Ottavio Serra

Generalizzazioni di una bella funzione liceale

I) Una bella funzione, proponibile in un liceo scientifico e che è suscettibile di interessanti generalizzazioni, è la seguente:

[1] f(x)= x-log(1+e^x).

Chiaramente il dominio è tutto l'asse reale: D = $\mathbb{R}$. Risulta f(0)= -log(2), f(x)<x-log(e^x) = 0. Dunque f(x)<0 per tutti gli x del dominio. E' anche facile calcolare il

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, mentre risulta meno immediato calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Si osservi però che la [1] si può scrivere:

[2] $f(x) = x - \log\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right] = -\log\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, da cui si vede che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$.

Dunque, l'asse delle x è asintoto orizzontale (destro).
Siccome dalla [1] si evince che, per $x\to-\infty$ la f(x) è un infinito del 1° ordine, si prevede un asintoto obliquo (a sinistra) y=mx+q. Infatti:

$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\log\left(1+e^{-x}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\log\left(e^{-x}\right)}{x} = 1$ e

$q = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-\log\left(1+e^x\right)-x\right] = 0$, perciò l'asintoto è y = x.

Si verifica facilmente che f'(x)>0 e che f''(x)<0 in tutto D, perciò il grafico è crescente e concavo.

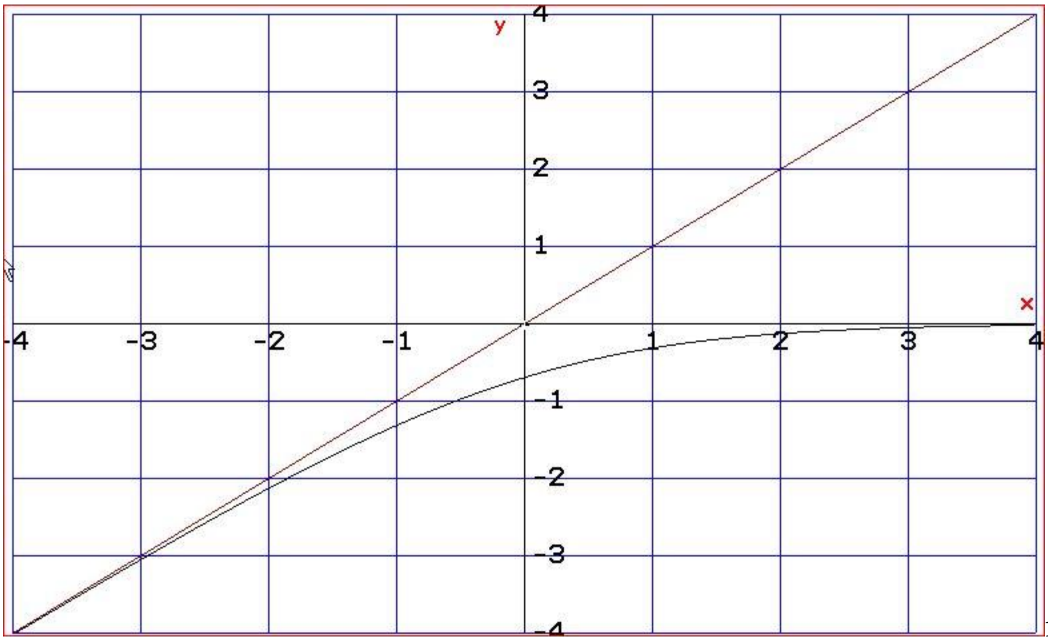

fig. 1

Una generalizzazione della [1] è la funzione f(x)=x-log(x^m+e^x), con m numero intero positivo. Distinguerò due casi, a seconda che m è pari o dispari.

II) m pari, m=2n, con n>0. (*Per n=0 si ricade nella[1]*).

[3] f(x)=x-log(x^{2n}+e^x). Si ha f(0)=0. D è ancora tutto $\mathbb{R}$. La f(x) si può scrivere

[4] $f(x) = -\log\left(1+\frac{x^{2n}}{e^x}\right)$ e siccome x^{2n} è un infinito di ordine inferiore a e^x, sarà anche in questo caso y=0, asintoto orizzontale destro. Sarà ancora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, però questa volta non c'è asintoto obliquo.

Infatti è ancora m = 1, ma $q = \lim_{x\to-\infty}[(f(x)-mx)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-\log\left(x^{2n}+e^x\right)-x\right] = -\infty$.

La derivata è $f'(x) = 1 - \frac{2nx^{2n-1}+e^x}{x^{2n}+e^x} = \frac{x^{2n-1}(x-2n)}{x^{2n}+e^x}$, da cui si vede che la derivata è positiva per x<0 oppure per x>2n; perciò la funzione ha massimo relativo in (0,0), che è il massimo assoluto, e minimo relativo per x=2n. Qui sotto è riportato il grafico per 2n=2. Il minimo relativo ha ascissa 2 e ordinata -0,43, come si evince dalla griglia. Il valore "*esatto*" è -0.43265.

fig. 2

Dal grafico si intuiscono due flessi ad ascissa positiva, uno a sinistra e uno a destra di x=2, ma pare che ci sia anche un flesso di ascissa negativa. Calcolando la derivata seconda

$f''(x)=\dfrac{\left(e^x+2x\right)^2-(2+e^x)(e^x+x^2)}{\left(e^x+x^2\right)^2}=\dfrac{2x^2-e^x\left(2-4x+x^2\right)}{\left(e^x+x^2\right)^2}$ e uguagliandola a zero, si ricavano infatti tre ascisse di flesso: x=3.6417, x=0.4864 e x=-1.1230.

Riporto anche il grafico per 2n=4, nel quale è più evidente il flesso con ascissa negativa.

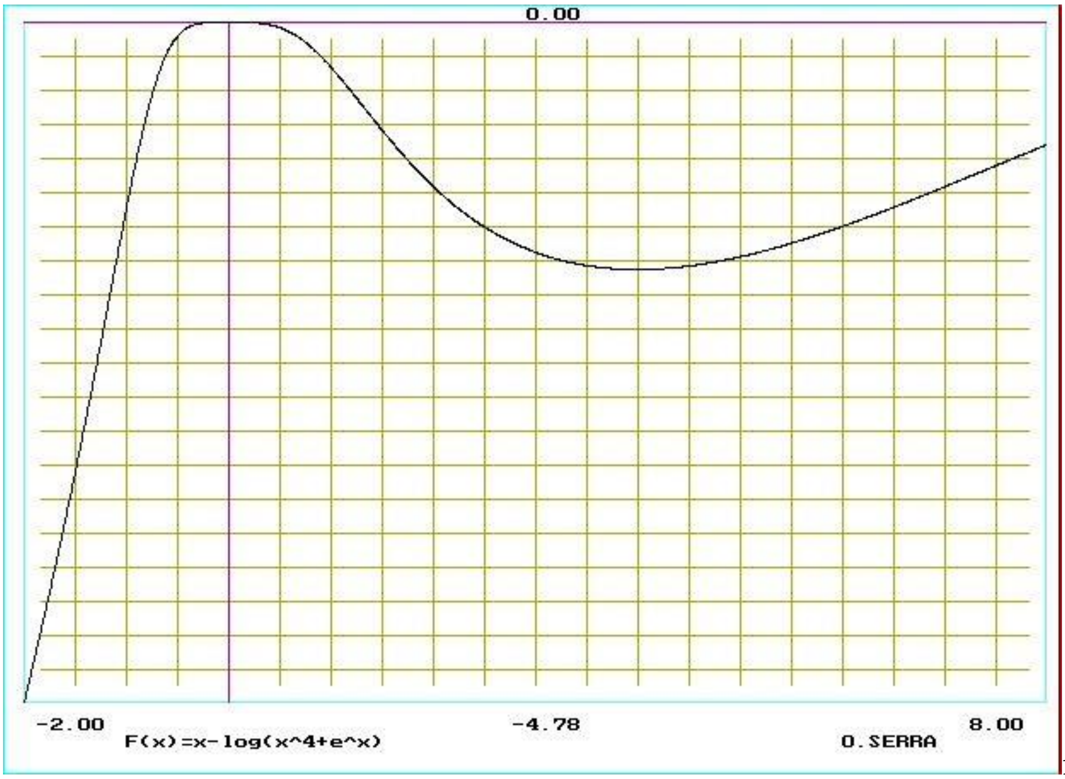

fig. 3

Si vede il minimo relativo per x=4. Sfruttando la griglia, siete in grado d stimare l'ordinata del minimo? (circa -1.72. Il valore "*esatto*" è -1.7385). I tre flessi si ottengono annullando la derivata seconda:

$f''(x)=\dfrac{x^2\left[4x^4-e^x\left(12-8x+x^2\right)\right]}{\left(e^x+x^4\right)^2}$. Si noti intanto che f''(x) si annulla due volte per x=0 (ascissa del massimo relativo), mentre è negativa nell'intorno, il ché significa che la retta y=0 è in quel punto tangente di ondulazione. Ecco ora le ascisse dei punti di flesso soluzioni dell'equazione f''(x)=0, ovvero di $4x^4-e^x\left(12-8x+x^2\right)=0$:

x=7.3775, x=1.3148, x=-1.1548.

III) Studio ora il caso con n dispari $f(x)=x-\log(x^{2n+1}+e^x)$, cominciando da 2n+1=1.

[5] $f(x)=x-\log(x+e^x)$ che si può anche scrivere

[6] $f(x)=-\log\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$

Ora il dominio è $]\xi_1\,;+\infty[$, essendo ξ_1 la radice dell'equazione $x+e^x=0$. (ξ_1 = -0.5671…).

Asintoto verticale x = ξ_1 , asintoto orizzontale (destro) $y=0^-$.

Derivate $f'(x)=\dfrac{x-1}{x+e^x}$, $f''(x)=\dfrac{1+(2-x)e^x}{(x+e^x)^2}$. C'è un minimo per x=1, un flesso per x=2.12.

Il grafico è il seguente:

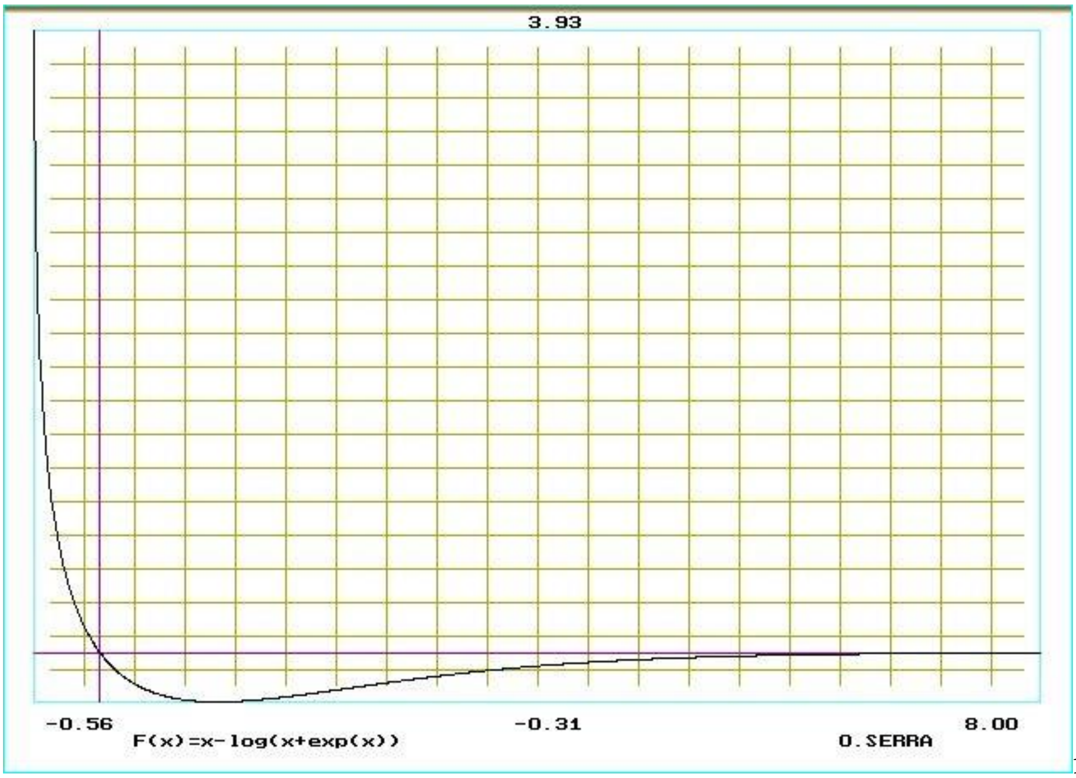

fig. 4

Considero ora il caso generale 2n+1= 3, 5, 7, … Si avrà

[7] $f(x)=x-\log(x^{2n+1}+e^x)$ o anche

[8] $f(x)=-\log\left(1+\dfrac{x^{2n+1}}{e^x}\right)$**.**

Il dominio è D = $]\xi_{2n+1}; +\infty[$, con $-1< \xi_{2n+1} <0$. Il valore di ξ_{2n+1} dipende da n.

Si avrà asintoto verticale x = ξ_{2n+1} e il solito asintoto orizzontale $y=0^-$.

$f'(x)=1-\dfrac{(2n+1)x^{2n}+e^x}{x^{2n+1}+e^x}=\dfrac{x^{2n}\left[x-(2n+1)\right]}{x^{2n+1}+e^x}$. Perciò il grafico ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O(0; 0) e un minimo relativo di ascissa x=2n+1, che è minimo assoluto.
La derivata seconda, abbastanza complicata, è

$$f''(x)=\frac{\left\{2nx^{2n-1}\left[x-(2n+1)\right]+x^{2n}\right\}\left(e^x+x^{2n+1}\right)-x^{2n}[x-(2n+1)]\left(e^x+(2n+1)x^{2n}\right)}{\left(e^x+x^{2n+1}\right)^2}$$

Per n=1, (2n+1=3) la derivata seconda è $f''(x)=\dfrac{x\left[3x^3-e^x\left(6-6x+x^2\right)\right]}{\left(e^x+x^3\right)^2}$

che uguagliata a 0 dà le ascisse dei tre punti di flesso: x=0, x=0.9833 e x=5.2891
Qui sotto (fig. 5) riporto il grafico per 2n+1 =3.

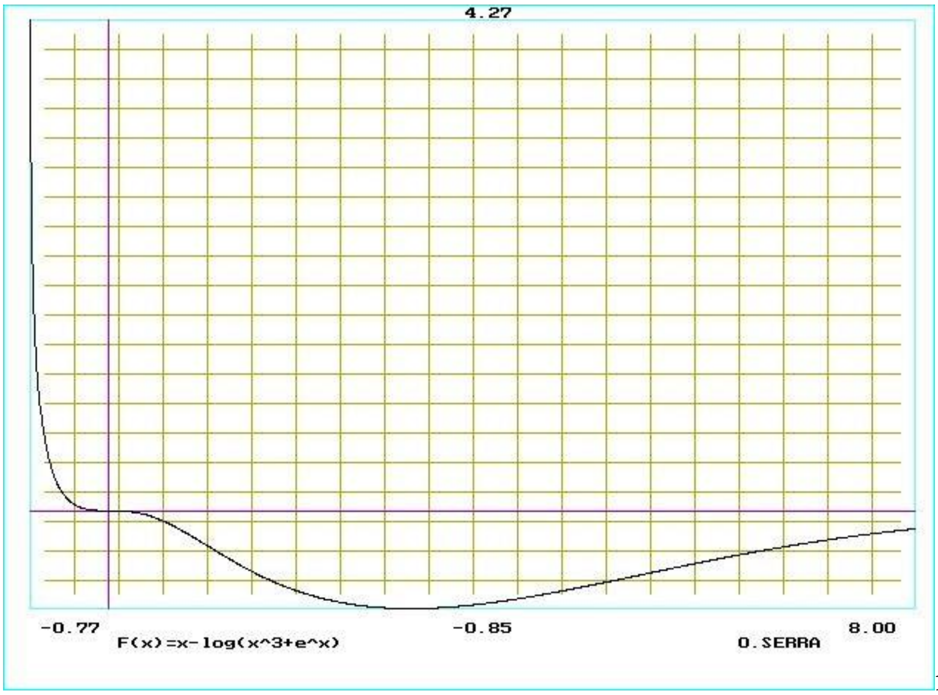

fig. 5

Per 2n+1=5 la derivata seconda è

$f''(x)=\dfrac{x^3\left[5x^5-e^x\left(20-10x+x^2\right)\right]}{\left(e^x+x^5\right)^2}$, che, uguagliata a zero, dà i tre punti do flesso x=0, x=1.4533 e x=10.1274.

Vedi grafico (fig. 6)

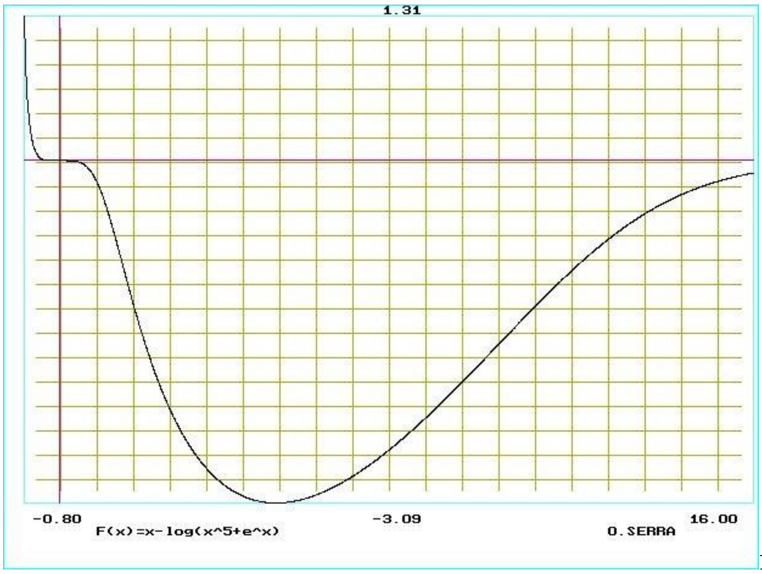

fig. 6

Una considerazione ulteriore.

Per la famiglia di funzioni f(x)=x-log(x^{2n+1}+e^x) gli estremi inferiori dei loro domini ξ_1, ξ_3, ξ_5, … costituiscono una successione decrescente il cui massimo è ovviamente ξ_1. Dico che l'estremo inferiore della successione è -1.

I primi valori sono ξ_1=-0.567, ξ_3=-0.773, ξ_5=-0.845, …

Il punto ξ_{2n+1} è infatti l'ascissa del punto di intersezione tra i grafici di y = e^x e di y = $-x^{2n+1}$.

Ora, se consideriamo la funzione y = $-x^{2n+1}$ nell'intervallo [-1; 0], si vede che $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1} = \begin{cases} 0, x > -1 \\ -1, x = -1 \end{cases}$.

Perciò l'estremo inferiore della successione è -1.

Il seguente disegno (fig. 7) illustra la situazione. Si vede che le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico di y = e^x e delle curve y = $-x^{2n+1}$ si spostano via via verso -1.

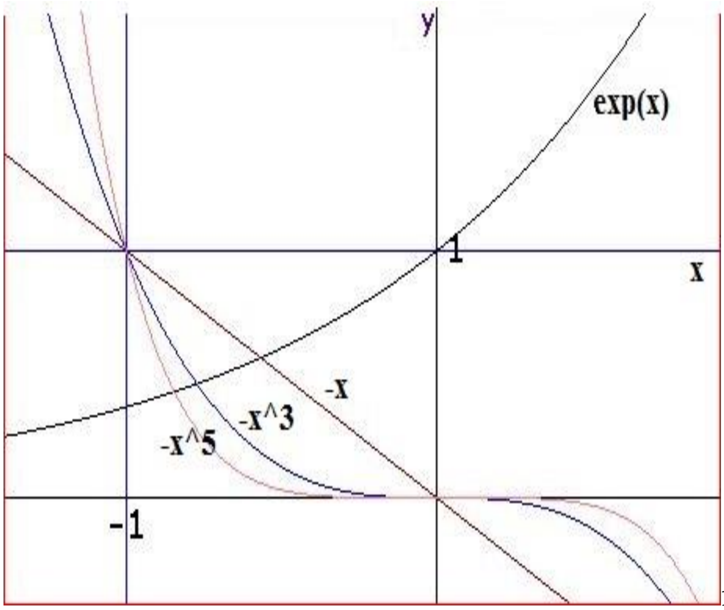

fig. 7

Nota. I grafici di fig. 1 e fig. 7 sono sati realizzati col programma "Derive", tutti gli altri con il mio programma "Grafunz".
Le radici delle equazioni sono state calcolate col mio programma "EquazNewton".
Ho scritto "Grafunz" ed "EquazNewton" nel linguaggio Turbo-Pascall.