Ottavio Serra

Su alcune serie riguardanti un problema di statistica.

Si tratta del seguente problema: un evento abbia probabilità costante p di verificarsi; calcolare il valore atteso (valore medio) delle prove da effettuare perché l'evento si verifichi.
Si chiede anche la varianza.
Detta q = 1-p la probabilità contraria, il valore medio M(X) = p.1+qp.2+q^2p.3+…+q^{n-1}p.n+…, cioè

$$M(X) \equiv \overline{x} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p.n = p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = pS_1 \text{, essendo}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} .$$

Integrando termine a termine (e poi derivando la somma della serie) si ottiene :

$$S_1 = \frac{d}{dq}\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{da cui}$$

$$M(X) \equiv \overline{x} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} .$$

Siccome la varianza è data da $Var(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, si tratta di calcolare M(X^2).

$$M(X^2) = p\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} = p.S_2 \text{. Valuto la serie } S_2\text{:}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{d}{dq}q^n = \frac{d}{dq}\left(q\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}\right) = \frac{d}{dq}\left(qS_1\right) \text{ e quindi}$$

$$S_2 = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

Pertanto $$M(X^2) = p.S_2 = p\frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

E per la varianza si ottiene $Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.

Lo scarto quadratico medio è perciò $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

Accanto a M(X) e M(X^2), momento primo e momento secondo, si calcolano con lo stesso procedimenti i momenti successivi.

$$M(X^3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 pq^{n-1} = p.S_3 ,$$

$$S_3 = \frac{d}{dq}\left(q\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1}\right) = \frac{d}{dq}(qS_2) \text{ e quindi}$$

$$S_3 = \frac{d}{dq}\left(q\frac{1+q}{(1-q)^3}\right) = \frac{(1+2q)(1-q)^3+(q+q^2)3(1-q)^2}{(1-q)^6}$$ e quindi

$$S_3 = \frac{(1+2q)(1-q)+(q+q^2)3}{(1-q)^4} = \frac{1+q-2q^2+3q+3q^2}{(1-q)^4} = \frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4}\ .$$

Perciò $M(X^3) = p.S_3 = p\frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4} = \frac{1+4(1-p)+(1-p)^2}{p^3} = \frac{6-6p+p^2}{p^3}$.

Analogamente, $M(X^4) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 pq^{n-1} = p.S_4$,

$$S_4 = \frac{d}{dq}(qS_3) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4}\right) = \frac{(1+8q+3q^2)(1-q)^4+(q+4q^2+q^3)(4(1-q)^3}{(1-q)^8} \rightarrow$$

$$S_4 = \frac{1+11q+11q^2+q^3}{(1-q)^5}$$, da cui

$$M(X^4) = p\frac{24-36p+14p^2-p^3}{p^5} = \frac{24-36p+14p^2-p^3}{p^4}\ .$$

In generale, $M(X^k) = p.S_k$, ed S_k si calcola ricorsivamente: $S_k = \frac{d}{dq}(q.S_{k-1})$.