Ottavio Serra

L’unitarietà dei saperi.

1. Introduzione.

Filosofia e scienza, presso i pensatori dell’antica Grecia, sono unite, *anche nel nome*. I filosofi di Mileto, per primi, compirono il passaggio dal mito e dalla magia al pensiero razionale. In Platone i dialoghi sono un capolavoro della letteratura greca; ma, in più, da essi traspira la matematica: vedi il *Teeteto (poliedri platonici)* e il *Menone (teorema di Pitagora in un caso particolare)*; il motto dell’Accademia, scolpito sulla porta d’ingresso, era *Qui non entri chi non sa la matematica*. Aristotele, creatore della logica formale (gli *Analitici: logica dei predicati)*, dimostra proprietà matematiche (Irrazionalità della radice quadrata di un numero primo). Gli stoici creano la logica degli enunciati. Nel Medioevo gli scolastici continuano la tradizione classica; gli studi della grammatica latina si intrecciano con gli approfondimenti della logica aristotelica. Cito Guglielmo di Sherwood (intorno al 1250), Sigieri di Brabante (1240.1280) che Dante mette in paradiso, anche se sospettato di eresia, e singolarmente lo fa presentare e lodare dal suo acerrimo avversario Tommaso d'Aquino (*Paradiso*, Canto X, 133-138).

«Questi onde a me ritorna il tuo riguardo,
è 'l lume d'uno spirto che 'n pensieri
gravi a morir li parve venir tardo:
essa è la luce etterna di Sigieri,
che, leggendo nel Vico de li Strami,
silogizzò invidiosi veri» (*invidiosi* o *insidiosi* per la chiesa?);

Pietro Ispano (1210-1277, diventato papa Giovanni XXI), *scrisse Summulae logicales*, Guglielmo di Occam (1285-1347), famoso per “Il rasoio di Occam”: *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitate*: leggerezza, rapidità.

L’unitarietà continua nel Rinascimento con grandi nomi di artisti scienziati come Filippo Brunelleschi, (Firenze, 1377 – Firenze, 15 aprile 1446) architetto, ingegnere, scultore, orafo e scenografo; a lui si deve l’invenzione della prospettiva. **Leon Battista Alberti** (1404-1472), architetto, matematico e pioniere della geometria proiettiva). **Piero Della Francesca** *(1416-1492)*, pittore e matematico, nei suoi quadri applica *la divina proporzione* appresa dal matematico Luca Pacioli (1445-1517), suo concittadino (entrambi di Sansepolcro). La serie continua con i grandi nomi di Leonardo da Vinci (1452-1519), Giordano Bruno (1548-1600), Galileo Galilei (1564-1642), Goffredo Leibnitz (1646-1716).

L’unità tra culture è fortemente sentita nel periodo dell’Illuminismo; si pensi alla diffusione della nuova fisica, la “***Filosofia naturale***” di Newton (1642-1727), per opera di filosofi come Francois Marie Arouet, conosciuto come Voltaire, (1694-1778) in Francia e di Francesco Algarotti (1712-1764) in Italia. Se ne parla anche nei salotti della cosiddetta *buona società*; le nobildonne italiane erano affascinate dalla teoria della gravitazione universale e Algarotti acquistò grande notorietà scrivendo un libro intitolato “*Il newtonianismo per le dame*”.

L’unità della cultura si spezza con la filosofia idealista tedesca che non riconosce valenza culturale alla scienza; basti pensare a Hegel (1770-1831), che nella dissertazione del 1801 all’Università di Jena *dimostrò (sic!)* che nel sistema solare non potevano esserci più di 6 pianeti, ignorando la scoperta del pianeta Urano (1781) da parte di Herschel (1738-1822) e dell’asteroide Cerere proprio il 1801 per opera di Piazzi (1746-1826) a Palermo; si pensi anche agli scritti di Croce (1866-1952) su una scienza che non conosceva, e alla sua distinzione tra concetti (filosofici) e pseudoconcetti (scientifici).

A questo proposito è illuminante il libro ***Imposture intellettuali***[i] dei fisici francesi Sokal e Bricmont: un filosofo osannato come Henry Bergson, famoso per “*L’evoluzione creatrice*”, non

avendo capito nulla della Relatività, scrisse nel 1922 "*Durata e simultaneità*" per confutare la teoria di Einstein e scrisse sciocchezze. Einstein, quando si parlava di Bergson, diceva con ironia: *Che Dio abbia pietà di lui!*
Sulla dicotomia tra le *due culture* fece scalpore, negli anni '50 del secolo scorso, lo scritto di sir Charles Snow (1905-1980): "*Le due culture*"[ii] sintetizzato nelle domande provocatorie: *Conosci l'Amleto di Shakespeare? Conosci il secondo principio della termodinamica?*
*(*Per sottolineare l'incomunicabilità tra scienziati e letterati).
Sintomatica la risposta di Alberto Pincherle (conosciuto con lo pseudonimo di Moravia): *La domanda di Snow è mal posta, perché mentre l'Amleto si può conoscere in più modi, un enunciato scientifico si può conoscere in un sol modo*, confermando clamorosamente la frattura tra i saperi: letterari e filosofici da una parte, scientifici dall'altra.
Torniamo all'unitarietà. Cito solamente alcuni nomi.
Robert Musil[iii] (*I turbamenti del giovane Torless*, tra pulsioni adolescenziali e riflessioni sui numeri immaginari).
Interessanti i ***Racconti matematici***[iv] a cura di Claudio Bartocci, tra i quali, sempre di Musil, *L'uomo matematico*.
In questa *Raccolta* vedi in particolare i racconti di Jorge Louis Borges, quelli di Italo Calvino, *L'hotel straordinario di* Stanislaw Lem, *I sette messaggeri* di Dino Buzzati (A proposito di questo racconto, vedi il mio articolo sull'Annuario del Liceo scientifico Scorza) e tanti altri.
Ma l'Autore che più mi affascina è Italo Calvino (L'Avana 1923-Siena 1985); penso ai suoi romanzi e racconti: da "Il sentiero dei nidi di ragno" a "*Palomar, a* "*Le cosmicomiche".*

2. Itali Calvino e Gabriele Lolli.

In questo lavoro mi soffermerò sulle "*Lezioni americane"* (***Sei proposte per il prossimo millennio***), pubblicato negli Oscar Mondadori nel 1993, la cui rilettura in chiave matematica è stata proposta dal logico matematico Gabriele Lolli in *Discorso sulla matematica (sottotitolo: Una rilettura delle lezioni americane di Italo Calvino)*. Bollati Boringhieri, 2011.

Calvino era stato invitato (unico tra gli scrittori italiani) a tenere un ciclo di sei conferenze (le *Norton Poetry Lectures*) alla Harvard University nell'anno accademico 1985-86.

I sei titoli scelti da Calvino erano:

1) Leggerezza
2) Rapidità
3) Esattezza
4) Visibilità
5) Molteplicità
6) Consistenza.

Prima di partire per Cambridge (Massachusset) aveva scritto le prime cinque lezioni; si riprometteva di scrivere la sesta in America, ma la morte lo colse prima di partire.
Nella prima lezione dice che non ha nulla contro la pesantezza, ma pensa di poter dire di più sulla leggerezza. Le parole possono essere pietre (Vedi il romanzo di Carlo Levi), ma Calvino le preferisce quando diventano leggere come luce lunare. Così in Leopardi:
Dolce e chiara è la notte e senza vento,
E queta sovra i tetti e in mezzo agli orti
Posa la luna, e di lontan rivela
Serena ogni montagna … (La sera del dì di festa),

e ancora
Che fai tu, luna in ciel? dimmi, che fai,
Silenziosa luna?
Sorgi la sera, e vai,
Contemplando i deserti;
indi ti posi. (Canto notturno di un pastore errante dell'Asia),
oppure
O graziosa luna, io mi rammento
Che, or volge l'anno, sovra questo colle
Io venia pien d'angoscia a rimirarti:
E tu pendevi allor su quella selva
*Siccome or fai, che **tutta la rischiari***. (Alla luna);
l'elenco potrebbe continuare a lungo, ma ecco un'ultima, splendida immagine:
Già tutta l'a ria imbruna,
Torna azzurro il sereno, e tornan l'ombre
Giù da'colli e da tetti,
Al biancheggiar della recente luna. (Il sabato del villaggio).

Ora un esempio di leggerezza in un parallelo tra poesia e matematica:

Perch'i' no spero di tornar giammai,
ballatetta, in Toscana,
va' tu, leggera e piana,
dritt' a la donna mia,
che per sua cortesia
ti farà molto onore. **(in Calvino)**

dalle *Rime* di Guido Cavalcanti e

1+2+3+…+100=100.101/2 **(in Lolli)**

aneddoto su Gauss bambino.

Anche questa formula matematica è leggera e ariosa ed evita al piccolo Gauss di eseguire, col rischio di sbagliarla, una tediosa addizione.
Provate, ragazzi, a dimostrarla e poi, ancora meglio, a generalizzarla (1+2+… +n=?). Magari, pensate a formule più complicate: siate curiosi, ponetevi problemi, non importa che non li sappiate risolvere; se poi ci riuscite, tanto meglio.
Tutta la scienza nasce dal mito e dalla pesantezza della magia e man mano diventa sempre più rarefatta e leggera. Già in Democrito gli atomi sono senza peso e si muovono a caso in tutte le direzioni *(Democrito che il mondo a caso pone*, Inferno IV canto*)*. Acquistano peso in Epicuro, ma con Lucrezio, nel *De rerum natura*, un moto leggero e imprevedibile li fa deviare dalla linea retta: il *clinamen*, che al filosofo della scienza Van Fraassen ha suggerito un suggestivo parallelo col principio di indeterminazione della meccanica quantistica. Vedi il mio articolo: *Il clinamen in Lucrezio e le fluttuazioni quantistiche* sul "Il foglio" del Liceo classico Garibaldi di Castrovillari, che si può consultare anche nel mio sito[1].

Anche in astronomia si passa dalla pesantezza alla leggerezza; le costellazioni sono costituite da stelle che si muovono liberamente in tutte le direzioni, senza legame tra loro, ma ci appaiono

[1] **http://digilander.libero.it/ottavioserra0** (cartella articoli, Il Foglio del Liceo classico Garibaldi di Castrovillari).

come blocchi rigidi e immutabili, come se gli astri di una costellazione fossero collegati con fil di ferro, solo per le enormi distanze reciproche e da noi, come, con le parole di Lucrezio, le pecore di un gregge che si muovono da tutte le parti, ma, viste da lontano, formano una macchia bianca, apparentemente immobile per lungo tempo. Per questo motivo vediamo oggi nella stessa configurazione che quattro mila anni fa contemplavano i pastori mesopotamici le ***vaghe stelle dell'Orsa*** (*Le ricordanze*, Leopardi)**.**

Nell'esperienza quotidiana abbiamo a che fare più con la pesantezza che con la leggerezza: *Attento che cadi!* grida la mamma al bambino e Manzoni canta:

Qual masso che dal vertice
Di lunga erta montana,
Abbandonato all'impeto
Di rumorosa frana
Per lo scheggiato calle
Precipitando a valle
Batte sul fondo e sta.
Là dove cadde, immobile
***Giace in sua lenta mole** …* (Il Natale).

Ma se invece del masso fosse stato un elettrone? Atomi, elettroni, per non dire di neutrini o di fotoni, non stanno mai fermi, perché sono particelle leggerissime, eteree, e il principio di indeterminazione di Heisenberg non consente loro la quiete della pesantezza, come già aveva divinato Lucrezio.

L'atomo di Thomson era massiccio, ma l'atomo di Rutherford è essenzialmente un immenso vuoto al cui centro sta il pesante nucleo; però oramai anche il nucleo è diventato leggero, i suoi costituenti, i nucleoni, sono fatti di impalpabili e inafferrabili quark, tenuti insieme dagli impalpabili e inafferrabili gluoni.

Calvino presenta il contrasto tra la pesantezza dell'hardware e la leggerezza del software; il software nulla potrebbe senza l'hardware (come il cervello senza il corpo, dico io); ma è il software che alla fine comanda, che dà vita al computer e muove le pesanti macchine, il software che è fatto di imponderabili bit.

Quando Calvino scriveva le *lezioni americane* la computer grafica cominciava a muovere i primi passi e nelle mani (e nella mente) di Benoit Mandelbrot una formula iterativa nel campo complesso, semplicissima nella sua aerea leggerezza: $\boldsymbol{z \leftarrow z^2+c}$, diede forma, sullo schermo del computer, alle spettacolari immagini degli insiemi ***frattali*.**

Rapidità. (*Veni, vidi, vici*).

Le fiabe e i racconti popolari, dice Calvino, sono narrati con grande economia espressiva. Se un re è malato, non c'è bisogno di dire di quale malattia. Ricordo che, quand'ero bambino, mio padre mi dava, al bisogno, un purgante al cioccolato e nella confezione c'era un foglietto con una filastrocca accattivante che ancora ricordo: "*Re pancion già pien di cuore, da che il ventre gli è gonfiato, è dei sudditi il terrore e perciò da tutti odiato…* ". Perché gli si fosse gonfiato il ventre era inessenziale, né io me lo chiedevo.

Continua Calvino in questa seconda lezione: "[Provavo] un particolare piacere quando il testo originale era molto laconico e dovevo cercare di raccontarlo rispettandone la concisione e cercando di trarre da esso il massimo d'efficacia narrativa e di suggestione poetica". A me vengono in mente il verso dantesco "*Quel giorno più non vi leggemmo avanti"* e la laconica e commossa frase di Manzoni: "*La sventurata rispose*".

Allo stesso modo, dice Lolli, si dà una traccia di dimostrazione, solo menzionando i punti che si pensa siano quelli essenziali. E cita come esempio di rapidità, la dimostrazione che fornisce Aristotele dell'irrazionalità della radice quadrata di 2, generalizzabile pari pari a quella di ogni numero primo: ***Se la diagonale fosse commensurabile (se la radice quadrata di due fosse una frazione), il dispari sarebbe uguale al pari.***[v] Certamente, lo studente gradirebbe una maggiore prolissità (lentezza) esplicativa, ma quando fermarsi? *La buona scelta fa il buon docente*, dice Lolli.

A proposito sia di leggerezza sia di rapidità vorrei ricordare la mirabile dimostrazione di Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi (*Elementi, libro IX, proposizione 20*).

Esattezza. Veniamo alla terza lezione. Dice Calvino:

"La precisione per gli antichi Egizi era simboleggiata da una piuma che serviva da peso sul piatto della bilancia dove si pesavano le anime. Quella piuma leggera si chiamava Maat …".

Magari vi viene in mente Matematica, dice Lolli, ma il termine egizio non ha questo significato; significa *morte* come il persiano *mat (Sha mat=Scacco matto=il Re è morto*). La parola *Matematica* viene probabilmente dal verbo greco $\mu\alpha\nu\vartheta\alpha\nu\omega$ *(manthano)* che significa *imparare* e ha origini pitagoriche. (Forse il nome della matematica è nato a Crotone).

Calvino inizia così la sua lezione sull'esattezza, che nella sua visione si collega con la leggerezza. Nell'immaginario corrente, al contrario, la matematica (e il matematico) è considerata tutto fuorché una disciplina (una persona) leggera e in particolare il docente di matematica è ritenuto persona pesante e pedante. Non parliamo poi del giudizio degli alunni, alle prese con calcoli mai abbastanza corti per loro, mai abbastanza esatti per i professori. Certo, una parte non trascurabile della ***nausea*** che provoca negli studenti la matematica è dovuta ai noiosi e lunghi esercizi assegnati a scuola come ***presunta*** educazione all'esattezza. Evitiamo di assegnare ***esercizi ripetitivi, lunghi e noiosi, senza luce di pensiero.***

La matematica è altro; la sua esattezza sgorga spontaneamente dal linguaggio, che prima di essere formale deve essere iconografico. **Io dico che l'occhio della matematica è la geometria** ed è fondamentale la capacità di disegnare figure evocative. Qui sotto riporto la dimostrazione del teorema di Pitagora esposta con linguaggio icastico nel testo cinese *Chou pei suan ching* (200 a. C.):

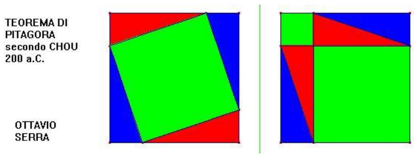


fig. 1

Basta un'occhiata alla figura per capire la dimostrazione. Non c'è bisogno di spiegazione. **Spiegarla,** dice Lolli, **è come spiegare una barzelletta a chi non l'ha capita*!***

Ma **attenzione**, a volte le figure ingannano, come la seguente:

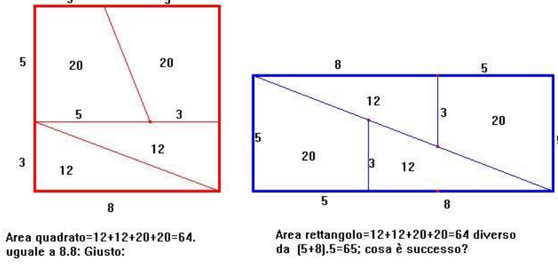


fig. 2

Orrore! 64=65. Dov'è l'errore? (Vedi Appendice).

La quarta lezione tratta della visibilità.

Calvino inizia citando un verso dantesco: ***Poi piovve dentro a l'alta fantasia*** (Purgatorio, XVII, 25)**.**

Dunque, dice scherzosamente Calvino***,*** *la fantasia è un luogo dove ci piove.* Da dove vengono le immagini che poi il poeta fissa nei versi? Per *l'autore Dante*, è Dio in persona che le fa piovere direttamente nella mente, nella fantasia del *personaggio Dante* (modestamente, il poeta è convinto di avere un canale privilegiato col Re dell'universo); per altri, dice Calvino, può essere la sublimazione di esperienze sensoriali o culturali stratificate nell'inconscio e che a volte affiorano in un libero gioco di associazioni (Einstein[vi]), quasi avessero una vita propria. Le immagini diventano testo letterario nell'opera dello scrittore e le parole diventano immagini nella fantasia del lettore.

Addio monti sorgenti dalle acque ed elevate al cielo; cime ineguali … (I promessi sposi, Capitolo VIII). Ma io vedo pure qualche bianca nuvoletta veleggiare leggera sui monti, anche se Lucia non ne parla.

E Leopardi nell'*Infinito* canta:

Ma sedendo e mirando, interminati
Spazi di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quïete
Io nel pensier mi fingo; …

Da quali abissi della mente *piovono* questi *interminati spazi* e *sovrumani silenzi*?

Anche nella scienza le grandi teorie sbocciano dal libero gioco della fantasia (fantasia nutrita dalla conoscenza e disciplinata dal "*fren dell'arte"*). Einstein ricorda che a 16 anni si immaginava a cavallo di un raggio di luce e si chiedeva se avrebbe visto quiescente il campo elettromagnetico dell'onda luminosa che stava cavalcando [ma nulla di tutto questo si dà nella fisica] (Vedi nota VI). Dopo 10 anni questa fantasia sbocciò nella teoria della relatività. *Piovve dentro a l'alta fantasia di Einstein.*

(Immagine presa da una mia presentazione di Einstein nel 2005)[vii]

Come scrive il Nobel Emilio Segrè[viii], "*nella primavera del 1905 fu colpito dalla folgore divina e nel giro di **tre mes**i scrisse **tre lavori**, ciascuno dei quali sarebbe bastato a renderlo **immortale**".*

Sei secoli prima un altro grande era stato colpito dalla folgora divina:

Qual è 'l geomètra che tutto s'affigge
Per misurar lo cerchio e non ritrova,
Pensando, quel principio ond'elli indige,
Tale era io a quella vista nova:
Veder volea come si convenne
L'imago al cerchio e come vi s'indova;
Ma non eran da ciò le proprie penne:

Se non che la mia mente fu percossa
Da un fulgore in che sua voglia venne.

Questa volta Dante, nonostante l'alto concetto che aveva di sé, non se la sentì di cristallizzare nei versi la divina visione: *all'alta fantasia qui mancò possa*. *Domine, non sum dignus*; quello che mi hai concesso di vedere è un fatto privato tra **Te** e **me**.

La quinta lezione riguarda la molteplicità. La *Divina Commedia*, come l'*Amleto*, come *L'Orlando furioso o* il *Don Chisciotte*, come ogni opera letteraria, si può leggere secondo molteplici registri, ma lo stesso accade in campo matematico. Per esempio, i numeri complessi sono coppie ordinate di numeri reali, sono il piano cartesiano, sono vettori (piani), sono similitudini (dirette), sono fonte di immagini affascinanti, rendono semplice e chiaro ciò che era disordinato e confuso. Porgo un esempio: un'equazione algebrica nel campo reale a volte ammette soluzioni, a volte no; e se ne ammette, fermo restando il grado, ne può avere una, due o più (**mai però più del grado.** Perché? Fate un disegnino e lo vedrete). Nel campo complesso si raggiunge una limpida semplificazione: un'equazione di grado n possiede sempre n soluzioni (contate con la dovuta molteplicità): Gauss, teorema fondamentale dell'algebra.

Calvino esamina l'opera di molti autori, da Balzac a Flaubert a Gadda; io mi limito a ricordare un racconto di Jorge Luis Borges: *Il giardino dei sentieri che si biforcano*.
Lo scrittore argentino narra tre storie in una, una storia di spionaggio, che include una storia filosofico-metafisica, che a sua volta include la descrizione di uno sterminato romanzo cinese nel quale è annidata la storia di spionaggio, il tutto in poche pagine. L'idea centrale del racconto è un tempo plurimo e ramificato in cui ogni presente si biforca in due possibili futuri, che formano una rete vertiginosamente crescente di possibilità. Un'altra idea portante è l'*autoreferenzialità*, che in matematica conduce alle tecniche *ricorsive:* di *definizione* e di *dimostrazione*, in logica alle *antinomie*: del mentitore, di Russell, e altre, in letteratura alle storie che richiamano se stesse: *Sei personaggi in cerca d'autore* di Pirandello, *Se una notte d'inverno un viaggiatore* di Calvino, molti racconti di Borges, come il citato *Il giardino dei sentieri che si biforcano*.
Il racconto di Borges ricorda la teoria, in verità molto controversa, del *Multiverso* della cosmologia moderna, secondo la quale il nostro universo è solo uno degli infiniti universi nei quali si realizzano tutte le possibilità, ciascuno con le sue leggi fisiche e con la sua storia.
L'idea matematica sottostante è quella della crescita per duplicazione (progressione geometrica di *ragione due*), che conosceva anche Dante (Paradiso, XXVIII, 91-93) sotto forma dell'aneddoto del derviscio inventore del gioco degli scacchi. Lo Scià di Persia, restò entusiasta del gioco e promise al derviscio qualunque cosa gli avesse chiesto; questi rispose: "*Dammi un chicco di grano per la prima casella, due chicchi per la seconda e così raddoppiando fino alla 64ª casella*". "*Di poco ti accontenti*" esclamò lo Scià, ma a conti fatti non poté mantenere la promessa: la quantità di grano che avrebbe dovuto dargli risultò sterminata. Ecco i versi di Dante:
L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
Ed eran tante, che il numero loro
Più che il doppiar degli scacchi s'immilla.
Quanto fa $1+2+4+8+ \dots +2^{63}$? Se dieci chicco fanno un grammo, quante tonnellate di grano lo Scià avrebbe dovuto dare al monaco?
Si noti l'analogia con la *mitosi*: una cellula si divide in due, identiche alla cellula madre, ma questa non c'è più, perciò all'n^{ma} generazione il numero delle cellule è 2^n, anziché $2^{n+1}-1$ come nel caso degli scacchi. In ogni caso, si tratta di una proliferazione per duplicazione (l'*immillarsi* dantesco), come ne *Il giardino dei sentieri che si biforcano* di Borges.
Una suggestiva rappresentazione grafica si ottiene costruendo ricorsivamente un *albero binario*.

Quella che vedete è l'immagine di un albero binario troncato al 4° livello di ricorsione, che potrebbe rappresentare la mitosi di un batterio alla 4ª generazione (i 16 rametti terminali):

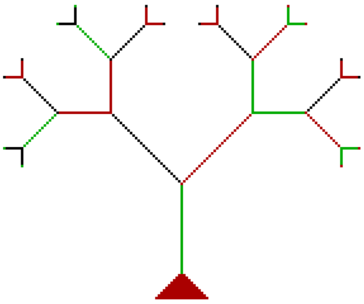


fig. 3

(Vedere nel mio sito la cartella "Programmi eseguibili", sottocartella "Grafici/curve ricorsive")

Se la ragione della progressione geometrica è minore di 1, poniamo $\frac{1}{2}$ anziché 2 come nel caso degli scacchi, la somma si mantiene finita, anche se il greco Zenone di Elea credeva il contrario.
Quanto fa

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

eccetera eccetera, con n che cresce all'infinito? Pensate al paradosso di Zenone, con la Tartaruga che ha velocità metà di quella di Achille. Questi le dà il vantaggio di 1 (poniamo 1 Km); calcolate la strada che deve percorrere Achille per raggiungere la Tartaruga (usate un po' di cinematica) e avrete la somma (**finita**) di quella serie di infiniti addendi, che tanto aveva intrigato Zenone.

Un esempio: molteplicità di interpretazioni.

Quante strette di mano in un gruppo di amici?
Quanti segmenti tra lati e diagonali in un poligono?
Notate un'analogia con la somma (1+2+...+n) di Gauss?

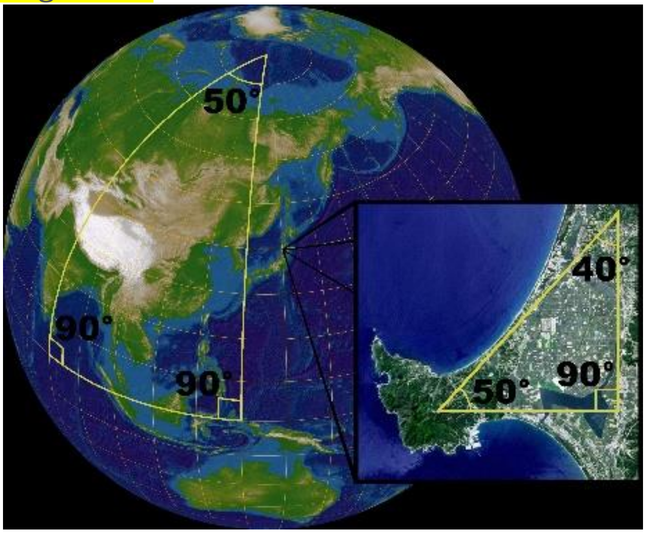
Un'idea formidabile: la bisezione (l'altra faccia della duplicazione).

a) Se devo trovare (indovinare) un numero in un elenco di un milione, posso procedere a caso; se sono fortunato lo trovo subito, se sono sfortunato lo trovo dopo un milione di tentativi; in media dovrò fare 500 mila tentativi, sempre che il dato sia in elenco. Se invece procedo per bisezione, mi bastano 20 tentativi, perché $2^{20}>1000000$. Occorre però che l'elenco sia ordinato. Per questo motivo i vocabolari e gli elenchi telefonici sono ordinati; è un lavoro che paga. Analogamente, dato che i numeri reali sono ordinati, se una funzione è continua e monotòna e cambia segno agli estremi di un intervallo, se ne può calcolare lo zero intermedio a meno di un milionesimo o di un miliardesimo con una manciata di bisezioni.

b) Perché dopo averlo zuccherato, si gira il caffè col cucchiaino? L'acqua (solvente) scioglie la massa zuccherina attraverso la superficie di contatto; il moto del cucchiaino separa le particelle di zucchero, la superficie esposta al solvente aumenta e il soluto si scioglie più rapidamente. Valga il seguente esempio: un cubetto di zucchero di $1cm^3$ ha chiaramente una superficie di 6 cm^2; se si divide in 8 cubetti mediante tre tagli ortogonali, il volume resta di un cm^3, ma la superficie raddoppia. Dopo quante terne di tagli la superficie dei cubetti supera 6 milioni di cm^2?

c) Il risotto ha la malvagia tendenza a raffreddarsi con estrema lentezza e a scottare malamente la bocca di un incauto goloso, ma se si fa un buco al centro si raffredda un po' più velocemente. Perché? Perché un corpo caldo si raffredda tanto più lentamente quanto più è grosso? Una nana bianca impiega miliardi di anni per raffreddarsi, mentre il mio risotto, male che vada, dopo 10 minuti si può mangiare tranquillamente.

d) *Dìvide et ìmpera*, dicevano i Romani; è vero in guerra, in politica, nella scienza. Il primo scienziato che lo ha capito chiaramente è stato Galilei e ha inventato il metodo sperimentale.
e) La forza attrattiva di gravità che il Sole esercita su una particella (sferica) è proporzionale alla massa e, se la densità è costante, è proporzionale al cubo del suo raggio; invece la forza repulsiva del vento solare è proporzionale alla sezione della particella e dunque al quadrato del suo raggio. Perciò più le particelle sono piccole più la repulsione prevale sull'attrazione. Ciò spiega perché la coda delle comete è respinta dal Sole.
A proposito di molteplicità (di interpretazione) e di visibilità, è molto difficile accettare che possa esistere una geometria piana nella quale non ci siano rette parallele. Ma se si interpretano i postulati di questa geometria piana **non euclidea** su una **superficie sferica** (**euclidea**), allora si ***vede*** che questa geometria non euclidea (piano ellittico di Riemann) è perfettamente consistente, cioè priva di contraddizione. In matematica l'esistenza coincide con la consistenza (la consistenza *doveva essere la sesta lezione di Calvino*). Basta interpretare i punti del piano ellittico con le coppie di punti diametralmente opposti sulla sfera, le rette con i cerchi massimi: due cerchi massimi si intersecano sempre in una coppia di punti, **dunque nel piano ellittico due rette si intersecano sempre, non esistono rette parallele.** In più si ***vede*** che sulla sfera la distanza minima tra due punti è un arco di cerchio massimo, come ben sanno i piloti degli aerei intercontinentali; viene così conservata la proprietà di minima distanza che nel piano euclideo compete alle rette (ai segmenti): **le geodetiche della Relatività generale**.



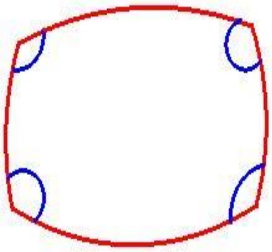
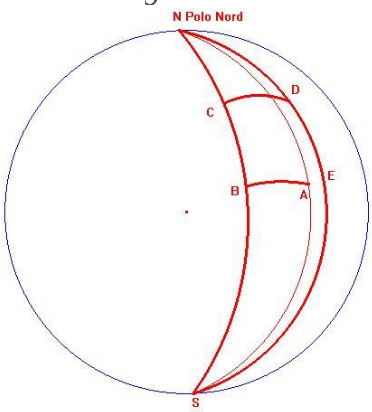


fig. 4

In piccolo tutte le porzioni di superficie sferica appaiono piatte e vale la geometria euclidea: la somma degli angoli interni di un triangolo è due retti, vale il teorema di Pitagora, eccetera.
A destra, come apparirebbe un campo di calcio grande quanto mezza Siberia (e visto, poniamo, dalla stazione spaziale internazionale).
Una rappresentazione più realistica del "*rettangolo* "di calcio è ABCDE: neanche si chiude ($E \neq A$).



Per finire, mostro alcune delle immagini frattali che ho realizzato:

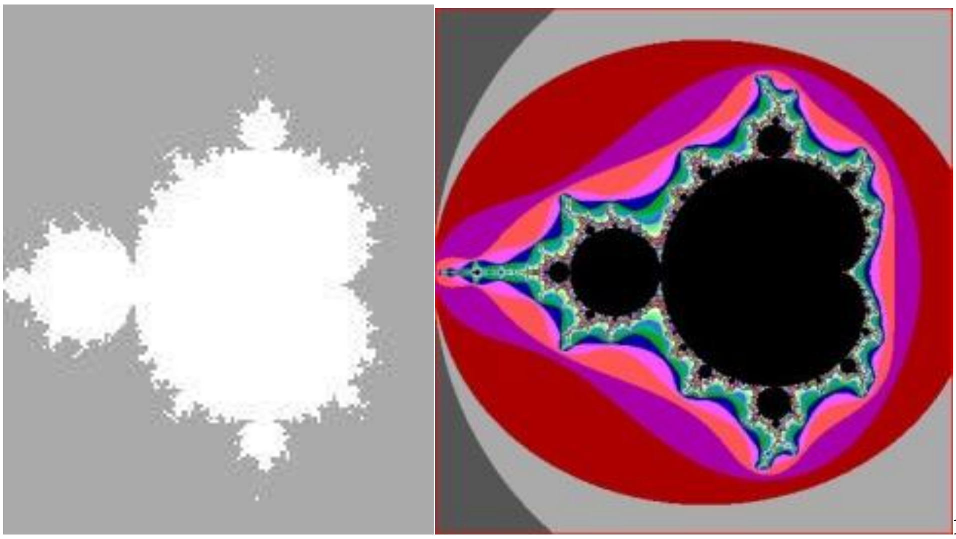


fig. 5

Sopra: Panoramica dell’insieme di Mandelbrot, in bianco e nero, (più o meno come lo trovò per la prima volta Mandelbrot verso il 1980) e a destra a 16 colori.

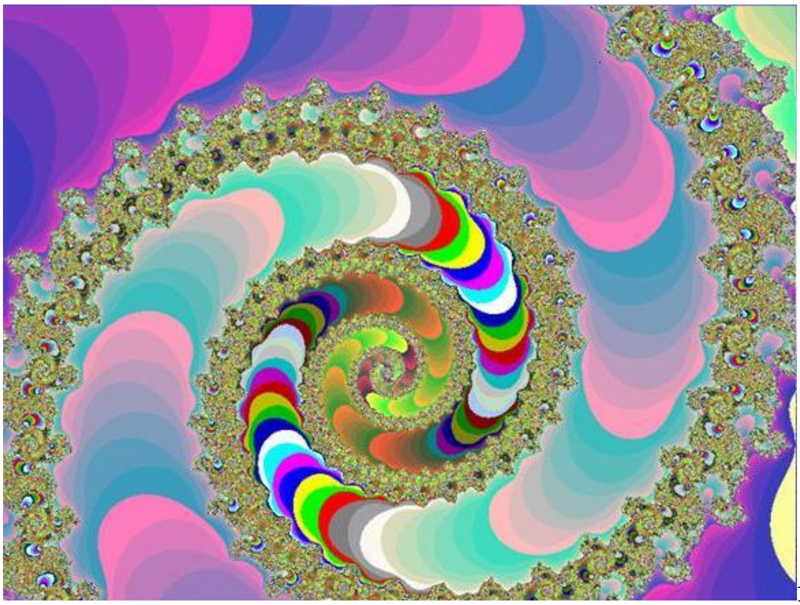


fig.6

Minutissimo particolare dell’insieme di Mandelbrot, a 256 colori, con ingrandimento lineare di oltre 3000 e, di conseguenza, ingrandimento superficiale di oltre nove milioni.

Si tratta di una delle due punte dell’*istmo* che separa il grande “*buco nero* “di destra da quello più piccolo alla sua sinistra nella panoramica a 16 colori riportata sopra. **Il software funziona come un potente microscopio**.

Il programma si trova nel mio sito nella cartella “Programmi eseguibili”, sottocartella Grafici, file “*Insiemi frattali di Mandelbrot e Julia*”.

Appendice

Il paradosso riportato a pagina 5 (*esattezza*) è preso da Gabriele Lolli[ix]

Se il lato del quadrato è un numero della successione di Fibonacci e la decomposizione è fatta usando i due numeri precedenti della successione, la differenza tra l'area del quadrato e l'area del rettangolo ricostruito è 1 oppure -1. La dimostrazione è riportata in "QED" di Lolli.
La successione di Fibonacci è così definita: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$.
Se il lato del quadrato è a_n e il rettangolo ha base $a_{n+1}=(a_n+a_{n-1})$ e altezza a_{n-1}, allora

$$a_n^2 = a_{n+1}.a_{n-1} - (-1)^n = (a_n + a_{n-1}).a_{n-1} - (-1)^n .$$

(Lolli parte con $a_0=1$, $a_1=1$ e perciò nella formula precedente $(-1)^n$ *va sostituito da* $(-1)^{n-1}$.
Mostro adesso due figure che illustrano il paradosso di pagina 5 (n=6, a_n=8) e il caso di n dispari (n=5, a_n=5).

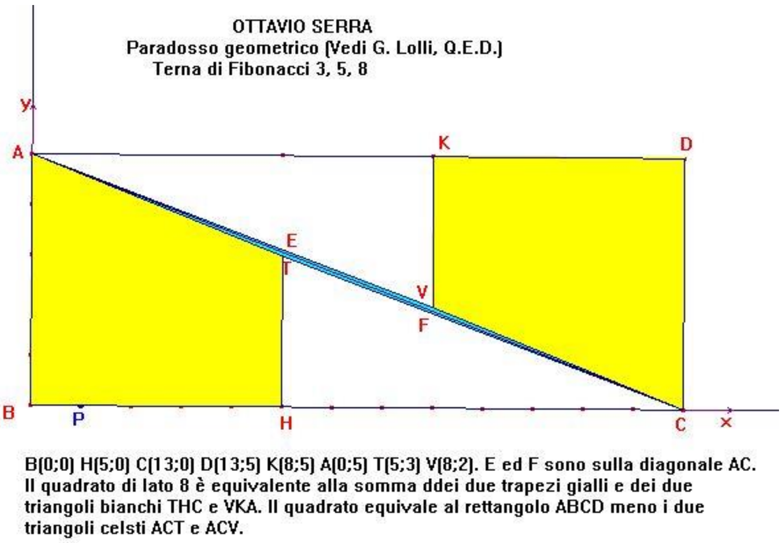


fig. 7

La fig. 8 illustra il caso di n dispari (n=5, a_n=5):

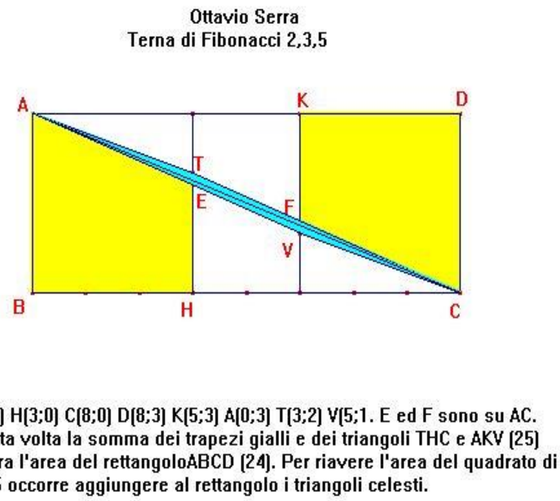


fig. 8

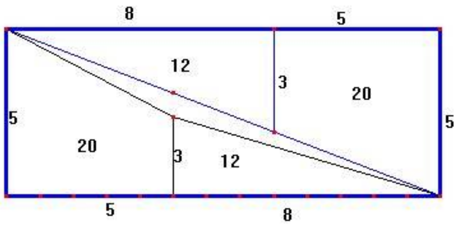


fig. 9

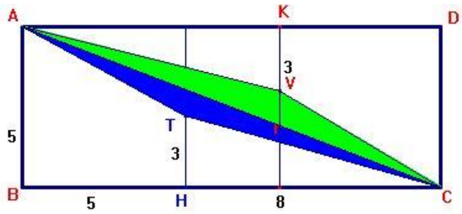


fig.10

In Lolli è riportata una figura esplicativa analoga alla fig. 9, ma essa non può essere corretta perché priva di simmetria tra la parte superiore e quella inferiore. La figura corretta è fig. 10 che mostra i due triangoli, ACT e ACV da togliere dal rettangolo ABCD per ottenere i pezzi del quadrato originario di lato 8 (Vedi pag. 5, fig. 2).

(La fig. 10 riporta in modo esagerato i triangoli che nella fig. 7 sono in scala).

La fig. 8 illustra il caso in cui il rettangolo è minore del quadrato e perciò i triangoli celesti vanno aggiunti al rettangolo per riottenere il quadrato di partenza. Si noti che i vertici T e V dei trapezi che nel caso di n pari ($n=6$, $a_6=8$) sono rispettivamente al di sotto e al di sopra della diagonale AC, nel caso di n dispari (nell'esempio di fig. 8, $n=5$, $a_5=5$) sono rispettivamente al di sopra e al di sotto.
Calcolate al volo l'area dei triangoli ACV e ACT sia nel caso della fig. 7 che della fig. 8. Controllate il risultato utilizzando il fatto che un poligono è determinato, se si conoscono le coordinate dei vertici in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (arbitrario).
Quanto varrebbe l'area di quei triangoli se la terna di numeri di Fibonacci utilizzati fosse 987, 1597, 2584? *Questo è facile*. Qual è l'indice n tale che $a_n=2584$? *Questo è complicato!*
Verificate che i segmenti TE e VF nel caso di fig. 7 sono uguali: era prevedibile? Sapreste giustificare senza calcoli che i corrispondenti segmenti di fig. 8 sono più lunghi? Calcolatene le lunghezze.
(*Tutte le figure sono state realizzate con "Cabri*", tranne l'albero binario e le immagini frattali generate con mio software).

---

[i] **Alan Sokal e JeanBricmont**: "Imposture intellettuali" *Quale deve essere il rapporto tra filosofia e scienza*, Garzanti 1999.

[ii] **Charles Snow**: "*Le due culture*", edizione italiana del 2005, Marsilio Editore.

[iii] **Robert Musil** (1880 – 1942): "I turbamenti del giovane Torless", gli Oscar di Mondadori, 1992.

[iv] **Cladio Bartocci** (a cura di): "Racconti matematici", Einaudi 2007.

[v] **Aristotele**, "***Organon***", Primi analitici, Libro I°, cap. 23. (Pag. 156 dell'edizione *Universale Laterza* del 1970 a cura di Giorgio Colli). Riporto il brano d'interesse:

In realtà, tutti coloro che sviluppano una prova mediante riduzione all'assurdo, da un lato deducono sillogisticamente una proposizione falsa, e dall'altra provano la conclusione - che da principio si è stabilito di dedurre - partendo da una ipotesi, quando cioè dall'assunzione della premessa contraddittoria a tale conclusione discende qualcosa di assurdo. **Una prova di questo tipo**, ad esempio, è quella che stabilisce **l'incommensurabilità della diagonale** (rispetto al lato del quadrato, si intende), fondandosi sul fatto che quando viene supposta la sua commensurabilità, **i numeri dispari risultano uguali ai numeri pari**. Orbene, da un lato, che i numeri dispari diventino eguali ai numeri pari, viene dedotto sillogisticamente, e d'altro lato, che la diagonale sia incommensurabile, viene provato con l'appoggio di un'ipotesi, in quanto dall'assunzione della premessa contraddittoria discende una proposizione falsa. Come infatti abbiamo visto, il ragionamento sillogistico mediante la riduzione all'assurdo consiste appunto in questo, cioè nel provare qualcosa di assurdo attraverso l'ipotesi iniziale.

[vi] **Note autobiografia di Einstein**, il famoso "Necrologio", in "Albert Einstein, scienziato e filosofo", raccolta di saggi di insigni fisici, matematici e filosofi a cura dii Paul Schilp, per festeggiare i 67 anni del sommo scienziato, pag. 28. Boringhieri, 1958.

[vii] **Digilander.libero.it/ottavioserra0** (cartella presentazioni).

[viii] Emilio Segré: "Personaggi e scoperte nella fisica contemporanea", Mondadori, 1976.

[ix] **Gabriele Lolli**, "QED" *fenomenologia della dimostrazione*, 2005, Bollati Boringhieri, pag. 138 e seguenti; e "Discorso sulla matematica", 2011, Bollati Boringhieri, pag. 134 e seguenti.