mentre la retta $S'D^*$

interseca r' in D' ; e questo è proprio il punto corrispondente del punto D . Infatti per l'invarianza dei birapporti si ha

$$(1) \quad (ABCD) = (A^*B^*C^*D^*) = (A'B'C'D').$$

Si può dimostrare facilmente che la posizione del punto D' sulla retta r' non varia eseguendo una costruzione diversa. E' possibile costruire anche la proiettività fra due punteggiate sovrapposte, ma non è il caso di indicarla.

N. 3 – Involuzione

Consideriamo una proiettività fra due punteggiate sovrapposte r ed r' e sia A, A' una coppia di punti corrispondenti con $A \in r$ e $A' \in r'$ (fig. 2)



Può ora darsi che al punto A' pensato come appartenente alla retta r (lo chiameremo B) corrisponda il punto A pensato come appartenente alla retta r' (lo chiameremo B'). Si dice allora che i punti A e A' si corrispondono in doppio modo, o anche che essi costituiscono una coppia involutoria.

Si ha il seguente teorema fondamentale.

"Se in una proiettività fra due punteggiate sovrapposte esiste una coppia di punti involutoria, cioè che si corrispondono in doppio modo, ogni altra coppia di punti corrispondenti è involutoria"; e la proiettività prende il nome di INVOLUZIONE.

Infatti, sia A, A' una coppia di punti involutoria di una proiettività. In tal caso se il punto $B \in r$ coincide con A' , anche il suo corrispondente B' , pensato come elemento di r' , per definizione coincide con A , cioè

$$(1) \quad B \equiv A' \quad \text{e} \quad B' \equiv A$$

Sia ora C, C' una qualunque altra coppia di punti corrispondenti nella proiettività. Vogliamo far vedere che anche essa è involutoria: cioè se il punto D della retta r è sovrapposto a C' , anche il suo corrispondente D' nella proiettività è sovrapposto a C .

Dimostrazione. Consideriamo il birapporto (ABCD).

Poiché la proiettività conserva i birapporti si ha

$$(2) \quad (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Ma per ipotesi $A' \equiv B$, $B' \equiv A$ e $C' \equiv D$;

$$\text{quindi } (3) \quad (A'B'C'D') = (BADD').$$

Confrontando le (2), (3) possiamo scrivere

$$(4) \quad (ABCD) = (BADD').$$

Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due (proprietà invariantiva i), da quest'ultima relazione si ha:

$$(5) \quad (ABCD) = (ABD'D).$$

Considerando che nei due birapporti si hanno tre coppie di punti uguali ne segue che

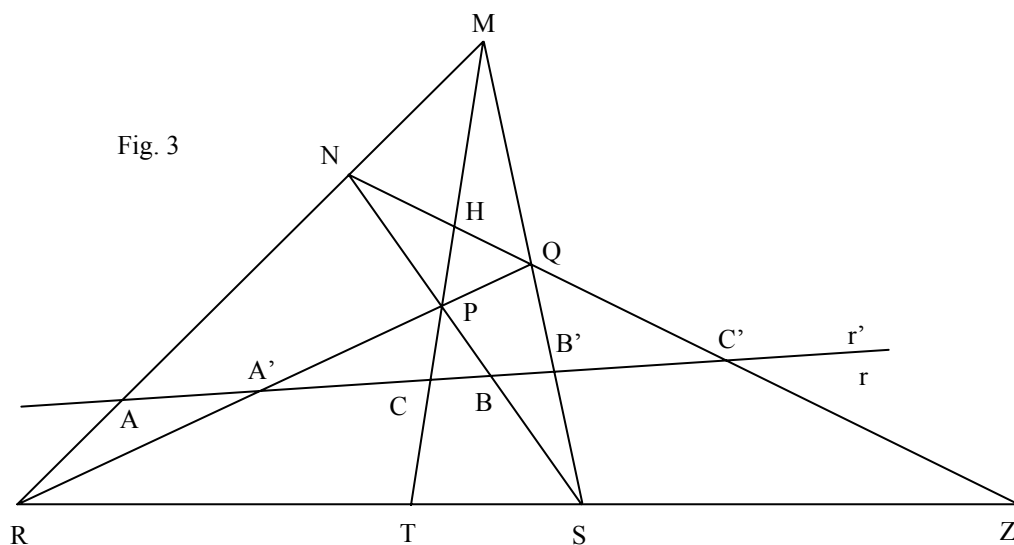
$$(6) \quad D' \equiv C.$$

Poiché $D \equiv C'$ per ipotesi, si conclude che la coppia C, C' è involutoria e quindi la proiettività è una INVOLUZIONE.

Per finire, i punti corrispondenti di una involuzione si dicono anche punti coniugati.

N. 4 – Quadrangolo completo

Prima di dimostrare il teorema di Désargues è opportuno definire la seguente figura geometrica



Si dice quadrangolo piano completo la figura costituita da quattro punti complanari

M,N,P,Q, (tre a tre non allineati) e dalle sei rette che li congiungono a due a due in tutti i modi possibili. I quattro punti si dicono vertici e le sei rette si dicono lati del quadrangolo (fig. 3).

Due lati si dicono opposti se non hanno alcun vertice in comune, quindi le due rette di una coppia di lati opposti contengono tutti e quattro i vertici.

Le coppie di lati opposti sono tre; dobbiamo considerare infatti anche la coppia di lati data dalle diagonali del quadrangolo completo.

Abbiamo quindi le seguenti coppie di lati opposti:

- (1) MN,PQ, che si intersecano nel punto R ;
- (2) NP,MQ, che si intersecano nel punto S ;
- (3) MP, NQ, che si intersecano in H .

I punti R , S, H si dicono punti diagonali del quadrangolo.

Per completare l'informazione, indichiamo con T e Z i punti di intersezione della retta R S rispettivamente con le diagonali MP, NQ.

Sussiste una proprietà molto nota, che non dimostriamo; i punti R,S,T,Z formano un gruppo armonico, cioè il birapporto dei quattro punti vale - 1:

$$(4) \quad (RTSZ) = -1 .$$

Vediamo i collegamenti della formula (4) con l'opera di Pappo.

Sviluppando il birapporto che figura nella relazione (4) si ha di seguito:

$$(5) \quad \frac{(RST)}{(RSZ)} = -1 , \quad \frac{RT}{ST} : \frac{RZ}{SZ} = -1 .$$

Prendendo le misure dei segmenti in valore assoluto si ha :

$$(6) \quad \frac{RT}{TS} : \frac{RZ}{SZ} = 1,$$

ossia (7) $RT : TS = RZ : SZ$

La relazione (7) è l'ipotesi che Pappo pone nella proposizione 31 del libro VII per dimostrare, con ragionamenti di tipo euclideo, che i punti R,P,Q, sono allineati.

N. 5 – Teorema di Désargues

Possiamo finalmente dimostrare il notevole teorema di Désargues:

"Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo piano completo segano sopra una retta r , non passante per alcun vertice, tre coppie di punti coniugati in una stessa involuzione".

Dimostrazione. Intersechiamo i lati di un quadrangolo completo con una retta r non passante per alcun vertice (si veda ancora fig. 3). Otteniamo tre coppie di punti di intersezione (A, A') , (B, B') , (C, C') : ognuna di esse corrisponde ad una coppia di lati opposti.

Detta r' una retta sovrapposta ad r , consideriamo la proiettività ω nella quale ai punti A, B, C , pensati come appartenenti alla retta r , corrispondano ordinatamente i punti A', B', C' della retta r' . Vogliamo far vedere che ω è un'involuzione. Per questo basta riconoscere che una qualsiasi coppia di punti corrispondenti, ad es. (A, A') , ha carattere involutorio, cioè che i punti A e A' della coppia si corrispondono in doppio modo. A tale scopo dimostreremo che la proiettività ω fa corrispondere al punto A' , pensato come appartenente alla retta r , il punto A pensato come appartenente ad r' . Infatti il teorema del paragrafo n. 3 ci assicura che:

“Se in una proiettività tra due punteggiate sovrapposte esiste una coppia di punti involutoria ogni altra coppia di punti corrispondenti è involutoria” e pertanto la proiettività è una involuzione.

Ora, per dimostrare che la coppia (A, A') è involutoria basta far vedere che sussiste l'eguaglianza

$$(1) \quad (ABCA') = (A'B'C'A).$$

Per cominciare, proiettiamo i punti A, B, C, A' della r dal punto P sulla retta MN ; otteniamo rispettivamente i punti A, N, M, R . Poiché i birapporti si conservano per operazioni di proiezione e sezione si ottiene

$$(2) \quad (ABCA') = (ANMR).$$

Se ora dal punto Q proiettiamo i punti A, N, M, R sulla punteggiata r' , otteniamo i punti A, C', B', A' . Per la stessa proprietà di conservazione si ha:

$$(3) \quad (ANMR) = (AC'B'A').$$

Confrontando le (2), (3) otteniamo

$$(4) \quad (ABCA') = (AC'B'A').$$

Tenendo presente che il valore del secondo birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due si ha

$$(5) \quad (ABCA') = (A'B'C'A).$$

Quindi al punto A della retta r la proiettività ω fa corrispondere il punto A' della retta r' e al punto A' , pensato come appartenente a r , essa fa corrispondere il punto A considerato appartenente alla retta r' . Pertanto la coppia (A, A') è involutoria; ossia la proiettività ω è una involuzione.

Il teorema di Désargues è così dimostrato.

OSSERVAZIONE

Abbiamo già detto che se una coppia di punti corrispondenti è involutoria, anche le altre due coppie sono involutorie. Possiamo dimostrare ciò direttamente come esercizio. Basta prendere, per es., la coppia di punti corrispondenti (C, C') e verificare che si ha

$$(6) \quad (ABCC') = (A'B'C'C).$$

Infatti, proiettando i punti A, B, C, C' della retta r da N sulla retta MP si ottengono i punti M, P, C, H ; proiettando poi questi punti da Q sulla punteggiata r' si perviene alla quaterna di punti B', A', C, C'. Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(7) \quad (ABCC') = (B'A'CC').$$

Il secondo birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi tra di loro e contemporaneamente gli altri due (proprietà i del n. 3); pertanto si ottiene:

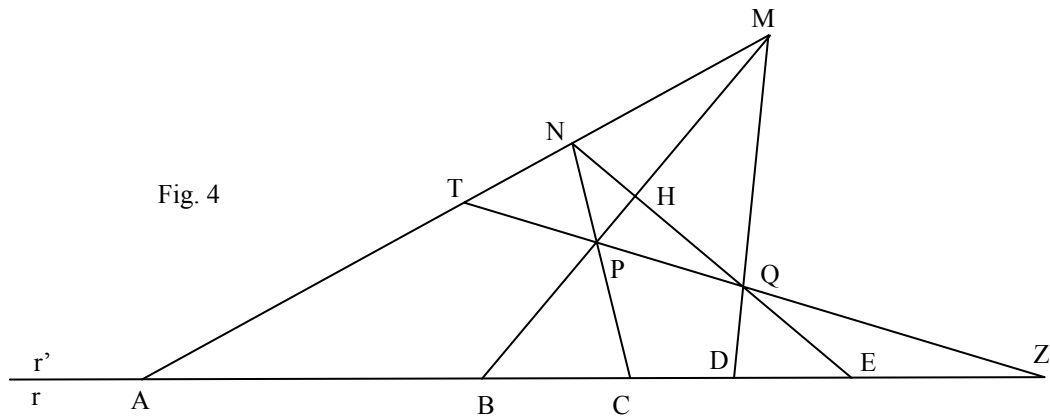
$$(8) \quad (ABCC') = (A'B'C'C).$$

La (8) dimostra che anche i punti C, C' si corrispondono in doppio modo, ossia la coppia (C,C') è involutoria. (C.V.D.)

A chiusura della dimostrazione informiamo che il teorema di Désargues si presta a ulteriori generalizzazioni, come il teorema di Désargues- Sturm sulle coniche, che contiene il primo teorema come caso particolare (si veda la Geometria di L. Campedelli citata in bibliografia, pag. 268).

N. 6 – Sulla proposizione 130, libro VII

In questa proposizione Pappo considera su una retta r i punti A,B,C,D nell'ordine detto. Da un punto M del piano proietta quindi i punti A,B,D ottenendo tre segmenti. Da un punto N del segmento AM traccia poi i segmenti NC ed NE: il primo interseca il segmento MB nel punto P, il secondo interseca il segmento MD nel punto Q (fig. 4).



Fatta questa costruzione, Pappo considera sulla retta r il punto Z che segue il punto E , e tale che verifichi l'ipotesi:

$$(1) \quad AZ \cdot DE : AD \cdot EZ = AZ \cdot BC : AB \cdot CZ$$

Il matematico alessandrino fa vedere che, sotto questa ipotesi, i punti P, Q, Z sono allineati.

Noi non daremo la dimostrazione di Pappo; faremo invece vedere che l'ipotesi (1) è una proprietà che si ottiene da una particolare involuzione.

A tale scopo, consideriamo il quadrangolo completo $MNPQ$ della fig. 4; intersechiamo i suoi lati con una retta r e siano A, B, C, D, E, Z i punti di intersezione indicati in figura. Consideriamo ora la proiettività ω nella quale si corrispondono i punti delle coppie $(A, Z), (C, D), (B, E)$, ove A, C, B sono elementi della punteggiata r , mentre Z, D, E sono elementi della punteggiata r' sovrapposta ad r .

Facciamo vedere che la coppia (A, Z) è involutoria, ossia che al punto A della retta r corrisponde il punto Z della retta r' e che al punto Z , pensato come appartenente alla retta r , corrisponde il punto A , pensato come appartenente alla retta r' ; ossia facciamo vedere che sussiste la relazione

$$(2) \quad (ACBZ) = (ZDEA).$$

Dim. Sia T il punto di intersezione delle rette PZ ed NM . Proiettando i punti A, B, Z della retta r da P sulla retta AM si ottengono rispettivamente i punti A, N, M, Z e per la conservazione dei birapporti nelle operazioni di proiezione e sezione si ha:

$$(3) \quad (ACBZ) = (ANMT) .$$

Se ora proiettiamo i punti A,N,M,T da Q sulla retta r' sovrapposta ad r si ottengono i punti A,E,D,Z; e per la conservazione dei birapporti si ha:

$$(4) \quad (ANMT) = (AEDZ) .$$

Confrontando le (3),(4) si ha: $(AEDZ) = (ACBZ)$;

scambiando l'ordine dei punti nel primo birapporto si ha:

$$(5) \quad (ZDEA) = (ACBZ) .$$

La (5) ci dice che nella proiettività ω la coppia (A,Z) è involutoria e quindi la ω è una involuzione. A noi interessa solo l'eguaglianza dei due birapporti, garantita esclusivamente dalle operazioni di proiezione e sezione. Sviluppando i due birapporti si ha di seguito:

$$(6) \quad \frac{(ZDE)}{(ZDA)} = \frac{(ACB)}{(ACZ)}, \quad \rightarrow \quad \frac{ZE}{DE} : \frac{ZA}{DA} = \frac{AB}{CB} : \frac{AZ}{CZ},$$

da cui
$$\frac{ZE \cdot DA}{DE \cdot ZA} = \frac{AB \cdot CZ}{CB \cdot AZ} .$$

L'eguaglianza non varia se si scambia ZA con AZ e in pari tempo CB con BC; ciò equivale a considerare le misure dei segmenti in valore assoluto. Quindi si ha:

$$(7) \quad \frac{ZE \cdot DA}{DE \cdot AZ} = \frac{AB \cdot CZ}{BC \cdot AZ} .$$

Se poi nella (7) passiamo alle frazioni reciproche, e scriviamo sotto forma di proporzione, si ottiene:

$$(8) \quad AZ \cdot DE : AD \cdot EZ = AZ \cdot BC : AB \cdot CZ .$$

Ma questa proporzione, come abbiamo detto all'inizio, è esattamente l'ipotesi posta da Pappo per dimostrare che i punti P, Q, Z sono allineati. Per noi, invece, questi punti sono allineati perché appartengono ad un lato del quadrangolo completo.

Come si vede, i teoremi dimostrati dai due matematici sono l'uno inverso dell'altro.

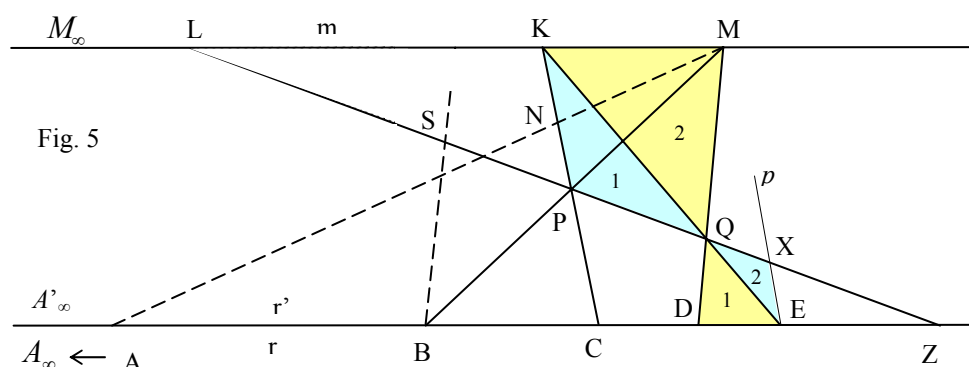
NOTA. Scambiamo le lettere C,D,P,Q con le lettere $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Sigma$ dell'alfabeto greco e vediamo con quali parole Paul Ver Eecke traduce in francese la proposizione 130 di Pappo, alla quale si riferisce la fig. 4 :

“que le rectangle compris sous les droites AZ, ΔE soit au rectangle compris sous les droites $A\Delta$, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, B Γ est au rectangle compris sous les droites AB, ΓZ ; je dis que la ligne que passe par les points Λ, Σ, Z est droite“.

Ricordiamo che con la parola "retta" i greci intendevano sia un segmento che il suo prolungamento, cioè la retta intesa potenzialmente in senso illimitato“.

N. 7 – Dimostrazione della proposizione 128, libro VII

Dimostriamo ora la proposizione 128 del libro VII, seguendo il procedimento di Pappo. Ecco la figura e l'enunciato:



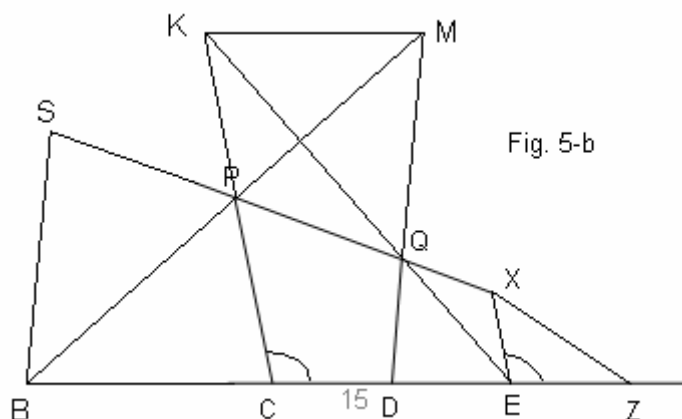
“Consideriamo il quadrilatero MKPQ disegnato in fig. 5 e sia π il semipiano avente per origine la retta $m = KM$ in cui esso giace. Tracciamo in questo semipiano una retta r parallela alla retta KM ed esterna al quadrilatero. Prolunghiamo le diagonali MP e KQ e siano rispettivamente B, E i punti di intersezione con la retta r ; analogamente prolunghiamo KP ed MQ e siano C e D i punti di intersezione con la retta stessa. Prendiamo ora come quinto punto Z della retta r il punto che soddisfa la proporzione:

$$(*) \quad DE : EZ = BC : CZ ,$$

$$\text{ossia (1)} \quad CZ : EZ = BC : DE .$$

Vogliamo dimostrare che i punti P,Q,Z sono allineati “.

Dim. Conduciamo dal punto E la retta p, parallela a PK, e indichiamo con X il punto di intersezione con il prolungamento del segmento PQ. Fino a questo momento non possiamo dire che questo prolungamento passi anche per il punto Z. Infatti, fino a prova contraria, il punto Z si potrebbe trovare nella posizione indicata nella figura 5-b.



Per dimostrare che il punto Z è allineato con i punti P,Q,X consideriamo i due quadrilateri BCPS e DEXQ: essi sono simili perché ambedue simili al quadrilatero MKPQ. Poiché il rapporto fra due lati del primo è uguale al rapporto fra i due lati corrispondenti del secondo, possiamo scrivere:

$$(*) \quad CP : BC = EX : DE ;$$

permutando i medi si ha:

$$(2) \quad CP : EX = BC : DE .$$

Confrontando le (1), (2) si ha

$$(*) \quad CP : EX = CZ : EZ ,$$

$$\text{ossia: (3)} \quad CP : CZ = EX : EZ .$$

Possiamo ora considerare i due triangoli (CPZ) ed (EXZ). Essi hanno:

(*) CP parallelo ad EX per costruzione;

(*) CZ parallelo ad EZ come lati giacenti su una stessa retta;

- (*) $\hat{P}\hat{C}Z = \hat{X}\hat{E}Z$ come angoli compresi fra rette parallele;
- (*) inoltre $CP : CZ = EX : EZ$ per dimostrazione precedente.

Si vede così che i triangoli (CPZ) ed (EXZ) hanno uguale un angolo e i lati che lo comprendono in proporzione e quindi essi sono simili. Ne segue che i punti P,X,Z sono allineati. E poiché il punto X cade sul prolungamento del segmento PQ, possiamo dire che anche i punti P,Q,Z sono allineati.

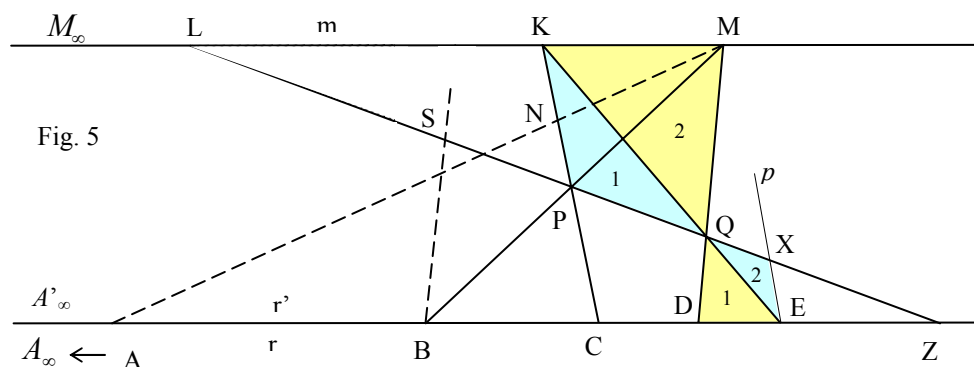
La proposizione 128 è così dimostrata.

Diamo ora la dimostrazione inversa, seguendo procedimenti désarguesiani, e facciamo vedere, in particolare, che essa è un semplice corollario della prop. 130; a tale scopo trasformeremo un poco la fig. 4. Il lettore che voglia consultare la traduzione in francese dell'opera di Pappo ci perdonerà il forzato cambiamento di nome che si è reso necessario per indicare i punti della figura indicata nel corollario.

Consideriamo il quadrangolo completo MNPQ di figura 4 e intersechiamo i suoi lati con una retta r esterna ad esso. Supponiamo ora che il vertice N del quadrangolo si sposti sulla retta PC, sulla quale il punto giace, sino a portarsi nel punto K situato sulla parallela ad r condotta dal punto A; indicheremo con m questa retta: si ottiene così la fig. 5, che riproponiamo. Allora il lato MN del quadrangolo completo ruota attorno ad M e il punto A corre sulla retta r portandosi nel punto improprio A_∞ di questa.

Ma siccome la geometria proiettiva tratta allo stesso modo punti propri e impropri, la coppia di punti (A_∞, Z) conserva il carattere involutorio che già abbiamo riconosciuto alla coppia (A, Z) del paragrafo precedente.

Diamone la dimostrazione diretta, come esercizio, tenendo presente che il punto improprio A_∞ della retta r coincide con il punto improprio A'_∞ della retta r' e quindi è lecito scambiare simboli e ufficio dei due punti.



Indichiamo con L il punto di intersezione di m con la retta PZ , che rimane ferma. Proiettando i punti A_∞, C, B, Z della retta r da P sulla retta m si ottengono i punti

M_∞, K, M, L , ove M_∞ è il punto improprio della punteggiata m , parallela ad r e quindi esso coincide con A_∞ . Per la conservazione dei birapporti si ha:

$$(4) \quad (A_\infty CBZ) = (M_\infty KML) .$$

Proiettando i punti del secondo birapporto da Q sulla retta r' , sovrapposta ad r , si

hanno i punti A'_∞, E, D, Z . Per la conservazione dei birapporti si ha:

$$(5) \quad (M_\infty KML) = (A'_\infty EDZ) .$$

Tenendo presente che $A'_\infty \equiv A_\infty$ possiamo scrivere:

$$(6) \quad (M_\infty KML) = (A_\infty EDZ) .$$

Confrontando le (4), (6) si ha:

$$(7) \quad (A_\infty CBZ) = (A_\infty EDZ) .$$

Teniamo ora presente che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due: Possiamo quindi scrivere:

$$(8) \quad (A_\infty CBZ) = (ZDEA_\infty) .$$

La (8) ci dice chiaramente che i punti A_∞, Z si corrispondono in doppio modo sulle punteggiate r, r' ; ossia essi costituiscono una coppia involutoria.

Dalla (8), tenendo ancora presente la proprietà invariantiva (i) del birapporto, si ha:

$$(9) \quad (ZBCA_\infty) = (ZDEA_\infty) .$$

Ricordiamo ora che, quando il quarto punto di un birapporto si porta nel punto improprio della retta a cui esso appartiene, il birapporto dei quattro punti è uguale al rapporto semplice dei primi tre. Si ha pertanto:

$$(10) \quad (ZBC) = (ZDE)$$

Sviluppando si ha

$$(*) \quad ZC : BC = ZE : DE .$$

Permutando gli estremi otteniamo

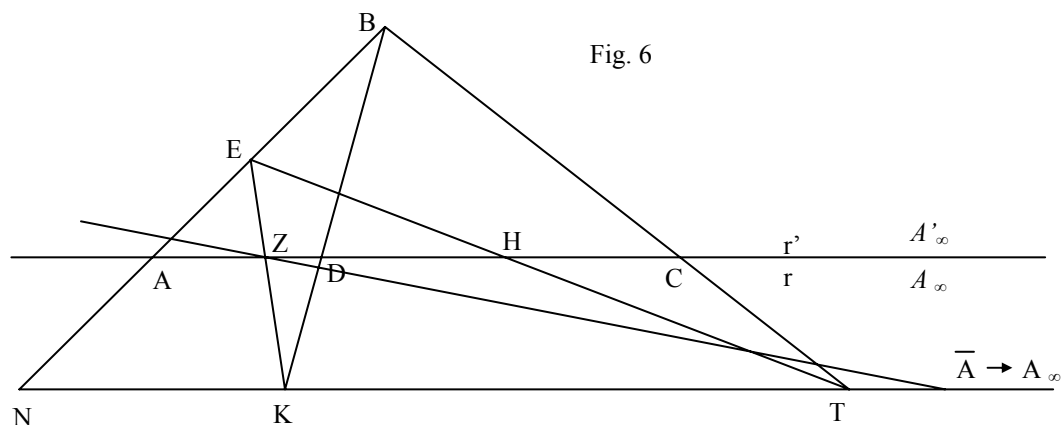
$$(*) \quad DE : BC = ZE : ZC .$$

Permutando i medi e considerando le misure dei segmenti in valore assoluto si ha:

$$(11) \quad DE : EZ = BC : CZ$$

La proporzione (11) fra i segmenti delle rette r coincide con l'ipotesi posta da Pappo nella proposizione 128 VII per dimostrare che i punti P, Q, Z sono allineati. Per noi, invece, questi punti sono allineati come elementi di una retta proiettante e ricaviamo la (11) come semplice applicazione del teorema di Désargues.

N. 8 – Proposizione 127



Nella fig. 6 abbiamo un quadrangolo piano completo BEKT abbastanza somigliante a

quello che figura nella traduzione della Collezione curata da Paul Ver Eecke.

Sia N il punto di intersezione della coppia di lati opposti EB e KT .

Intersechiamo il quadrangolo con una retta r parallela al lato KT e siano

$(A, A_{\infty}), (C, Z), (D, H)$ le coppie di punti secondo cui essa interseca i lati opposti, come è

indicato in figura 6. Si noti che il punto improprio A_∞ della retta r è il punto a cui tende \bar{A} al ruotare della retta $Z\bar{A}$ attorno a Z .

Detta r' una retta sovrapposta ad r , consideriamo la proiettività ω nella quale ai punti A, C, D pensati come appartenenti alla retta r , corrispondano ordinatamente i punti A_∞, Z, H pensati appartenenti a r' : si vede bene che abbiamo fatto in modo di avere una coppia di punti corrispondenti su ogni coppia di lati opposti del quadrangolo piano completo.

Come ormai sappiamo dal teorema di Désargues, questa proiettivit    un'involuzione e quindi i punti A, A_∞ si corrispondono in doppio modo; cio  la proiettivit  ω fa corrispondere al punto A_∞ , pensato come appartenente alla retta r , il punto A pensato appartenente alla retta r' . Possiamo quindi scrivere l'eguaglianza di birapporti:

$$(1) \quad (\text{ACDA}_\infty) = (\text{A}_\infty \text{ZHA}) \text{ .}$$

E' opportuno dare una dimostrazione diretta della (1). A tale scopo proiettiamo da B i punti A, C, D, A_{∞} della r sulla retta KT . Si ottengono ordinatamente i punti N, T, K, A_{∞}

per la conservazione dei birapporti in seguito a operazioni di proiezione e sezione si ha: (2)

$$(ACDA_{\infty}) = (NTKA_{\infty}) .$$

Se ora proiettiamo la quaterna di punti N, T, K, A_{∞} da E sulla retta r' si ottiene la quaterna A, H, Z, A'_{∞} e per la proprietà di conservazione si ha

$$(3) \quad (NTKA_{\infty}) = (AHZA'_{\infty}) .$$

Confrontando le (2), (3) otteniamo

$$(*) \quad (ACDA_{\infty}) = (AHZA'_{\infty}) .$$

Poiché le rette r, r' e KT hanno lo stesso punto improprio, cioè $A'_{\infty} \equiv A_{\infty}$, possiamo scrivere:

$$(4) \quad (ACDA_{\infty}) = (AHZA_{\infty}) .$$

Per la proprietà invariantiva (i) che riguarda l'ordine dei punti si ha:

$$(5) \quad (ACDA_{\infty}) = (A_{\infty}ZHA) ,$$

e questa è la relazione (1) che si voleva dimostrare.

La (5) ci dice chiaramente che i punti A, A_{∞} si corrispondono in doppio modo, cioè

la coppia di punti corrispondenti (A, A_{∞}) è involutoria.

Torniamo all'eguaglianza (4), che per comodità riscriviamo:

$$(4) \quad (ACDA_{\infty}) = (AHZA_{\infty})$$

e ricordiamo ancora una volta che, quando il quarto punto di un birapporto tende al

punto improprio della retta a cui esso appartiene, il birapporto dei quattro punti si riduce al rapporto semplice dei primi tre. Si ha pertanto

$$(6) \qquad (ACD) = (AHZ) ;$$

$$\text{sviluppando si ottiene (7) } \quad AD : CD = AZ : ZH .$$

Prendendo le misure dei segmenti in valore assoluto si ha infine per i punti della retta r :

$$(8) \qquad AD : DC = AZ : ZH .$$

Nella proposizione 127 Libro VII il matematico Pappo fa l'ipotesi che i punti della retta r soddisfino proprio la proposizione (8); conduce poi alcuni segmenti e dimostra che la retta TK è parallela ad r . Noi abbiamo fatto il ragionamento inverso: abbiamo intersecato il quadrangolo completo con una retta r parallela ad un suo lato e abbiamo ricavato la proposizione che Pappo pone come ipotesi.

TEORIA DELLE CURVE PIANE

n. 1 – Curve osculatrici

Esempio 1). Trovare l'equazione della circonferenza osculatrice all'ellisse

$$(1) \quad 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0 \quad \text{nell'origine } O(0,0).$$

Soluzione

Considero la conica degenera spezzata nelle rette $y - x = 0$ (tangente alla conica nell'origine) e $ax + by = 0$ (retta generica per O) e formo il fascio di eq.

$$(2) \quad 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y + (y - x)(ax + by) = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(3) \quad (3 - a)x^2 + (-2 + a - b)xy + (b + 1)y^2 - 2x + 2y = 0.$$

Imponendo che la conica sia una circonferenza, si ha il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} 3 - a = b + 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \text{soluzione} \quad a = 2, \quad b = 0.$$

Ne segue che l'equazione della circonferenza osculatrice in $O(0,0)$ è:

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$$

Esempio 2). Trovare la parabola cubica che oscula nell'origine $O(0,0)$ la curva

$$(1) \quad \Gamma: x^3 - 2x^2 + y^2 - 2x + y = 0.$$

Soluzione

La retta osculatrice la Γ nel punto $O(0,0)$ non è altro che la tangente nel punto stesso, cioè $C_1^{(0)}: y - 2x = 0$.

Considero il fascio di parabole $|C_2|^1: y - 2x = \lambda x^2$, che hanno contatto bipunto con la Γ nel punto O e interseco la curva data. Si ha il sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} x^3 - 2x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \\ y = 2x + \lambda x^2 \end{cases} \quad \text{Sostituendo si ha:}$$

$$(*) \quad x^3 - 2x^2 + 4x^2 + \lambda^2 x^4 + 4\lambda x^3 - \cancel{2x} + \cancel{2x} + \lambda x^2 = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(3) \quad x^2(x + 2 + \lambda^2 x^2 + 4\lambda x + \lambda) = 0.$$

Si ha la soluzione $x = 0$ 2 volte, cioè la generica parabola del fascio ha contatto bipunto con la Γ nell'origine O.

Per avere la parabola osculatrice $C_2^{(O)}$ debbo provocare una terza soluzione $x = 0$; infatti la $C_2^{(O)}$ ha contatto tripunto con Γ ; ciò si ottiene imponendo che sia $\lambda + 2 = 0$, cioè $\lambda = -2$.

Quindi (4) $C_2^{(O)}: y = 2x - 2x^2$.

Cerco ora la cubica osculatrice $C_3^{(O)}$. Considero il fascio

(*) $|C_3|^1: y = 2x - 2x^2 + \lambda x^3$;

tutte le cubiche hanno contatto 3-ptto con la curva Γ in O . Intersecando si ha:

(5)
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \\ y = x(2 - 2x + \lambda x^2) \end{cases} \quad \text{Sostituendo si ottiene:}$$

(*) $x^3 - 2x^2 + x^2(2 - 2x + \lambda x^2) - 2x + 2x - 2x^2 + \lambda x^3 = 0$; fatti i calcoli si ha:

(6) $x^3(1 + 4x + \lambda^2 x^3 - 8 + 4\lambda x - 4\lambda x^2 + \lambda) = 0$.

L'equazione ha la soluzione $x = 0$ contata 3 volte; quindi la generica cubica del fascio $|C_3|^1$ ha 3 intersezione con la Γ nel punto O . Per $\lambda - 7 = 0$ si ha una quarta soluzione $x = 0$ - e non di più - e si ottiene la cubica osculatrice $C_3^{(O)}$; la sua equazione è:

(7) $y = 2x - 2x^2 + 7x^3$.

Voglio ora trovare la circonferenza osculatrice nell'origine O ; considero il fascio di coniche $|C_2|^1$, costituito dalla parabola osculatrice $C_2^{(O)}$ e dalla conica degenera costituita dalla retta $y - 2x = 0$, tangente in O , e dalla retta generica $ax + by = 0$, passante per questo punto. Si ha l'equazione:

(8) $y - 2x + 2x^2 + (y - 2x)(ax + by) = 0$, da cui

(9) $(2 - 2a)x^2 + by^2 + (a - 2b)xy - 2x + y = 0$.

Se impongo che sia una circonferenza si ha il sistema:

(10)
$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2 - 2a = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2 = 4b + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 5b = 2 \end{cases}$$

Si ottiene la soluzione $b = \frac{2}{5}$, $a = \frac{4}{5}$, da cui $2 - 2a = \frac{2}{5}$.

L'equazione della circonferenza osculatrice è $x^2 + y^2 - 5x + (5/2)y = 0$.

n. 2 – Teorema di Dini

Sia (1) $f(x, y) = 0$ un'equazione che definisce la y come funzione implicita della variabile x . Il teorema di Dini afferma che, se la funzione $f(x, y)$ è continua assieme alle sue derivate parziali prime f_x, f_y in un campo A del piano xy e se esiste in A un punto soluzione $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ [cioè tale che $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$] in cui riesca $f_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, allora la (1) è univocamente risolubile rispetto a y nell'intorno di \bar{P} . Cioè esiste un intervallo $R[\bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + k, \bar{y} - m \leq y \leq \bar{y} + n]$ contenuto in A tale ad ogni punto x di $[\bar{x} - h, \bar{x} + k]$ corrisponda uno ed un sol valore $y = y(x)$ di $[\bar{y} - m, \bar{y} + n]$ in modo che risulti

$$(2) \quad f[x, y(x)] = 0.$$

La funzione $y = y(x)$ così definita risulta continua e dotata di derivata prima continua.

La sua derivata $\frac{dy}{dx}$ si ottiene derivando la (2) rispetto ad x e si ha:

$$(3) \quad f_x[x, y(x)] + f_y[x, y(x)] \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{da cui si ricava } \frac{dy}{dx}.$$

Se poi la funzione $f(x, y)$ è dotata in A di derivate seconde continue, anche la $y = y(x)$ ammette la derivata seconda continua, che si ricava dalla (3). Si ha:

$$(4) \quad f_{xx}[x, y(x)] + 2f_{xy}[x, y(x)] \frac{dy}{dx} + f_{yy}[x, y(x)] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + f_y[x, y(x)] \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

e da questa si ricava $\frac{d^2y}{dx^2}$. Analogamente si procede per le derivate successive.

Tutte queste considerazioni su una curva $f(x, y) = 0$, **algebraica o trascendente**, vengono a cadere se il punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ non è semplice, cioè se

$$\bullet \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_P = 0.$$

In tal caso non vale il teorema di Dini e l'equazione $f(x, y) = 0$ non è esplicitabile né rispetto a x , né rispetto ad y .

Se il punto non è semplice, esso si dice singolare e si hanno altre considerazioni.

Se $f(x, y) = 0$ è una curva trascendente, i concetti sulle curve algebriche non sono più validi:

- Il concetto di ordine non ha significato;
- non si possono trattare alla stessa stregua punti propri e punti impropri;
- non posso nemmeno usare le coordinate omogenee, mentre invece per una curva algebrica, se si usano coordinate omogenee, punti propri e punti impropri sono la stessa cosa. Per esempio, la funzione $y = \sin x$ non si può scrivere in coordinate omogenee.

n. 3 – Sviluppo di una funzione secondo la formula di Taylor

Sia Γ una curva piana trascendente passante per il punto $Q(x_o, y_o)$ e di equazione $f(x, y) = 0$. Sviluppando la funzione $f(x, y)$ secondo la formula di Taylor l'equazione della curva diventa:

$$(1) \quad \Gamma: \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_Q (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_Q (y - y_o) + \\ + \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_Q (x - x_o)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_Q (x - x_o)(y - y_o) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_Q (y - y_o)^2 \right] + \\ + \dots + \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_Q (x - x_o) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_Q (y - y_o) \right]^n f(x, y) + \varepsilon_{n+1} = 0 ,$$

dove ε_{n+1} è un infinitesimo di ordine superiore ad n rispetto alla distanza OQ , cioè

$$(2) \quad \lim_{O \rightarrow Q} \frac{\varepsilon_{n+1}}{OQ^n} = 0 .$$

Nell'intorno del punto $Q(x_o, y_o)$ questa curva Γ si può rappresentare con una curva algebrica piana di ordine m , e l'approssimazione è tanto migliore quanto più elevato è l'ordine m . Per questa C^m possiamo scrivere

$$(3) \quad C^m: \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_Q (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_Q (y - y_o) + \\ + \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_Q (x - x_o)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_Q (x - x_o)(y - y_o) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_Q (y - y_o)^2 \right] + \\ + \dots + \frac{1}{m!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_Q (x - x_o) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_Q (y - y_o) \right]^m f(x, y) = 0 .$$

Questa C^m può essere scritta sinteticamente nella forma:

$$(4) \quad f(x, y) = \Phi_1(x - x_o, y - y_o) + \Phi_2(x - x_o, y - y_o) + \dots + \Phi_m(x - x_o, y - y_o) = 0 .$$

n. 4 – Curve osculatrici relative a curve trascendenti

Data la curva trascendente (1) $y = \sin x$, trovare la successione delle parabole osculatrici nell'origine $O(0,0)$ (dalle lezioni del Prof. G. Roghi).

Soluzione

Derivando la funzione si ha: $y'(x) = \cos x$, $\rightarrow y'(0) = 1$.

L'equazione della tangente in O è (2) $C_1^{(O)} : y = x$.

La (2) è la retta osculatrice la Γ nel fascio di rette di centro O .

Interseco la curva Γ con il fascio di parabole $|C_2|^1 : y = x + \lambda x^2$. Si ha

$$(3) \quad \begin{cases} y = \sin x \\ y = x + \lambda x^2 \end{cases} \rightarrow \varphi(x) = \sin x - x - \lambda x^2.$$

La parabola osculatrice $C_2^{(O)}$ ha contatto 3-ptto con la Γ nel punto O ; essa si ottiene in corrispondenza al valore di λ per cui $x = 0$ diventa soluzione 3 volte. Perché ciò accada deve essere $\varphi''(0) = 0$. Calcolo le successive derivate:

$$(4) \quad \varphi'(x) = \cos x - 1 - 2\lambda x, \quad \varphi''(x) = -\sin x - 2\lambda.$$

La condizione $\varphi''(0) = 0$ ci dà: $0 - 2\lambda = 0$, ossia $\lambda = 0$.

Ne segue che la parabola osculatrice è $C_2^{(O)} : y = x$. Questa parabola coincide con la retta $y = x$. Ne segue che il punto $O(0,0)$ è un punto di flesso con tangente inflessionale la retta $y = x$.

Interseco la curva Γ con il fascio di parabole $|C_3|^1 : y = x + \lambda x^3$. Si ha

$$(3) \quad \begin{cases} y = \sin x \\ y = x + \lambda x^3 \end{cases} \rightarrow \varphi(x) = \sin x - x - \lambda x^3.$$

La cubica osculatrice $C_3^{(O)}$ ha contatto 4-ptto con la Γ nel punto O e $x = 0$ è soluzione 4 volte. Perché ciò accada deve essere $\varphi'''(0) = 0$. Calcolo le successive derivate:

$$(4) \quad \varphi'(x) = \cos x - 1 - 2\lambda x, \quad \varphi''(x) = -\sin x - 2\lambda, \quad \varphi'''(x) = -\cos x - 6\lambda.$$

Imponendo la condizione $\varphi'''(0) = 0$ si ha $-1 - 6\lambda = 0$, ossia $\lambda = -1/3!$.

Per $C_3^{(O)}$ si ha: (5) $y = x - \frac{1}{3!}x^3$.

Interseco la curva Γ con il fascio di parabole $|C_4|^1 : y = x - (1/6)x^3 + \lambda x^4$.

Faccio sistema e trovo

$$(3) \quad \varphi(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \lambda x^4.$$

Per avere una quartica $C_4^{(0)}$ a contatto 5-ptto con la Γ nel punto O , $x = 0$ deve diventare soluzione 5 volte. Perché ciò accada deve essere $\varphi^{IV}(0) = 0$. Calcolo le successive derivate:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \lambda x^4, & \varphi'(x) &= \cos x - 1 + \frac{3}{6}x^2 - 4\lambda x^3, \\ \varphi''(x) &= -\sin x + \frac{1}{2}2\sin x - 12\lambda x^2, & \varphi'''(x) &= -\cos x + 1 - 24\lambda x, \\ \varphi^{IV}(x) &= \sin x - 24\lambda. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $\varphi'''(0) = 0$ si ha $0 - 24\lambda = 0$, ossia $\lambda = 0$.

Otengo (5) $C_3^{(0)} : y = x - \frac{1}{3}x^3,$

ossia la cubica $C_3^{(0)}$ è iperosculatrice la Γ nell'origine O .

n. 5 – Curve osculatrici della funzione $y = \sin x$ (Lezioni Prof. Roghi)

Riprendiamo la questione svolta nel paragrafo n. 4.

Per trovare le varie curve osculatrici conviene usare il procedimento che si ottiene approssimando la curva Γ con una curva algebrica di ordine crescente.

La (1) $f(x, y) = 0$ si può scrivere (2) $\sin x - y = 0$.

Per le varie curve osculatrici si ottiene:

a) $C_1^{(0)} \rightarrow \Phi_1 = 0$, ossia $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_0) = 0$,

(*) $(\cos x)_0 x + (-1)_0 y = 0$, $C_1^{(0)} : x - y = 0$.

b) $C_2^{(0)} \rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 = 0$,

ove $\Phi_2 = \frac{1}{2} \left[f_{xx}(O)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(O)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(O)(y-y_0)^2 \right],$

quindi $\Phi_2 = \frac{1}{2!} \left[(-\operatorname{sen} x)_0 x^2 + 0 + 0 \cdot y^2 \right] = 0.$

Ne segue $C_2^{(O)} : y = x.$

c) $C_3^{(O)} \rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$

ove $\Phi_3 = \frac{1}{3!} \left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_0 x^3 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \right],$

$$\Phi_3 = \frac{1}{3!} [(-\cos x)_0 \cdot x^3 + 0] = -\frac{1}{6} x^3.$$

Ne segue $C_3^{(O)} : y = x - \frac{1}{6} x^3.$

d) $C_4^{(O)} \rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 0,$

ove $\Phi_4 = \frac{1}{4!} \left[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_P (x-x_0)^4 + 0 + \dots + 0 \right], \quad \Phi_4 = \frac{1}{4!} [(\operatorname{sen} x)_0 x^4] = 0.$

Ne segue $C_4^{(O)} : y = x - \frac{1}{6} x^3.$

La quartica $C_4^{(O)}$ coincide con la $C_3^{(O)}$; ne segue che questa cubica è iperosculatrice la $y - \operatorname{sen} x = 0$ nell'origine O .

Analogamente si ha $\Phi_5 = \frac{1}{5!} \left[\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right)_0 x^5 + 0 \right] = \frac{1}{5!} [(\cos x)_0 \cdot x^5],$

e quindi $C_5^{(O)} : y = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{5!} x^5,$ e così via.

n. 6 – Parabole osculatrici di curve trascendenti in forma implicita

Data la curva piana trascendente Γ di forma implicita

$$(1) \quad f(x, y) = x \cdot \sin y + \cos xy + 2x - 1 = 0,$$

voglio trovare la successione delle parabole osculatrici la Γ nell'origine $O(0,0)$ (la Γ passa effettivamente per l'origine O). Si ha

$$a) \quad C_1^{(O)}: \quad \Phi_1 = 0, \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 y = 0,$$

$$\text{ove} \quad f_x = \sin y - y \cdot \sin xy + 2, \quad f_y = x \cdot \cos y - x \cdot \sin xy,$$

$$\text{da cui} \quad (f_x)_0 = 2, \quad (f_y)_0 = 0;$$

$$\text{pertanto} \quad C_1^{(O)}: \quad x = 0.$$

$$b) \quad C_2^{(O)}: \quad \Phi_1 + \Phi_2 = 0, \quad \text{con}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right],$$

$$\text{ove} \quad f_{xx} = -y^2 \cos xy, \quad f_{xy} = \cos y - \sin xy - yx \cos xy,$$

$$f_{yy} = -x \sin y - x^2 \cos xy,$$

$$\text{Ne segue} \quad (f_{xx})_0 = 0, \quad (f_{xy})_0 = 1, \quad (f_{yy})_0 = 0,$$

$$\text{pertanto} \quad C_2^{(O)}: \quad x + \frac{1}{2!}(2xy) = 0, \quad \text{ossia} \quad C_2^{(O)}: \quad x + xy = 0.$$

$$c) \quad C_3^{(O)}, \quad \rightarrow \quad \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0,$$

$$\text{con} \quad \Phi_3 = \frac{1}{3!} \left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_0 x^3 + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_0 x^2 y + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right)_0 xy^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right)_0 y^3 \right].$$

Dalla b) si vede che si ha:

$$(2) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y^3 \sin xy, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -2y \cos xy - y^2 x \cdot \sin xy$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -\sin y - 2x \cdot \cos xy + yx^2 \cdot \sin xy, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -x \cdot \cos y + x^3 \sin xy.$$

Da queste derivate si ricava $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 = 0.$

Ne segue che $\Phi_3 = 0$ e pertanto l'equazione della cubica osculatrice è uguale a quella della conica

$$(3) \quad C_3^{(0)} : x + xy = 0.$$

La (3) ci dice che la conica $C_2^{(0)}$ è iperosculatrice rispetto alla curva Γ nel punto O .

n. 7 – Cuspidi di 1^a specie di una curva algebrica (Lezioni Prof. Roghi)

Sia P un punto doppio di una curva algebrica piana C^n di ordine n , con tangenti principali coincidenti. Possiamo supporre che il punto coincida con l'origine delle coordinate di un riferimento cartesiano; allora $P \equiv O(0,0)$ e che la tangente coincida con l'asse x ($y = 0$). Mediante una traslazione e rotazione degli assi posso sempre realizzare questa ipotesi. L'equazione della C^n , ponendo il primo coefficiente uguale ad 1, sarà allora:

$$(1) \quad y^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \varphi_4(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0.$$

Sia $a_{30} \neq 0$.

Interseco la curva C^n con la retta tangente $y = 0$ e vedo quante intersezioni (su n) sono assorbite nell'origine:

$$(2) \quad \begin{cases} C^n : f(x, y) = 0 \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{Ottengo:}$$

$$(3) \quad a_{30}x^3 + a_{40}x^4 + a_{50}x^5 + \dots + a_{n0}x^n = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(4) \quad x^3 \cdot (a_{30} + a_{40}x + a_{50}x^2 + \dots + a_{n0}x^{n-3}) = 0.$$

Ottengo $x^3 = 0$, cioè $x = 0$ soluzione 3 volte e non di più, essendo $a_{30} \neq 0$.

La tangente ha contatto 3-pto con la curva nel punto doppio O e non di più.

Approssimo la curva nell'intorno del punto doppio O mediante il fascio di parabole $|C_2|^1: y = \lambda x^2$, tutte tangenti in O alla retta tangente e alla curva in esame. Interseco la curva con il fascio e vedo quante intersezioni ha la generica conica del fascio con la C^n assorbite nel punto doppio:

$$(5) \quad \begin{cases} C^n & f(x, y) = 0 \\ |C_2|^1 & y = \lambda x^2 \end{cases} \quad \text{Si ottiene}$$

$$(6) \quad \lambda^2 x^4 + a_{30} x^3 + 3a_{21} \lambda x^4 + 3a_{12} \lambda^2 x^5 + a_{03} \lambda^3 x^6 + \varphi_4(x, \lambda x^2) + \dots + \varphi_n(x, \lambda x^2) = 0.$$

Poiché in $\varphi_4(x, \lambda x^2)$ posso mettere in evidenza x^4 e in $\varphi_n(x, \lambda x^2)$ posso mettere in evidenza x^n , dalla (6) si ricava:

$$x^3 \cdot [a_{30} + x(\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40}) + \dots] = 0.$$

Ne segue che tutte le coniche del fascio hanno un contatto 3-pto con la curva C^n nel punto doppio O .

Essendo $a_{30} \neq 0$ per ipotesi, non posso provocare una 4^a soluzione $x = 0$, ossia non esiste alcuna $C_2^{(0)}$ del fascio che abbia un contatto 4-pto, o maggiore, con la curva algebrica data nel punto O .

Poiché non esiste la successione $C_2^{(0)}, C_3^{(0)}, C_4^{(0)}, \dots$, posso dire che il punto doppio O non è origine di rami lineari. In questo caso il punto doppio O si dice **cuspidi di 1^a specie**; esso è origine di un ramo superlineare. **La tangente principale in una cuspidi di prima specie ha esattamente 3 intersezioni con la C^n assorbite nel punto doppio O .**

Si veda la tabella riassuntiva dei punti doppi che sarà riportata più avanti.

n. 8 – Tacnodi di 1^a specie di una curva algebrica

Nell'equazione (1) del paragrafo n. 1 sia $a_{30} = 0$. L'equazione della C^n sarà allora:

$$(1) \quad y^2 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \varphi_4(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0.$$

Interseco la C^n con la tangente $y = 0$ e vedo quante intersezioni sono assorbite nel punto $O(0,0)$:

$$(2) \quad \begin{cases} C^n: f(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow a_{40}x^4 + a_{50}x^5 + \dots + a_{n0}x^n = 0.$$

Si ha $x = 0$ soluzione quattro volte, cioè **la tangente ha contatto 4-ptto con la curva C^n nel punto O.**

Vediamo se nel caso $a_{30} = 0$ è possibile avere una rappresentazione locale della C^n nell'intorno del punto doppio O.

Interseco la C^n con un fascio di parabole $|C_2|^1: y = \lambda x^2$ tutte tangenti in O alla retta $y = 0$ e alla curva C^n :

$$(3) \quad \begin{cases} y = \lambda x^2 \\ y^2 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + 4a_{31}x^3y + 6a_{22}x^2y^2 + 4a_{13}xy^3 + \\ + a_{04}y^4 + a_{50}x^5 + \dots + \varphi_n(x, y) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene:

$$(4) \quad \lambda^2 x^4 + 3a_{21}\lambda x^4 + 3a_{12}\lambda^2 x^5 + a_{03}\lambda^3 x^6 + a_{40}x^4 + 4a_{31}\lambda x^5 + 6a_{22}\lambda^2 x^6 + \\ + 4a_{13}\lambda^3 x^7 + a_{04}\lambda^4 x^8 + a_{50}x^5 + \dots + \varphi_n(x, \lambda x^2) = 0.$$

Ne segue:

$$(5) \quad x^4 \cdot (\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40}) + x^5 (3a_{12}\lambda^2 + 4a_{31}\lambda + a_{50}) + \dots = 0.$$

Si ottiene $x = 0$ soluzione 4 volte.

Ne segue che la generica conica del fascio ha contatto 4-ptto con la C^n nel punto doppio O. Ci sono però due coniche del fascio (le parabole osculatrici $C_2^{(O)}$ e $C_3^{(O)}$) che hanno contatto almeno 5-ptto; esse si ottengono per i valori di λ che sono radici dell'equazione

$$(6) \quad \lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40} = 0, \quad \text{con le radici } \lambda_1, \lambda_2.$$

Il discriminante dell'equazione (6) è $\Delta = 9a_{21}^2 - 4a_{40}$. E allora:

$$(7) \quad \begin{aligned} &\text{se } \Delta > 0 \quad \text{si ha } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{e } C_2^{(O)} \neq \overline{C}_2^{(O)} \\ &\text{se } \Delta = 0 \quad \text{si ha } \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{e } C_2^{(O)} = \overline{C}_2^{(O)}. \end{aligned}$$

Supponiamo che sia $\lambda_1 \neq \lambda_2$; consideriamo il fascio di cubiche

$|C_3|^1 : y = \lambda_1 x^2 + \mu x^3$ e vediamo quante intersezioni ha la generica cubica con la C^n assorbite nel punto O .

$$(8) \quad \begin{cases} y = x^2(\lambda_1 + \mu x) \\ y^2 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + 4a_{31}x^3y + 6a_{22}x^2y^2 + \\ + 4a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{50}x^5 + \dots + \varphi_n(x, y) = 0 \end{cases} .$$

$$(9) \quad \begin{aligned} & x^4(\lambda_1 + \mu x)^2 + 3a_{21}x^4(\lambda_1 + \mu x) + 3a_{12}x^5(\lambda_1 + \mu x)^2 + a_{03}x^6(\lambda_1 + \mu x)^3 + \\ & + a_{40}x^4 + 4a_{31}x^5(\lambda_1 + \mu x)^4 + 6a_{22}x^6(\lambda_1 + \mu x)^2 + 4a_{13}x^7(\lambda_1 + \mu x)^3 + \\ & + a_{04}x^4(\lambda_1 + \mu x)^8 + a_{50}x^5 + \dots + \varphi_n[x, x^2(\lambda_1 + \mu x)] = 0 \end{aligned} .$$

Mettendo in evidenza i coefficienti delle potenze x^4, x^5, x^6 si ha:

$$(10) \quad \begin{aligned} & \cancel{x^4(\lambda_1^2 + 3a_{21}\lambda_1 + a_{40})} + x^5(2\lambda_1\mu + 3a_{21}\mu + 3a_{12}\lambda_1^2 + 4a_{31}\lambda_1 + a_{50}) + \\ & + x^6(\mu^2 + 6a_{12}\lambda_1\mu + 4a_{31}\mu + 6a_{22}\lambda_1^2 + 5a_{41}\lambda_1 + a_{60}) + \dots = 0 \end{aligned} .$$

Il coefficiente di x^4 è nullo poiché λ_1 è una radice dell'equazione

$$\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40} = 0 ;$$

quindi tutte le cubiche del fascio $|C_3|^1$ hanno un contatto 5-ptto con la C^n nel punto doppio O . C'è però una cubica $C_3^{(0)}$ del fascio almeno 6-ptto con la C^n in O . Questa curva, detta cubica osculatrice, si ottiene per quel valore di μ per cui si ha:

$$(*) \quad 2\lambda_1\mu + 3a_{21}\mu + 3a_{12}\lambda_1^2 + 4a_{31}\lambda_1 + a_{50} = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(11) \quad \mu_1 = -\frac{3a_{12}\lambda_1^2 + 4a_{31}\lambda_1 + a_{50}}{2\lambda_1 + 3a_{21}} .$$

Se ora si interseca la curva con il fascio di quartiche $|C_4|^1 : y = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x^3 + \rho x^4$ si trova che esiste almeno una quartica osculatrice $C_4^{(0)}$ che ha un contatto almeno 7-ptto con la C^n nel punto doppio O .

Se poi partiamo dalla radice λ_2 , diversa da λ_1 , dell'equazione

$\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40} = 0$, troveremo una cubica osculatrice $\bar{C}_3^{(0)}$ che ha un contatto

almeno 6-ptto con la C^n nell'origine O ; analogamente si trova una curva osculatrice $\bar{C}_4^{(O)}$ che ha un contatto almeno 7-ptto nel punto O . Ottengo in tal modo due successioni di curve in cui sono uguali solo i primi due termini, $C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$: essi rappresentano entrambi la tangente nel punto O .

Un punto di questo tipo si dice **tacnodo di 1^a specie**. Esso è origine di due rami lineari che hanno contatto 4-ptto con la curva, ma contatto bipunto fra di loro. I due rami lineari giacciono da una stessa parte rispetto alla tangente comune se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno; giacciono da parti opposte se essi hanno segno contrario.

La tabella dei punti singolari della curva, riportata più avanti, ci consente di riconoscere subito i tacnodi di 1^a specie.

n. 9 – Cuspidi di 2^a specie di una curva algebrica

Consideriamo una curva algebrica C^n di ordine n e supponiamo che l'origine $O(0,0)$ sia un punto doppio con tangenti principali coincidenti di equazioni $y = 0$ (asse x). Supponiamo che il coefficiente di x^3 sia nullo, cioè $a_{30} = 0$. Allora intersecando la curva con la tangente doppia $y = 0$ si ha l'equazione:

$$(1) \quad a_{40}x^4 + a_{50}x^5 + \dots + a_{n0}x^n = 0 ;$$

cioè **la tangente $y = 0$ ha contatto 4-ptto con la curva assorbita nel punto O .**

Approssimo la C^n nell'intorno del punto O mediante un fascio di parabole $|C_2|^1$: $y = x^2$, tutte tangenti in O alla curva. Si ha il sistema :

$$(2) \quad \begin{cases} C^n & f(x, y) = 0 \\ y & = \lambda x^2 . \end{cases}$$

Abbiamo già visto che da esso si ricava

$$(3) \quad x^4 \cdot (\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40}) + x^5 (3a_{12}\lambda^2 + 4a_{31}\lambda + a_{50}) + \dots + \varphi_n(x, \lambda x^2) = 0 .$$

Si ottiene $x = 0$ soluzione 4 volte.

Ne segue che la generica conica del fascio ha contatto 4-ptto con la C^n nel punto doppio O . Ci sono però due coniche del fascio (le parabole osculatrici $C_2^{(O)}$ e $\bar{C}_3^{(O)}$) che hanno contatto almeno 5-ptto; esse si ottengono per i valore di λ che sono radici dell'equazione

$$(4) \quad \lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40} = 0, \quad \text{con le radici } \lambda_1, \lambda_2.$$

Il discriminante dell'equazione (6) è $\Delta = 9a_{21}^2 - 4a_{40}$.

Allora, se $\Delta = 0$, le radici λ_1 e λ_2 sono uguali e le due parabole osculatrici coincidono. In particolare, per le radici dell'equazione (4) si ha

$$(5) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3a_{21}}{2}, \quad \text{e quindi} \quad 2\lambda_1 + 3a_{21} = 0.$$

Approssimo la C^n nell'intorno del punto O mediante il fascio di cubiche $|C_3|^1 : y = \lambda_1 x^2 + \mu x^3$, per vedere se posso avere due cubiche osculatrici distinte; cioè per vedere se dal punto O si distaccano due rami lineari che approssimano la curva:

$$(6) \quad \begin{cases} C^n \\ y = x^2(\lambda_1 + \mu x) \end{cases} \quad \text{Abbiamo già visto che si ha:}$$

$$(7) \quad \cancel{x^4(\lambda_1^2 + 3a_{21}\lambda_1 + a_{40})} + x^5(\cancel{2\lambda_1\mu + 3a_{21}\mu} + 3a_{12}\lambda_1^2 + 4a_{31}\lambda_1 + a_{50}) + x^6(\mu^2 + 6a_{12}\lambda_1\mu + 4a_{31}\mu + 6a_{22}\lambda_1^2 + 5a_{41}\lambda_1 + a_{60}) + \dots = 0.$$

Il primo coefficiente dell'equazione è nullo perché λ_1 è una radice dell'equazione

$$\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40} = 0,$$

che ha discriminante nullo e quindi due radici coincidenti di valore

$$(8) \quad \lambda_1 = -3a_{21}/2.$$

Dalla (8) si ricava $2\lambda_1 + 3a_{21} = 0$ e quindi (9) $2\lambda_1\mu + 3a_{21}\mu = 0$.

Ne segue che il valore (8) di λ_1 fa scomparire μ nel coefficiente di x^5 ; cioè intersecando la C^n con il fascio di cubiche $|C_3|^1 : y = \lambda_1 x^2 + \mu x^3$, nel coefficiente di x^5 non compare μ .

Ne segue che tutte le cubiche del fascio hanno contatto 5-ptto con la C^n nel punto doppio O e non ce ne è alcuna che abbia contatto maggiore.

Non esiste dunque la successione di curve osculatrici $C_3^{(O)}, C_4^{(O)}, C_5^{(O)}, \dots$, ossia il punto O non è origine di rami lineari, ma di due rami superlineari.

In questo caso il punto doppio O , a tangenti sovrapposte, si dice **cuspidi di 2ª specie**.

E' evidente che i due rami di una cuspidi di 2^a specie giacciono entrambi da una stessa parte rispetto alla comune tangente.

Le tabelle riportate a pagina 58 ci consentono di riconoscere subito una cuspidi di 2^a specie.

n. 10 – Tacnodi di 2^a specie e cuspidi di 3^a specie

Consideriamo ancora una curva algebrica C^n di ordine n e supponiamo che l'origine O sia un punto doppio con tangenti principali coincidenti di equazioni $y = 0$ (asse x). Supponiamo che il coefficiente di x^3 sia nullo, cioè $a_{30} = 0$. Allora **la tangente $y = 0$ ha contatto 4-ptto con la curva assorbita nel punto O .**

Intersecando la curva con il fascio di coniche $|C_2|^1 : y = \lambda x^2$ si ha l'equazione

$$(2) \quad x^4 \cdot (\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40}) + x^5 (3a_{12}\lambda^2 + 4a_{31}\lambda + a_{50}) + \dots + \varphi_n(x, \lambda x^2) = 0.$$

I valori di λ per cui si ha $\lambda^2 + 3a_{21}\lambda + a_{40} = 0$ ci danno due parabole osculatrici $C_2^{(O)}$ e $\bar{C}_2^{(O)}$ che hanno un contatto almeno 5-ptto con la C^n nel punto O . Se il discriminante dell'equazione è nullo, le due parabole sono uguali.

A questo punto facciamo la seguente ipotesi: supponiamo che i due valori di λ coincidano ($\lambda_1 = \lambda_2 = -3a_{21}/2$) e che per essi si abbia anche

$$(3) \quad 3a_{12}\lambda_1^2 + 4a_{31}\lambda_1 + a_{50} = 0.$$

Allora le due parabole osculatrici $C_2^{(O)}$ e $\bar{C}_2^{(O)}$ non solo sono uguali, ma esse hanno un contatto almeno 6-ptto con la C^n assorbita nel punto O .

Interseco la C^n mediante il fascio di cubiche $|C_3|^1 : y = x^2(\lambda_1 + \mu x)$. Ottengo l'equazione:

$$(4) \quad \cancel{x^4(\lambda_1^2 + 3a_{21}\lambda_1 + a_{40})} + x^5(\cancel{2\lambda_1\mu + 3a_{21}\mu} + 3a_{12}\lambda_1^2 + 4a_{31}\lambda_1 + a_{50}) + x^6(\mu^2 + 6a_{12}\lambda_1\mu + 4a_{31}\mu + 6a_{22}\lambda_1^2 + 5a_{41}\lambda_1 + a_{60}) + \dots = 0.$$

I coefficienti di x^4 e x^5 sono nulli, come abbiamo fatto vedere in precedenza.

Ne segue che le generiche cubiche del fascio $|C_3|^1$ hanno contatto 6-ptto con la C^n nel punto O . Ci sono però due cubiche particolari $C_3^{(O)}$ e $\bar{C}_3^{(O)}$, dette cubiche osculatrici, che hanno un contatto 7-ptto con la C^n nel punto O . **Esse si**

ottengono per quei valori di μ che risultano radici dell'equazione di 2° grado in μ che si ottiene eguagliando a 0 il coefficiente di x^6 :

$$(5) \quad \mu^2 + \mu(6a_{12}\lambda_1 + 4a_{31}) + a_{03}\lambda_1^2 + 5a_{41}\lambda_1 + a_{60} = 0.$$

A questo punto, per il discriminante Δ dell'eq. (5) si possono verificare due casi:

$$\alpha) \quad \Delta \neq 0, \text{ e allora } \mu_1 \neq \mu_2, \text{ ossia } C_3^{(O)} \neq \bar{C}_3^{(O)};$$

$$\beta) \quad \Delta = 0, \text{ e allora } \mu_1 = \mu_2, \text{ ossia } C_3^{(O)} = \bar{C}_3^{(O)}.$$

Nel 1) caso, in relazione al valore μ_1 posso considerare un il fascio di quartiche $|C_4|^1$: $y = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x^3 + \rho x^4$, che hanno tutte contatto 7-ptto con la C^n nel punto O. Troverò poi una quartica particolare $C_4^{(O)}$ che ha contatto 8-ptto, e proseguendo avrò una successione di curve che hanno contatto crescente con la C^n .

In relazione al valore μ_2 posso considerare un il fascio di quartiche $|\bar{C}_4|^1$:

$y = \lambda_1 x^2 + \mu_2 x^3 + \rho x^4$, che hanno tutte contatto 7-ptto con la C^n nel punto O.

Troverò poi una quartica particolare $\bar{C}_4^{(O)}$ che ha contatto 8-ptto, e proseguendo avrò un'altra successione di curve che hanno contatto crescente con la C^n .

In conclusione, nel caso $\mu_1 \neq \mu_2$ **il punto doppio O è origine di due rami lineari a contatto 3-ptto (o del 2° ordine) fra di loro. Questo punto è detto tacnodo di 2ª specie o oscnodo.**

Veniamo a discutere il caso β): il coefficiente di x^6 è nullo e l'equazione di 2° grado in μ che si ottiene eguagliando a 0 il coefficiente ha 2 radici coincidenti $\mu_1 = \mu_2$; cioè il discriminante Δ dell'equazione è nullo.

In questo caso, come abbiamo visto, esistono due cubiche osculatrici coincidenti, $C_3^{(O)} \equiv \bar{C}_3^{(O)}$, che hanno anche esse un contatto 7-ptto con la C^n .

Ma quando $\Delta = 0$, le radici dell'equazione sono:

$$(6) \quad \mu_1 = \mu_2 = -3a_{12}\lambda_1 - 2a_{31}.$$

Come al solito, proseguo approssimando la C^n nell'intorno di O mediante un fascio di quartiche $|C_4|^1$: $y = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x^3 + \rho x^4$. Si ha il sistema

$$(7) \begin{cases} y = x^2(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2) \\ y^2 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{04}x^4 + 4a_{31}x^3y + 6a_{22}x^2y^2 + \\ + 4a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{50}x^5 + 5a_{41}x^4y + 10a_{32}x^3y^2 + \dots + \varphi_n(x, y) = 0, \end{cases}$$

da cui (8)

$$\begin{aligned} & x^4(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^2 + 3a_{21}x^4(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2) + 3a_{12}x^5(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^2 + \\ & + a_{03}x^6(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^3 + a_{40}x^4 + 4a_{31}x^5(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2) + \\ & + 6a_{22}x^6(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^2 + 4a_{13}x^7(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^3 + \\ & + a_{04}x^4(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^8 + a_{50}x^5 + 5a_{41}x^6(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2) + \\ & + 10a_{32}x^7(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)^2 + \dots + \varphi_n[x, x^2(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)] = 0. \end{aligned}$$

Poiché tutte le cubiche osculatrici hanno contatto 7-ptto, nell'equazione (8) posso limitarmi a prendere in considerazione il coefficiente di x^7 ; infatti i coefficienti di x^4, x^5, x^6 sono tutti nulli. Ne segue che l'equazione (8) avrà la forma:

$$(9) \quad x^7(2\rho\mu_1 + 6a_{12}\rho\lambda_1 + 4a_{31}\rho + 3a_{12}\mu_1^2 + 3a_{03}\lambda_1^2\mu_1 + 12a_{22}\lambda_1^2\mu_1 + 4a_{13}\lambda_1^3 + \\ + 5a_{41}\mu_1 + 10a_{32}\lambda_1^2 + a_{70}) + \dots + \varphi_n[x, x^2(\lambda_1 + \mu_1 x + \rho x^2)] = 0.$$

Diciamo, solo per inciso, che la somma dei primi tre termini del coefficiente di x^7 è nulla. Infatti, siamo nell'ipotesi $a_{30} = 0$ e nella condizione $\mu_1 = \mu_2 = -3a_{12}\lambda_1 - 2a_{31}$; di conseguenza si avrà:

$$(10) \quad \begin{aligned} 2\rho\mu_1 + 6a_{12}\rho\lambda_1 + 4a_{31}\rho &= 2\rho(-3a_{12}\lambda_1 - 2a_{31}) + 6a_{12}\rho\lambda_1 + 4a_{31}\rho = \\ &= -\cancel{6a_{12}\rho\lambda_1} - \cancel{4a_{31}\rho} + \cancel{6a_{12}\rho\lambda_1} + \cancel{4a_{31}\rho} = 0 \end{aligned}$$

Si noti che il coefficiente di x^7 è un'espressione che contiene i numeri λ_1 e μ_1 . Due casi sono ora possibili:

- γ) I valori di λ_1 e μ_1 non rendono nullo il coefficiente di x^7 ;
- δ) i valori di λ_1 e μ_1 rendono nullo il coefficiente di x^7 .

Nel primo caso posso dire che tutte le quantiche del fascio

$|C_4|^1: y = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x^3 + \rho x^4$ hanno contatto 7-ptto con la C^n nel punto O e non ve ne è alcuna che abbia contatto maggiore di 7. Poiché non esiste la successione $C_4^{(0)}, C_5^{(0)}, C_6^{(0)}, \dots$ posso dire che il punto doppio O non è origine di rami

lineari. In questo caso il punto doppio O si dice cuspide di 3^a specie.

Le tabelle riportate a pagina 58 ci consentono subito di riconoscere una cuspidi di 3^a specie.

n. 11 – Tacnodi di 3^a specie

Andiamo al caso $\delta)$ del paragrafo precedente: cioè i valori di λ_1 e μ_1 di $C_2^{(O)}$ e $C_3^{(O)}$ rendono nullo il coefficiente di x^7 dell'equazione (9).

Poiché questi valori fanno anche scomparire ρ dai coefficienti di x^5 e x^6 , posso dire

Che le cubiche osculatrici $C_3^{(O)}$ e $\bar{C}_3^{(O)}$ hanno contatto 8-ptto con la C^n nel punto O.

Ne segue che tutte le quartiche del fascio $|C_4|^1 : y = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x^3 + \rho x^4$ hanno contatto 8-ptto con la C^n nel punto doppio O. Ci saranno però due quartiche osculatrici $C_4^{(O)}$ e $\bar{C}_4^{(O)}$ che hanno contatto 9-ptto con la C^n nel punto O. Esse si ottengono per quei valori di ρ che risultano delle radici dell'equazione di 2^o grado in ρ che si ottiene eguagliando a 0 il coefficiente di x^8 .

Se queste radici sono distinte, ottengo due successioni di curve che si vanno distaccando dal punto O. Per queste due successioni si ha:

$$(1) \quad C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}, C_2^{(O)} = \bar{C}_2^{(O)}, C_3^{(O)} = \bar{C}_3^{(O)}, C_4^{(O)} \neq \bar{C}_4^{(O)}, C_5^{(O)} \neq \bar{C}_5^{(O)}, \dots$$

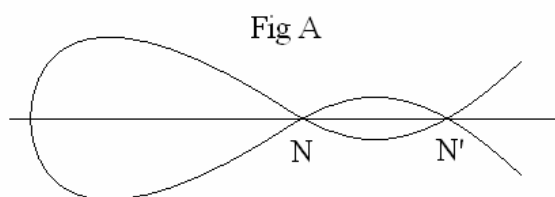
Il punto doppio O è origine di 2 rami lineari che si distaccano dal punto O e che hanno contatto 4-ptto, ossia del 3^o ordine, fra di loro.

Questo punto si dice tacnodo di 3^a specie.

La tabella della pagina seguente ci permette di riconoscere facilmente questo tipo di punto e gli altri già studiati.

NOTA

Un tacnodo di 1^a specie può pensarsi come posizione limite di 2 punti doppi che sono venuti a coincidere (fig. A). Ciò spiega la molteplicità di intersezione 4 del tacnodo con la sua tangente.



n. 12 – Tabelle riassuntive.

Concludiamo lo studio dei punti doppi di una C^n dando alcune utili tabelle, da cui si può facilmente riconoscere la natura del punto della curva in esame.

Il punto doppio è una cuspidi di 1^a specie

3-pto	3-pto $a_{30} \neq 0$
$C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$	$ C_2 ^1$: qualsiasi conica del fascio ha contatto 3-pto con la C^n nel punto doppio O; nessuna ha contatto maggiore. Pertanto le coniche restano indeterminate, non ne posso trovare una particolare

Il punto doppio è un tacnodo di 1^a specie: i due rami del tacnodo sono lineari ed hanno contatto del 1° ordine

4-pto	5-pto	6-pto	7-pto	(h+3)-pto
$C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$	$C_2^{(O)} \neq \bar{C}_2^{(O)}$	$C_3^{(O)} \neq \bar{C}_3^{(O)}$	$C_4^{(O)} \neq \bar{C}_4^{(O)}$		$C_h^{(O)} \neq \bar{C}_h^{(O)}$

Il punto doppio è una cuspidi di 2^a specie

4-pto	5-pto	5-pto $a_{30} = 0$
$C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$	$C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$	$ C_3 ^1$: tutte le cubiche del fascio hanno contatto 5-pto con la C^n nel punto doppio O; nessuna ha contatto maggiore. Pertanto le cubiche del fascio restano indeterminate; non ne posso trovare una particolare.

Il punto doppio è un tacnodo di 2^a specie o oscnodo: i due rami sono lineari ed hanno un contatto del 2° ordine

4-pto	6-pto	7-pto	8-pto	(h+4)-pto
$C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$	$C_2^{(O)} = \bar{C}_2^{(O)}$	$C_3^{(O)} \neq \bar{C}_3^{(O)}$	$C_4^{(O)} \neq \bar{C}_4^{(O)}$		$C_h^{(O)} \neq \bar{C}_h^{(O)}$

Il punto doppio è una cuspidi di 3^a specie

4-pto	6-pto	7-pto	7-pto
$C_1^{(O)} = \bar{C}_2^{(O)}$	$C_2^{(O)} = \bar{C}_2^{(O)}$	$C_3^{(O)} = \bar{C}_3^{(O)}$	$ C_4 ^1$: tutte le quartiche del fascio hanno contatto 7-pto con la C^n nel punto doppio O ; nessuna ha contatto maggiore. Pertanto le quartiche restano indeterminate; non ne posso trovare una particolare.

Il punto doppio è un tacnodo di 3^a specie

4-pto	6-pto	8-pto	9-pto	(h+5)-pto
$C_1^{(O)} = \bar{C}_1^{(O)}$	$C_2^{(O)} \neq \bar{C}_2^{(O)}$	$C_3^{(O)} = \bar{C}_3^{(O)}$	$C_4^{(O)} = \bar{C}_4^{(O)}$		$C_h^{(O)} \neq \bar{C}_h^{(O)}$

Lo studio dei punti doppi di una C^n si può riassumere con la seguente tabella:

- | | | |
|--|------|-----------------|
| • 1 nodo qualsiasi | vale | 2 punti doppi; |
| • 1 tacnodo di 1 ^a specie | “ | 2 punti doppi; |
| • 1 tacnodo di 2 ^a specie (oscnodo) | “ | 3 punti doppi; |
| • 1 tacnodo di 3 ^a specie | “ | 3 punti doppi; |
| • 1 cuspidi di 1 ^a specie | “ | 1 punto doppio; |
| • 1 cuspidi di 2 ^a specie | “ | 2 punti doppi; |
| • 1 cuspidi di 3 ^a specie | “ | 3 punti doppi. |

n. 13 – Punti semplici non ordinari di una curva

Sia P un punto semplice di una curva piana $\Gamma: f(x, y) = 0$; ciò significa che le due derivate parziali prime f_x, f_y , calcolate nel punto P , non sono entrambe nulle.

Se la tangente nel punto P ha contatto bipunto con la curva, il punto di contatto si dice punto semplice ordinario; se la tangente ha contatto maggiore, il punto si dice punto semplice non ordinario.

Per semplicità, riferiamoci ad una curva algebrica piana C^n . Se la tangente ha esattamente 3 intersezioni con la C^n riunite nel punto di contatto, il punto si dice punto di flesso ordinario o di 1^a specie.

In generale, il punto di contatto di una curva con la sua tangente si dice punto di flesso se il numero dei punti comuni alla C^n e alla tangente è dispari: $(2k+1)$; si dice punto di ondulazione se il numero dei punti comuni alla C^n e alla tangente è pari: $(2k)$.

Ricordo che se nel punto P di una curva Γ la tangente ha contatto $(2k+1) \cdot \text{pto}$ con essa, la curva attraversa la tangente nell'intorno del punto di contatto. Rispetto all'asse x , la Γ da concava diventa convessa, o viceversa.

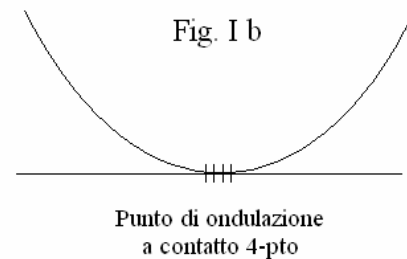
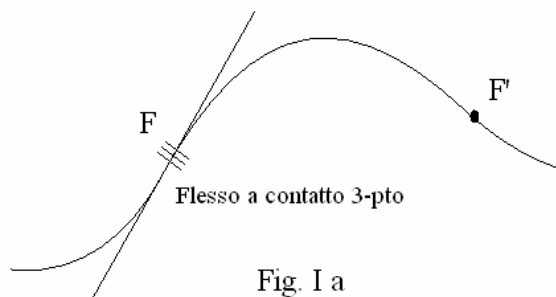
Se invece nel punto P di una curva la tangente ha contatto $2k \cdot \text{pto}$ con essa, la curva si trova tutta da una stessa parte nell'intorno del punto di contatto.

NOTARE

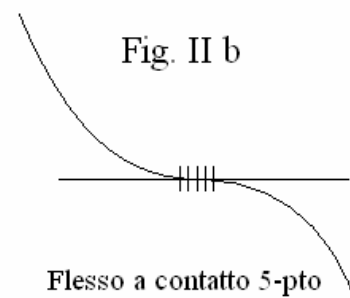
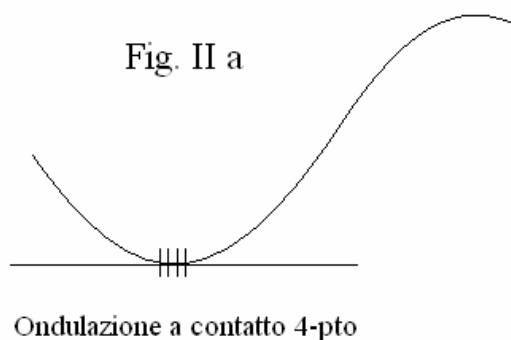
Teorema. Un punto semplice non ordinario di una curva in cui la tangente ha contatto $k \cdot \text{pto}$ con la curva stessa, vale $k-2$ flessi a contatto tripunto.

Facciamo alcuni esempi con opportune figure che servono ad illustrare il teorema.

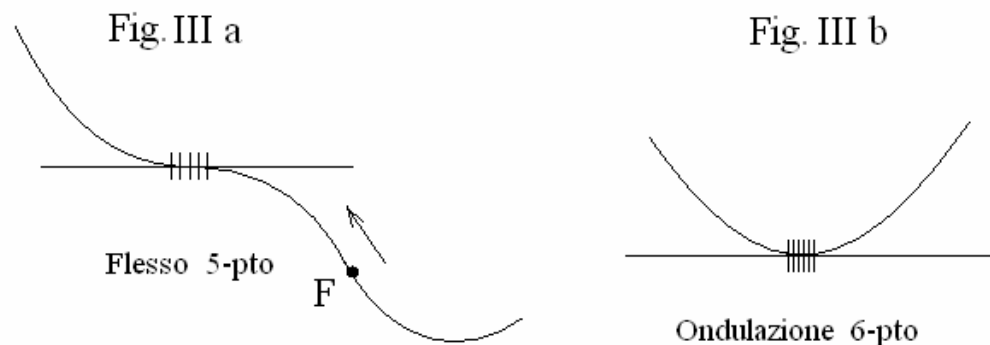
1) Un punto di ondulazione a contatto $4 \cdot \text{pto}$ vale per 2 flessi a contatto tripunto (vedi fgg. Ia, Ib).



2) Un flesso a contatto $5 \cdot \text{pto}$ vale per 3 flessi a contatto 3 $\cdot \text{pto}$ (fgg. IIa, IIb).



- 1) Un punto di ondulazione a contatto 6·pto vale per 4 flessi a contatto 3·pto :
vedi
le figure IIIa, IIIb.



Queste illustrazioni ci mostrano che se un punto semplice non ordinario di una curva ha contatto k ·pto con la curva stessa, allora esso vale $k - 2$ flessi a contatto 3·pto.

n. 14 – Punti singolari di una curva algebrica (Lezioni Prof. Roghi)

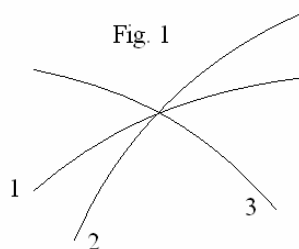
Nel piano riferito ad un riferimento cartesiano Oxy , consideriamo una curva algebrica di ordine n , che indicheremo con il simbolo C^n . Il numero dei parametri non omogenei della C^n , cioè il n° dei suoi coefficienti -1 , è $n(n+3)/2$. Il massimo numero di punti doppi che essa può avere è $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; in tal caso la curva si dice di genere zero ed è razionale, ossia le

coordinate x, y di un punto variabile sulla curva si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro t , ossia come quozienti di due polinomi

$$(1) \quad x = \frac{P_1(t)}{P_3(t)}, \quad y = \frac{P_2(t)}{P_3(t)}.$$

Le (1) si dicono “equazioni parametriche razionali della curva”. Per esempio, una cubica C^3 è razionale se ha un punto doppio.

Data una C^n , un punto s -plo ordinario conta come $\binom{s}{2}$ punti doppi, come se si contassero due a due i punti di intersezione degli s rami lineari che escono dal punto s -plo. Nel caso di un punto triplo (fig. 1) si hanno tre punti doppi dati dalle intersezioni



(2) ramo $1 \cap$ ramo 2 , ramo $1 \cap$ ramo 3 , ramo $2 \cap$ ramo 3 .

Supponiamo che una C^n razionale possieda r punti multipli

$$(*) \quad \begin{array}{l} P_1, P_2, \dots, P_r \\ s_1, s_2, \dots, s_r \end{array}$$

Poiché la C^n è razionale, questi punti multipli contano in totale come

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi. Consideriamo in particolare una quartica C^4 ; essa è

razionale se ha $(4-1)(4-2)/2 = 3$ punti doppi o un punto triplo (infatti un punto triplo vale come 3 punti doppi). Vediamo alcuni casi che si possono presentare nello studio dei punti singolari di una C^4 .

1° caso. $A(x_1, y_1)$ è un punto triplo:

$$(3) \quad \begin{cases} C^4 \\ y - y_1 = t(x - x_1) \end{cases}$$

Interseco la C^4 con un fascio di rette per il punto triplo: sistema (3).

Ricavo y dalla 2ª equazione e sostituisco nella prima; si ottiene una equazione risolvente di 4° grado in x di cui conosco a priori una soluzione tripla $x = x_1$:

$$(4) \quad \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \mu = 0.$$

Ciò corrisponde al fatto che una retta generica per il punto triplo ha 3 intersezioni con la C^4 assorbite in tal punto. Divido l'equazione risolvente (4) per $(x - x_1)^3$ e ottengo una equazione di 1° grado in x da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t .

Sostituisco ora il valore di x nella equazione $y - y_1 = t(x - x_1)$ dell'equazione del fascio di rette e ricavo la y .

Si hanno così le equazioni parametriche della curva:

$$(5) \quad x = x(t), \quad y = y(t).$$

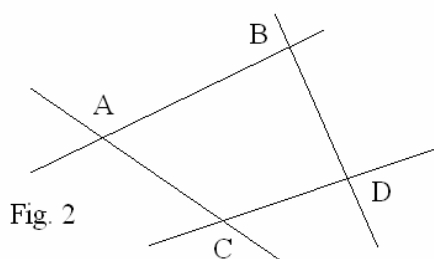
2° caso. La C^4 ha tre punti doppi A, B, C .

Si possono verificare allora 3 sottocasi:

$$\text{I) } A \neq B \neq C, \quad \text{II) } A = B \neq C, \quad \text{III) } A = B = C.$$

Sottocaso I): $A \neq B \neq C$, la C^4 ha 3 punti doppi distinti.

Sia D un quarto punto appartenente alla quartica e di coordinate particolarmente semplici, e sia $|C_2|^I$ il fascio di coniche di punti base A, B, C, D (fig. 2).



Intersechiamo la C^4 con il fascio di coniche $|C_2|^I$:

$$(6) \quad \begin{cases} C^4 \\ AB \cdot CD + tAC \cdot BD = 0 \end{cases}.$$

Otteniamo un sistema di 8^0 grado, nelle variabili x, y , del quale conosciamo a priori ben 7 soluzioni (possiamo considerare le ascisse):

$$(*) \quad \begin{array}{ll} x = x_A & \text{soluzione 2 volte per la risolvente del sistema,} \\ x = x_B & \text{soluzione 2 volte,} \\ x = x_C & \text{soluzione 2 volte,} \\ x = x_D & \text{soluzione 1 volta (D è un punto semplice).} \end{array}$$

Dividendo successivamente per $(x - x_A)^2, (x - x_B)^2, (x - x_C)^2, x - x_D$ otteniamo un'equazione di 1^0 grado in x , da cui possiamo ricavare la x in funzione del parametro t .

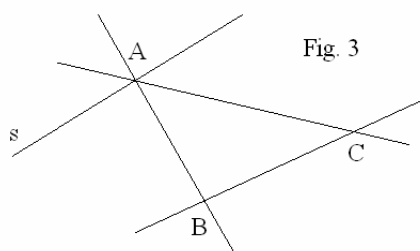
Sostituendo il valore di x nell'equazione risolvente possiamo ricavare la y . La C^4 ha quindi le equazioni parametriche

$$(*) \quad x = x(t), \quad y = y(t).$$

NOTA 1. Consideriamo sempre il caso che la C^4 abbia 3 punti doppi distinti $A \neq B \neq C$.

C'è un modo di procedere che ci permette di fare a meno di trovare il quarto punto D : basta che una delle tangenti in A, B, C sia particolarmente semplice (ossia, abbia un coefficiente angolare piccolo).

Per esempio, supponiamo che nel punto A la tangente s sia particolarmente semplice e consideriamo il fascio di coniche $|C_2|^I$ che ha il punto base A , contato 2 volte, e gli altri punti base distinti B, C (fig. 3).



Intersechiamo la C^4 con il fascio di coniche $|C_2|^1$

$$(7) \quad \begin{cases} C^4 \\ s \cdot BC + tAB \cdot AC = 0 \end{cases} .$$

Otteniamo un sistema di 8^0 grado, nelle variabili x, y , del quale conosciamo a priori 7 soluzioni:

$$(*) \quad \begin{array}{ll} x = x_A & \text{soluzione 3 volte; due del punto doppio + una} \\ & \text{infinitamente vicina ad esse sulla tangente;} \\ x = x_B & \text{soluzione doppia} \\ x = x_C & \text{soluzione doppia} \end{array} .$$

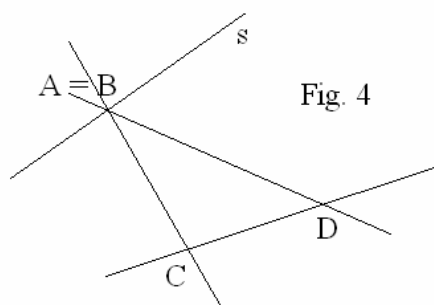
Dividendo successivamente per $(x - x_A)^3$, $(x - x_B)^2$, $(x - x_C)^2$ otteniamo una equazione di 1^0 grado in x da cui possiamo ricavare la x in funzione del parametro t .

Sostituendo il valore di x nell'equazione di $|C_2|^1$ possiamo ricavare la y in funzione del parametro t . Si ottengono così le equazioni parametriche della C^4 .

Sottocaso II): $A = B \neq C$; ciò succede, per es., quando la C^4 ha un tacnodo di 1^a specie o una cuspidale doppia di 2^a specie (ognuno di essi, infatti, vale per due punti doppi).

Sia s la tangente alla C^4 nel punto doppio $A = B$ e D sia un quarto punto appartenente alla C^4 e di coordinate particolarmente semplici.

Sia poi $|C_2|^1$ il fascio di coniche che ha i punti base C, D e i due punti coincidenti $A = B$ (la generica conica del fascio è tangente alla curva, e quindi alla tangente s , nei due punti; fig. 4).



Interseco la C^4 con il fascio di coniche:

$$(8) \quad \begin{cases} C^4 \\ s \cdot CD + tAC \cdot AD = 0 \end{cases} .$$

Otengo un sistema di 8^o grado in x, y di cui conosco a priori 7 soluzioni:

$$\begin{array}{lll}
 & x = x_A & \text{soluzione 4 volte} \\
 (*) & x = x_B & \text{" 2 volte} \\
 & x = x_C & \text{" 1 volta .}
 \end{array}$$

Dividendo successivamente per $(x - x_A)^4$, $(x - x_B)^2$, $x - x_C$ ottengo un'equazione di 1^o grado in x , da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t .

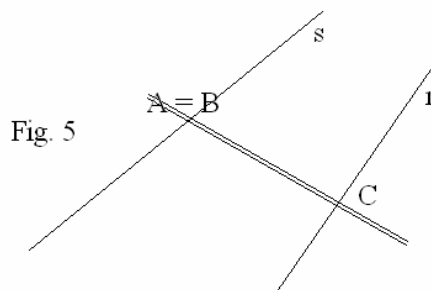
Sostituendo poi il valore di x nell'equazione risolvente, si ricava la y in funzione del parametro t . La C^4 ha quindi le equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$.

NOTA 2 .

Consideriamo ancora il caso che la C^4 abbia 2 punti doppi coincidenti e l'altro distinto, cioè $A = B \neq C$.

Possiamo fare a meno di trovare il quarto punto D: basta che una delle tangenti nel punto C abbia un'equazione particolarmente semplice.

Sia s la tangente alla C^4 nei due punti doppi coincidenti A, B ed r una delle due tangenti nel punto C . Consideriamo il fascio di coniche $|C_2|^1$ che ha i punti base A e C , contato ognuno volte (fig. 5) :



Intersechiamo la C^4 con il fascio di coniche $|C_2|^1$:

$$(9) \quad \begin{cases} C^4 \\ s \cdot r + t \overline{AC}^2 = 0 . \end{cases}$$

Otteniamo un sistema di 8^o grado nelle variabili x, y di cui conosciamo a priori 7 soluzioni:

$$\begin{array}{ll}
 (*) & x = x_A \text{ soluzione 4 volte,} \\
 & x = x_C \text{ soluzione 3 volte: 2 del punto doppio + 1 infinitamente} \\
 & \quad \text{vicina sulla tangente } r .
 \end{array}$$

Dividendo successivamente per $(x - x_A)^4$, $(x - x_C)^3$ otteniamo un'equazione di primo grado in x da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t . Sostituendo il valore di x nell'equazione risolvente, si ricava la y in funzione del parametro t . Si ottengono in tal modo le equazioni parametriche della C^4 .

Sottocaso III) : $A = B = C$, cioè la C^4 ha 3 punti doppi coincidenti; ciò succede per esempio quando essa ha un tacnodo di 2^a specie o una cuspid di 3^a specie.

Questi tre punti infinitamente vicini non possono giacere su una stessa retta, cioè sulla tangente alla C^4 in $A = B = C$. In tal caso, infatti, la generica retta per A avrebbe 6 intersezioni con la curva assorbite in tal punto e quindi essa sarebbe degenera. Ne segue che i tre punti si troveranno sulla parabola osculatrice nel punto $A=B=C$ o sul cerchio osculatore (fig. 6).

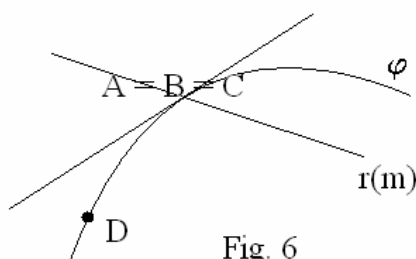


Fig. 6

Sia ϕ la parabola osculatrice, D un punto di coordinate particolarmente semplice della C^4 ; s la retta tangente alla curva, e quindi alla parabola osculatrice, nel punto A e sia $r(m)$ una retta generica, di coefficiente angolare m , passante per il punto di contatto A .

Considero la rete di coniche

$$(10) \quad \phi + t \cdot s \cdot r(m) = 0.$$

Impongo alla rete di passare per il punto D ; trovo così uno dei due parametri t , m e ciò mi permette di passare da una rete ad un fascio di coniche $|C_2|^1$.

Interseco la C^4 con il fascio ottenuto:

$$(11) \quad \begin{cases} C^4 \\ |C_2|^1 \end{cases}.$$

Otengo un sistema di 8^o grado nelle variabili x, y del quale conosco a priori ben 7 soluzioni (ascisse):

$$(*) \quad \begin{array}{ll} x = x_A & 6 \text{ volte} \quad (2 + 2 + 2 \text{ soluzioni sovrapposte}), \\ x = x_D & 1 \text{ volta} \end{array}.$$

Dividendo successivamente per $(x - x_A)^6$, $x - x_D$ ottengo una equazione di 1° grado in x da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t . Sostituendo il valore di x nell'equazione risolvente posso ricavare la y in funzione del parametro t . La C^4 ha quindi le equazioni parametriche razionali

(12) $x = x(t), \quad y = y(t) \quad .$

Facciamo alcuni esercizi di applicazione che illustrano la teoria svolta. Questi sono stati presi dalle Lezioni del Prof. G. Roghi dell'Università "La Sapienza" di Roma.

n. 15 – Esercizio 1R (Y_∞ è una cuspide di 1^a specie)

Studiare la cubica (1) $C^3: x^2y - x^3 - 1 = 0$, ossia $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$.

Soluzione

Passo a coordinate omogenee e interseco con la retta impropria $z = 0$. Si ha

$$(1) \quad \begin{cases} x^2y - x^3 - z^3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x^2y - x^3 = 0, \quad x^2(y - x) = 0.$$

Si ricava: $x = 0$ 2 volte, $Y_\infty(0,1,0)$;
 $y = x$ $P_\infty(1,1,0)$.

Ciò ci dice che la retta impropria $z = 0$ ha 2 intersezioni con la C^3 nel punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$ e 1 intersezione nel punto $P_\infty(1,1,0)$.

Risolvo il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x^2y - x^3 - 1 = 0 \\ x = k \end{cases} \rightarrow k^2y - k^3 - 1 = 0:$$

intersecando la C^3 con la generica retta parallela all'asse y , l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi. Quindi la retta $x = k$ ha 2 intersezioni con la curva assorbite nel punto Y_∞ , che pertanto è un punto doppio. Le intersezioni diventano esattamente 3 per $k = 0$; pertanto $Y_\infty(0,1,0)$ è una cuspide di 1^a specie con tangente cuspidale (asintotica) la retta $x = 0$ (asse y). **I due rami della cuspide stanno da parti opposte rispetto alla tangente cuspidale e partono entrambi da una stessa estremità della retta. Si tratta di un comportamento che vale anche in casi analoghi.**

Studiando la funzione $y = f(x)$ con i metodi dell'Analisi matematica, si vede che la curva ha l'asintoto obliquo $y = x$, che ha un punto di minimo e che un suo ramo taglia l'asse x nel punto $(-1,0)$.

n. 16 – Esercizio 2R (Il punto Y_∞ è un punto doppio nodale)

Studiare la curva (1) $C^3 : x^3 - xy + 1 = 0$, ossia $y = \frac{x^3 + 1}{x}$.

Soluzione

Passo a coordinate omogenee e interseco con la retta impropria $z = 0$. Si ha

$$(1) \quad \begin{cases} x^3 - xyz + z^3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x^3 = 0, \quad Y_\infty(0,1,0) \text{ soluzione 3 volte.}$$

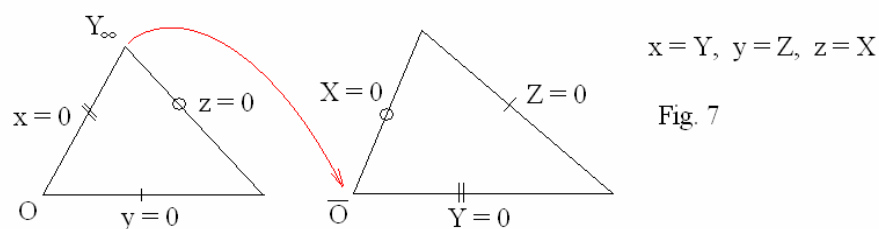
Ciò ci dice che la retta impropria $z = 0$ ha 3 intersezioni con la C^3 nel punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$.

Risolvo il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x^3 - xy + 1 = 0 \\ x = k \end{cases} \rightarrow ky - k^3 - 1 = 0 :$$

intersecando la C^3 con la generica retta parallela all'asse y , l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi. Quindi la retta $x = k$ ha 2 intersezioni con la curva assorbite nel punto Y_∞ , che pertanto è un punto doppio. Le intersezioni diventano esattamente 3 per $k = 0$; pertanto $Y_\infty(0,1,0)$ è un punto doppio nodale con tangenti a contatto 3-pto le rette $x = 0$ e $z = 0$, quindi esso è un nodo ordinario.

Verifica. Con una omografia trasporto il punto Y_∞ nell'origine \bar{O} di un nuovo riferimento proiettivo e lo studio (fig. 7).



Le equazioni dell'omografia sono : (3) $x = Y, y = Z, z = X$.

Passo a coordinate omogenee, le equazioni della C^3 e della sua trasformata \bar{C}^3 sono:

$$(4) \quad C^3 : x^3 - xyz + z^3 = 0, \quad \bar{C}^3 : Y^3 - YZX + X^3 = 0 .$$

Tornando a coordinate non omogenee si ha $\bar{C}^3 : Y^3 + X^3 - YX = 0$.

Da qui si vede che \bar{O} è un nodo ordinario con tangenti nodali $Y = 0$, $X = 0$.
Ne segue che anche il punto $Y_\infty(0,1,0)$, da cui \bar{O} proviene per trasformazione, è un nodo ordinario con tangenti la retta $x = 0$ e la retta impropria $z = 0$.

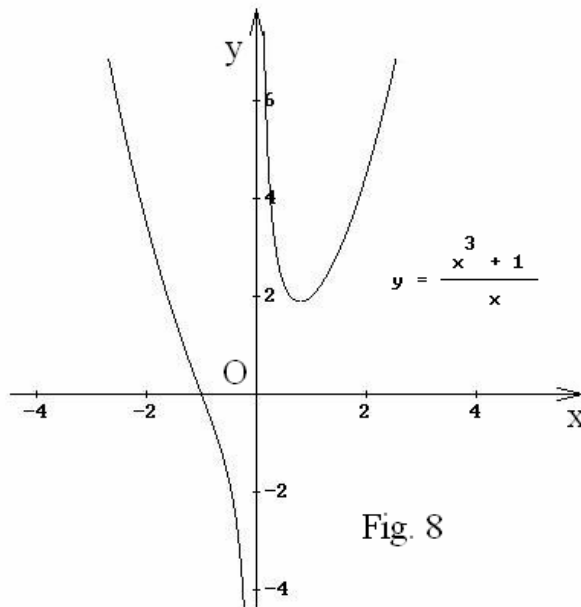


Fig. 8

Il grafico della curva è rappresentato in fig. 8. Rispetto alla tangente nel punto improprio abbiamo due rami situati da parti opposte rispetto ad essa: uno tocca in alto, l'altro tocca in basso.

n. 17 – Esercizio 3R (L'origine O è un tacnodo di 1^a specie)

Studiare l'origine $O(0,0)$ della quartica $C^4 : y^2 - xy^2 - x^3y - 4x^4 = 0$.

Soluzione

La C^4 è una curva irriducibile. L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali coincidenti di equazione $y = 0$ (asse x).

Interseco la C^4 con la tangente:

$$(1) \quad \begin{cases} C^4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 = 0, \quad \text{si ha } O(0,0) \text{ soluzione 4 volte.}$$

La tangente $y = 0$ ha contatto 4·pto con la C^4 nel punto doppio O . Il caso è dubbio:

$O(0,0)$ non è una cuspidi di 1^a specie, ma può essere un tacnodo o una cuspidi di 2^a o 3^a specie..

Approssimo la C^4 nell'intorno del punto doppio O mediante un fascio di parabole $|C_2|^1 : y = \lambda x^2$, tutte tangenti in O alla C^4 ; si ha il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} C^4 \\ y = \lambda x^2 \end{cases} \quad \lambda^2 x^4 - \lambda^2 x^5 - \lambda x^5 - 4x^4 = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(*) \quad (\lambda^2 - 4)x^4 - (\lambda^2 + \lambda)x^5 = 0.$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4·pto con la quartica nel punto doppio O ; ci sono però due parabole osculatrici distinte $[C_2^{(O)}, \bar{C}_2^{(O)}]$ che hanno contatto esattamente 5·pto. Esse si ottengono per i valori di λ per cui si ha $\lambda^2 - 4 = 0$, da cui $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$; quindi si ha

$$(3) \quad C_2^{(O)} : y = 2x^2, \quad \bar{C}_2^{(O)} : y = -2x^2.$$

Conclusione: l'origine O è un tacnodo di 1^a specie, **origine di due rami lineari che giacciono da parte opposta rispetto alla tangente $y = 0$: infatti λ_1 e λ_2 hanno segno opposto.**

Vogliamo ora trovare la cubica $C_3^{(O)}$ che oscula la C^4 in relazione al ramo $y = 2x^2$.

Approssimo la curva nell'intorno del punto $O(0,0)$ mediante un fascio di cubiche tutte tangenti in O alla C^4 . Si ha il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} y^2 - xy^2 - x^3y - 4x^4 = 0 \\ y = 2x^2 + \mu x^3 \end{cases}$$

$$(*) \quad (2x^2 + \mu x^3)^2 - x(2x^2 + \mu x^3)^2 - x^3(2x^2 + \mu x^3) - 4x^4 = 0,$$

$$(*) \quad \cancel{4x^4} + \mu^2 x^6 + 4\mu x^5 - \underline{4x^5} - \mu^2 x^7 - 4\mu x^6 - \underline{2x^5} - \mu x^6 - \cancel{4x^4} = 0.$$

$$\text{Si ottiene:} \quad (5) \quad x^5(4\mu - 6) + x^6(\mu^2 - 5\mu) - \mu^2 x^7 = 0.$$

Concludiamo: la generica cubica del fascio ha contatto 5·pto con la C^4 nel punto doppio O . Per $4\mu - 6 = 0$, cioè per $\mu = 3/2$, ne abbiamo una che ha contatto 6·pto: si ha cioè la cubica osculatrice $C_3^{(O)} : y = 2x^2 + \frac{3}{2}x^3$.

n. 18 – Esercizio 4R (L'origine O è un tacnodo di 1^a specie)

Studiare la quartica $C^4 : x^4 + 2x^3y - y^2 = 0$.

La C^4 è razionale se ha 3 punti doppi. L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali coincidenti di equazione $y = 0$ (asse x). Interseco la curva con la tangente:

$$(1) \quad \begin{cases} x^4 + 2x^3y - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{soluzione } x = 0 \text{ 4 volte.}$$

La tangente $y = 0$ ha contatto 4·pto con la C^4 nel punto doppio O. Il caso è dubbio: $O(0,0)$ non è una cuspidi di 1^a specie, ma può essere un tacnodo o una cuspidi di 2^a o 3^a specie. Approssimo la C^4 nell'intorno del punto O mediante un fascio di parabole $|C_2|^1 : y = \lambda x^2$, tutte tangenti in O alla C^4 ; si ha il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x^4 + 2x^3y - y^2 = 0 \\ y = \lambda x^2 \end{cases} \rightarrow x^4 + 2\lambda x^5 - \lambda^2 x^4 = 0. \quad \text{Ne segue}$$

$$(*) \quad (1 - \lambda^2)x^4 + 2\lambda x^5 = 0.$$

La generica parabola del fascio ha 4 intersezioni con la C^4 assorbite nel punto doppio.

Le intersezioni diventano esattamente 5 per i valori di λ per cui si ha:

$$(*) \quad \lambda^2 = 1, \quad \text{cioè } \lambda = \pm 1.$$

Si hanno così due parabole osculatrici distinte

$$(3) \quad C_2^{(0)} \equiv y = x^2, \quad \bar{C}_2^{(0)} \equiv y = -x^2$$

che hanno un contatto 5-ptto con la quartica assorbite nel punto O; si conclude che
“ Il punto doppio O è un tacnodo di 1^a specie; esso vale per 2 punti doppi”.

Cerco un eventuale punto doppio della curva fra i suoi punti impropri.

Scrivo l'equazione della C^4 in coordinate omogenee e interseco con la retta impropria:

$$(4) \quad \begin{cases} x^4 + 2x^3y - y^2z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{si ricava} \quad x^3(x + 2y) = 0.$$

La retta impropria interseca la C^4 nei punti

$$(*) \quad \begin{array}{ll} P_\infty(2, -1, 0) & \text{punto semplice,} \\ Y_\infty(0, 1, 0), & \text{soluzione 3 volte.} \end{array}$$

Ne segue che la retta impropria $z = 0$ ha contatto 3-ptto con la C^4 nel punto Y_∞ : questo punto può essere una cuspidale di prima specie o un punto semplice, ma di flesso.

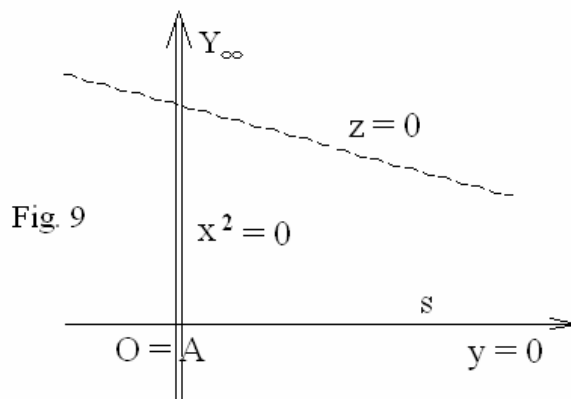
Interseco la curva con la generica parallela all'asse y :

$$(5) \quad \begin{cases} C^4 \\ x = k \end{cases} \rightarrow k^4 + 2k^3y - y^2 = 0 .$$

L'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi, e per nessun valore di k si abbassa ulteriormente di grado. Pertanto $Y_\infty(0,1,0)$ è il terzo p.to doppio della C^4 e **l'unica retta che in esso ha contatto 3-ptto è la retta impropria $z = 0$. Si conclude che Y_∞ è una cuspidale di 1^a specie, con tangente cuspidale la retta impropria $z = 0$.**

Riassumendo, la C^4 ha i 3 punti doppi $O(0,0)$, $O(0,0)$, $Y_\infty(0,1,0)$.

Consideriamo il fascio di coniche avente i punti base $O(0,0)$ e Y_∞ contati due volte e costituito dalle due coniche degeneri $yz = 0$ e $x^2 = 0$: si tratta di un fascio di coniche bitangenti (fig. 9).



Intersecando la C^4 con il fascio di coniche si ha il sistema

$$(6) \quad \begin{cases} C^4 \\ s \cdot r + t \overline{OY_\infty}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^3y - y^2z^2 = 0 \\ yz - tx^2 = 0 \end{cases} .$$

Passando a coordinate non omogenee si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} x^4 + 2x^3y - y^2 = 0 \\ y = tx^2 \end{cases} \quad \text{sostituendo si ha}$$

$$(8) \quad x^4 + 2tx^5 - t^2x^4 = 0, \rightarrow (1 - t^2)x^4 + 2tx^5 = 0 .$$

L'equazione (8) ha la radice $x = 0$, soluzione 4 volte; infatti due punti doppi coincidono in $O(0,0)$.

Avendo considerata come altra componente della conica la retta impropria $z = 0$, la soluzione Y_∞ non compare, perché 3 soluzioni vengono subito assorbite: 2 del punto doppio $Y_\infty + 1$ soluzione per il punto Y_∞ sulla tangente $z = 0$.

Dalla (8) si ricava il valore di x in funzione del parametro t : $x = (t^2 - 1)/2t$. Sostituendo nella seconda equazione del sistema risolvete possiamo ricavare la y .

Le equazioni parametriche razionali della C^4 sono quindi date dal sistema

$$(9) \quad x(t) = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad y(t) = \frac{(t^2 - 1)^2}{4t}.$$

Con l'ausilio di un computer possiamo trovare il grafico della curva.

NOTA. Per verificare che il punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$ è una cuspide di 1^a specie possiamo trasportare con una omografia il punto nell'origine \bar{O} di un nuovo riferimento proiettivo (vedi fig. 7, pag. 72):

Con riferimento alla figura 7, le equazioni dell'omografia sono

$$(10) \quad x = Y, \quad z = X, \quad y = Z.$$

Scriviamo la curva in coordinate omogenee:

$$(11) \quad C^4 : x^4 + 2x^3y - y^2z^2 = 0; \quad \text{sostituendo si ha}$$

$$(*) \quad \bar{C}^4 : Y^4 + 2Y^3Z - Z^2X^2 = 0. \quad \text{Ponendo } Z = 1 \text{ si ha}$$

$$(12) \quad Y^4 + 2Y^3 - X^2 = 0.$$

Dalla (12) si vede chiaramente che il punto $\bar{O}(0,0)$ è un punto doppio con tangenti sovrapposte $X = 0$ (asse Y) a contatto tripunto. Allora non ci sono dubbi: il nuovo punto \bar{O} , ossia il punto Y_∞ della curva C^4 assegnata, è una cuspide di 1^a specie.

Ciò è quanto si voleva dimostrare.

n. 19 – Esercizio 5R (Chiellini, pg. 225; X_∞ è un tacnodo isolato di 1^a specie)

Studiare la quartica $C^4 : x^2 - 2y^3 + y^4 = 0$ (quartica piriforme).

Soluzione La C^4 è razionale se ha 3 punti doppi. L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali coincidenti di equazione $x = 0$ (asse y). Interseco la curva con la tangente:

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 - 2y^3 + y^4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad y^3(y-2) = 0.$$

Si ha la soluzione tripla $O(0,0)$ e la soluzione semplice $A(0,2)$. La tangente $x = 0$ ha contatto 3·pto con la C^4 nel punto doppio O . Non ci sono dubbi: $O(0,0)$ è una cuspidale di 1^a specie con tangente cuspidale $x = 0$. Come si è visto, questa retta interseca la C^4 nel punto $A(0,2)$.

Passo a coordinate omogenee e interseco la C^4 con la retta impropria $z = 0$:

$$(2) \quad \begin{cases} x^2z^2 - 2y^3z + y^4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y^4 = 0:$$

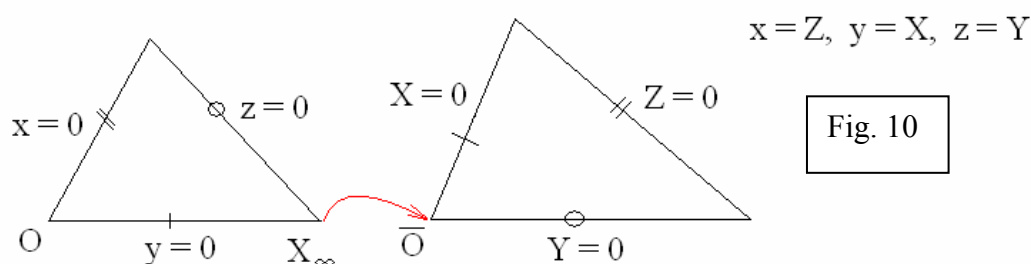
Ne segue che la retta impropria ha 4 intersezioni con la C^4 assorbite nel punto improprio $X_\infty(1,0,0)$ dell'asse x . Interseco con la retta $y = k$:

$$(3) \quad \begin{cases} y^4 - 2y^3 + x^2 = 0 \\ y = k \end{cases} \rightarrow x^2 + k^4 - 2k^3 = 0.$$

Intersecando la C^4 con la retta $y = k$, parallela all'asse x , l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi e per nessun valore di k si abbassa ulteriormente di grado.

Pertanto $X_\infty(1,0,0)$ è un punto doppio con tangente a contatto 4·pto la retta impropria $z = 0$. Il caso è dubbio.

Con una omografia trasporto il punto X_∞ nell'origine \bar{O} di un nuovo riferimento proiettivo e lo studio (fig. 10).



Con riferimento alla figura 10 le equazioni della omografia sono

$$(4) \quad x = Z, \quad y = X, \quad z = Y.$$

Le equazioni della C^4 e della sua trasformata \bar{C}^4 sono:

$$\bullet \quad C^4: y^4 - 2y^3z + x^2z^2 = 0, \quad \bar{C}^4: X^4 - 2X^3Y + Z^2Y^2 = 0.$$

Scrivo la \bar{C}^4 in coordinate non omogenee ponendo $Z = 1$. Si ha:

$$(5) \quad \bar{C}^4: Y^2 - 2X^3Y + X^4 = 0.$$

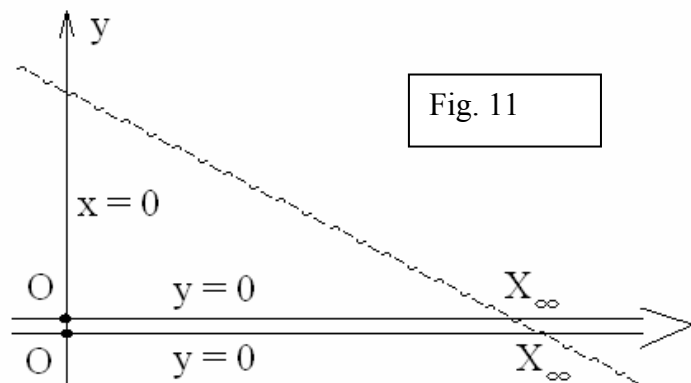
Posso dire che $\bar{O}(0,0)$ è un punto doppio con tangente a contatto 4·pto la retta $Y = 0$. Il caso è dubbio.

Approssimo la \bar{C}^4 nell'intorno del punto \bar{O} mediante il fascio di parabole $|C_2|^1$:
 $Y = \lambda X^2$ e interseco la \bar{C}^4 :

$$(6) \quad \begin{cases} Y^2 - 2X^3Y + X^4 = 0 \\ Y = \lambda X^2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &\lambda^2 X^4 - 2\lambda X^5 + X^4 = 0, \\ (7) \quad &(\lambda^2 + 1)X^4 - 2\lambda X^5 = 0. \end{aligned}$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4·pto con la \bar{C}^4 in \bar{O} . Per $\lambda^2 + 1 = 0$, cioè $\lambda = \pm i$, abbiamo due parabole immaginarie distinte a contatto 5·pto. Pertanto \bar{O} è un tacnodo di 1^a specie, isolato ma reale, per la \bar{C}^4 ; quindi $X_\infty(0,1,0)$ è un tacnodo isolato di 1^a specie, improprio ma reale, per la C^4 , con tangente doppia la retta impropria $z = 0$; esso vale per due punti doppi. Complessivamente la C^4 ha 3 punti doppi: 2 del tacnodo X_∞ e 1 della cuspidi di 1^a specie O . Quindi essa è una curva di genere zero, ossia ha il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo grado e quindi è una curva razionale.

Considero ora il fascio di coniche $|C_2|^1$ avente due punti base coincidenti con il tacnodo X_∞ e altri due punti base coincidenti con la cuspidi O e considero le coniche tangenti in $O(0,0)$ alla retta $x = 0$ (asse y) e nel punto $X_\infty(1,0,0)$ alla retta impropria $z = 0$ (fig. 11)



In coordinate omogenee, si ha quindi il fascio di coniche bitangenti

$$(8) \quad |C_2|^1: xz - t \cdot OX_\infty^2 = 0, \text{ ossia } xz - ty^2 = 0.$$

Passo a coordinate non omogenee e interseco la quartica con il fascio. Si ha:

$$(A) \quad \begin{cases} x^2 - 2y^3 + y^4 = 0 \\ x = ty^2 \end{cases}.$$

Otengo un sistema di 8^o grado di cui conosco a priori ben 7 soluzioni:

- $X_\infty(1,0,0)$ soluzione 4 volte: infatti il tacnodo di 1^a specie vale come 2 punti doppi ;
- $O(0,0)$ soluzione 3 volte: 2 soluzioni per il punto doppio O + 1 soluzione infinitamente vicina sulla tangente $x = 0$.

Sostituendo si ha:

$$(9) \quad t^2 y^4 - 2y^3 + y^4 = 0, \rightarrow y^3(t^2 y + y - 2) = 0.$$

L'equazione risolvente si è abbassata di 4 gradi perché già sono state assorbite le 4 soluzioni del punto improprio $X_\infty(1,0,0)$.

Il sistema (A) si spezza nei due sistemi equivalenti:

$$(B) \quad \begin{cases} y^3 = 0 \\ x = ty^2 \end{cases}, \quad (C) \quad \begin{cases} y = \frac{2}{t^2 + 1} \\ x = ty^2 \end{cases}.$$

Il sistema (B) ci dà la soluzione $O(0,0)$ contata 3 volte: 2 del punto doppio +1 infinitamente vicina ad esso sulla tangente $x = 0$.

Il sistema (C) ci dà le equazioni parametriche razionali della C^4 . Esse sono:

$$(10) \quad x(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}, \quad y(t) = \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Cenni sul grafico della C^4 . Riprendiamo l'equazione della curva:

$$(11) \quad x^2 = 2y^3 - y^4, \text{ ossia } x^2 = y^2(2y - y^2).$$

Da essa si vede che deve essere sempre

$$(12) \quad 2y - y^2 \geq 0; \quad \text{dalla disequazione si ricava } 0 \leq y \leq 2.$$

Ne segue che la curva giace tutta nel semipiano delle y positive ed è compresa fra le rette $y = 0$ e $y = 2$.

Dall'equazione (11) subito si ricava che la retta $y = 2$ è tangente alla C^4 nel punto $M(0;2)$.

Osservando poi che la curva è simmetrica rispetto all'asse y , possiamo trovare le rette

$y = k$ tangenti alla curva. Possiamo ottenere queste rette ricordando che nei punti di tangenza deve essere verificato il sistema

$$(D) \quad \begin{cases} f(P) = 0 \\ f_y(P) = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y^4 - 2y^3 + x^2 = 0 \\ 4y^3 - 6y^2 = 0 \end{cases}; \quad \rightarrow \quad 2y^2(2y-3) = 0.$$

Il sistema (D) ha le soluzioni : a) $y = 0$, $x = 0$, cioè la cuspide $O(0,0)$,

poiché in questo punto la tangente coincide con l'asse y ; b) $y = \frac{3}{2}$, $x = \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}$

Abbiamo così una curva chiusa compresa fra le rette $y = 0, y = 2$ (parallele all'asse x), e le rette $x = 3\sqrt{3}/4$ e $x = -3\sqrt{3}/4$, che toccano la curva

rispettivamente nei punti $T\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{2}\right)$ e $T'\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{2}\right)$ (fig. 12)

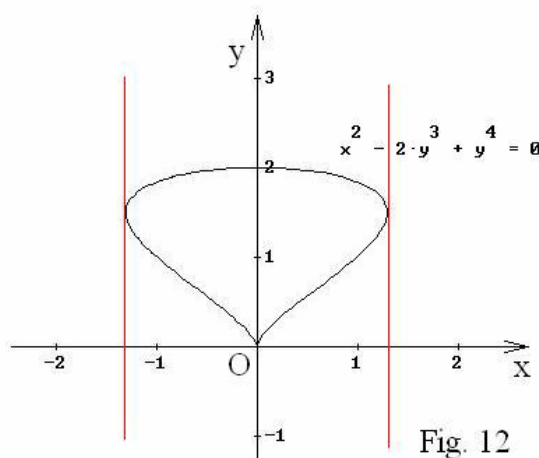


Fig. 12

Vogliamo vedere se dalle equazioni parametriche (10) è possibile ricavare equazioni parametriche di tipo trigonometrico, che sono più maneggevoli.

Riprendendo la seconda di esse si ha:

$$\bullet \quad y(t) = \frac{2}{1+t^2} = \frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}, \rightarrow \quad y = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Posto $t = \tan \frac{\varphi}{2}$ si ha $\cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, e quindi (13) $y(\varphi) = 1 + \cos \varphi$.

Dalle (10) osserviamo poi che si ha $x = ty^2$. Ne segue:

$$\bullet \quad x(\varphi) = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (1 + \cos \varphi)^2 = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi} (1 + \cos \varphi)^2.$$

Le equazioni parametriche, in forma trigonometrica, della quartica sono quindi:

$$(14) \quad \begin{cases} x(\varphi) = \operatorname{sen} \varphi \cdot (1 + \cos \varphi) \\ y(\varphi) = 1 + \cos \varphi, \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Vogliamo ora trovare l'area della superficie S compresa fra la curva e l'asse y . Dall'equazione cartesiana della C^4 si ha:

$$(15) \quad x^2 = 2y^3 - y^4, \quad \text{da cui} \quad x = \pm \sqrt{2y^3 - y^4} = \pm \sqrt{y^3(2 - y)}.$$

Limitandosi all'arco \widehat{OTM} di curva si ha: $x(y) = y^{3/2}(2 - y)^{1/2}$.

Poiché sulla corda OM di questo arco la variabile y varia fra i valori 0 e 2 , si ha l'integrale:

$$(16) \quad \text{area } S = \int_0^2 y^{\frac{3}{2}} (2 - y)^{\frac{1}{2}} dy.$$

La funzione integranda $y^{\frac{3}{2}} (2 - y)^{\frac{1}{2}}$ è del tipo $y^m (a + bx^n)^p$;

sappiamo che essa si può razionalizzare se risulta intero la seguente espressione:

$$(17) \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{\frac{3}{2}+1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

Poiché l'espressione è un numero intero, la funzione integranda si può razionalizzare ponendo:

$$(18) \quad \frac{a + by^n}{y^n} = t^h, \quad \text{cioè} \quad \frac{2-y}{y} = t^2, \quad \text{ove } h = 2 \text{ è il denominatore di } p.$$

Da $\frac{2-y}{y} = t^2$ si ricava:

$$(18) \quad 2 - y = yt^2 \quad \text{e quindi} \quad (19) : \quad y = \frac{2}{1+t^2}.$$

Dalle (18), (19) si ricava

$$(*) \quad 2 - y = \frac{2t^2}{1+t^2}, \quad \text{e quindi (a):} \quad (2-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{t \cdot \sqrt{2}}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Dalla (19) si ricava (b):} \quad y^{\frac{3}{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Differenziando la (19) si ha (c):} \quad dy = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt.$$

Grazie alle relazioni (a), (b), (c) si ha:

$$(20) \quad y^{\frac{3}{2}} (2-y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\sqrt{8}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{t\sqrt{2}}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-4t)}{(1+t^2)^2} dt, \quad \text{da cui}$$

$$(21) \quad y^{\frac{3}{2}} (2-y)^{\frac{1}{2}} dy = -\frac{16t^2}{(1+t^2)^4} dt.$$

Ora, posto $\frac{2-y}{y} = t^2$, \rightarrow quando $y = 0$ allora $t = \infty$,
quando $y = 2$ allora $t = 0$ e si ha :

$$(22) \quad \text{area } S = \int_0^2 y^{\frac{3}{2}} (2-y)^{\frac{1}{2}} dy = - \int_{+\infty}^0 \frac{16t^2}{(1+t^2)^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{16t^2}{(1+t^2)^2} dt ;$$

$$(23) \quad \text{area } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctg(n) + \frac{3n^5 + 8n^3 - 3n}{3(1+n^2)^2} \right] = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

n. 20 – Esercizio 6R (I punti ciclici sono nodi semplici isolati)

Studiare la quartica (1) $C^4: (x^2 + y^2)^2 + 4x(x^2 + y^2) + 5x^2 + 3y^2 + 2x = 0$.

Soluzione.

La C^4 è razionale se ha 3 punti doppi. Omogeneizzando l'equazione e intersecando con la retta impropria $z = 0$ si ha:

$$(1) \quad \begin{cases} C^4 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 0 . \text{ Si hanno i punti ciclici}$$

$$(*) \quad I_1(1, i, 0) \text{ 2 volte, } I_2(1, -i, 0) \text{ 2 volte} .$$

La retta impropria $z = 0$ interseca la C^4 2 volte in ogni punto ciclico.

Interseco la curva con la generica retta passante per il primo punto ciclico. Si ha

$$(2) \quad \begin{cases} C^4 \\ y = ix + h \end{cases} \rightarrow y^2 = -x^2 + h^2 + 2ihx .$$

Sostituiamo nella (1) e procediamo nei successivi passaggi; si ha:

$$(*) \quad (x^2 - x^2 + 2ihx + h^2)^2 + 4x(x^2 - x^2 + 2ihx + h^2) + 5x^2 + 3(-x^2 + 2ihx + h^2) + 2x = 0 ,$$

$$(*) \quad -4h^2x^2 + 4ih^3x + h^4 + 8ihx^2 + 4h^2x + 5x^2 - 3x^2 + 6ihx + 3h^2 + 2x = 0 ,$$

$$(3) \quad x^2(-4h^2 + 8ih + 2) + x(4ih^3 + 4h^2 + 6ih + 2) + h^4 + 3h^2 = 0 .$$

La (3) ci dice che l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi per qualsiasi valore di h , cioè la generica retta passante per il punto ciclico I_1 ha 2 intersezioni con la curva assorbite nel punto stesso. Possiamo già dire che I_1 è un punto doppio.

Le intersezioni diventano esattamente 3 per i valori di h per cui si ha:

$$(*) \quad 2h^2 - 4ih - 1 = 0, \rightarrow h = \frac{2i \pm \sqrt{-4 + 2}}{2} .$$

Si conclude che **i due punti ciclici sono punti doppi nodali con tangenti a contatto 3-pto, cioè i punti ciclici sono nodi semplici e isolati.**

La curva C^4 è simmetrica rispetto all'asse x , perciò se esiste un altro punto doppio esso deve stare necessariamente su tale asse; in caso contrario si avrebbero altri 2 punti doppi, mentre una C^4 può avere al massimo 3 di tali punti.

Interseco la C^4 con l'asse x :

$$(4) \quad \begin{cases} C^4 \\ y=0 \end{cases}, \quad x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = 0.$$

Si ottiene: $x(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) = 0$, ossia

$$(*) \quad x(x+1)(x^2 + 3x + 2) = 0, \quad \text{quindi} \quad (5) \quad x(x+1)^2(x+2) = 0.$$

La (5) ci dice che l'asse x interseca la C^4 nei punti di ascisse

$$(*) \quad x = 0 \text{ una volta, } x = -1 \text{ due volte, } x = -2 \text{ una volta.}$$

L'asse x , pertanto, interseca la C^4 una volta nei punti semplici $O(0,0)$, $B(-2,0)$ e due volte nel punto $A(-1,0)$. Potrebbe darsi che A sia un altro punto doppio: in tal caso esso deve annullare il polinomio $f(x,y)$ e le derivate parziali prime f_x ed f_y .

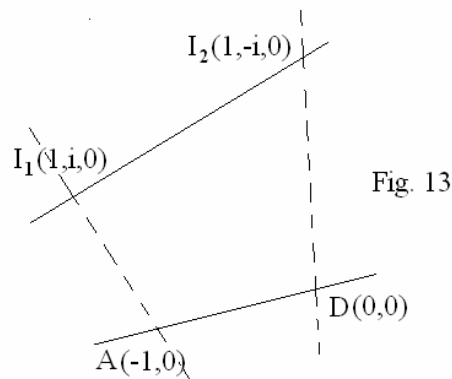
$$(6) \quad \begin{cases} f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 4x(x^2 + y^2) + 5x^2 + 3y^2 + 2x = 0 \\ f_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x + 4(x^2 + y^2) + 8x^2 + 10x + 2 \\ f_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 8xy + 6y \end{cases}$$

Si verifica subito che nel punto $A(-1,0)$ abbiamo:

$$(*) \quad f(A) = 0, \quad f_x(A) = 0, \quad f_y(A) = 0.$$

Pertanto $A(-1,0)$ è il terzo punto doppio della C^4 ; ne segue che questa curva, avendo 3 punti doppi, è razionale.

Poiché $O(0,0)$ è un quarto punto di coordinate particolarmente semplici della C^4 , posso considerare il fascio di coniche avente i 4 punti base $I_1, I_2, A(-1,0), O(0,0)$; (fig. 13).



L'equazione del fascio è $|C_2|^I: I_1I_2 \cdot AO + tAI_1 \cdot OI_2 = 0$.

L'equazione del fascio è una circonferenza; infatti, condizione necessaria e sufficiente perché una conica sia una circonferenza è che essa passi per i punti

ciclici. Poiché ogni conica del fascio passa anche per l'origine O , l'equazione del fascio è:

$$(7) \quad x^2 + y^2 + ax + ty = 0 .$$

Impongo il passaggio per il punto $A(-1,0)$ e ottengo

$$(*) \quad 1 - a = 0, \quad \text{cioè} \quad a = 1 ; \quad \text{pertanto l'equazione del fascio è :}$$

$$(8) \quad x^2 + y^2 + x + ty = 0 .$$

Interseco la C^4 con il fascio di circonferenze; si ha il sistema di 8° grado:

$$(9) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + 4x(x^2 + y^2) + 5x^2 + 3y^2 + 2x = 0 \\ x^2 + y^2 = -x - ty . \end{cases}$$

Sostituendo si ha il sistema più semplice:

$$(10) \quad \begin{cases} (x + ty)^2 - 4x(x + ty) + 5x^2 + 3y^2 + 2x = 0 \\ x^2 + y^2 + x + ty = 0 . \end{cases}$$

Il sistema è di 4° grado perché sono già stati assorbiti i due punti impropri dati dai punti ciclici.

Formo un fascio fra le due coniche del sistema (10). Si ha

$$(11) \quad x^2 + y^2 + x + ty + \lambda[(x + ty)^2 - 4x(x + ty) + 5x^2 + 3y^2 + 2x] = 0 .$$

Nell'ambito di questo fascio non ci sono più i punti ciclici, perché già sono stati assorbiti. Ci deve essere però la conica degenerare spezzata nella retta OA e in un'altra retta per il punto A ; ed è proprio questa conica che io voglio cercare.

Il fascio (3) si deve dunque spezzare nella retta $OA \equiv y = 0$ e in un'altra retta per A .

Devo quindi avere la possibilità di mettere in evidenza y nella equazione (11). Perché ciò accada i termini che contengono la sola x devono essere identicamente nulli; quindi

$$(12) \quad x^2 + x + \lambda x^2 - 4\lambda x^2 + 5\lambda x^2 + 2\lambda x = 0; \quad \text{ne segue}$$

$$(13) \quad (1 + 2\lambda)x^2 + (1 + 2\lambda)x = 0 .$$

La (13) è identicamente nulla se e solo se $\lambda = -1/2$. Sostituendo questo valore di λ nella (11) ottengo la conica degenerare del fascio. Si ha

(14)

$$x^2 + y^2 + x + ty - \frac{1}{2}[x^2 + t^2 y^2 + 2txy - 4x^2 - 4txy + 5x^2 + 3y^2 + 2x] = 0,$$

$$(*) \quad x^2 + y^2 + x + ty - \frac{1}{2}[2x^2 - 2txy + t^2 y^2 + 3y^2 + 2x] = 0,$$

$$(*) \quad x^2 + y^2 + x + ty - x^2 + txy - \frac{1}{2}t^2 y^2 - \frac{3}{2}y^2 - x = 0,$$

$$(*) \quad -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}t^2 y^2 + txy + ty = 0, \rightarrow y^2 + t^2 y^2 - 2txy - 2ty = 0,$$

infine (15) $y[(1+t^2)y - 2tx - 2t] = 0.$

La (15) è la conica degenera che è stata prevista. Il sistema (10) si spezzerà quindi nei due sistemi:

$$(L) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + x + ty = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad (M) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + x + ty = 0 \\ (1+t^2)y - 2tx - 2t = 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema dà la soluzione $O(0,0)$, che deve risultare semplice, e la soluzione $A(-1,0)$.

Il sistema (M) deve ancora dare la soluzione $A(-1,0)$, cioè $x = -1$, $y = 0$, poiché questa soluzione deve risultare doppia.

Dalla seconda equazione si ha

$$(16) \quad x = [y(1+t^2) - 2t]/2t.$$

Sostituendo nella prima equazione si ha:

$$(*) \quad \left[\frac{(1+t^2)y - 2t}{2t} \right]^2 + y^2 + \frac{(1+t^2)y - 2t}{2t} + ty = 0.$$

Fatte le semplificazioni, l'equazione risolvente non deve contenere il termine noto; si deve avere infatti un altro punto soluzione $A(-1,0)$. Procedendo nei calcoli si ha:

$$(*) \quad (1+t^2)^2 y^2 + \cancel{4t^2} - 4t(1+t^2)y + 4t^2 y^2 + 2t(1+t^2)y - \cancel{4t^2} + 4t^3 y = 0,$$

$$(*) \quad y^2(1+t^4 + 2t^2 + 4t^2) - y[4t(1+t^2) - 2t(1+t^2) - 4t^3] = 0,$$

$$(17) \quad y^2(1+6t^2 + t^4) - y(2t - 2t^3) = 0.$$

Dalle (16), (17) si ricava la soluzione $y = 0$, $x = -1$, cioè il punto $A(-1, 0)$.
Si ricavano inoltre l'ordinata del punto generico della C^4 in funzione del parametro t :

$$(18) \quad y = \frac{2t - 2t^3}{t^4 + 6t^2 + 1}.$$

Sostituendo questo valore di y nella (16) si ha:

$$(*) \quad x = \frac{1}{2t} \left[(1+t^2)y - 2t \right], \rightarrow x = \frac{1}{2t} \left[\frac{(1+t^2)(2t-2t^3)}{t^4+6t^2+1} - 2t \right],$$

$$(*) \quad x = \frac{1}{2t} \left[\frac{2t - 2t^2 + 2t^3 - 2t^5 - 2t^5 - 12t^3 - 2t}{t^4 + 6t^2 + 1} \right],$$

$$(*) \quad x = \frac{1}{2t} \left[\frac{-4t^5 - 12t^3}{t^4 + 6t^2 + 1} \right] = \frac{-4t^3(t^2 + 3)}{2t(t^4 + 6t^2 + 1)}.$$

La C^4 ha quindi le equazioni parametriche:

$$(19) \quad x = \frac{-2t^2(t^2 + 3)}{t^4 + 6t^2 + 1}, \quad y = \frac{2t - 2t^3}{t^4 + 6t^2 + 1}.$$

n. 21 – Esercizio 7R (L'origine O è un tacnodo di 2^a specie)

Studiare la quartica (1) $C^4 : (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0$, ossia

$$(*) \quad 4x^2 - 5x^3 - 4xy^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 0.$$

Soluzione

L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazione $x = 0$. Interseco la C^4 con la tangente doppia $x = 0$:

$$(2) \quad \begin{cases} C^4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y^4 = 0, \quad y = 0 \text{ soluzione 4 volte.}$$

La tangente ha contatto 4-ptto con la C^4 nel punto O : l'origine, quindi, non è una cuspide di 1^a specie, ma può essere un tacnodo o una cuspide di ordine superiore.

Approssimo la quartica nell'intorno del punto O mediante il fascio di parabole $|C_2|^1 : x = \lambda y^2$, tangenti alla retta $x = 0$ e interseco la C^4 :

$$(3) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0 \\ x = \lambda y^2 \end{cases} \quad \text{Si ricava}$$

$$(*) \quad (\lambda^2 y^4 + y^2 - 2\lambda y^2)^2 - \lambda^3 y^6 = 0, \text{ e quindi}$$

$$(4) \quad y^4 [(\lambda^2 y^2 - 2\lambda + 1)^2 - \lambda^3 y^2] = 0.$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4-ptto con la C^4 nel punto O . Per $(1 - 2\lambda)^2 = 0$, cioè per $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, ci sono due parabole coincidenti $C_2^{(O)}$ e $\bar{C}_2^{(O)}$ che hanno contatto esattamente 6-ptto, e quindi esse sono iperosculatrici. Le due parabole sono (5) $C_2^{(O)} \equiv \bar{C}_2^{(O)} : x = y^2 / 2$.

Poiché le due parabole hanno contatto 6-ptto con la C^4 , il punto doppio $O(0,0)$ può essere o un tacnodo di 2^a specie (detto oscnodo) o un tacnodo di 3^a specie; in ogni caso esso vale come 3 punti doppi. Ne segue che la C^4 ha il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo grado $[(4-1)(4-2)/2 = 3]$ e quindi essa è razionale.

Vediamo se il tacnodo è di 2^a o 3^a specie, anche se non è necessario fare questa precisazione.

Consideriamo il fascio di cubiche $|C_3|^1$ che approssimano la curva C^4 nell'intorno del punto O e intersechiamo la curva:

$$(5) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0 \\ x = y^2 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right) \end{cases} \quad \text{Si ottiene}$$

$$(*) \quad \left[y^4 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^2 + y^2 - 2y^2 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right) \right]^2 - y^6 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^3 = 0,$$

$$(*) \quad y^4 \left[\frac{1}{4} y^2 + \mu^2 y^4 + \mu y^3 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - 2\mu y \right]^2 - y^6 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^3 = 0,$$

$$(6) \quad y^6 \left[\frac{1}{4} y^2 + \mu^2 y^3 + \mu y^2 + \frac{1}{4} y - 2\mu \right]^2 - y^6 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^3 = 0.$$

La (6) ci dice che la generica cubica del fascio $|C_3|^1$ ha contatto 6-ptto con la C^4 nel punto O ; ce ne sono però due $\left[C_3^{(O)} \text{ e } \bar{C}_3^{(O)} \right]$ che hanno contatto esattamente 7-ptto. Esse si ottengono per i valori di μ per cui si ha

$$(*) \quad [-2\mu]^2 - \frac{1}{8} = 0, \quad \rightarrow \quad \mu^2 = \frac{1}{32}, \quad \text{ossia} \quad \mu = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Quindi le due cubiche sono:

$$(7) \quad C_3^{(O)}: x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{8}y^3 \quad \text{e} \quad \bar{C}_3^{(O)}: x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}y^3.$$

Il punto doppio $O(0;0)$ è pertanto un oscnodo, che vale come 3 punti doppi coincidenti $A \equiv B \equiv C$. Avendo 3 punti doppi, la C^4 è una curva razionale.

Tracciando i grafici delle eq. (7) si può vedere che nell'intorno dell'oscnodo la curva ha due rami che si attraversano, pur avendo essi la stessa tangente $x = 0$, e ciò si verifica per ogni oscnodo di una qualsiasi curva.

I 3 punti doppi $A \equiv B \equiv C$, infinitamente vicini tra loro, non possono essere allineati su una retta s , cioè sulla tangente alla C^4 nel punto O . In tal caso, infatti, la retta per A avrebbe 6 intersezioni con la curva assorbite in tal punto; allora la C^4 sarebbe degenerare e la retta s sarebbe una sua componente. I tre punti si trovano allora sulla parabola osculatrice nel punto O .

Considero la rete di coniche che si ottiene combinando la parabola osculatrice φ e la conica spezzata nella tangente s e in una generica retta per O (vedi fig. 6, pg. 69, con i punti $A=B=C$ che fanno le veci dell'oscnodo O).

Nel caso specifico l'equazione della rete $\varphi + t \cdot s \cdot r(m) = 0$ è:

$$(8) \quad 2x - y^2 + t \cdot x \cdot (y - mx) = 0.$$

Impongo il passaggio per un punto di coordinate particolarmente semplici della C^4 , per esempio il punto $D(1,0)$ e ottengo

$$(*) \quad 2 - mt = 0, \quad \text{da cui} \quad m = \frac{2}{t}.$$

Sostituendo, posso passare dalla rete al fascio di coniche

$$(9) \quad |C_2|^1: 2x - y^2 + tx \left(y - \frac{2}{t}x \right) = 0.$$

Interseco la C^4 con il fascio:

$$(A) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0 \\ 2x - y^2 + x(ty - 2x) = 0, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (B) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0 \\ y^2 = 2x + txy - 2x^2. \end{cases}$$

Otengo un sistema di 8^o grado di cui conosco a priori ben 7 soluzioni:

$$\begin{aligned} x = 0 & \text{ soluzione } 6 \text{ volte. Infatti il fascio } |C_2|^1 \text{ ha contatto } 6\text{-pto} \\ (*) & \text{ con la } C^4 \text{ nel punto } O, \\ x = 1 & \text{ soluzione } 1 \text{ volta.} \end{aligned}$$

Dividendo successivamente per x^6 , $x - 1$ ottengo un'equazione di 1^o grado in x , da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t .

Procedo nei calcoli. Sostituendo la 2^a equazione del sistema (B) nella 1^a si ha:

$$(*) \quad (x^2 + \cancel{2x} + txy - 2x^2 - \cancel{2x})^2 - x^3 = 0. \quad \text{Ne segue:}$$

$$(*) \quad (txy - x^2)^2 - x^3 = 0, \rightarrow x^2(ty - x) - x^3 = 0.$$

Quindi il sistema (B) si spezza nei due sistemi equivalenti:

$$(C) \quad \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 2x + txy - 2x^2, \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} (ty - x)^2 - x = 0 \\ y^2 = 2x + txy - 2x^2. \end{cases}$$

Il sistema (C) ci dà la soluzione $O(0;0)$ contata 4 volte; si poteva prevedere di avere una soluzione multipla perché il fascio di coniche $|C_2|^1$ ha contatto 6-ptto con la C^4 nell'origine $O(0,0)$.

Passo al sistema (D) e formo un fascio fra le due coniche del sistema:

$$(10) \quad 2x - y^2 + txy - 2x^2 + \lambda(t^2y^2 + x^2 - 2txy - x) = 0.$$

Tale fascio deve contenere ancora una soluzione doppia $O(0,0)$ e la soluzione semplice $D(1,0)$; pertanto esso si deve spezzare nella retta $OD \equiv y = 0$ e in un'altra retta per O . Ciò mi dice che devo avere la possibilità di mettere in evidenza y nell'equazione (10) e perché ciò accada i termini che contengono la sola x devono essere identicamente nulli, cioè deve essere

$$(11) \quad 2x - 2x^2 + \lambda x^2 - \lambda x = 0, \rightarrow x(2 - \lambda) - x^2(2 - \lambda) = 0;$$

Ciò è possibile solo se $\lambda = 2$. Con questo valore, la (10) ci dà la conica degenera del fascio; sostituendo si ha:

$$(*) \quad 2x - y^2 + txy - 2x^2 + 2t^2y^2 + 2x^2 - 4txy - 2x = 0, \text{ da cui}$$

$$(12) \quad 2t^2y^2 - 3txy - y^2 = 0, \text{ e quindi } y(2t^2y - 3tx - y) = 0.$$

Come si vede, i termini in x si eliminano automaticamente, altrimenti ci sarebbe un errore di calcolo.

Grazie alla (12), il sistema di 4° grado (D) si spezza nei due sistemi

$$(E) \quad \begin{cases} y = 0 \\ (ty - x)^2 - x = 0, \end{cases} \quad (F) \quad \begin{cases} 2t^2y - y = 3tx \\ (ty - x)^2 - x = 0. \end{cases}$$

Il sistema (E) ci dà una quinta soluzione $O(0,0)$ e la soluzione semplice $D(1,0)$.

Il sistema (F) ci dovrà dare la sesta soluzione $O(0,0)$ e le equazioni parametriche razionali $x = x(t)$, $y = y(t)$. Procedendo nei calcoli, dalla prima equazione del sistema si ha

$$(13) \quad x = \frac{y(2t^2 - 1)}{3t}. \quad \text{Sostituendo nella 2ª equazione si ottiene}$$

$$(*) \quad \left(ty - \frac{2t^2y - y}{3t} \right)^2 - \frac{2t^2y - y}{3t} = 0, \quad \left(\frac{t^2y + y}{3t} \right)^2 = \frac{y(2t^2 - 1)}{3t},$$

$$\text{e quindi (14)} \quad \frac{y^2(t^2 + 1)^2}{3t} = y(2t^2 - 1).$$

Dalle equazioni (14), (13) si ricava $x = y = 0$, cioè l'ultima soluzione $O(0,0)$.

Dalla (14) si ricava anche il valore dell'ordinata y in funzione del parametro t :

$$(16) \quad y = \frac{3t(2t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}.$$

Sostituendo nella 1ª equazione del sistema (F) si ha:

$$(*) \quad 3tx = \frac{3t(2t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \cdot (2t^2 - 1).$$

Si ricava così che le equazioni parametriche della C^4 sono:

$$(17) \quad x(t) = \frac{(2t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}, \quad y(t) = \frac{3t(2t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}.$$

Da esse si ricava che il grafico della curva è quello rappresentato in fig. 14.

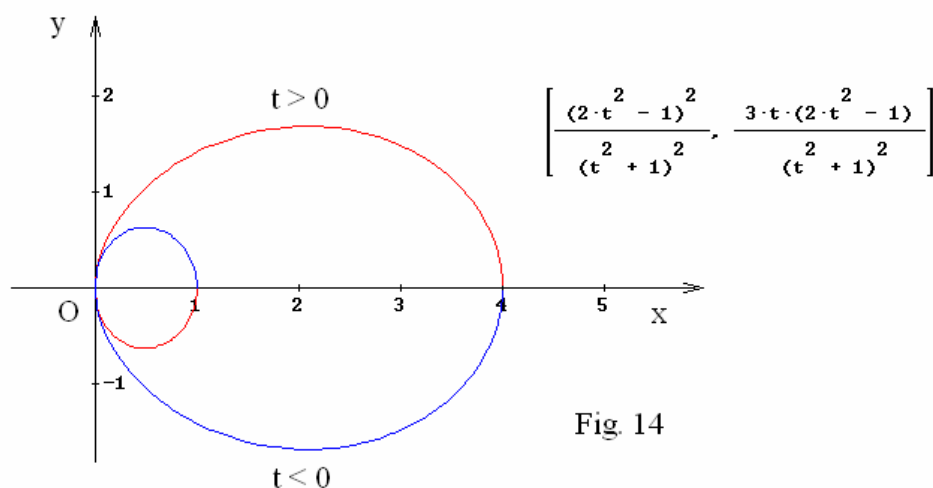


Fig. 14

Voglio ora calcolare il raggio di curvatura della C^4 nell'origine O e il centro di curvatura. Ci sono al proposito formule di Analisi matematica, ma sono troppo lunghe; i metodi studiati ci permettono di trovare agevolmente il cerchio osculatore ad uno dei due rami lineari che passa per il punto O .

Ricordo che una parabola osculatrice la C^4 nel punto O è $C_2^{(O)} : 2x - y^2 = 0$.

Considero il fascio di coniche $|C_2|^1$, costituito dalla $C_2^{(O)}$ e dalla conica degenera $x(ax + by) = 0$, spezzata nella retta passante per il punto O e nella retta $x = 0$, tangente alla C^4 nel punto stesso. L'equazione del fascio è:

$$(*) \quad |C_2|^1 : 2x - y^2 + x(ax + by) = 0, \text{ ossia}$$

$$(18) \quad ax^2 - y^2 + bxy + 2x = 0.$$

Imponendo che la conica sia una circonferenza si hanno le condizioni $a = -1$, $b = 0$.

Si ricava così che la circonferenza che oscula la C^4 nel punto O ha l'equazione

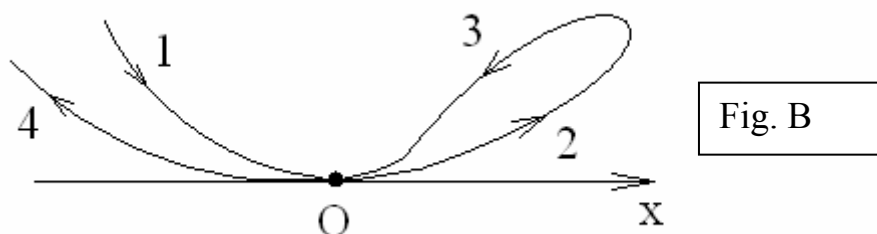
$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Il raggio di curvatura è $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$, $r = \frac{\sqrt{4}}{2}$, $r = 1$;

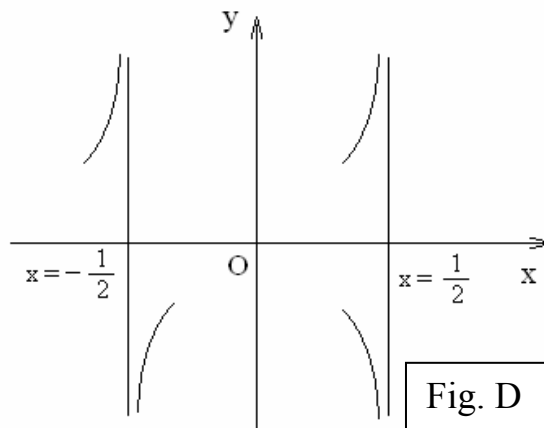
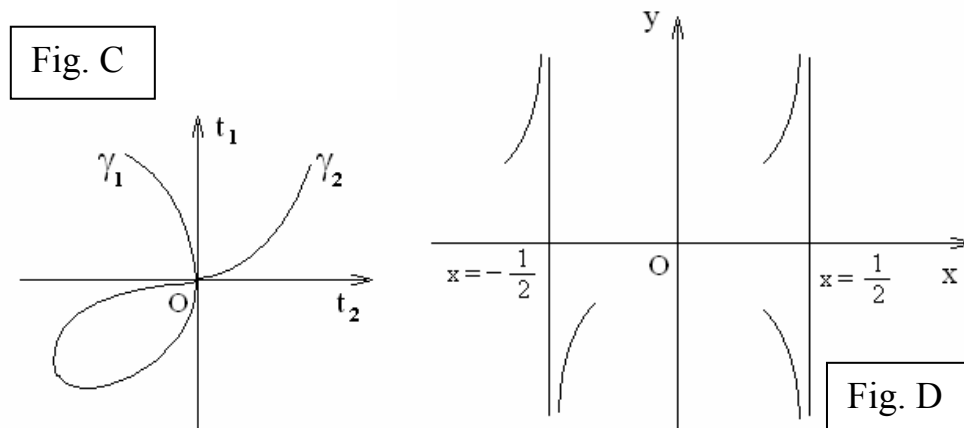
il centro di curvatura è $C(-a/2, -b/2)$, da cui $C(1, 0)$.

NOTA sui grafici delle curve

Consideriamo una curva algebrica e supponiamo che essa abbia nell'origine $O(0,0)$ un tacnodo di seconda specie (oscnodo) con tangente l'asse x , contato due volte. In tal caso, dal punto O si staccano due rami lineari, situati da una stessa parte rispetto alla comune tangente e che si attraversano fra di loro (fig. B):



Consideriamo una curva algebrica e supponiamo che essa abbia un flecnodo reale nell'origine $O(0,0)$ di un riferimento cartesiano (fig. C):



In tal caso, un ramo γ_1 ha contatto 2-ptto con la propria tangente t_1 nel punto doppio; l'altro ramo γ_2 ha un contatto 3-ptto con la propria tangente t_2 , ossia il ramo γ_2 presenta un flesso nel punto doppio O :

Consideriamo una curva algebrica C^n e supponiamo che essa abbia un flecnodo improprio, ma reale, nel punto $Y_\infty(0,1,0)$ e supponiamo che $2x = 1$ sia la tangente asintotica inflessionale e $2x = -1$ la tangente ordinaria. L'andamento della curva in corrispondenza delle due tangenti è quello rappresentato in fig. D .

n. 22 – Esercizio 8R (L'origine O è una cuspidi di 2^a specie)

Studiare la quartica (1) $C^4 : (x^2 + y^2 - 2x)^2 - xy^3 = 0$, ossia

$$(*) \quad 4x^2 - 4x^3 - 4xy^2 - xy^3 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 0.$$

Soluzione

L'origine O(0,0) è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazione $x = 0$. Interseco la C^4 con la tangente doppia $x = 0$:

$$(2) \quad \begin{cases} C^4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y^4 = 0, \quad y = 0 \text{ soluzione 4 volte.}$$

La tangente ha contatto 4-pti con la C^4 nel punto O: l'origine, quindi, non è una cuspidi di 1^a specie, ma può essere un tacnodo o una cuspidi di ordine superiore.

Approssimo la quartica nell'intorno del punto O mediante il fascio di parabole $|C_2|^1 : x = \lambda y^2$, tangenti alla retta $x = 0$ e interseco la C^4 :

$$(3) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - xy^3 = 0 \\ x = \lambda y^2 \end{cases} \quad \text{Si ricava}$$

$$(*) \quad (\lambda^2 y^4 + y^2 - 2\lambda y^2)^2 - \lambda y^5 = 0, \text{ e quindi}$$

$$(4) \quad y^4 [(\lambda^2 y^2 + 1 - 2\lambda)^2 - \lambda y] = 0.$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4-pti con la C^4 nel punto O. Per $(1 - 2\lambda)^2 = 0$, cioè per $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, abbiamo due parabole coincidenti $C_2^{(O)}$ e $\bar{C}_2^{(O)}$ che hanno contatto esattamente 5-pti.

Le due parabole sono (5) $C_2^{(O)} \equiv \bar{C}_2^{(O)} : x = y^2 / 2$. Posso già dire che il punto doppio O è una cuspidi di 2^a specie. Per maggior sicurezza approssimo la curva nell'intorno del punto O mediante un fascio di cubiche

$$|C_3|^1 : x = \frac{1}{2}y^2 + \mu y^3 \text{ e faccio vedere che tutte le cubiche del fascio hanno}$$

contatto 5-pti con la C^4 e che per nessun valore di μ posso ottenere un contatto 6-pti.

$$(*) \quad \begin{cases} 4x^2 - 4xy^2 - xy^3 - 4x^3 + y^4 + 2x^2y^2 + x^4 = 0 \\ x = y^2 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right) \end{cases},$$

Sostituendo si ha:

$$(*) \quad 4y^4 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^2 - 4y^4 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right) - y^5 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right) - 4y^6 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^3 + y^4 + \dots = 0,$$

$$(*) \quad 4y^4 \left(\frac{1}{4} + \mu y + \mu^2 y^2 \right) - y^4 (2 + 4\mu y) - y^5 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right) - 4y^6 \left(\frac{1}{2} + \mu y \right)^3 + y^4 + \dots = 0,$$

$$(5) \quad \cancel{y^4(1+2-1)} + y^5(4\mu - 4\mu - \frac{1}{2}) + y^6(4\mu^2 - \mu - \frac{1}{2}) + \dots = 0.$$

Dalla (5) si vede che la qualsiasi cubica del fascio $|C_3|^1$ ha contatto 5-ptto con la C^4 nel punto $O(0,0)$. Poiché il coefficiente di y^5 non dipende da μ non posso trovare nessuna cubica che abbia contatto 6-ptto. **Pertanto il punto doppio O è una cuspidine doppia di 2^a specie. I due rami che si staccano dal punto O sono entrambi tangenti all'asse y e formano una specie di punta ricurva (fig. 16).**

Trovo altri punti doppi della quartica. Intersecando la C^4 con la retta $y = 0$ si ha:

$$(6) \quad (x^2 - 2x)^2 = 0, \quad x^2(x - 2)^2 = 0.$$

Otteniamo le soluzioni doppie date dai punti $O(0,0)$, già vista, e $P(2,0)$.

Per vedere se $P(2,0)$ è un punto doppio della C^4 risolviamo il sistema

$$(7) \quad \begin{cases} f(P) = 0 \\ f_x(P) = 0 \\ f_y(P) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4xy^2 - xy^3 - 4x^3 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 0 \\ 8x - 4y^2 - y^3 - 12x^2 + 4x^3 + 4xy^2 = 0 \\ -8xy - 3xy^2 + 4x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases}.$$

Per $x = 2, y = 0$, cioè nel punto P , si ha $f(P) = 0$, $f_x(P) = 0$, $f_y(P) = 0$.

Il punto $P(2,0)$ verifica quindi il sistema (7) e quindi esso è un punto doppio.

Studiamo il punto P facendo una traslazione di assi che porti l'origine nel punto stesso:

$$(8) \quad \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}$$

Sostituendo nella $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - xy^3 = 0$ si ha :

$$(*) \quad (X^2 + 4X + 4 + Y^2 - 2X - 4)^2 - (X + 2)Y^3 = 0, \text{ cioè}$$

$$(9) \quad \bar{C}^4 : (X^2 + Y^2 + 2X)^2 - 2Y^3 - XY^3 = 0.$$

Dalla (9) si vede che la nuova origine \bar{O} è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazione $X = 0$. Dal sistema

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{C}^4 \\ X = 0 \end{cases} \text{ si ha } Y^4 - 2Y^3 = 0, \quad Y^3(Y - 2) = 0$$

si vede che la tangente $X = 0$ ($x = 2$), ha contatto 3-ptto con la \bar{C}^4 nel punto $\bar{O} \equiv P$; pertanto il punto $P(2,0)$ è una cuspidi di 1^a specie per la originaria quartica C^4 .

Riassumendo: la cuspidi di 2^a specie $O(0,0)$ vale 2 punti doppi,
la cuspidi di 1^a specie $P(2,0)$ vale 1 punto doppio;
quindi la quartica C^4 , avendo 3 punti doppi, ossia il massimo numero di punti doppi che essa può avere, è una quartica razionale.

Trovo ora le equazioni parametriche razionali della curva.

Considero il fascio di coniche $|C_2|^1$ avente due punti base coincidenti con il punto $O(0,0)$ e gli altri due coincidenti con il punto $P(2,0)$. Le coniche siano tangenti nel punto O alla retta $x = 0$ e nel punto P alla retta $x = 2$: si tratta quindi di un fascio di coniche bitangenti rispetto alla C^4 (vedi fig. 15 seguente):

L'equazione del fascio è

$$(11) \quad |C_2|^1 : x(x - 2) - ty^2 = 0.$$

Interseco la quartica con il fascio:

$$(A) \quad \begin{cases} C^4 : [x(x - 2) + y^2] - xy^3 = 0 \\ x(x - 2) = ty^2 \end{cases}$$

Otengo un sistema di 8^o grado di cui conosco a priori ben 7 soluzioni:

$$(*) \quad x = 0 \quad 4 \text{ volte: la cuspidi di 2^a specie vale come 2 punti doppi,}$$

$x = 2$ 3 volte: 2 soluzioni per il punto doppio P + 1 infinitamente vicina sulla tangente.

Dividendo successivamente l'equazione risolvente per $(x - 0)^4$ e $(x - 2)^3$ ottengo una equazione di 1° grado in x da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t . Sostituendo poi la x nell'equazione risolvente posso ricavare la y in funzione di t . Procedo nei calcoli. Dalle due equazioni del sistema (12) subito si ha:

$$(12) \quad [ty^2 + y^2]^2 - xy^3 = 0, \rightarrow y^4(t+1)^2 - xy^3 = 0.$$

La (12) si spezza nelle equazioni

$$(13) \quad y = 0, \text{ contata 3 volte, e } x = y(t+1)^2.$$

Il sistema (A) si spezza così nei sistemi equivalenti

$$(B) \quad \begin{cases} y^3 = 0 \\ x(x-2) = ty^2 \end{cases}, \quad (C) \quad \begin{cases} x = y(t+1)^2 \\ x(x-2) = ty^2 \end{cases}.$$

Il sistema (B) dà le due soluzioni

$$(*) \quad \begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ x = 2 & y = 0 \end{array} \quad \text{cioè} \quad \begin{array}{ll} O(0,0) & 3 \text{ volte} \\ P(2,0) & 3 \text{ volte} \end{array}.$$

Manca una 4ª soluzione $x = y = 0$ che è data dal sistema (C). Da questo si ha:

$$(C_1) \quad \begin{cases} y^2(t+1)^4 - x^2 = 0 \\ x^2 - 2x - ty^2 = 0 \end{cases}.$$

Sommando membro a membro si ha:

$$(*) \quad y^2(t+1)^4 - 2x - ty^2 = 0.$$

Sostituendo in x l'espressione data dal sistema (C) si ha

$$(14) \quad y^2(t+1)^4 - 2y(t+1)^2 - ty^2 = 0.$$

Dalla (14) si ottiene l'ultima soluzione $y = 0, x = 0$, ossia il punto $O(0,0)$ e in più si ottiene l'equazione parametrica

$$(*) \quad y[(t+1)^4 - t] = 2(t+1)^2,$$

da cui (15)
$$y(t) = \frac{2(t+1)^2}{(t+1)^4 - t}.$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (C) si ottiene :

$$(16) \quad x(t) = \frac{2(t+1)^4}{(t+1)^4 - t}.$$

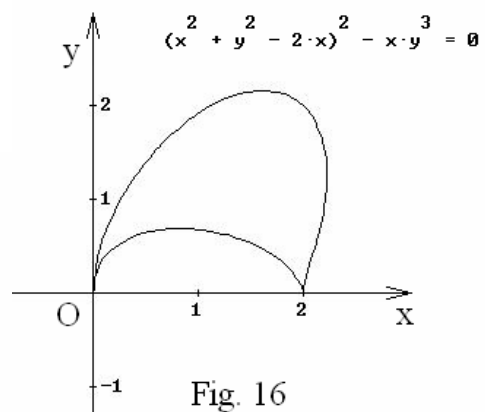
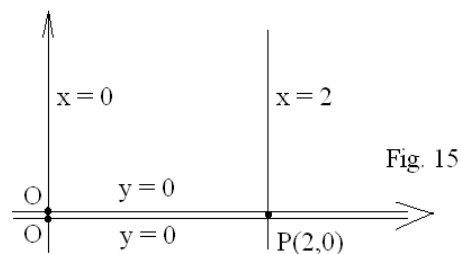
Le (15), (16) sono le equazioni parametriche razionali della quartica C^4 .

Ponendo $t+1 = \lambda$, e quindi $t = \lambda - 1$, possiamo scriverle nella forma:

$$(17) \quad x = \frac{2\lambda^4}{\lambda^4 - \lambda + 1}, \quad y = \frac{2\lambda^2}{\lambda^4 - \lambda + 1}.$$

NOTA. Per quanto riguarda il grafico della C^4 facciamo opportunamente la seguente osservazione.

La quartica si può scrivere nella forma $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = xy^3$: da questa equazione si ricava che la curva può giacere nel primo e nel terzo quadrante. Ma se teniamo presente che il punto $O(0,0)$ è una cuspide di 2^a specie, cioè a forma di una punta ricurva, e che essa ha una cuspide di 1^a specie sul semiasse positivo delle ascisse, allora concludiamo che la quartica assegnata giace tutta nel 1^o quadrante (fig. 16).



n. 23 – Esercizio 9R (L'origine O è un tacnodo di 1^a specie)

Fissato nel piano un riferimento cartesiano Oxy , si consideri la circonferenza γ_1 di centro $C_1(0,2)$ e raggio $r_1 = 2$ e la circonferenza γ_2 di centro $C_2(0,4)$ e raggio $r_2 = 4$: esse sono tangenti internamente nell'origine O del riferimento cartesiano ed hanno l'asse x come comune tangente (fig. 17).

Si trovi la curva luogo dei punti medi dei segmenti paralleli all'asse x e che hanno un estremo sulla prima circonferenza e l'altro estremo sulla seconda circonferenza. Si studi la funzione e se ne tracci il grafico.

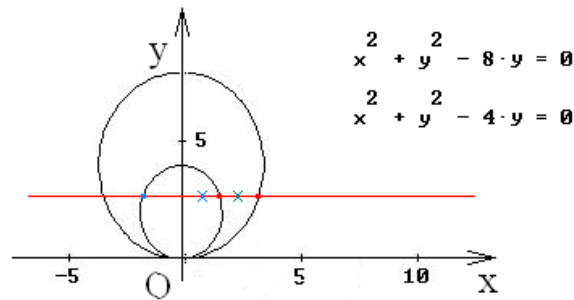


Fig. 17

Soluzione

Circonferenza γ_1 : $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 4$, $\rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$;

Circonferenza γ_2 : $(x-0)^2 + (y-4)^2 = 16$, $\rightarrow x^2 + y^2 - 8y = 0$.

I punti che si trovano su una generica parallela all'asse x hanno rispettivamente le ascisse

$$(1) \quad x_1 = \pm\sqrt{4y-y^2} \quad \text{e} \quad x_2 = \pm\sqrt{8y-y^2} .$$

Per l'ascissa x del punto medio si ha (2): $x = (x_1 + x_2)/2$ e quindi

$$(3) \quad 2x = \pm\sqrt{4y-y^2} \pm\sqrt{8y-y^2} .$$

Quadrando ambo i membri si ha:

$$(*) \quad 4x^2 = 4y - y^2 + 8y - y^2 \pm 2\sqrt{(4y-y^2)(8y-y^2)} ,$$

$$(*) \quad 4x^2 + 2y^2 - 12y = \pm 2\sqrt{(4y-y^2)(8y-y^2)} ,$$

$$(*) \quad (2x^2 + y^2 - 6y)^2 = (4y - y^2)(8y - y^2) .$$

Sviluppando i calcoli e semplificando si ha la quartica:

$$(4) \quad C^4: \quad x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2 = 0 .$$

La costruzione ci dice che la curva giace tutta al disopra dell'asse x , che è chiusa e simmetrica rispetto all'asse y e che passa per i punti $(2,4)$ e $(-2,4)$.

La (4) ci dice che l'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazione $y=0$. Intersecando si ha il sistema

$$(5) \quad \begin{cases} C^4 \\ y=0 \end{cases}, \quad \text{da cui } x^4=0, \quad x=0 \text{ soluzione 4 volte.}$$

Il caso è dubbio: comunque $O(0,0)$ non è una cuspidi di 1ª specie.

Approssimo la curva nell'intorno del punto doppio mediante il fascio di parabole $|C_2|^1 : y=\lambda x^2$, tutte tangenti in O alla quartica:

$$(6) \quad \begin{cases} C^4 \\ y=\lambda x^2 \end{cases}. \quad \text{Si ricava } x^4 + \lambda^2 x^6 - 6\lambda x^4 + \lambda^2 x^4 = 0;$$

$$\text{e quindi (7)} \quad (\lambda^2 - 6\lambda + 1)x^4 + \lambda^2 x^6 = 0.$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4·pto con la C^4 nel punto O . Ci sono però due parabole che hanno contatto 6·pto. Esse sono quindi parabole iperosculatrici e si ottengono per i valori di λ per cui si ha

$$(*) \quad \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0, \quad \text{da cui } \lambda = 3 \pm \sqrt{8}.$$

Le equazioni delle due parabole sono

$$(*) \quad C_2^{(0)}: y = (3 - \sqrt{8})x^2 \quad \text{e} \quad \bar{C}_2^{(0)}: y = (3 + \sqrt{8})x^2.$$

Esse ci dicono che il punto doppio $O(0,0)$ è un tacnodo di 1ª specie, origine di due rami lineari situati da una stessa parte rispetto alla comune tangente $y=0$ (asse x). Esso vale come due punti doppi.

Passo a coordinate omogenee, interseco con la retta impropria $z=0$ e studio i punti impropri della curva:

$$(8) \quad \begin{cases} x^2(x^2 + y^2) - 6x^2yz + y^2z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si ricava } x^2(x^2 + y^2) = 0, \quad \text{da cui } x^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Ne segue che la retta impropria ha 2 intersezioni con la C^4 nel punto improprio

$Y_\infty(0,1,0)$ dell'asse y e passa semplicemente per ognuno dei punti ciclici $I_1(1,i,0)$ e $I_2(1,-i,0)$.

Poiché i punti ciclici sono punti semplici per la C^4 , la curva è una quartica circolare.

Per studiare il punto $Y_\infty(0,1,0)$, interseco la curva con la generica parallela all'asse y :

$$(9) \quad \begin{cases} (x^2+1)y^2 - 6x^2y + x^4 = 0 \\ x = k \end{cases} \rightarrow (k^2+1)y^2 - 6k^2y + k^4 = 0.$$

Intersecando la quartica con la generica parallela all'asse y l'equazione risolvente si abbassa di due gradi, cioè due intersezioni cadono nel punto Y_∞ , che pertanto è un punto doppio. L'equazione risolvente si abbassa di 3 gradi per

$k^2+1=0$, cioè per $k = \pm i$. Conclusione: $Y_\infty(0,1,0)$ è un nodo isolato semplice, improprio ma reale, con tangenti nodali di equazione $x=i$ ed $x=-i$. Complessivamente, la C^4 ha 3 punti doppi: 2 coincidono con il tacnodo di 1ª specie $O(0,0)$, il terzo è il nodo isolato Y_∞ .

Ne segue che la C^4 è una curva razionale perché ha il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo grado (si dice anche che essa è una curva di genere zero).

Trovo le tangenti alla curva parallele all'asse x : la costruzione già mi dice che la retta $y=4$ risulta tangente. Ordino l'equazione della C^4 rispetto a x^2 e interseco con la retta $y=k$. Si ha

$$(10) \quad \begin{cases} x^4 + (y^2 - 6y)x^2 + y^2 = 0 \\ y = k \end{cases} \rightarrow x^4 + (k^2 - 6k)x^2 + k^2 = 0.$$

Condizione di tangenza:

$$(11) \quad \Delta = 0 \rightarrow (k^2 - 6k)^2 - 4k^2 = 0, \quad k^4 - 12k^3 + 32k^2 = 0.$$

Si ricava $k^2 = 0$, retta tangente $y=0$ (asse x) e la condizione

$$(12) \quad k^2 - 12k + 32 = 0, \quad k = 6 \pm \sqrt{4}; \quad \text{quindi } k_1 = 4 \text{ e } k_2 = 8.$$

Per $k=4$ si ottiene $x^4 + (16-24)x^2 + 16 = 0$, $(x^2-4)^2 = 0$,
e quindi $(x-2)^2(x+2)^2 = 0$.

Conclusione: la retta $y=4$ tocca la curva nei punti $A'(-2,4)$ ed $A(2,4)$.

Si vede facilmente che la retta $y = 8$ è tangente alla C^4 in punti immaginari.

Trovo le tangenti alla curva parallele all'asse y . Ordino l'equazione della C^4 rispetto a y^2 e interseco con la retta $x = k$. Si ha

$$(13) \quad \begin{cases} (x^2 + 1)y^2 - 6x^2y + x^4 = 0 \\ x = k \end{cases} \rightarrow (14) \quad (k^2 + 1)y^2 - 6k^2y + k^4 = 0.$$

Condizione di tangenza:

$$(15) \quad \Delta/4 = 0 \rightarrow 9k^4 - k^4(k^2 + 1) = 0, \quad 8k^4 - k^6 = 0, \quad k^2 = 8.$$

Si ricavano le rette tangenti di equazioni $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$.

Per $k^2 = 8$, la (14) diventa $9y^2 - 48y + 64 = 0$, $\rightarrow (3y - 8)^2 = 0$.

Si ricava la soluzione doppia $y = \frac{8}{3}$. Conclusione:

la retta $x = -2\sqrt{2}$ è tangente alla C^4 nel punto $T'(-2\sqrt{2}, 8/3)$,

la retta $x = 2\sqrt{2}$ è tangente alla C^4 nel punto $T(2\sqrt{2}, 8/3)$.

Vogliamo ora trovare le equazioni parametriche della quartica studiata:

$$(16) \quad C^4 : x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2 = 0.$$

Sappiamo che essa è razionale perché ha 3 punti doppi. Infatti:

- 1) $O(0,0)$ è un tacnodo di 1^a specie, il quale vale per 2 punti doppi, con tangente doppia $y = 0$;
- 2) $Y_\infty(0,1,0)$ è un nodo ordinario (contatto 3·pto), isolato ma reale, con tangenti complesse coniugate di equazioni $x = i$, $x = -i$.

Possiamo scrivere la (16) come segue:

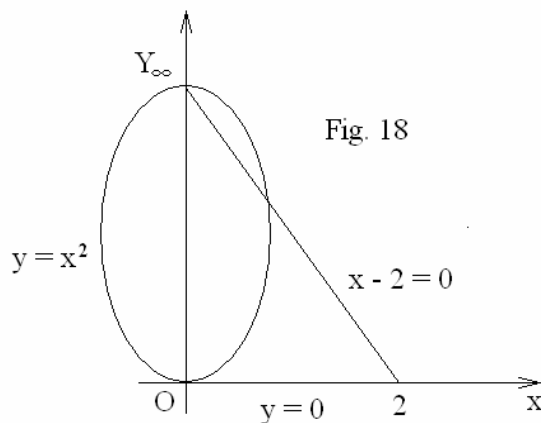
$$(*) \quad y^2 - 2x^2y + x^4 + x^2y^2 - 4x^2y = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(17) \quad (y - x^2)^2 + x^2y(y - 4) = 0.$$

Intersecando la C^4 con la parabola $y - x^2 = 0$, subito si trova il punto di tangenza $O(0,0)$ e i punti di intersezione $A(2,4)$, $A'(-2,4)$; già conosciamo questi punti per altra via.

Consideriamo il fascio di coniche $|C_2|^1$ tangenti nel tacnodo O , avente i punti base $O(0,0)$, contato 2 volte, e i punti Y_∞ e $A(2,4)$.

Conviene considerare il fascio di coniche costituito dalla conica $Q: y(x-2)=0$ e dalla parabola $P: y-x^2=0$. La Q è spezzata nella retta $s: y=0$, tangente alla C^4 e alla parabola P nel punto O , e nella retta AY_∞ . La parabola P , per conto suo, è tangente alla retta s , passa per il punto A e per il punto Y_∞ , che è l'altro punto doppio della quartica (fig. 18).



L'equazione del fascio è:

$$(18) \quad |C_2|^1 : y - x^2 - ty(x-2) = 0 .$$

Intersechiamo la quartica C^4 con il fascio di coniche:

$$(A) \quad \begin{cases} (y-x^2)^2 + x^2y(y-4) = 0 \\ y-x^2 = t \cdot y(x-2) = 0 . \end{cases}$$

Otteniamo un sistema di 8^o grado di cui conosciamo a priori ben 7 soluzioni:

(*) $O(0,0)$ 4 volte, $Y_\infty(0,1,0)$ 2 volte, $A(2,4)$ che è soluzione semplice .

Abbassando successivamente di grado il sistema risolvante, possiamo trovare le equazioni parametriche $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Dalle due equazioni del sistema (A), per sostituzione si ottiene il nuovo sistema

$$(B) \quad \begin{cases} t^2y^2(x-2)^2 + yx^2(y-4) = 0 \\ y-x^2 = t \cdot y(x-2) , \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (C) \quad \begin{cases} y[t^2y(x-2)^2 + x^2(y-4)] = 0 \\ y-x^2 = t \cdot y(x-2) . \end{cases}$$

Il sistema (C) si spezza in due sistemi, uno di 2^o grado e l'altro di 6^o grado:

$$(D) \quad \begin{cases} y = 0 \\ y-x^2 = t \cdot y(x-2) , \end{cases} \quad (E) \quad \begin{cases} t^2y(x-2)^2 + x^2(y-4) = 0 \\ y-x^2 = t \cdot y(x-2) . \end{cases}$$

Il sistema (D) ammette una prima soluzione doppia $O(0,0)$.

Dalla prima equazione del sistema (E) si ottiene

$$(*) \quad t^2 y(x-2)^2 + x^2 y - 4x^2 = 0, \text{ da cui } (19): \quad y[t^2(x-2)^2 + x^2] = 4x^2.$$

$$\text{Dalla (19) si ricava } (20): \quad y = \frac{4x^2}{t^2(x-2)^2 + x^2}.$$

Sostituendo la (20) nella seconda equazione del sistema (E) si ottiene:

$$(*) \quad \frac{4x^2}{t^2(x-2)^2 + x^2} - x^2 = \frac{t \cdot 4x^2 \cdot (x-2)}{t^2(x-2)^2 + x^2}.$$

Liberando dai denominatori si ha:

$$(*) \quad x^2[4 - t^2(x-2)^2 - x^2] = 4x^2 \cdot t(x-2).$$

Portando tutto al secondo membro e mettendo in evidenza x^2 si ha:

$$(*) \quad x^2[4t(x-2) + x^2 - 4 + t^2(x-2)^2], \text{ da cui}$$

$$(21) \quad x^2(x-2)[4t + x + 2 + t^2(x-2)] = 0.$$

Trasformando la 1^a equazione del sistema (E) si ottiene:

$$(*) \quad y - yt(x-2) = x^2, \text{ da cui } y[1 - t(x-2)] = x^2.$$

Il sistema (E) si può così spezzare nei tre sistemi equivalenti:

$$(F) \begin{cases} y = \frac{x^2}{1-t(x-2)} \\ x^2 = 0, \end{cases} \quad (G) \begin{cases} y = \frac{x^2}{1-t(x-2)} \\ x = 2, \end{cases} \quad (H) \begin{cases} y[1-t(x-2)] = x^2 \\ x + xt^2 + 4t + 2 - 2t^2 = 0. \end{cases}$$

Il sistema (F) ammette un'altra soluzione doppia $O(0,0)$;

il sistema (G) ammette come soluzione semplice il punto $A(2,4)$.

Dalla 2^a equazione del sistema (H) possiamo ricavare la variabile x in funzione del parametro t . Si ottiene

$$(*) \quad x(t^2 + 1) = 2t^2 - 4t - 2, \text{ da cui} \quad (22): \quad x = \frac{2(t^2 - 2t - 1)}{t^2 + 1}.$$

Ora, dalla 1^a equazione del sistema (H) si ha:

$$(*) \quad y(1 + 2t - tx) = x^2.$$

Sostituendo l'espressione di x data dalla (22) si ha:

$$(*) \quad y \left[1 + 2t - \frac{2t^2 - 4t - 2}{t^2 + 1} \right] = \frac{4(t^2 - 2t - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}, \quad \text{segue}$$

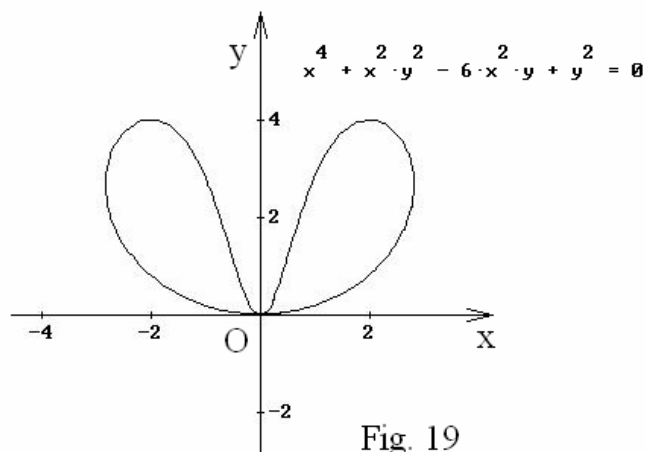
$$(*) \quad y \frac{(t^2 + 1 + 2t^3 + 2t - 2t^3 + 4t^2 + 2t)}{\cancel{t^2 + 1}} = \frac{4(t^2 - 2t - 1)^2}{(t^2 + 1)^2},$$

$$(*) \quad y(5t^2 + 4t + 1) = \frac{4(t^2 - 2t - 1)^2}{t^2 + 1}.$$

Per finire, si trova che le equazioni parametriche razionali della quartica sono:

$$(23) \quad x(t) = \frac{2(t^2 - 2t - 1)}{t^2 + 1}, \quad y(t) = \frac{4(t^2 - 2t - 1)^2}{(t^2 + 1)(5t^2 + 4t + 1)}.$$

Con l'ausilio di un computer, si trova che il grafico della C^4 è dato dalla fig. 19.



n. 24 – Esercizio 10R (Y_∞ è un tacnodo isolato di 1^a specie)

Studiare la quartica $C^4: y^2 - 2x^3 + x^2y + x^4 = 0$.

Soluzione

La C^4 è razionale se ha 3 punti doppi. L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali coincidenti di equazione $y = 0$ (asse x). Interseco la curva con la tangente:

$$(1) \quad \begin{cases} y^2 - 2x^3 + x^2y + x^4 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad x^3(x-2) = 0.$$

Si ha la soluzione tripla $O(0,0)$ e la soluzione semplice $P(2,0)$. La tangente $y = 0$ ha contatto 3·pto con la C^4 nel punto doppio O . Non ci sono dubbi:

$O(0,0)$ è una cuspidale di 1^a specie con tangente cuspidale $y = 0$, cioè l'asse x .

Come si è visto, questa retta ha una ulteriore intersezione con la C^4 nel punto $P(2,0)$.

Passo a coordinate omogenee e interseco la C^4 con la retta impropria $z = 0$:

$$(2) \quad \begin{cases} y^2z^2 - 2x^3z + x^2yz + x^4 = 0 \\ z = 0, \end{cases} \rightarrow x^4 = 0.$$

Ne segue che la retta impropria ha 4 intersezioni con la C^4 assorbite nel punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$ dell'asse y . Interseco con la retta $x = k$:

$$(3) \quad \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2y + y^2 = 0 \\ x = k, \end{cases} \rightarrow y^2 + k^2y - 2k^3 + k^4 = 0.$$

Intersecando la C^4 con la generica retta $x = k$, parallela all'asse y , l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi e per nessun valore di k si abbassa ulteriormente di grado.

Pertanto $Y_\infty(0,1,0)$ è un punto doppio con tangente a contatto 4·pto la retta impropria $z = 0$. Il caso è dubbio.

Con una omografia trasporto il punto Y_∞ nell'origine \bar{O} di un nuovo riferimento proiettivo e lo studio (fig. 7, pg. 72).

Con riferimento alla figura 7, le equazioni della omografia sono

$$(4) \quad x = Y, \quad y = Z, \quad z = X.$$

Le equazioni della C^4 e della sua trasformata \bar{C}^4 sono:

- $C^4: x^4 - 2x^3z + x^2yz + y^2z^2 = 0,$

$$\bar{C}^4 : Y^4 - 2Y^3X + Y^2ZX + Z^2X^2 = 0 .$$

Scrivo la \bar{C}^4 in coordinate non omogenee ponendo $Z=1$. Si ha:

$$(5) \quad \bar{C}^4 : X^2 + Y^2X - 2Y^3X + Y^4 = 0 .$$

Posso dire che $\bar{O}(0,0)$ è un punto doppio con tangenti sovrapposte a contatto 4·pto di equazione $X=0$. Il caso è dubbio.

Approssimo la \bar{C}^4 nell'intorno del punto \bar{O} mediante il fascio di parabole $|C_2|^1$: $X = \lambda Y^2$ e interseco la \bar{C}^4 :

$$(6) \quad \begin{cases} X^2 + Y^2X - 2Y^3X + Y^4 = 0 \\ X = \lambda Y^2 \end{cases} \rightarrow (7) \quad \begin{cases} \lambda^2 Y^4 + \lambda Y^4 + Y^4 - 2\lambda Y^5 = 0 \\ (\lambda^2 + \lambda + 1)Y^4 - 2\lambda Y^5 = 0 . \end{cases}$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4·pto con la \bar{C}^4 in \bar{O} . Per $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, abbiamo due parabole immaginarie distinte a contatto 5·pto.

Pertanto \bar{O} è un tacnodo di 1^a specie, isolato ma reale, per la \bar{C}^4 ; quindi $Y_\infty(0,1,0)$ è un tacnodo isolato di 1^a specie, improprio ma reale, per la C^4 , con tangente doppia la retta impropria $z=0$; esso vale per due punti doppi.

Tenendo presente che l'origine $O(0,0)$ è una cuspidi di 1^a specie, abbiamo che la C^4 ha complessivamente 3 punti doppi e quindi essa è razionale.

Trovo le equazioni parametriche razionali della quartica.

Considero il fascio di coniche $|C_2|^1$ avente due punti base coincidenti con Y_∞ e altri due punti base coincidenti con l'origine O . Le rette tangenti nei due punti sono la retta impropria $z=0$ e l'asse $x, y=0$: è un fascio di coniche bitangenti di equazione (*) $yz - tx^2 = 0$ (vedi fig. 9, pag. 76).

Interseco la C^4 con il fascio di coniche e passo a coordinate non omogenee:

$$(A) \quad \begin{cases} y^2 + x^2y - 2x^3 + x^4 = 0 \\ y = tx^2 . \end{cases}$$

Ho un sistema di 8° grado di cui conosco a priori ben 7 soluzioni:

- $Y_\infty(0,1,0)$ soluzione 4 volte: infatti il tacnodo di 1^a specie vale come 2 punti doppi ;

- $O(0,0)$ soluzione 3 volte: 2 soluzioni per il punto doppio O + 1 soluzione infinitamente vicina sulla tangente $y = 0$.

Sostituendo si ha:

$$(8) \quad t^2 x^4 + tx^4 - 2x^3 + x^4 = 0, \rightarrow x^3(t^2 y + tx + x - 2) = 0.$$

L'equazione risolvente si è abbassata di 4 gradi perché già sono state assorbite le 4 soluzioni del punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$.

Il sistema (A) si spezza nei due sistemi equivalenti:

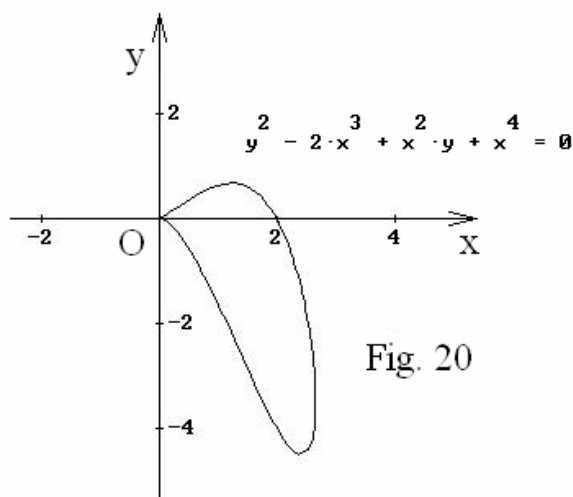
$$(B) \quad \begin{cases} x^3 = 0 \\ y = tx^2 \end{cases}, \quad (C) \quad \begin{cases} x = \frac{2}{t^2 + t + 1} \\ y = tx^2 \end{cases}.$$

Il sistema (B) ci dà la soluzione $O(0,0)$ contata 3 volte: 2 del punto doppio +1 infinitamente vicina ad esso sulla tangente $y = 0$.

Dal sistema (C) si ottengono le equazioni parametriche della quartica:

$$(9) \quad x(t) = \frac{2}{t^2 + t + 1}, \quad y(t) = \frac{4t}{(t^2 + t + 1)^2}.$$

Da esse, con l'aiuto di un computer, si può trovare il grafico della curva (fig. 20).



Vogliamo ora delimitare la regione di spazio in cui giace la curva. Ordinando l'equazione della C^4 rispetto ad y si ha:

$$(f) \quad y^2 + x^2 y + x^4 - 2x^3 = 0$$

Avremo valori reali di y , cioè punti reali della curva, in corrispondenza dei valori di x per cui si ha $\Delta \geq 0$, cioè:

$$(*) \quad x^4 - 4(x^4 - 2x^3) \geq 0, \rightarrow 8x^3 - 3x^4 \geq 0, \text{ ossia } x^2(8x - 3x^2) \geq 0.$$

Ne segue che avremo punti reali della curva per $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$. Quindi a sinistra dell'asse y non si hanno punti reali della curva. La retta $x = 8/3$ è tangente alla curva; per l'ordinata del punto di tangenza si ha $\Delta = 0$. Ne segue

$$(*) \quad y = \left[\frac{-x^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right]_{x=8/3} = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{8/3} = -\frac{32}{9}.$$

Abbiamo così trovato che il punto di tangenza è $T\left(\frac{8}{3}, -\frac{32}{9}\right)$.

Ricaviamo altre indicazioni sul grafico della curva sfruttando il teorema di Cartesio sulle equazioni di 2° grado.

I coefficienti dell'equazione (f) sono:

- $A = 1 > 0$, $B = x^2$, positivo per $x \neq 0$, $C = x^2(x^2 - 2x)$. Evidentemente, $C < 0$ per $0 < x < 2$, mentre $C > 0$ per $x > 2$ ($x < 0$ si scarta).

Conclusioni:

- 2) Per $0 < x < 2$ l'eq. (f) ha 1 P e 1V; la curva ha 2 punti reali: uno di ordinata positiva, l'altro di ordinata negativa;
- 3) Per $2 < x < 8/3$ l'eq. (f) ha 2 P: la curva ha due punti reali di ordinata negativa.
- 4) Per $x = 0$ si ha la cuspide doppia $O(0,0)$; per $x = 2$ si ha il punto di intersezione della curva con l'asse x e il punto $(2, -4)$.

n. 25 – Esercizio 11R (L'origine O è una cuspide di 3ª specie)

Studiare l'origine $O(0,0)$ della curva $C^7: (y - x^2 - x^3)^2 = x^7$.

Soluzione

L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazione $y = 0$ (asse x).

Interseco la C^7 con la tangente:

$$(1) \quad \begin{cases} (y - x^2 - x^3)^2 = x^7 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (x^2 + x^3)^2 = x^7, \quad x^4(1+x)^2 - x^7 = 0,$$

$$\text{e quindi (2)} \quad x^4 \cdot [(1+x)^2 - x^3] = 0.$$

Come si vede, la tangente ha contatto 4-ptto con la curva nel punto 0. Il punto doppio non è una cuspidi di 1^a specie: il caso è dubbio.

Approssimo la curva nell'intorno del punto O con un fascio di coniche $|C_2|^1$: $y = \lambda x^2$, tutte tangenti in O alla C^7 e all'asse x. Si ha il sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} (y - x^2 - x^3)^3 = x^7 \\ y = \lambda x^2 \end{cases} \rightarrow (\lambda x^2 - x^2 - x^3)^2 - x^7 = 0, \text{ da cui}$$

$$(4) \quad x^4 \cdot [(\lambda - 1 - x)^2 - x^3] = 0, \quad x^4 \cdot [(\lambda - 1)^2 - 2(\lambda - 1)x + x^2 - x^3] = 0.$$

La generica conica del fascio ha contatto 4-ptto con la curva nel punto 0.

Per $(\lambda - 1)^2 = 0$ si ha $x^6 \cdot (1 - x) = 0$; cioè per $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ abbiamo due parabole coincidenti che hanno contatto 6-ptto con la C^7 in O. Le due parabole sono $C_2^{(O)} = \bar{C}_2^{(O)} : y = x^2$.

Per vedere se dal punto O si distaccano due rami lineari distinti, approssimo la C^7 nell'intorno del punto O mediante un fascio di cubiche $|C_3|^1 : y = x^2 + \mu x^3$:

$$(5) \quad \begin{cases} (y - x^2 - x^3)^2 = x^7 \\ y - x^2 = \mu x^3 \end{cases} \quad \text{Ne segue:}$$

$$(6) \quad (\mu x^3 - x^3)^2 = x^7, \rightarrow x^6 \cdot (\mu - 1)^2 = x^7.$$

Si ricava: la generica cubica del fascio ha contatto 6-ptto con la C^7 nel punto O.

Per $(\mu - 1)^2 = 0$, cioè per $\mu_1 = \mu_2 = 1$, abbiamo due cubiche coincidenti che hanno contatto 7-ptto. Le due cubiche sono

$$(*) \quad C_3^{(O)} = \bar{C}_3^{(O)} : y = x^2 + x^3.$$

Ancora non si riesce a vedere se dal punto O si distaccano due rami lineari distinti.

Proseguo approssimando la curva nell'intorno del punto O mediante il fascio di quantiche $|C_4|^1 : y = x^2 + x^3 + \rho x^4$. Intersecando la C^7 si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} (y - x^2 - x^3)^2 = x^7 \\ y - x^2 - x^3 = \rho x^4 \end{cases} \quad \text{Sostituendo si ha:}$$

$$(8) \quad (\rho x^4)^2 = x^7, \quad \text{ossia} \quad \rho^2 x^8 = x^7.$$

Si ricava che tutte le quartiche del fascio $|C_4|^1$ hanno conta 7-ptto con la curva nel punto doppio O . Per nessun valore di ρ si riesce a trovarne una che abbia contatto maggiore. Ne segue che:

“ Il punto doppio O è una cuspidi di 3^a specie “.

Il sistema (5) ci suggerisce il modo di trovare equazioni parametriche razionali della curva. Infatti, intersecando la C^7 con il fascio di cubiche $|C_3|^1 : y - x^2 = tx^3$ si ottiene l'equazione risolvente

$$(6) \quad x^6(t-1)^2 = x^7.$$

La (6) ci dà la soluzione $O(0,0)$ contata 6 volte, e ciò è in accordo con il fatto che l'origine O è una cuspidi doppia di 3^a specie. Dalla (6) e dalla $y - x^2 = tx^3$ possiamo ricavare le equazioni parametriche razionali della C^4 :

$$(9) \quad x(t) = (t-1)^2, \quad y(t) = (t-1)^4 + t(t-1)^6.$$

La fig. 21 ci dà il grafico della curva.

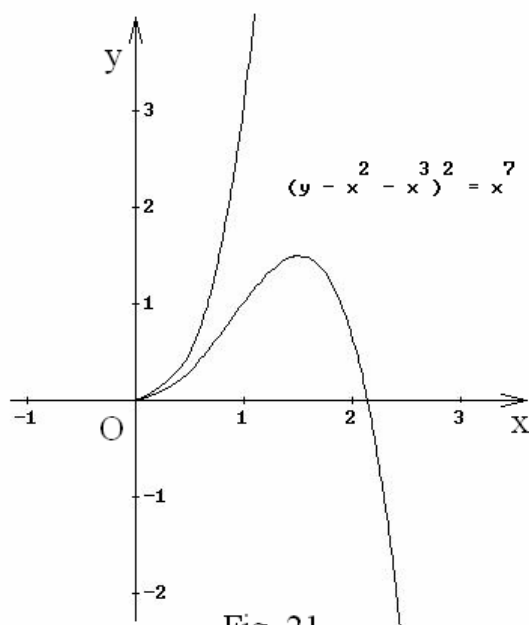


Fig. 21

n. 26 – Esercizio 12R (O: tacnodo di 1^a specie; Y_∞ : cuspidi tripla di 1^a specie)

Studiare la curva (1) $C^5: y^2 - 2x^2y - x^5 = 0$.

Soluzione

1^a parte. L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti sovrapposte $y = 0$ a contatto 5-ptto con la curva: quindi essa non è una cuspidi di 1^a specie.

Approssimo la C^5 nell'intorno del punto O mediante il fascio di parabole $|C_2|^1$: $y = \lambda x^2$, tutte tangenti alla C^5 nel punto stesso, e interseco la curva. Si ha il sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} y^2 - 2x^2y - x^5 = 0 \\ y = \lambda x^2 \end{cases} \rightarrow \lambda^2 x^4 - 2\lambda x^4 - x^5 = 0, \quad \text{ossia}$$

$$(3) \quad x^4(\lambda^2 - 2\lambda) - x^5 = 0.$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4-ptto con la curva nel punto O. Ci sono però due parabole osculatrici distinte che hanno contatto 5-ptto; esse si ottengono per i valori di λ per cui si ha $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, da cui $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Le due parabole sono:

$$(4) \quad C_2^{(O)}: yz = 0 \quad \text{e} \quad \bar{C}_2^{(O)}: y = 2x^2.$$

Si noti che la prima conica è spezzata nella retta $y = 0$ e nella retta impropria $z = 0$.

Poiché le due coniche osculatrici già si differenziano, posso dire che il punto doppio O è un tacnodo di 1^a specie.

Vogliamo ora trovare la cubica $C_3^{(O)}$ che oscula la C^5 nel punto O, in relazione alla prima parabola. Approssimo la curva nell'intorno del punto O mediante il fascio di cubiche $|C_3|^1$: $y = \mu x^3$ e interseco la curva:

$$(5) \quad \begin{cases} y^2 = 2x^2y + x^5 \\ y = \mu x^3 \end{cases} \quad \text{da cui si ha}$$

$$(6) \quad \mu^2 x^6 = 2\mu x^5 + x^5, \rightarrow \mu^2 x^6 = (2\mu + 1)x^5.$$

La generica cubica del fascio ha contatto 5-pto con la C^5 nel punto O . Abbiamo però una cubica osculatrice $C_3^{(O)}$ che ha contatto 6-pto; essa si ottiene per il valore di μ per cui si ha $2\mu + 1 = 0$. La cubica osculatrice in relazione alla conica $y \cdot z = 0$ è

$$(7) \quad C_3^{(O)} : y = -\frac{1}{2}x^3.$$

Troviamo ora la cubica $\bar{C}_3^{(O)}$ che oscula la C^5 nel punto O in relazione al ramo $y = 2x^2$. Approssimo la curva nell'intorno del punto O mediante il fascio di cubiche $|\bar{C}_3|^1 : y = 2x^2 + \mu x^3$ e la interseco:

$$(8) \quad \begin{cases} y^2 = 2x^2y + x^5 \\ y = 2x^2 + \mu x^3 \end{cases} \rightarrow (2x^2 + \mu x^3)^2 = 2x^2(2x^2 + \mu x^3) + x^5, \text{ da cui}$$

$$(*) \quad \cancel{4x^4} + \mu^2 x^6 + 4\mu x^5 = \cancel{4x^4} + 2\mu x^5 + x^5, \text{ e quindi}$$

$$(9) \quad \mu^2 x^6 = x^5(1 - 2\mu).$$

La generica cubica del fascio ha contatto 5-pto con la C^5 nel punto O . Abbiamo però una cubica osculatrice $\bar{C}_3^{(O)}$ che ha contatto 6-pto; essa si ottiene per il valore $\mu = 1/2$. La cubica che oscula la C^5 in relazione al ramo $y = 2x^2$ è:

$$(10) \quad \bar{C}_3^{(O)} : y = 2x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Le equazioni (7), (10) delle due cubiche osculatrici ci dicono che, per $x > 0$, i due rami lineari che si distaccano dal tacnodo giacciono da parti opposte rispetto alla tangente $y = 0$ (asse x).

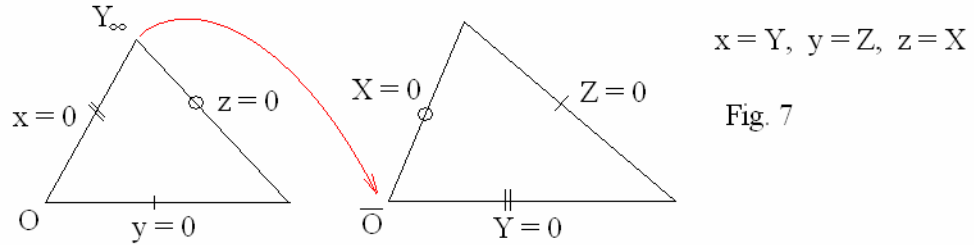
II^a parte. Trovo i punti impropri della curva: passo a coordinate omogenee e interseco con la retta impropria $z = 0$. Si ha:

$$(11) \quad \begin{cases} y^2 z^3 - 2x^2 y z^2 - x^5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \text{da cui } x^5 = 0.$$

Si ha la soluzione $Y_\infty(0,1,0)$; cioè la retta impropria ha 5 intersezioni con la C^5 assorbite nel punto improprio Y_∞ dell'asse y .

Se interseco la curva con la generica retta $x = k$ parallela all'asse y , si ha l'equazione risolvente $y^2 - 2k^2y - k^5 = 0$, che risulta abbassata di 3 gradi rispetto all'equazione della curva. Essa non ci dà nessuna indicazione sul punto improprio Y_∞ .

Per avere un'indicazione, con una omografia trasporto il punto Y_∞ nell'origine \bar{O} di un nuovo riferimento proiettivo (fig. 7, pg. 67). Le equazioni dell'omografia sono



$$(12) \quad x = Y, \quad y = Z, \quad z = X.$$

Se passo a coordinate omogenee, l'equazione della C^5 e della sua trasformata \bar{C}^5 sono:

$$(13) \quad C^5: y^2z^3 - 2x^2yz^2 - x^5 = 0, \quad \bar{C}^5: Z^2X^3 - 2Y^2ZX^2 - Y^5 = 0.$$

Passando a coordinate non omogenee, l'equazione della curva è

$$(14) \quad \bar{C}^5: X^3 - 2X^2Y^2 - Y^5 = 0.$$

L'origine \bar{O} è un punto triplo con le 3 tangenti sovrapposte alla retta $X = 0$; caso dubbio.

Approssimo la \bar{C}^5 nel punto \bar{O} mediante il fascio di coniche $[\bar{C}_2]^1: X = \lambda Y^2$ e interseco:

$$(15) \quad \begin{cases} X^3 - 2X^2Y^2 - Y^5 = 0 \\ X = \lambda Y^2 \end{cases} \quad \text{Si ottiene:}$$

$$(16) \quad \lambda^3 Y^6 - 2\lambda^2 Y^6 - Y^5 = 0, \quad \text{ossia} \quad (\lambda^3 - 2\lambda^2) Y^6 - Y^5 = 0.$$

Ne segue: “La generica conica del fascio $[\bar{C}_2]^1$ ha contatto 5-ptto con la \bar{C}^5 nel punto triplo \bar{O} e non posso trovare alcun valore di λ che mi dia una 6^a soluzione; ossia non c'è alcuna conica $C_2^{(O)}$ che abbia con la \bar{C}^5 un contatto maggiore di 5.

Poiché non esiste la successione $C_2^{(O)}, C_3^{(O)}, C_4^{(O)}, \dots$, il punto triplo \bar{O} non è origine di alcun ramo lineare; esso è invece origine di un ramo superlineare e si dice cuspidi tripla di 1^a specie, con tangente la retta $X = 0$.

Poiché il punto \bar{O} della \bar{C}^5 corrisponde al punto $Y_\infty(0,1,0)$ della curva originaria C^5 , posso dire che anche Y_∞ è una cuspidi tripla di 1^a specie, con tangente la retta impropria $z = 0$ (corrisponde alla retta $X = 0$).

III^a parte. Vogliamo ora determinare la regione del piano in cui giacciono i punti della curva. Ordinando rispetto alla variabile y , la sua equazione è

$$(17) \quad y^2 - 2x^2y - x^5 = 0 .$$

Risolvendo rispetto ad y si ha:

$$(*) \quad y = x^2 \pm \sqrt{x^4 + x^5}, \quad \text{da cui} \quad y = x^2 \pm x^2 \cdot \sqrt{1+x} .$$

Avremo quindi punti reali della curva per $x \geq -1$; per $x < -1$ essa non ha punti reali.

Intersecando la C^5 con la retta $x = -1$, si ha:

$$(*) \quad y^2 - 2y + 1 = 0, \rightarrow (y-1)^2 = 0, \text{ da cui } y = 1 \text{ 2 volte.}$$

Ne segue che la retta $x = -1$ è tangente alla curva nel punto $T(-1,1)$.

Lo studio dell'equazione (17) mediante il teorema di Cartesio ci permette di raccogliere altri elementi. Per $x \neq 0$ i coefficienti dell'equazione hanno i segni:

$$(18) \quad A = 1 > 0, \quad B = -2x^2 < 0, \quad C = -x^5 \begin{cases} > 0 & \text{per } x \text{ negativo,} \\ < 0 & \text{per } x \text{ positivo.} \end{cases}$$

Ne segue che:

1) Per $x < 0$ la (17) ha 2 V e quindi essa ha due radici distinte y_1, y_2 , entrambe positive;

2) per $x > 0$ la (17) ha 1 V e 1 P e quindi essa ha due radici y_1, y_2 , di segno opposto.

Ne segue che per $x > 0$ dal punto O escono due rami della curva che giacciono da parti opposte rispetto alla tangente $y = 0$.

IV^a parte. Vedo se è possibile avere equazioni parametriche della C^5 .

Considero il fascio di coniche $|C_2|^1$ avente due punti base coincidenti con il punto Y_∞ e altri due punti base coincidenti con il tacnodo O e considero le coniche tangenti in Y_∞ alla retta $z = 0$ (retta impropria) e nel punto O alla retta $y = 0$ (asse x) (fig. 9, pag. 70).

In coordinate omogenee, si ha quindi il fascio di coniche bitangenti

$$(19) \quad |C_2|^1: yz - t \cdot OY_\infty^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad yz - tx^2 = 0.$$

Passo a coordinate non omogenee e interseco la quartica con il fascio. Si ha:

$$(A) \quad \begin{cases} y^2 - 2x^2y - x^5 = 0 \\ y = tx^2 \end{cases}.$$

Otengo un sistema di 10^o grado di cui conosco a priori ben 9 soluzioni:

- $Y_\infty(0,1,0)$ soluzione 5 volte: 3 soluzioni per il punto triplo Y_∞ + altre due soluzioni per il punto di tangenza infinitamente vicino ad esso;
- $O(0,0)$ soluzione 4 volte: ognuno dei due punti doppi O porta due soluzioni.

Resterà un'equazione di primo grado in x da cui potrò ricavare la x in funzione del parametro t .

Sostituendo $y = tx^2$ nella prima equazione del sistema si ha:

$$(20) \quad t^2x^4 - 2tx^4 - x^5 = 0, \rightarrow x^4(t^2 - 2t - x) = 0.$$

L'equazione risolvente si è abbassata di 5 gradi perché le 5 soluzioni del punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$ già sono state assorbite.

Il sistema (A) si spezza nei due sistemi

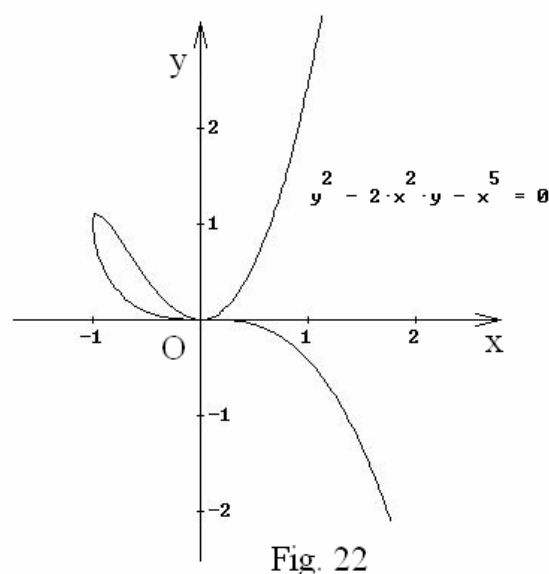
$$(B) \quad \begin{cases} x^4 = 0 \\ y = tx^2 \end{cases}, \quad (C) \quad \begin{cases} t^2 - 2t - x = 0 \\ y = tx^2 \end{cases}.$$

Il sistema (B) ci dà la soluzione $O(0,0)$ contata 4 volte, in corrispondenza ai due punti base, coincidenti con O , del fascio di coniche bitangenti.

Il sistema (C) ci permette di ricavare le equazioni parametriche del sistema, cioè

$$(21) \quad x(t) = t^2 - 2t, \quad y(t) = t(t^2 - 2t)^2.$$

Per $|t| \leq 50$ il programma “Derive” ci dà un ottimo grafico della curva (fig. 22).



n. 27 – Esercizio 13R (O : tacnodo di 1^a specie; Y_{∞} : cuspidi tripla di 1^a specie)

Mostrare che la curva (1) $C^5 : (y-x)^2 = x^5$ possiede equazioni parametriche razionali.

Soluzione

Gli elementi della curva sono analoghi a quelli della $C^4 : y^2 - 2x^2y - x^5 = 0$, già studiata. Quindi, **senza compiere alcuno studio preliminare**, possiamo trovare le equazioni parametriche razionali della (1) ponendo $y-x = tx^2$. Abbiamo il sistema:

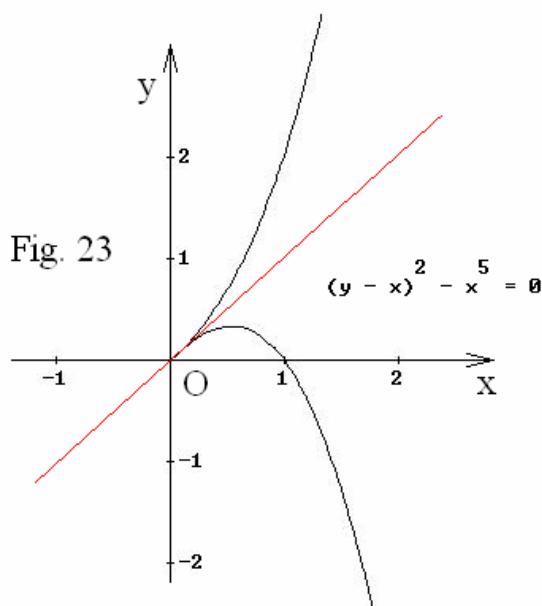
$$(1) \quad \begin{cases} (y-x)^2 = x^5 \\ y-x = tx^2; \end{cases} \quad \text{sostituendo si ha:}$$

$$(2) \quad t^2x^4 = x^5, \quad x^4(x-t^2) = 0.$$

Otteniamo la soluzione $O(0,0)$, contata 4 volte, poiché l'origine O è una **cuspidi doppia di 2^a specie**. Rimane un'equazione di 1^o grado in x da cui possiamo ricavare la x in funzione del parametro t : $x = t^2$. Sostituendo nella seconda equazione del sistema (1) si ricava che le equazioni parametriche razionali della C^5 sono:

$$(3) \quad x = t^2, \quad y = t^2 + t^5.$$

Con l'ausilio di un computer si trova il grafico della curva (fig. 23):



n. 28 – Esercizio 14R (O = punto triplo: cuspidale + ramo lineare)

Studiare la quartica (1) $C^4 : (x^2 + y^2)^2 - 4xy^2 = 0$.

Soluzione

La (1) è una quartica bicircolare (passa 2 volte per ogni punto ciclico del piano) ed è simmetrica rispetto all'asse x .

La (1) ci dice subito che deve essere $x \geq 0$, cioè la curva è tutta contenuta nel semipiano della x positive.

L'origine $O(0,0)$ è un punto triplo e l'equazione complessiva delle tangenti in questo punto è $xy^2 = 0$:

- $x = 0$ è una tangente semplice
- $y = 0$ è una tangente di molteplicità due.

In relazione alla tangente semplice $x = 0$ il punto è origine di un ramo lineare.

Interseco la curva con la tangente $x = 0$ e vedo se il corrispondente ramo γ_1 è regolare, di flesso o di ondulazione:

$$(2) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 4xy^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y^4 = 0,$$

quindi $y = 0$ è soluzione 4 volte. Ma di queste soluzioni 2 spettano alla tangente doppia $y = 0$; quindi la tangente $x = 0$ ha contatto 2-ptto con il proprio ramo nel punto O . Ne segue che da questo punto parte un ramo regolare γ_1 con tangente $x = 0$.

In relazione alla tangente doppia $y = 0$, il punto O si comporta come un punto doppio a tangenti sovrapposte e perciò esso può essere un tacnodo o una cuspide di specie qualsiasi. Per vedere la natura del punto, interseco la curva con la tangente doppia:

$$(3) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 4xy^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 = 0, \quad x = 0 \text{ soluz. 4 volte.}$$

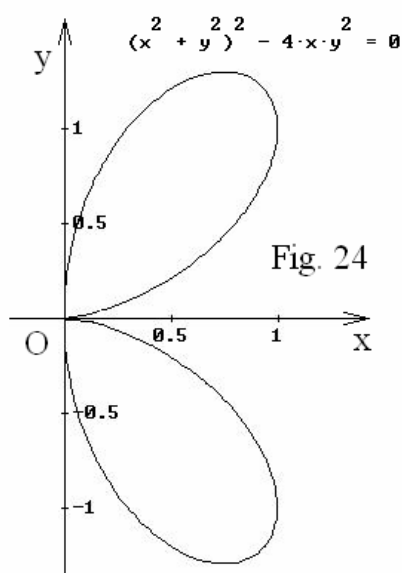
Quindi la tangente $y = 0$ ha contatto 4-pto con la curva nel punto O ; di queste 4 intersezioni 1 spetta al ramo lineare γ_1 , le altre 3 spettano al secondo ramo γ_2 . Pertanto la tangente $y = 0$ ha contatto 3-pto con il proprio ramo; concludiamo che in relazione alla tangente $y = 0$ il punto O è una cuspide di 1^a specie.

Oltre alla cuspide O , la C^4 ha altri due punti doppi che sono i punti ciclici $I_1(1, i, 0)$ e $I_2(1, -i, 0)$; ne segue che essa è una curva razionale.

Se intersechiamo la C^4 con il fascio di rette $x = ty$, passanti per il punto triplo O , otteniamo subito le equazioni parametriche della curva. Esse sono:

$$(5) \quad x(t) = \frac{4t^2}{(t^2 + 1)^2}, \quad y(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}.$$

Da queste equazioni subito si ricava il grafico della curva (fig. 24)



Le equazioni parametriche razionali della curva si possono ottenere anche passando a coordinate polari.

Ponendo $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, l'equazione cartesiana
 (1) $(x^2 + y^2)^2 - 4xy^2 = 0$ si trasforma nell'equazione polare

$$(5) \quad \rho^4 - 4\rho^3 \cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta = 0, \quad \text{ossia} \quad \rho = 4 \cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta.$$

Poiché $\rho < 4$, la (5) ci dice che C^4 è una curva chiusa.

Dall'equazione polare della curva possiamo ora trovare le sue equazioni parametriche. Si ha:

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta = 4 \cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta = \sin^2 2\vartheta \\ y &= \rho \sin \vartheta = 4 \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta = \cancel{2} \sin 2\vartheta \cdot \frac{1}{\cancel{2}} (1 - \cos 2\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi. \end{aligned}$$

Posto $\tan \vartheta = \lambda$ (con $-\infty < \lambda < +\infty$) si ha

$$\bullet \quad \sin 2\vartheta = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \cos 2\vartheta = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

Ne segue che la curva C^4 ha le equazioni parametriche razionali

$$(7) \quad x(\lambda) = \frac{4\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad y(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \left(1 - \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right) = \frac{4\lambda^3}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Si verifica subito che la retta $x = 1$ tocca la curva nei punti $T(1,1)$ e $T'(1,-1)$.

Infine, ricordiamo che il numero dei flessi di una C^n , che possieda soltanto punti doppi nodali e cuspidi di 1^a specie, è dato dalla 3^a formula di Plücker:

$$(9) \quad i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k,$$

ove $3n(n-2)$ è il numero dei punti di intersezione della C^n e della sua curva hessiana; per ogni punto doppio nodale debbo togliere 6 intersezioni e per ogni cuspidi di 1^a specie debbo togliere 8 intersezioni.

Nel nostro caso il punto triplo si può considerare la somma di due punti doppi nodali e di una cuspidi di 1^a specie. Fatti i calcoli, la C^4 possiede 4 punti di flesso, ma essi sono immaginari.

Solo per fare qualche esempio, un tacnodo di 1^a specie viene valutato come due punti doppi e così anche una cuspidi di 2^a specie.

n. 29 – Esercizio 15R (L'origine O è una cuspid tripla di 1^a specie)

Studiare la curva (1) $C^4: (x^2 + y^2)^2 = y^3$.

Soluzione

Si vede subito che deve essere $y \geq 0$, quindi la curva giace tutta al disopra dell'asse x .

Vediamo anche che l'origine $O(0,0)$ è un punto triplo con le tre tangenti principali sovrapposte di equazione $y = 0$. Poiché un punto triplo vale come 3 punti doppi, la curva è razionale.

La tangente ha contatto 4-pto con la curva nel punto O : ciò è sufficiente per dire che questo punto è una cuspid tripla di 1^a specie. Poiché O non è un punto semplice, non possiamo dire che esso sia un punto di ondulazione per la curva data. Approssimiamo la curva nell'intorno del punto O mediante un fascio di parabole $|C_2|^1: y = \lambda x^2$:

$$(2) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - y^3 = 0 \\ y = \lambda x^2 \end{cases} \rightarrow x^4(1 + \lambda^2 x^2)^2 - \lambda^3 x^6 = 0, \quad \text{da cui}$$

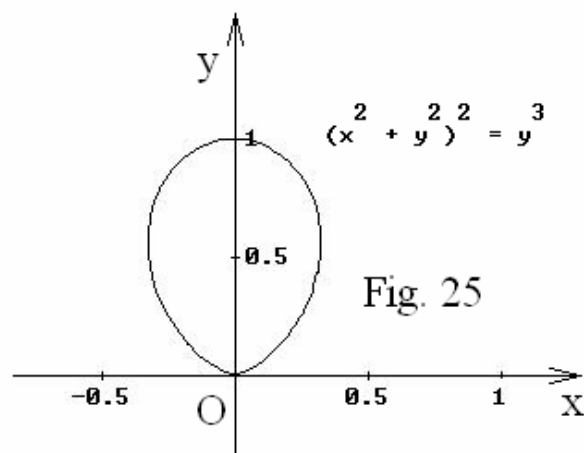
$$(3) \quad x^4[1 + (2\lambda^2 - \lambda^3)x^2 + \lambda^4 x^4] = 0.$$

Si vede che qualsiasi parabola del fascio ha contatto 4-pto con la C^4 nel punto O e per nessuna valore di λ essa ha un contatto 5-pto. Ciò ci conferma che il punto $O(0,0)$ è una cuspid tripla di 1^a specie per la curva data.

Se intersechiamo la C^4 con il fascio di rette $x = ty$, passanti per il punto triplo, otteniamo le equazioni parametriche razionali della curva. Esse sono:

$$(4) \quad x(t) = \frac{t}{(t^2 + 1)^2}, \quad y(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^2}.$$

Il grafico della curva è rappresentato in fig. 25.



n. 30 – Esercizio 16R (O= tacnodo; Y_∞ = cuspide tripla di 1^a specie)

Studiare la curva (1) $C^5 : 2(y-x)^2 = x^4 + x^5$.

Soluzione

Intersecando la curva con l'asse x ($y=0$) si ottiene

$$\bullet \quad x^5 + x^4 - 2x^2 = 0, \quad x^2(x^3 + x^2 - 2) = 0, \quad x^2(x-1)(x^3 + x^2 - 2) = 0 ;$$

la curva passa per l'origine $O(0,0)$ e per il punto $A(1,0)$ dell'asse x .

L'origine O è un punto doppio con tangenti sovrapposte $y=x$ a contatto 4-ptto con la curva. Il caso è dubbio, comunque il punto O non è una cuspide di 1^a specie.

Approssimo la curva nell'intorno del punto O mediante il fascio di coniche

$$|C_2|^1 : y-x = \lambda x^2 :$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2(y-x)^2 = x^4 + y^4 \\ y-x = \lambda x^2 \end{cases} \rightarrow 2\lambda^2 x^4 - x^4 - x^5 = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(3) \quad x^4(2\lambda^2 - 1) - x^5 = 0 .$$

Posso dire: la generica conica del fascio ha contatto 4-ptto con la C^5 nel punto O ; per $2\lambda^2 - 1 = 0$, cioè per $\lambda = \pm \sqrt{2}/2$, si hanno due parabole osculatrici distinte a contatto 5-ptto. Esse hanno le equazioni:

$$(3) \quad C_2^{(O)} : y-x = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2, \quad \bar{C}_2^{(O)} : y-x = -\frac{\sqrt{2}}{2} x^2 .$$

Ne segue che l'origine O è un tacnodo di 1^a specie e vale per 2 punti doppi. Le parabole (3) ci dicono che esso è origine di due rami lineari situati da parti opposte rispetto alla tangente comune $y=x$.

L'equazione (1) ci suggerisce che possiamo trovare le equazioni parametriche razionali della curva senza nemmeno iniziare lo studio dei punti singolari. Infatti, intersecando la C^5 con il fascio di coniche $|C_2|^1 : y-x = tx^2$ si ha:

$$(A) \quad \begin{cases} x^5 + x^4 - 2(y-x)^2 = 0 \\ y-x = tx^2 \end{cases} \rightarrow x^5 + x^4 - 2t^2 x^4 = 0 . \quad \text{Si ricava:}$$

$$(4) \quad x^4(x+1-2t^2) = 0 .$$

Questa equazione si spezza in altre due.

$$(5) \quad x^4 = 0, \quad x + 1 - 2t^2 = 0.$$

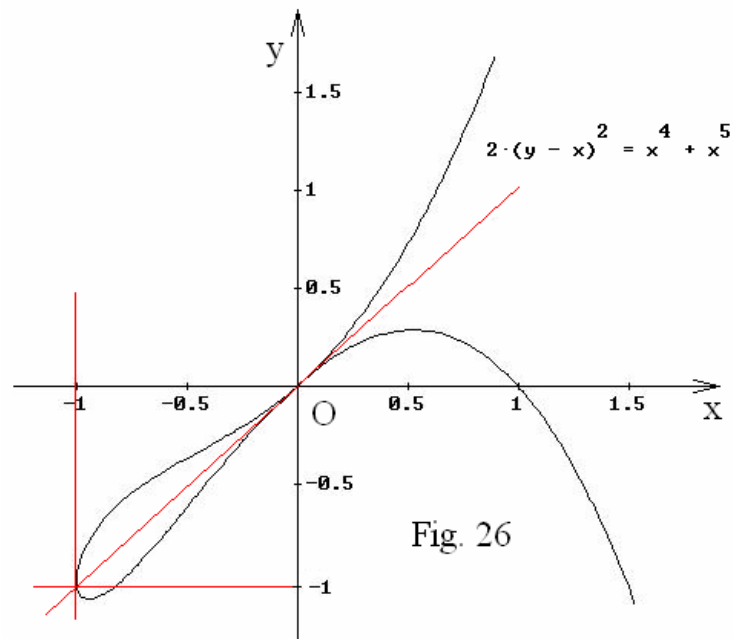
La prima equazione ha la soluzione $O(0,0)$ contata 4 volte, e ciò dipende dal fatto che questo punto è un tacnodo, che vale come due punti doppi. Dalla restante equazione si ricava:

$$(6) \quad x(t) = 2t^2 - 1.$$

Sostituendo nella seconda equazione del sistema (A) si ottiene subito $y(t)$. Le equazione parametriche della C^5 sono

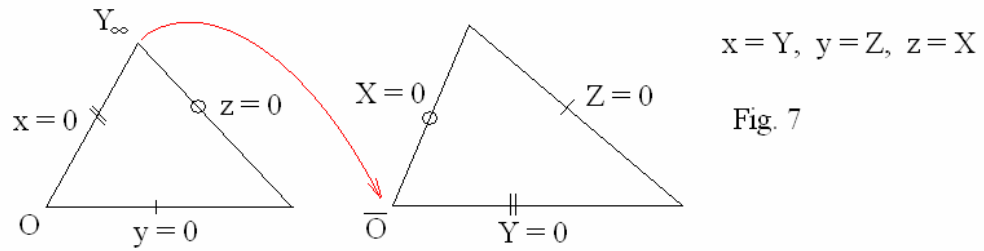
$$(7) \quad x(t) = 2t^2 - 1, \quad y(t) = 4t^5 - 4t^3 + 2t^2 + t - 1.$$

Esse ci permettono di trovare il grafico della curva (fig. 26).



NOTARE. Se passo a coordinate omogenee vedo che la retta impropria $z = 0$ ha 5 intersezioni con la C^5 assorbite nel punto $Y_\infty(0,1,0)$. Questo è un caso dubbio che è interessante studiare.

Con una omografia trasporto il punto Y_∞ nell'origine \bar{O} di un nuovo riferimento proiettivo e lo studio (vedi fig. 7, pag. 72).



Le equazioni dell'omografia sono:

$$(8) \quad x = Y, \quad y = Z, \quad z = X.$$

In coordinate omogenee le equazioni della C^5 e della sua trasformata sono:

$$(9) \quad \begin{aligned} C^5 : x^5 + x^4z - 2y^2z^3 + 4xyz^3 - 2x^2z^3 &= 0, \\ \bar{C}^5 : Y^5 + Y^4X - 2Z^2X^3 + 4YZX^3 - 2Y^2X^3 &= 0. \end{aligned}$$

Passando a coordinate non omogenee (si pone $Z=1$), l'equazione della \bar{C}^5 diventa:

$$(10) \quad \bar{C}^5 : Y^5 + Y^4X - 2Y^2X^3 + 4YX^3 - 2X^3 = 0.$$

Si vede subito che **l'origine $\bar{O}(0,0)$ del nuovo riferimento è un punto triplo con tangenti principali sovrapposte $X=0$.**

La tangente tripla $X=0$ ha contatto 5-ptto con la \bar{C}^5 nel punto \bar{O} . Il caso è dubbio.

Approssimo la \bar{C}^5 nell'intorno del punto \bar{O} mediante il fascio di coniche $X = \lambda Y^2$:

$$(11) \quad \begin{cases} Y^5 + Y^4X - 2Y^2X^3 + 4YX^3 - 2X^3 = 0 \\ X = \lambda Y^2 \end{cases} \quad \text{Si ottiene:}$$

$$(12) \quad Y^5 + \lambda Y^6 - 2\lambda^3 Y^8 + 4\lambda^3 Y^7 - 2\lambda^3 Y^6 = 0.$$

La generica conica del fascio ha contatto 5-ptto con la \bar{C}^5 nel punto \bar{O} e **per nessun valore di λ posso provocare una 6^a soluzione $Y=0$, ossia non c'è alcuna conica $\bar{C}_2^{(0)}$ che abbia con la \bar{C}^5 un contatto >5 .** Quindi non esiste la

successione di curve $\bar{C}_2^{(0)}, \bar{C}_3^{(0)}, \bar{C}_4^{(0)}, \dots$; ne segue che il punto triplo \bar{O} non è origine di alcun ramo lineare. Si conclude che:

“ Il punto triplo \bar{O} (origine di un ramo superlineare) è una cuspidi tripla di 1^a specie con tangente a contatto 5-pto la retta $X=0$ “.

Ma il punto \bar{O} è il trasformato del punto $Y_\infty(0,1,0)$ e la retta $X=0$ è la trasformata della retta impropria $z=0$. Possiamo allora concludere che **il punto triplo $Y_\infty(0,1,0)$ è una cuspidi tripla di 1^a specie della curva C^5 con tangente a contatto 5-pto la retta impropria $z=0$ del piano xy .**

Poiché la curva è razionale, il massimo numero dei suoi punti doppi deve essere = 6; ne segue che una cuspidi tripla di 1^a specie vale per 4 punti doppi.

n. 31 – Esercizio 17R (O = tacnodo di 1^a specie; Y_∞ = punto doppio)

Data la quartica (1) $C^4 : 4x^2y^2 + 4x^2(x-y) - (x-y)^2 = 0$,

dimostrare che essa è razionale e trovarne le equazioni parametriche.

Soluzione

Si dimostra facilmente che il punto doppio O è un tacnodo di 1^a specie con tangente di equazione $y=x$ contata due volte ; esso vale per due punti doppi.

Passo a coordinate omogenee e interseco con la retta impropria del piano:

$$(2) \quad \begin{cases} 4x^2y^2 + 4x^2(x-y)z - (x-y)^2z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ne segue che l'equazione complessiva delle rette che dal punto O proiettano i punti impropri della curva è:

$$(3) \quad x^2y^2 = 0;$$

quindi la retta impropria $z=0$ ha 2 intersezioni con la C^4 assorbite nel punto improprio $Y_\infty(0,1,0)$ e 2 intersezioni nel punto $X_\infty(1,0,0)$.

Si trova facilmente che $Y_\infty(0,1,0)$ è un punto doppio nodale con tangenti asintotiche di equazioni $x = \pm \frac{1}{2}$. In particolare la retta $x = \frac{1}{2}$ ha 4 intersezioni con la C^4 nel punto Y_∞ , ossia essa è una tangente asintotica inflessionale; e quindi Y_∞ è un flecnodo improprio, ma reale.

In corrispondenza degli asintoti $x = 1/2$ e $x = -1/2$, relativi al flecnodo Y_∞ , l'andamento della curva è quello rappresentato in figura.

Il punto improprio $X_\infty(1,0,0)$ è, invece, un punto semplice con tangente la retta impropria $z = 0$.

In conclusione la C^4 ha 3 punti doppi, cioè

- il tacnodo di 1^a specie $O(0,0)$ (che vale per 2 punti doppi) con tangente di equazione $y = x$;
- Il punto improprio $Y_\infty(1,0,0)$, che è un flecnodo con tangente inflessionale $x = 1/2$ e tangente regolare $y = -1/2$.

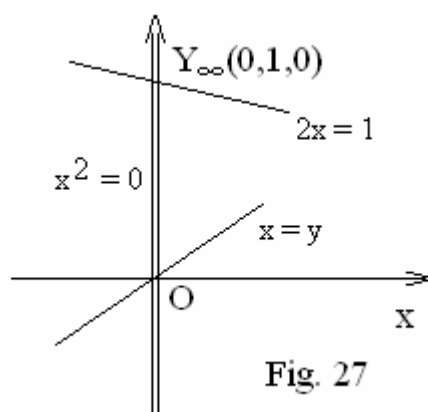
La curva, pertanto, ha il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo grado e quindi essa è razionale.

Con questi dati posso trovare le equazioni parametriche razionali della curva.

Prima prova

Potrei intersecare la C^4 con il fascio di coniche $|C_2|^1$ tangenti alla retta inflessionale $2x - 1 = 0$ nel punto Y_∞ e tangenti alla retta $x - y = 0$ nel punto O . Questo fascio ha i punti base $O(0,0)$ e $Y_\infty(0,1,0)$ contato 2 volte ciascuno (vedi fig. 27) ed ha l'equazione:

$$(4) \quad |C_2|^1: (2x-1)(x-y) - tx^2 = 0;$$



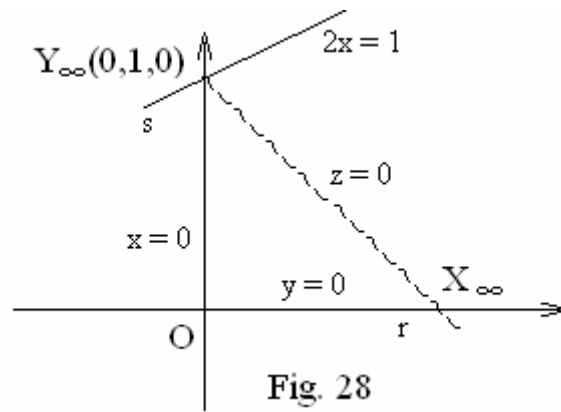
come si vede, esso è un po' complicato e quindi conviene trovare un'altra strada.

Seconda prova

Poiché $X_\infty(1,0,0)$ è un punto della curva di coordinate particolarmente semplice, posso considerare il fascio di coniche avente i punti base X_∞ , O , Y_∞ e tangenti in questo punto alla retta $s: 2x - 1 = 0$.

L'equazione del fascio (vedi fig. 28) è

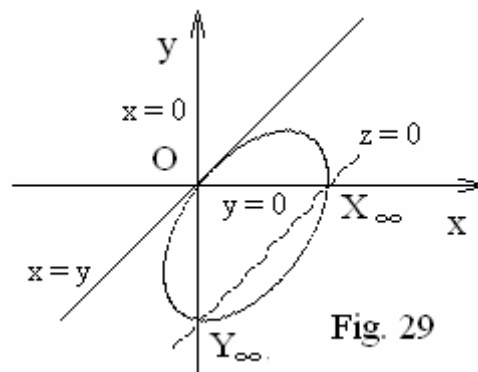
$$(5) \quad |C_2|^1: s \cdot r + t OY_\infty \cdot OX_\infty = 0, \quad \text{cioè}$$



- (6) $|C_2|^I: ty(2x-1)+xz=0$.
 Come si vede, si tratta di un fascio più maneggevole.

Terza prova

Infine, in alternativa, posso considerare il fascio di iperboli equilateri passanti per i p-ti impropri X_∞, Y_∞ e per il punto O, e tangenti in tal punto alla retta $x-y=0$. Il fascio (vedi fig. 29) ha l'equazione:



- (7) $|C_2|^I: \mu z(x-y)-\lambda xy=0$, o più semplicemente
 (8) $|C_2|^I: x-y=t \cdot xy$.

Interseco la curva con il fascio di iperboli:

$$(9) \quad \begin{cases} 4x^2y^2+4x^2(x-y)-(x-y)^2=0 \\ x-y=txy \end{cases} .$$

Otengo un sistema di 8^0 grado di cui conosco a priori ben 7 soluzioni:

- 4 soluzioni $O(0,0)$, poiché il tacnodo O è preso come punto di tangenza;
- 2 soluzioni $Y_\infty(0,1,0)$, come punto doppio;
- 1 soluzione $X_\infty(1,0,0)$, come punto semplice .

Risolvendo il sistema (9) si ha:

$$(*) \quad 4x^2y^2 + 4x^2 \cdot txy - t^2x^2y^2 = 0,$$

$$(*) \quad x^2y \cdot (4y + 4tx - t^2y) = 0.$$

L'equazione risolvente è di 4° grado perché i punti impropri sono stati automaticamente assorbiti.

Il sistema (9) si spezza così nei due sistemi equivalenti

$$(A) \quad \begin{cases} x - y = txy \\ y = 0 \end{cases}, \quad (B) \quad \begin{cases} x - y = txy \\ x^2 = 0 \end{cases}, \quad (C) \quad \begin{cases} txy = x - y \\ x = \frac{(t^2 - 4)y}{4t} \end{cases}.$$

Il sistema (A) dà 1 soluzione $O(0,0)$;

il sistema (B) dà altre 2 soluzioni $O(0,0)$.

Risolvo il sistema (C) sostituendo la seconda equazione nella prima. Si ha:

$$(10) \quad ty \cdot \frac{(t^2 - 4)}{4t} y = \frac{t^2 - 4}{4t} y - y$$

$$(11) \quad y \cdot [ty(t^2 - 4) - (t^2 - 4) - 4t] = 0.$$

Il sistema (C) si spezza quindi nel sistema

$$(D) \quad \begin{cases} x - y = txy \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e nell'equazione} \quad (E) \quad ty(t^2 - 4) = t^2 - 4 - 4t.$$

Il sistema (D) ci dà la 4ª soluzione $O(0,0)$. Ricavando t dall'equazione (E) e sostituendo nella seconda equazione del sistema (C) si ottengono le equazioni parametriche razionali della quartica. Esse sono date dal sistema

$$(13) \quad x(t) = \frac{t^2 - 4t - 4}{4t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2 - 4t - 4}{t(t^2 - 4)}.$$

n. 32 – Esercizio 18R (quartica bicircolare)

Si consideri la quartica

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 + 4y(x^2 + y^2) + 4y^2 + 3x^2 + 2y = 0$$

e si verifichi al computer che essa ha la curiosa forma di una pera.

n. 33 – Punti simmetrici in un riferimento polare

Consideriamo nel piano un sistema di coordinate polari ρ, ϑ associato ad un sistema di coordinate cartesiane Oxy e sia

$$(1) \quad \rho = f(\vartheta)$$

una funzione polare definita per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

La funzione $f(\vartheta)$ può assumere benissimo anche valori negativi. Vediamo, con un esempio, che significa $\rho < 0$.

Nel riferimento cartesiano associato al sistema polare consideriamo il punto $A(2,2)$ e il punto $B(-2,-2)$, simmetrico di A rispetto all'origine O .

Le coordinate polari di A sono $\rho = \sqrt{8}$, $\vartheta = \pi/4$;

Le coordinate polari di B sono $\rho = \sqrt{8}$, $\vartheta = \pi/4 + \pi$.

Le coordinate polari di B , come sappiamo, si possono anche indicare con

$$\rho = -\sqrt{8}, \quad \vartheta = \pi/4.$$

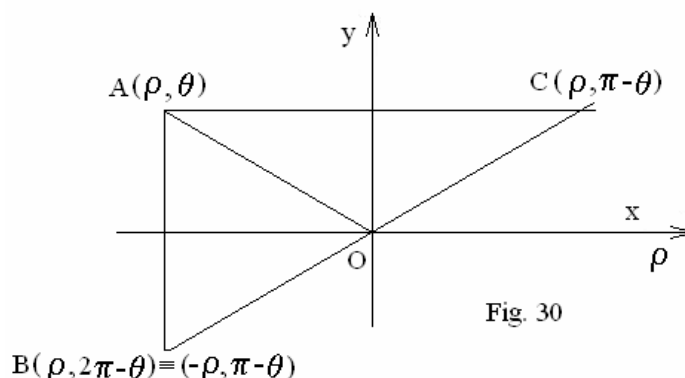
Quindi si ha (2): $B(\sqrt{8}, \pi/4 + \pi) \equiv (-\sqrt{8}, \pi/4)$,

ossia “A parità di ϑ , cambiando segno a ρ si prende il simmetrico rispetto all'origine O del punto A ”, e quindi:

“ Il punto di coordinate polari $(-\rho, \vartheta)$, con $-\rho < 0$, non è altro che il punto di coordinate polari $(\rho, \vartheta + \pi)$ ”.

Per fare un altro esempio, supponiamo che il punto di coordinate polari $A(\rho, \vartheta)$ cada nel 2° quadrante. Il simmetrico di A rispetto all'asse y è il punto $C(\rho, \pi - \vartheta)$; il simmetrico di A rispetto all'asse x è un punto B , che è anche simmetrico di C rispetto all'origine, e può essere indicato in due modi (fig. 30):

$$(3) \quad B(\rho, 2\pi - \vartheta) \text{ o } B(-\rho, \pi - \vartheta).$$



Si conclude:“ Se con la sostituzione

$$(4) \quad \begin{cases} \rho = \bar{\rho} \\ \vartheta = 2\pi - \bar{\vartheta} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \rho = -\bar{\rho} \\ \vartheta = \pi - \bar{\vartheta} \end{cases}$$

l'equazione polare della curva non cambia, allora la curva è simmetrica rispetto all'asse x”.

Riassumendo:

Consideriamo il punto $A(\rho, \vartheta)$, e per comodità supponiamo che esso cada nel 2° quadrante; il simmetrico rispetto all'asse y è il punto $C(\rho, \pi - \vartheta)$ e il simmetrico rispetto all'asse x è $B(\rho, 2\pi - \vartheta)$ o $B(-\rho, \pi - \vartheta)$.

n. 34 – Studio di curve date in coordinate polari (Lezioni Prof. G. Roghi)

Consideriamo una curva di equazione polare

$$(1) \quad \rho = f(\vartheta)$$

Per studiare la curva si può procedere come segue:

in un primo momento considero ϑ e ρ come coordinate cartesiane e disegno il grafico della funzione come si fa in un sistema di coordinate cartesiane.

Poiché la curva è data in forma esplicita, la posso studiare esattamente con i metodi dell'Analisi matematica, cioè mediante le derivate, e **trovo così i punti di massimo e di minimo ecc.**

Ottengo in tal modo una certa curva nel piano cartesiano ϑ, ρ . Si deve però notare che questa curva non è il diagramma polare della funzione $\rho = f(\vartheta)$, poiché con questo procedimento ϑ e ρ non hanno il significato di coordinate polari. **Però da questo grafico posso risalire facilmente al grafico effettivo dell'equazione polare $\rho = f(\vartheta)$ (grafico in cui ρ e ϑ hanno il loro effettivo significato di coordinate polari).**

Primo esempio. Si disegni la curva di equazione polare

$$(2) \quad \rho = \sin(2\vartheta).$$

Se in un primo momento consideriamo ρ e ϑ come coordinate cartesiane, si ha la funzione $y = \sin(2x)$ e il grafico è una senoide che fa due oscillazioni fra 0 e 2π ; l'anomalia, infatti, è 2ϑ e non ϑ (fig. 31).

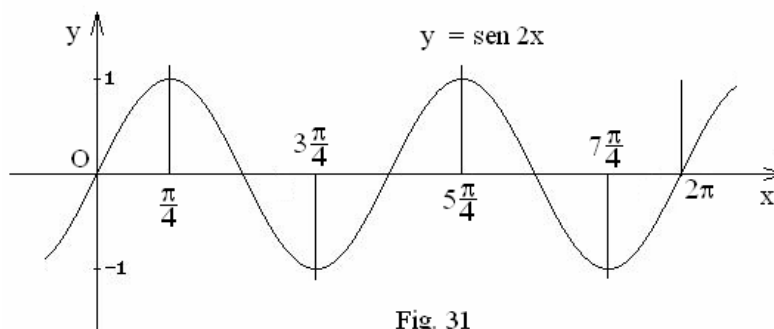


Fig. 31

Questa curva non ha nulla in comune con la curva effettiva dell'equazione polare, ma essa ci dà precise indicazioni sul grafico dell'equazione stessa.

Passiamo ora ad un riferimento polare vero e proprio. Si verifica che: quando l'anomalia ϑ cresce da 0 a $\pi/4$, il raggio vettore ρ cresce da 0 ad 1 ; decresce da 1 a 0 , quando l'anomalia cresce da $\pi/4$ a $2 \cdot \pi/4$. Si ottengono così i rami 1 e 2 .

Quando l'anomalia cresce da $2 \cdot \pi/4$ a $3 \cdot \pi/4$, il raggio vettore decresce da 0 a -1 . Se ρ fosse positivo si avrebbe il ramo $3'$; ma siccome ρ è negativo dovrò prendere il simmetrico di tale ramo rispetto all'origine e si ottiene così il ramo 3 .

Quando l'anomalia ϑ cresce da $3 \frac{\pi}{4}$ a $4 \frac{\pi}{4}$, il raggio vettore ρ cresce, per valori negativi, da -1 a 0 . Se ρ fosse positivo si avrebbe il ramo $4'$; ma poiché ρ è negativo, debbo prendere il simmetrico di tale ramo rispetto all'origine O e si ottiene così il ramo 4 .

Quando l'anomalia ϑ cresce da $4 \frac{\pi}{4}$ a $5 \frac{\pi}{4}$, il raggio vettore ρ cresce da 0 ad 1 ; il raggio ρ decresce invece da 1 a 0 , quando l'anomalia cresce da $5 \cdot \pi/4$ a $6 \cdot \pi/4$. Si ottengono così i rami 5 e 6 . In modo analogo si procede per gli ultimi due rami. Si vede così che la curva è una foglia a quattro petali (fig. 32), detta **rodonea**, che ha nell'origine un punto quadruplo.

Vogliamo ora trovare l'eq. cartesiana della rodonea. Partiamo dall'equazione

$$(3) \quad \rho = R \sin(2\vartheta), \quad \text{ossia} \quad \rho = 2R \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta.$$

Poiché $x = \rho \cos\vartheta$, $y = \rho \sin\vartheta$ e $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ si ha:

$$(4) \quad \rho = 2R \frac{y}{\rho} \cdot \frac{x}{\rho}, \quad \rightarrow \quad \rho^3 = 2Rxy.$$

$$\text{Ne segue} \quad (x^2 + y^2)^{3/2} = 2Rxy,$$

$$\text{e infine (5)} \quad (x^2 + y^2)^3 = 4R^2 x^2 y^2.$$

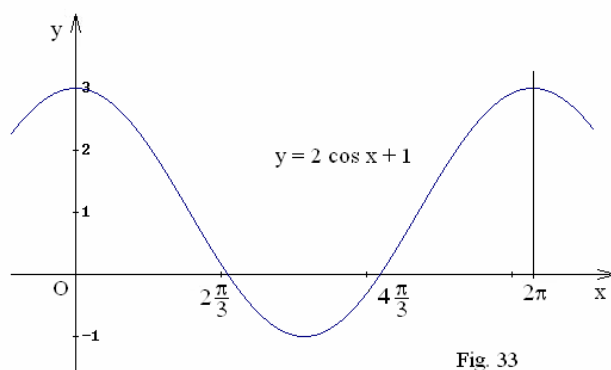
Secondo esempio

Si disegni la curva di equazione polare

$$(1) \quad \rho = a(2 \cos\vartheta + 1),$$

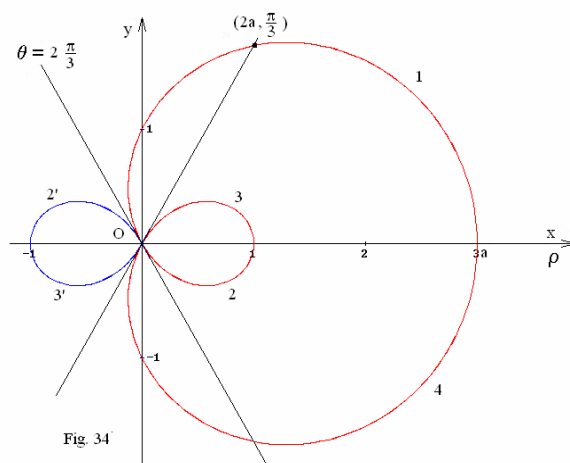
con a = unità di misura dei segmenti.

In un primo momento consideriamo ρ e ϑ come coordinate cartesiane e studiamo la funzione con i metodi dell'analisi matematica. Poiché la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$, possiamo limitarci a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si vede così che si ha un arco di cosinusoide che ha i punti di massimo relativo $(0, 3a)$, $(2\pi, 3a)$ e il punto di minimo $(\pi, -a)$. Si riconosce poi che la curva interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = 2\pi/3$ e $x = 4\pi/3$. Si ottiene così il grafico di fig. 33.



Questa curva non ha nulla in comune con la curva effettiva dell'equazione polare, ma essa ci dà precise indicazioni sul grafico dell'equazione polare.

Passiamo ora ad un riferimento polare vero e proprio. Si verifica che: quando l'anomalia ϑ cresce assumendo i valori $\vartheta = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$, allora il raggio vettore ρ diminuisce assumendo i valori $\rho = 3a, 2a, a, 0$. Quando ϑ cresce da $2\pi/3$ a π , il raggio ρ diminuisce da 0 a -1 . Se ρ fosse positivo, si avrebbe l'arco di curva 2'; ma siccome ρ è negativo, dobbiamo prendere l'arco di curva 2, simmetrico del primo rispetto all'origine O. Quando $\pi \leq \vartheta \leq 4\pi/3$, ρ cresce per valori negativi da -1 a 0. Se ρ fosse positivo, con $0 \leq \rho \leq 1$, si avrebbe l'arco di curva 3'; ma siccome ρ è negativo, dobbiamo prendere l'arco di curva 3, simmetrico dell'altro rispetto all'origine O. Infine, quando ϑ cresce da $4\pi/3$ a 2π , cresce anche il raggio vettore ρ variando da 0 a $3a$. Si ottiene così la curva, detta **lumaca di Pascal**, che si vede in fig. 34.



Vogliamo ora trovare l'equazione cartesiana della "lumaca di Pascal". Ricordando che $\cos \vartheta = x/\rho$ si ha in successione:

$$(2) \quad \rho = a(2 \cos \vartheta + 1), \rightarrow \rho = a \left(2 \frac{x}{\rho} + 1 \right), \rightarrow \rho^2 = a(2x + \rho)$$

e quindi $a\rho = \rho^2 - 2ax$ da cui $a\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 - 2ax$.

Innalzando al quadrato ambo i membri si ha:

$$(3) \quad a^2x^2 + a^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + 4a^2x^2, \text{ e infine}$$

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + a^2(3x^2 - y^2) = 0.$$

Si tratta di una quartica bicircolare; essa ha un punto doppio in ognuno dei punti ciclici e un terzo punto doppio nodale nell'origine O. Ne segue che la C^4 è razionale; le sue equazioni parametriche razionali si possono ricavare a partire dall'equazione polare.

Vogliamo indicare un altro modo per studiare il grafico della curva.

Ordino la C^4 rispetto ad y (ordinando rispetto ad x si ottiene un termine in x^3):

$$(*) \quad x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4ax(x^2 + y^2) + 3a^2x^2 - a^2y^2 = 0,$$

$$(5) \quad y^4 + y^2(2x^2 - 4ax - a^2) + x^2(x^2 - 4ax + 3a^2) = 0.$$

Ponendo $y^2 = t$ si ottiene l'equazione di 2° grado

$$(6) \quad t^2 + t(2x^2 - 4ax - a^2) + x^2(x^2 - 4ax + 3a^2) = 0.$$

Per il discriminante dell'equazione si ha:

$$(*) \quad \Delta = (2x^2 - 4ax - a^2)^2 - 4x^2(x^2 - 4ax + 3a^2), \quad \text{da cui}$$

$$(7) \quad \Delta = a^3(a + 8x).$$

Da questa si ricava che abbiamo valori reali di $t = y^2$ per i valori di x per cui si

ha $\Delta \geq 0$, ossia $(8) \quad x \geq -\frac{1}{8}a.$

Ora non possiamo avere valori reali di y se la $t = y^2$, pur essendo reale, non risulta positiva. Perché $t = y^2$ sia positiva occorre che l'equazione (6) presenti 1 o 2 variazioni. Ciò si può ricavare dal teorema di Cartesio.

- 1° coefficiente, A : è sempre >0 .
- 2° coefficiente, $B = 2x^2 - 4ax - a^2$; è ≥ 0 per $x \leq \left[a(2 - \sqrt{6}) \right] / 2$ e per $x \geq \left[a(2 + \sqrt{6}) \right] / 2$; pongo $\left[a(2 + \sqrt{6}) / 2 \right] = \alpha$.
- 3° coefficiente, $C = x^2(x^2 - 4ax + 3a^2) \geq 0$ per $x \leq a$ e $x \geq 3a$.

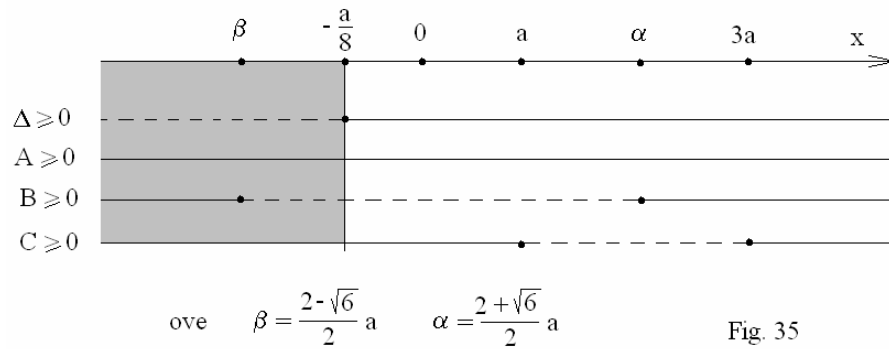


Fig. 35

Il grafico di fig. 35 riporta il segno di Δ e dei coefficienti. Da esso si vede quanto segue.

- 1) Per $x < -a/8$ e $x > 3a$ non si ha nessuna soluzione reale di y .
- 2) Per $x = -a/8$ si hanno 2 soluz. opposte di y , contata ognuna 2 volte, ne segue che la retta $x = -a/8$ è bitangente alla curva.
- 3) Per $-a/8 < x < a$ si hanno 2 variazioni, cioè 2 soluzioni positive di y^2 e quindi 4 soluzioni reali di x , opposte due a due.
- 5) Per $x = a$ si ha una retta che tocca la curva nel punto $(a, 0)$ e che la interseca in due punti situati da parte opposta rispetto all'asse x ed equidistanti.
- 6) Per $a < x < \alpha$ si ha 1 sola variazione, cioè 1 sola soluzione positiva y^2 e quindi 2 soluzioni opposte per y .
- 7) Si hanno le stesse conclusioni del punto 6) per $x = \alpha$ e per $\alpha < x < 3a$.
- 8) Per $x = 3a$ si ha 2 soluzioni nulle di y , quindi la retta $x = 3a$ è tangente alla curva.

Seguendo le indicazioni date da questi punti possiamo tracciare il grafico dell'equazione cartesiana e constatare che esso è analogo a quello dell'equazione polare.

n. 35 – Teorema di Clebbsc (Lezioni Prof. G. Roghi)

Consideriamo una curva algebrica C^n di equazione $F(x, y) = 0$; il numero dei suoi parametri omogenei è $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, e quindi il numero dei parametri essenziali è $N-1 = \frac{n(n+3)}{2}$. Il massimo numero di punti doppi che la curva può avere è $N' = (n-2)(n-1)/2$ e allora essa si dice di “genere zero”. **Facciamo vedere che in tal caso la curva è razionale**, ossia ammette una rappresentazione parametrica razionale.

Infatti, se prendiamo questi punti doppi ed altri $n-3$ punti semplici della C^n , il numero dei punti presi sulla curva in totale è :

$$(1) \quad N_t = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n-3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1.$$

Poiché $(n-2)(n+1)/2$ è il numero dei parametri essenziali dai quali dipende una C^{n-2} , per tutti questi N_t punti passa non una sola curva C^{n-2} , ma un fascio di C^{n-2} . Se f_1 ed f_2 sono due curve del fascio, questo può essere indicato con l'equazione

$$(2) \quad \Phi: f_1(x, y) + t \cdot f_2(x, y) = 0.$$

I nostri $\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1$ punti sono i punti base di questo fascio e quindi sono comuni a tutte le curve del fascio stesso.

Intersechiamo la C^n con il fascio Φ e scriviamo quindi il sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} F = 0 \\ f_1 + t \cdot f_2 = 0 \end{cases}.$$

Il numero dei punti comuni alle due curve del sistema comprende, a priori, i punti da cui siamo partiti; e quindi esso è

$$(4) \quad N^* = \cancel{2} \frac{(n-1)(n-2)}{\cancel{2}} + n-3 = n(n-2) - 1.$$

[Si noti che il numero $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ è stato moltiplicato per 2 perché ogni punto doppio conta per 2 intersezioni]. Ma in virtù del grado il sistema (3) deve dare $n(n-2)$ soluzioni, come si desume dal teorema di Bézout. Ne segue che queste soluzioni le conosciamo tutte, meno una.

Tenendo conto delle soluzioni che già conosciamo, con successive divisioni possiamo abbassare di grado il sistema (3).

Resterà un sistema di 1^0 grado nelle variabili x, y che contiene il parametro t .

Risolviendo questo sistema non posso avere radicali, cioè ottengo x e y come funzioni razionali del parametro t : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Ottengo così le equazioni parametriche razionali della C^n .

In generale, per trovare le equazioni parametriche razionali di una C^n si deve ripetere il ragionamento svolto, e in ciò sta appunto l'importanza del teorema di Clebsch.

Viceversa si può dimostrare che ogni curva razionale è di genere zero, ossia ha il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo ordine.

n . 36 – Involuppo di una famiglia di curve

Sia Φ una famiglia di curve piane C , dipendenti da un parametro t , onde le curve stesse potranno rappresentarsi con un'equazione del tipo

$$(A) \quad f(x, y, t) = 0.$$

Per un fissato valore di t , questa equazione rappresenta una curva C_t della famiglia; al variare del parametro t tale curva varia descrivendo la famiglia Φ . Ammetteremo in più che ogni curva C_t della famiglia provenga da un solo valore del parametro t , cioè che vi sia una corrispondenza biunivoca fra le curve C_t ed i valori del parametro t .

Supponiamo poiché esista una porzione di curva regolare Γ tale che per ogni suo punto $P(x, y)$ passi una e una sola curva C_t della famiglia Φ , la quale risulti in P tangente alla curva Γ . Allora la curva Γ si dice un involuppo per la famiglia Φ .

Facciamo l'ipotesi che la funzione $f(x, y, t)$ risulti continua assieme alle sue derivate parziali prime f_x, f_y, f_t , di cui le prime due mai simultaneamente nulle (cioè $f_x^2 + f_y^2 > 0$).

Ammettiamo inoltre che esistano le derivate parziali seconde f_{xt}, f_{yt}, f_{tt} e che sia

$$(*) \quad \frac{\partial(f, f_t)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad \text{ed} \quad f_{tt} \neq 0.$$

Sotto tali condizioni l'equazione cartesiana dell'involuppo si trova eliminando il parametro t fra le due equazioni del sistema:

$$(B) \quad f(x, y, t) = 0, \quad f_t(x, y, t) = 0.$$

Se, per esempio, $f(x, y, t) = 0$ è un'equazione di 3° grado in t , si ottiene un sistema del tipo:

$$(C) \quad \begin{cases} (1) & at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \\ (2) & 3at^2 + 2bt + c = 0 \end{cases},$$

ove i coefficienti a, b, c, d dipendono dalle variabili x, y .

C'è una regola fissa per eliminare il parametro t fra un'equazione di 3° grado in t e una di 2° grado. Si procede come segue.

Dalla (2) si ricava (3) $t^2 = -\frac{2bt+c}{3a}$. Sostituendo nella (1) si ha:

$$(4) \quad -at \cdot \frac{2bt+c}{3a} - b \cdot \frac{2bt+c}{3a} + ct + d = 0.$$

La (4) è un'equazione di 2° grado in t , perciò l'equazione (1) del sistema (C) diventa:

$$(*) \quad \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(5) \quad t^2 = -\frac{\beta t + \gamma}{\alpha}. \quad \text{Eguagliando le (3), (5) si ha:}$$

$$(6) \quad \frac{2bt+c}{3a} = \frac{\beta t + \gamma}{\alpha}.$$

La (6) è un'equazione di 1° grado in t ; ricavo t da essa e la sostituisco nell'eq. (2) del sistema (C), che è molto più semplice della (1). Fatti i calcoli, si ottiene l'equazione cartesiana dell'involuppo Γ della famiglia di curve Φ .

Si ha un procedimento analogo se il sistema (C) nell'incognita t è di grado $4+3$.

Come esempio possiamo trovare la curva involuppo della famiglia di curve

$$(6) \quad t^3 x + t^2(r-y) + tx - y = 0,$$

descritte dalla funzione al variare del parametro t .

Soluzione

Diamo un cenno di risoluzione del quesito. Si considera il sistema

$$(7) \quad \begin{cases} t^3 x - t^2(y-r) + tx - y = 0 \\ 3t^2 x - 2t(y-r) + x = 0 \end{cases}$$

Procedendo come indicato, si ricava che t ha l'espressione:

$$(8) \quad t = \frac{x(8y+r)}{2(3x^2 - y^2 + 2ry - r^2)}.$$

Sostituendo questa espressione di t nella seconda equazione del sistema (7), dopo lunghi calcoli si trova che l'involuppo della famiglia di curve (6) è data da una quartica C^4 di equazione:

$$(9) \quad 4(x^2 + y^2)^2 + 4ry(5x^2 - 3y^2) + r^2(12y^2 - x^2) - 4r^3y = 0.$$

I punti ciclici della curva sono punti semplici con tangente la retta impropria $z = 0$. La curva è razionale perché ha tre punti doppi, dati da tre cuspidi di 1^a specie: si tratta della famosa **ipocicloide tricuspidale**.

n. 37 – Esercizi proposti

In un riferimento cartesiano Oxy sono date le curve di equazioni

$$1) \quad 6xy^2 = y^4 + x^5;$$

$$2) \quad 6x^2y = y^4 + x^5.$$

Studiare nell'origine O le curve proposte.